arXiv:2302.00329v2 [math.AG] 6 Sep 2023

射影化霍奇丛上的有效除子与模形式

GERARD VAN DER GEER 和 ALEXIS KOUVIDAKIS

Abstract. 我们利用曲线模空间上射影化霍奇丛中的有效除子，在曲线和阿贝尔簇的模空间上构造向量值模形式。循环关系确定了这些模形式的权。特别地，我们构造了亏格 2 和 3 的基本模形式。我们还讨论了双曲椭圆曲线模空间上的模形式。在这种情形下，相对典范丛是双曲椭圆曲线模空间上一个 $\mathbb{P}^1$丛上的线丛的拉回。我们将该线丛延拓到一个紧化上，使其推前与霍奇丛几乎相同，并据此构造模形式。在附录中，我们使用这一方法计算了由 Gheorghita-Tarasca 和 Korotkin-Sauvaget-Zograf 确定的对偶射影化 k-霍奇丛中的除子类。

1. Introduction

曲线模空间和阿贝尔簇模空间都自然带有一个向量丛，即霍奇丛 $\mathbb{E}$。从这个向量丛出发，可以通过施加舒尔函子构造其他自然的向量丛，例如 $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{E})$ 或 $\det(\mathbb{E})^{\otimes m}$。这类丛的截面称为模形式。例如，对于维数为 g 的主极化阿贝尔簇模空间 $\mathcal{A}_g$，它们是 Siegel 模形式；对于亏格为 g 的曲线模空间 $\mathcal{M}_g$，它们是 Teichm¨uller 模形式。如果舒尔函子对应于一个不可约表示 ρ，我们就称 $\mathbb{E}_\rho$ 的截面为权 ρ 的模形式。霍奇丛可以延拓到这类模空间的适当紧化上，而且在许多情形下，截面也会自动延拓到紧化上；例如，当 $g \geq 2$ 时，$\mathcal{A}_g$ 上的截面根据所谓的科赫原理便会自动延拓。

本文尝试以几何方式构造模形式。众所周知，在 $\mathcal{A}_g$ 上或在 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上，若 $g \geq 2$ 表示循环类 $m\lambda$，且 $\lambda = c_1(\det(\mathbb{E}))$ 与 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$，则可得到一个权为 m 的标量值模形式，也就是 $\det(\mathbb{E})^{\otimes m}$ 的一个截面。我们将利用射影化向量丛上的显式有效除子来构造向量值模形式。特别是，我们将以此方式构造某些在低亏格情形中发挥关键作用的模形式。

例如，在 $g = 2$ 的情形中，有模形式 $\chi_{6,\,8}$，它是 $\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E})\otimes\det(\mathbb{E})^{8,}$ 的一个截面，如 [4] 中所示。回顾一下，托雷利态射 $\mathcal{M}_2 \hookrightarrow \tilde{\mathcal{A}_2}$ 的像是稠密的，并且我们有标准紧化的等式 $\overline{\mathcal{M}}_2 = \mathcal{A}_2$。模空间 $\mathcal{M}_2$ 还有另一种描述，即作为一个栈商。这源于这样一个事实：在特征不为 2 的域 k 上，亏格为 2 的光滑完备曲线是 $\mathbb{P}^1$ 的一个在六个点处分歧的双覆盖，因此可以写作 $y^2 = f$，其中 f 是一个次数为 6 且判别式非零的多项式。将 f 写成齐次多项式

关于两个变量的齐次多项式，例如 $f \in \mathrm{Sym}^6(W)$，其中 W 是由 x_1、x_2 生成的 k-向量空间；注意到我们可以改变 W 的基，便得到 $\mathcal{M}_2$ 作为一个栈商的表示

$$\mathcal{M}_2 \sim [W^0_{6,-2}/\mathrm{GL}(W)],$$

其中，我们用 $W_{a,\,b}$ 表示 $\mathrm{GL}(W)$-表示 $\mathrm{Sym}^a(W) \otimes \det(W)^b$。这里的空间 $W_{6,\,-2}$ 可视为二元六次型 f 构成的向量空间，其上 $\mathrm{GL}(W)$ 的作用为

$$f(x_1, x_2) \mapsto (ad - bc)^{-2} f(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

对于矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2)$。子空间 $W^0_{6,\,-2}$ 是 $W_{6,\,-2}$ 中判别式非零的 f 所构成的空间。对 $\det(W)^{-2}$ 进行扭曲，是为了使一般 f 的稳定子正确，即为 $\pm\mathrm{Id}_W$。

在 [4] 中曾运用对二元六次型的不变量理论，基于对 $\mathcal{M}_2$ 的这一诠释构造 2 次向量值 Siegel 模形式，从而扩展并简化了 Igusa [17, 18] 对标量值 Siegel 模形式的不变量描述。协变式定义了向量值模形式，且 $\mathcal{A}_2$ 上的所有 2 次 Siegel 模形式均可用此方法构造。在 [4] 中证明，最基本的协变量——通用二元六次型——定义了一个权为 $(6, -2)$ 的亚纯 Siegel 模形式 $\chi_{6,\,-2}$，也就是说，它定义了 $\mathcal{A}_2$ 上 $\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^{-2}$ 的一个亚纯截面。将 $\chi_{6,\,-2}$ 乘以 Igusa 的尖点形式 χ_{10} 后，得到全纯模形式 $\chi_{6,\,8}$，即“第一个”2 次向量值 Siegel 模尖点形式。

在 $g = 3$ 的情形下，也有一个类似的形式 $\chi_{4,\,0,\,8}$，它是 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^8$ 的一个截面。这里，它源自将亏格三非超椭圆曲线的模空间 $\mathcal{M}_3^{nh}$ 描述为一个栈商

$$\mathcal{M}_3^{nh} \sim [W^0_{4,0,-1}/\mathrm{GL}(W)]\,,$$

其中 W 现在的维数为 3，而 $W^0_{4,\,0,\,-1} \subset \mathrm{Sym}^4(W) \otimes \det(W)^{-1}$ 表示定义光滑曲线的三元四次型。在 [5] 中，这一描述促成了一个亚纯 Teichm¨uller 模形式 $\chi_{4,\,0,\,-1}$ 的构造，其权为 $(4, 0, -1)$；还构造了一个（全纯）Siegel 模形式 $\chi_{4,\,0,\,8}$，其次数为 3，权为 $(4, 0, 8)$。同样在此情形下，亏格 3 的所有定义在 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 和 $\mathcal{A}_3$ 上的 Teichm¨uller 模形式与 Siegel 模形式，都可以通过不变量理论由这些形式构造出来。

本文源于以几何方式构造这些基本形式及类似形式的愿望。我们利用射影化 Hodge 丛上的有效除子（或几乎有效除子）的循环关系来构造这些形式。其依据是这样一个观察：射影化 Hodge 丛 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上具有循环类 D 的有效除子

$$[D] = [\mathcal{O}(j)] + k\,\lambda - \Delta$$

若其循环类为正整数 j、k 和 Δ 乘以一个有效边界类，则会产生一个截面 $\mathrm{Sym}^j(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^k$，它在边界除子上消失，也就是说，它是一个模形式。这种方法高效地构造出了次数为 2 和 3 的基本模形式 $\chi_{6,\,8}$ 和 $\chi_{4,\,0,\,8}$。

除子与模形式之间的这种联系也可以反向使用，从而得到射影化霍奇丛上除子的循环类。我们给出一些例子。

本文的另一个目标是构造亏格为 g 的超椭圆曲线模空间上的模形式。为此，我们采用模的两种描述：一种是栈商的描述，另一种是 Hurwitz 空间的描述。后一个空间 $\mathcal{H}_{g,\,2}$ 的紧化是空间 $\overline{\mathcal{H}}_{g,\,2}$，即亏格为 g 的可容许 2 次覆盖的空间。在栈描述中，模形式拉回后对应于 GL(2) 在次数为 $2g+2$ 的二元形式空间上的作用的协变式。

在 Hurwitz 空间的描述中，万有曲线在 $\mathcal{H}_{g,2}$ 上的相对典范丛可视为从平凡的 $\mathbb{P}^1$-丛 P over$\mathcal{H}_{g,2}$ 拉回的 $\mathcal{O}(g-1)$，并配有 $2g+2$ 个互不相交的截面。利用容许覆盖理论，P 紧化为一个空间 $\overline{P}$，它是以 $\overline{\mathcal{H}}_{g,2}$ 为底、纤维为带有 $2g+2$ 个标记点的有理稳定曲线的纤维化；我们证明，P 上的线丛 $\mathcal{O}(g-1)$ 可延拓为 $\overline{P}$ 上的线丛，且其推前到 $\overline{\mathcal{H}}_{g,2}$ 后与霍奇丛十分接近。由此我们可以在 $\overline{\mathcal{H}}_{g,2}$ 上构造模形式。

当我们考虑射影化丛时，射影化采用 Grothendieck 的约定，因此对于向量空间 V，射影空间 $\mathbb{P}(V)$ 参数化的是 V 中的超平面。

在附录中，我们应用本文所使用的方法，计算由 Gheorghita-Tarasca 和 Korotkin-Sauvaget-Zograf 确定的对偶射影化 k-霍奇丛中某些除子的类。

Acknowledgements

感谢 Fabien Cl´ery、Carel Faber、Gavril Farkas 以及审稿人提出的宝贵意见。

2. The Case of Genus Two

设 k 为一个特征不为 2 的域。我们考虑 k上亏格 2 曲线的模空间 $\mathcal{M}_2$。这是一个 Deligne-Mumford 栈，并且带有一个万有曲线π： $\mathcal{C}\to\mathcal{M}_2$，其亏格为 2。相对对偶化层 ω_π 是无基点的，因而定义了一个态射 φ： $\mathcal{C}\to\mathbb{P}(\mathbb{E})$。对于一条曲线 C，映射 φ： $C\to\mathbb{P}(\mathbb{E}_C)$ 将一点关联到在该点消失的微分空间。我们有一个交换图，其中 u 为自然态射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow{\scriptstyle u} \\ & & \mathcal{M}_2 \end{array}$$

我们将 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 记为 Deligne-Mumford 紧化，将 $\overline{\pi}$ 记为：$\overline{\mathcal{C}}\to\overline{\mathcal{M}}_2$ 相应的万有曲线。然而，$\omega_{\overline{\pi}}$ 的延拓 ω_π 并未定义态射 φ 到 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}$）的延拓，该延拓无法延伸到参数化可约曲线的边界分支 Δ_1。

我们考虑态射 φ的分歧除子 $D\subset\mathbb{P}(\mathbb{E})$。除子 D 在底空间 $\mathcal{M}_2$上的 $\mathbb{P}^1$-丛 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中的相对次数为 6。我们将 $\overline{D}$ 定义为闭包

D 在 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 上于 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中的闭包。在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 的有理皮卡群中，我们可以写成

$$[\overline{D}] = [\mathcal{O}(6)] + u^*(A)$$

其中 A 是 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 和 u 的有理皮卡群中的一个类： $\mathbb{P}(\mathbb{E}) \to \overline{\mathcal{M}}_2$ 自然投影。

我们希望用 $\overline{\mathcal{M}}_2$的 Picard 群的生成元 λ, δ_0 来表示 A 。我们用 λ表示 $\mathbb{E}$ 的第一陈类，并用 δ_1 （分别用 δ_0）表示栈 $\overline{\mathcal{M}}_2$的 Picard 群中 Δ_1 （分别为 Δ_0）的类；这里， Δ_0 是边界分支，它参数化带有一个重点的不可约曲线。

为此，我们延拓态射 φ。由于 ω_π 在扎里斯基开子集 Δ_0 上没有基点，因此该态射可延拓到该开子集上。然而，在 Δ_i 上，当 $i > 0$ 时，这个线性系有基点。接着，我们按照附录第18节所述进行基变换。基变换后，在 Δ_i 的一般点的开邻域 U_i 上，我们得到一个半稳定˜ ˜ ˜族。若底空间取为一维，就得到一个半稳定族 $f\colon\ \mathcal{C} \to B$，其中心纤维为一条链 $C' + R + C''$，其中 R是一个 (-2) 曲线，而 C'和 C''的亏格为 1。 φ的延拓 φ' 由 $\omega_{\tilde{f}}(-R)$ 给出，其中 $f_*(\omega_{\tilde{f}}(-R)) = \mathbb{E}_{\tilde{B}}$，而态射 $\varphi' : C \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$ 将 C' 和 C'' 收缩，并在 R上的次数为 2。详细内容请参阅附录第18节。态射 φ' 具有以下性质

$$\varphi'^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}_{\tilde{B}})}(1)) = \omega_{\tilde{f}}(-R)\,.$$

命题 2.1. 我们有 $[\overline{D}] = 6\,[\mathcal{O}(1)] + u^*(8\,\lambda - \delta_0 - \delta_1)$ 。

证明。我们写作 $[\overline{D}] = 6\,[\mathcal{O}(1)] + u^*(A)$。我们研究上述两类一维族 $f\colon\ C \to B$。态射 φ 在 D上分歧，因此 φ' 在 $\overline{D}$ 上分歧，并收缩 C' 和 C''。我们将分歧除子记为 S。于是我们得到（这里不严谨地用线丛和除子表示相应的除子类）

$$\omega_{\tilde{f}} = \varphi'^*\omega_u + S + 2\,(C' + C''), \quad \varphi'^*\overline{D}/2 = S + 3\,(C' + C'')\,,$$

其中，第一个等式由 C'的伴随公式 $\omega_{\tilde{f}} + C'_{|C'} = \mathcal{O}_{C'}$得出，对$C''$也同理；第二个等式则由 $C' \cdot \varphi'^*\overline{D} = 0 = C'' \cdot \varphi'^*\overline{D}$得出。因此

$$\begin{aligned}
\omega_{\tilde{f}} &= \varphi'^*(\omega_u + \overline{D}/2) - (C' + C'') \\
&= \varphi'^*(\mathcal{O}(-2) + u^*(\lambda) + \mathcal{O}(3) + u^*(A/2)) - (C' + C'') \\
&= \varphi'^*(\mathcal{O}(1) + u^*(\lambda + A/2)) - (C' + C'') \\
&= \omega_{\tilde{f}} - R + \tilde{f}^*(\lambda + A/2) - (C' + C'') \\
&= \omega_{\tilde{f}} + \tilde{f}^*(\lambda + A/2 - b_1)
\end{aligned}$$

˜，其中 B的特殊点为 b_1。这表明 $A = -2\,\lambda + 2\,b_1$。由于我们进行了基变换，故有 $2\,b_1 = \delta_1$，并得到 $A = -2\,\lambda + \delta_1$。现在使用著名关系 $10\,\lambda = \delta_0 + 2\,\delta_1$（见 [24]），于是得到 $A = -2\lambda + \delta_1 = 8\lambda - \delta_0 - \delta_1$。 □

R注记 2.2。我们在注记 13.5 中给出这一结果的另一种证明 .

现在有一条重要注记：$u_*(\mathcal{O}(1)) = \mathbb{E}$ 且 $u_*(\mathcal{O}(m)) =$ 对称幂$^m(\mathbb{E})$，其中 $m \geq 1$。除子 $\overline{D}$ 具有

$$[\overline{D}] = [\mathcal{O}(6)] + u^*(8\lambda - \delta_0 - \delta_1)$$

是 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上的一个有效除子。我们将 u_* 应用于 $\mathcal{O}(\overline{D})$ 的相应截面 1。由命题 2.1 可知，我们得到向量丛 $\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^8$ 在 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 上的一个正则截面 $\chi_{6,\,8}$。此外，该截面在除子 Δ_0 和 Δ_1 上消失。注意，~ ~托雷利映射延拓为一个同构 $\overline{\mathcal{M}}_2 \cong \mathcal{A}_2$，其目标是 $\mathcal{A}_2$ 的标准光滑紧化 $\mathcal{A}_2$。因此，我们的截面定义了一个权重 (6, 8) 的 Siegel 模形式 $\chi_{6,\,8}$，且它是一个尖点形式。

推论 2.3。设 $\overline{D}$ 是 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中万有曲线在 $\mathcal{M}_2$ 上的典范映射的分歧除子的闭包。推前 $u_*(s)$ 与 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上的 $\mathcal{O}(\overline{D})$ 的自然截面 1 一起，定义了一个 2 次、权重 (6,8) 的西格尔模尖点形式 $\chi_{6,\,8}$。

上面引用的关系 $10\,\lambda = \delta_0 + 2\,\delta_1$ 蕴含存在一个次数为 2、权为 10 的西格尔模尖点形式 χ_{10}，其除子为 $\delta_0 + 2\,\delta_1$。商 $\chi_{6,\,-2} := \chi_{6,\,8}/\chi_{10}$ 定义了一个亚纯截面 $\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E}) \otimes \det \mathbb{E}^{-2}$，它在 Δ_1 之外处处正则。

现在我们分析 δ_1 上 $\chi_{6,\,8}$ 和 $\chi_{6,\,-2}$ 的消失阶。将~$\overline{\mathcal{M}}_2$ 与 A_2 等同后，我们也用 $\mathcal{A}_{1,\,1}$ 表示 δ_1；它是椭圆曲线乘积的轨迹。

我们通过在局部底空间 B 上的一个族中进行局部分析来研究这些消失阶，其中中心纤维是边界除子 Δ_1 上的一般点 b_1。如前所述，由于典范系在边界除子 Δ_1 上曲线的节点处有基点，在 $\mathcal{M}_2$ 上定义的映射$\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$ 无法延拓到 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 上整个 $\overline{\mathcal{C}}$。另一方面，根据容许覆盖理论，上述映射 φ 的分歧除子可延拓为 $\overline{\mathcal{C}}$ 上的除子 S，且延拓避开上述节点轨迹。具体而言，在 $b_1 \in \Delta_1$ 上，纤维是结点曲线 C，由两条椭圆曲线 C_1 和 C_2 组成，它们在一点 p 相交。分歧除子在每个分支上的限制，都是该系统$|\mathcal{O}(2p)|$的三个分歧点之并（除 p 外）。因此，映射 φ 的延拓在分歧除子 S 上有定义。映射 φ 分别将 $C_1\backslash\{p\}$ 和 $C_2\backslash\{p\}$ 映到两个不同的点 p_1 和 p_2，它们定义如下。b_1 上的 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 的纤维可与 $\mathbb{P}(H^0(C, \omega_C))$ 等同。$H^0(C, \omega_C)$ 中的点具有形式 (s_1, s_2)，其中 s_i 是 $H^0(C_i, \mathcal{O}(p))$ 的一个截面。于是，点 p_1 对应于超平面 $\{(0, s_2)\ s_2 \in H^0(C_2, \mathcal{O}(p))\}$，而点 p_2 对应于超平面 $\{(s_1, 0)\ s_1 \in H^0(C_1, \mathcal{O}(p))\}$。

除子 $\overline{D}$，即分歧除子在延拓映射 φ 下的像，因而分裂为六个不可约分支，记为 $D_1, \ldots, D_6$。因此，在我们的局部底空间 B 上，族 $\mathbb{P}(\mathbb{E}) \to B$ 有六个局部截面 D_i $(i = 1, \ldots, 6)$。根据上述映射的延拓 φ 的描述，我们可以得出结论：D_1, D_2, D_3 经过 p_1，而 D_4, D_5, D_6 经过 p_2。

将截面 D_i 局部提升为 $\mathbb{E}$ 的截面 σ_i，并在 B 上为 $\mathbb{E}$ 选取一组基 e_1, e_2，使得 e_1 和 e_2 在 $z = 0$ 上的 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 纤维中确定 p_1 和 p_2，我们可以将 $\sigma_i = a_i e_1 + b_i e_2$ 写作 $i = 1, \ldots, 6$。于是，在 $z = 0$ 处，函数 b_1, b_2, b_3 和 a_4, a_5, a_6 均为零，而 $a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, b_6$ 均不为零。由于只需吹起一次即可将它们分离，

我们可以假设这些截面在 $z=0$ 处的一阶消失。根据构造，$\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E})\otimes\det(\mathbb{E})^{-2}$ 的截面 χ 在局部可表示为

$$\frac{\sigma_1\cdots\sigma_6}{z}\,.$$

我们可以将其写为 $\sigma_1\cdots\sigma_6$

$$\begin{aligned}&a_1\cdots a_6\,e_1^6+(a_1a_2a_3a_4a_5b_6+\ldots+b_1a_2a_3a_4a_5a_6)\,e_1^5e_2+\\&(a_1a_2a_3a_4b_5b_6+\ldots+b_1b_2a_3a_4a_5a_6)\,e_1^4e_2^2+\\&(a_1a_2a_3b_4b_5b_6+\ldots+b_1b_2b_3a_4a_5a_6)\,e_1^3e_2^3+\ldots+b_1\cdots b_6\,e_2^6\,.\end{aligned}$$

$z=0$ 处系数 $e_1^ie_2^{6-i}$ 的阶等于

$$\min_{\#\Lambda=i}(\#\Lambda^c\cap\{1,2,3\}+\#\Lambda\cap\{4,5,6\})$$

其中，Λ 遍历 $\{1,\ldots,6\}$ 的所有基数为 i 的子集，而 Λ^c 表示其补集。对于这些阶，我们得到 $i=0$ 的 (3, 2, 1, 0, 1, 2, 3)，因此对于由 $\sigma_1\cdots\sigma_6/z$ 给出的截面 χ，我们得到阶 (2, 1, 0, -1, 0, 1, 2)。

推论 2.4。在 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 上的 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上的线丛 $\mathcal{O}(\overline{D})$ 的截面 1 通过 $\mathbb{P}(\mathbb{E})\to\overline{\mathcal{M}}_2$ 向下推为亚纯模形式 $\chi_{6,\,-2}$，其定义于 $\overline{\mathcal{M}}_2=\mathcal{A}_2$ 上。$\chi_{6,\,-2}$ 的七个坐标沿着 $\mathcal{A}_{1,\,1}$ 在 $\mathcal{A}_2$ 中的阶为 (2,1,0, -1, 0,1,2)。

这些阶数与 [4] 的结果一致，其中 $\chi_{6,\,-2}$ 是通过不变量理论构造的，并利用模形式的性质确定了这些阶数。

另一种构造形式 $\chi_{6,\,8}$ 的方法，是在对偶丛中使用所谓的魏尔斯特拉斯除子 W：

$$W:=\{(C,\eta)\in\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee):\mathrm{div}(\eta)\text{ contains a Weierstrass point}\}$$

在 $\mathcal{M}_2$ 上。这里，C 表示一条亏格 2 的曲线，η 表示 C 上的一个微分形式。我们令 $\overline{W}$ 为 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 上 W 的闭包。于是有一个由 Gheorghita 给出的恒等式 [12, ，定理 1]

$$[\overline{W}]=6\,[\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1)]+34\,\lambda-3\,\delta_0-5\,\delta_1\,,$$

其中我们用 λ 和 δ_i 表示 λ 和 δ_i 在 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 上的拉回。现在，$\overline{W}$ 是一个有效除子，而截面 1 在 $\mathcal{O}(\overline{W})$ 下的推前是 $\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E}^\vee)\otimes\det(\mathbb{E})^{34}\otimes\mathcal{O}(-3\delta_0-5\delta_1)$ 的一个截面。对于 $g=2$，我们有 $\mathbb{E}^\vee\cong\mathbb{E}\otimes\det(\mathbb{E})^{-1}$，因此 $\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E}^\vee)\cong\mathrm{Sym}^6(\mathbb{E})\otimes\det(\mathbb{E})^{-6}$。这意味着在 $\mathbb{P}^1$ 丛的同构 $\mathbb{P}(\mathbb{E})\cong\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 下，该同构将 $[\overline{W}]$ 与 $[\overline{D}]$ 对应起来，于是我们在对偶丛中得到

$$[\overline{W}]=6\,[\mathcal{O}(1)]+28\,\lambda-3\,\delta_0-5\,\delta_1=6\,[\mathcal{O}(1)]+8\,\lambda-\delta_0-\delta_1\,.$$

通过推前，我们再次得到一个权重 (6, 8) 的形式，它在 δ_1 和 δ_0 上消失。除一个非零乘法常数外，这就是 $\chi_{6,\,8}$。

注 2.5. 恒等式 $[\overline{W}]=6\,[\mathcal{O}(1)]+28\,\lambda-3\,\delta_0-5\,\delta_1$ 意味着存在一个权重为 (6, 28) 的模形式，它在 Δ_0 上的重数为 3，在 Δ_1 上的重数为 5；但该模形式（相差一个乘法常数）就是 $\chi_{10}^2\,\chi_{6,8}$，其中 χ_{10} 是权重为 10、除子为 $\delta_0+2\delta_1$ 的模形式，它展示了关系 $10\,\lambda=\delta_0+2\delta_1$。

3. The class of the k-canonically embedded curve

为了计算 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中与万有曲线的典范像相关的有效除子的类，了解 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中典范像闭包的（部分）类会有所帮助。不费额外功夫，我们还可以并且将把计算推广到 $k \geq 1$ 的 k-典范嵌入曲线这一情形。

我们考虑万有族 $\pi : \overline{\mathcal{C}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$。它附带一个自然的向量丛 $\mathbb{E}_k = \pi_*(\omega_\pi^{\otimes k})$，对应于 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$；对于 $k = 1$，它就是霍奇丛 $\mathbb{E}_1 = \mathbb{E}$。我们将自然映射记为 $u : \mathbb{P}(\mathbb{E}_k) \to \overline{\mathcal{M}}_g$。对于 $k \geq 2$，层 $\omega_\pi^{\otimes k}$ 在稳定曲线上无基点，而满射 $\pi^*\mathbb{E}_k \to \omega_\pi^{\otimes k}$ 定义了一个态射 $\varphi_k : \overline{\mathcal{C}}_g \to \mathbb{P}(\mathbb{E}_k)$。对于 $k = 1$，层 ω_π 在 $\mathcal{M}_g \cup \Delta_0^0$ 上无基点，其中 $\Delta_0^0 \subset \Delta_0$ 是仅含分离节点的开轨迹；但它在位于边界分支 Δ_i 一般点上方的节点处有基点，对于 $i > 0$ 也是如此。附录第18节描述了 Δ_i 一般点的某个开邻域上像的闭包。

我们将 Γ_k 记作 $\varphi_k(\mathcal{C}_g)$ 在 $\mathcal{M}_g \cup \Delta_0^0$ 上的像，将 $\overline{\Gamma}_k$ 记作 Γ_k 在 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k)$ 上的闭包，其中 $\overline{\mathcal{M}}_g$。我们可以将 Γ_k 的类写成 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k)$ 上的一个循环：

$$[\overline{\Gamma}_k] = \sum_{i=0}^{r-2} h_k^i u^*(\beta_{r-2-i}), \tag{1}$$

其中 $r =$ 的秩为 $\mathbb{E}_k$，$h_k = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}_k)}(1))$，而 β_j 是 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上余维为 j 的循环。

命题 3.1。我们有 $\beta_0 = 2\,k(g-1)$ 和 $\beta_1 = k^2\kappa_1 - 2k(g-1)c_1(\mathbb{E}_k) - \epsilon$，其中对于 $k = 1$，有 $\epsilon = \sum_{i=1}^{[g/2]} \delta_i$；否则有 $\epsilon = 0$。

利用 $c_1(\mathbb{E}_k) = {}^{k}{}_{(k-1)}{}_{2}\kappa_1 + \lambda$ 以及 $\kappa_1 = 12\lambda - \sum_{i=0}^{[g/2]} \delta_i$（由 [23]），我们可以将 β_1 写成：

$$\beta_1 = \left((1-g)(12k^3 - 12k^2 + 2k) + 12\,k^2\right)\,\lambda + ((g-1)k - g)\,k^2 \sum_{i=0}^{[g/2]} \delta_i - \epsilon\,.$$

证明。我们先考虑情形 $k \geq 2$。在此情形下，$\overline{\Gamma}_k$ 是 $\overline{\mathcal{C}}_g$ 在 φ_k 下的像，且$\varphi_k^*(h_k) = k\,\omega_{\pi}$。由于一般纤维的像的次数为 $2k(g-1)$，我们得到 $\beta_0 =2k(g-1)$。超平面类 h_k 满足 $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i h_k^i c_{r-i}(\mathbb{E}_k) = 0$。由维数原因，对于 $i \leq r-2$，我们有 $u_*(h_k^i) = 0$，且 $u_*(h_k^{r-1}) = 1$。因此得到

$$u_*(\varphi_{k*}[1]h_k^2) = u_*\varphi_{k*}(k^2\omega_\pi^2) = k^2\pi_*(\omega_\pi^2) = k^2\,\kappa_1\,,$$

其中 $\pi_*(\omega_\pi^2) = \kappa_1$；另一方面，由 (1) 可知

$$u_*((\varphi_{k*}[1])h_k^2) = (u_*h_k^r)\beta_0 + (u_*h_k^{r-1})\beta_1 = 2k(g-1)\,c_1(\mathbb{E}_k) + \beta_1\,,$$

给出 $\beta_1 = k^2\kappa_1 - 2k(g-1)c_1(\mathbb{E}_k)$，由此便解决了情形 $k \geq 2$。只要我们在 $\mathcal{M}_g \cup \Delta_0^0$ 上工作，同样的论证也适用于 $k = 1$。为了求出 $i > 0$ 的 δ_i 的系数，我们在一维基底 B 上、曲线 Δ_i 的一般点的开邻域 U_i 内进行工作，其特殊纤维为 $C' + R + C''$；这与附录第18节中的情形相同，其中 φ 的延拓 φ' 由 $\omega_{\pi'}(-R)$ 定义。现在，δ_i 对 $2\beta_1$ 的贡献为 $\pi'_*(\omega(-R)^2)$，其中 β_1 的系数 2 源于 φ' 在 R 上的次数为 2。我们得到

$\pi'_*(\omega_{\pi'}(-R)^2) = \pi'_*(\omega_{\pi'}^2) + \pi'_*(R^2) = -2\,\delta_i - 2\,\delta_i = -4\,\delta_i$，因为纤维有两个奇点，且 $R^2 = -2$。将所有结果合并，便得到给定的公式。□

4. The Case of Genus Three

这里对特征没有限制。我们考虑域 k 上亏格为 3 的曲线的模堆 $\mathcal{M}_3$，以及万有曲线 $\pi:\ \mathcal{C} \to \mathcal{M}_3$。典范映射定义了一个态射 $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$，因此我们得到 $\mathcal{M}_3$ 上 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中的像除子 D。我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow u \\ & & \mathcal{M}_3 \end{array}$$

我们考虑 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中 D 的闭包 $\overline{D}$。一般曲线的典范像是一条四次曲线。因此，在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 的有理皮卡群中有关系 $[\overline{D}] = [\mathcal{O}(4)] + u^*(A)$，其中 A 是 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上的一个除子类，由命题 3.1 给出。

推论 4.1。我们有 $[\overline{D}] = [\mathcal{O}(4)] + u^*(8\,\lambda - \delta_0 - 2\,\delta_1)$。

除子 $\overline{D}$ 在 $\overline{\mathcal{M}}_3 - \Delta_1$上是有效的。由于关系式 $[\overline{D}] = [\mathcal{O}(4)] + u^*(8\,\lambda - \delta_0 - 2\,\delta_1)$，$\mathcal{O}(\overline{D})$的相应截面 1 在 u_*下映射为 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^8$ 的一个截面 ψ，该截面在 Δ_1 之外是正则的，并且在 Δ_0上消失。鉴于 Sym^4 和 8 中的偶次幂，该截面 ψ 在 $\mathbb{E}$的纤维上对 -1 的作用不变量。由于 -1 的作用定义了栈 $\mathcal{M}_3 \to \mathcal{A}_3$的双覆盖的对合，该截面 ψ 下降为 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E})\otimes\det(\mathbb{E})^8$ 的一个截面 χ_4,0,8；它位于 $\overline{\mathcal{M}}_3 - \Delta_1$ 在托雷利态射 $\overline{\mathcal{M}}_3 \to \mathcal{A}_3$下的像上，其中 $\mathcal{A}_3$ 是 $\mathcal{A}_3$的标准第二沃罗诺伊紧化 $\tilde{}$。由于 Δ_1 在 $\mathcal{A}_3$ 中的像的余维为 2，截面 χ_4,0,8 延拓为 $\mathcal{A}_3$上的 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^8$ 的正则截面；随后根据科赫原理，它$\tilde{}$延拓到 $\mathcal{A}_3$。因此，它定义了一个 3 次、权为 (4, 0, 8) 的正则西格尔模尖点形式χ_4,0,8。

推论 4.2. 令 $\overline{D}$ 为 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上 $\mathcal{M}_3$ 的典范曲线的闭包，令 s 为 $\mathcal{O}(\overline{D})$ 的自然截面 1。那么 $\chi_{4,\,0,\,8} = u_*(s)$ 是一个 Teichm¨uller 模形式，并下降为一个 3 次、权为 (4,0,8) 的西格尔模尖点形式。

双曲线轨迹 $\overline{\mathcal{H}}_3$ 在 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 中的类 $\mathfrak{H}$ 满足 ([14, p. 140])

$$\mathfrak{h} = 9\,\lambda - \delta_0 - 3\,\delta_1\,. \tag{2}$$

关系式 (2) 表明，$\overline{\mathcal{M}}_3$ 上存在一个权为 9 的标量值 Teichm¨uller 模形式 χ_9。它的平方在 $\mathbb{E}$ 的纤维上对 -1 的作用保持不变，因此下降为一个权为 18 的 Siegel 模形式。除一个乘法常数外，这就是 Igusa 的模形式 χ_{18}。

将 $\chi_{4,\,0,\,8}$ 除以 χ_9，我们得到 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上的 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^{-1}$ 的亚纯截面，该截面在 $\mathcal{M}_3$ 上除双曲线轨迹外处处正则。利用不变量理论，[5] 使用此形式构造了 Teichm¨uller 模形式和 Siegel 模形式。

5. Moduli of hyperelliptic curves as a stack quotient

本节讨论双曲椭圆曲线模空间的栈商描述。我们考虑特征不为 2 的超椭圆曲线。亏格为 g 的超椭圆曲线是一个次数为 2 的态射 $\alpha : C \to \mathbb{P}^1$，其中 C 是亏格为 g的光滑曲线。两个超椭圆曲线之间的态射 a: $\alpha \to \alpha'$ 是一个交换图

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C' \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

亏格为 g 的超椭圆曲线 C 可写为 $y^2 = f(x)$，其中 $f \in \mathbb{C}[x]$ 的次数为 $2g+2$。事实上，选取 x_1 的一组基（x_2），便可定义态射 α。令 $W = \langle x_1, x_2 \rangle$ 为一个向量空间（定义在我们的代数闭基域上），其维数为 2，并令 $L = \alpha^*(O_{\mathbb{P}^1}(1))$。由黎曼-罗赫定理可知，$\dim H^0(C, L^{g+1}) = g+3$，而 $\dim \mathrm{Sym}^{g+1}(W) = g+2$，因此存在非零元素 $y \in H^0(C, L^{g+1})$，它在对应于 α 的对合下是反不变的。$H^0(C, L^{g+1})$ 的反不变子空间维数为 1。于是 y^2 是不变量，且属于 $\mathrm{Sym}^{2g+2}(W)$。由此得到方程 $y^2 = f(x_1, x_2)$，其中 f 是次数为 $2g+2$ 的齐次多项式，且判别式非零。

这里我们做了两项选择：选择 $H^0(C, L^{g+1})^{(-1)}$ 的一个生成元 y，该空间的维数为 1；以及选择 W 的一组基。我们可以改变 y 的选择（乘以一个非零标量），也可以通过 $\gamma = (a, b;\ c, d) \in \mathrm{GL}(W)$ 改变 W 的基。$\mathrm{GL}(W)$ 的作用在右侧定义为

$$f(x_1, x_2) \mapsto f(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)\,.$$

若令 $\mathrm{GL}(W)$ 通过行列式的某个幂作用于 y，则该作用保持方程的类型不变。在非齐次形式下，$\mathrm{GL}(W)$ 的作用为

$$f \mapsto f(\frac{ax+b}{cx+d}), \quad y \mapsto y/(cx+d)^{g+1}\,,$$

对方程产生如下影响:

$$y^2 = f(x) \mapsto y^2 = (cx+d)^{2g+2} f(\frac{ax+b}{cx+d})\,.$$

最后一个表达式p在右 g端可以写成二元齐次形式 y 次数为 g2 的 $g+2$.

一般 $f \in$ 对称幂$^{2g+2}(W)$ 的稳定子为 μ_{2g+2}，即阶数整除$2g+2$的单位根。由于我们希望一般元素的稳定子阶数为 2，因此考虑一种扭曲作用：定义 $\mathrm{GL}(W)$-表示

$$W_{a,b} = \mathrm{Sym}^a(W) \otimes \det(W)^{\otimes b}\,.$$

作为向量空间，这可以识别为对称幂$^a(W)$，但 $\mathrm{GL}(W)$ 的作用有所不同。在这个空间 $W_{a,\ b}$ 我们有开子空间 $W^0_{a,\ b}$ 其中包含次数为 a 且判别式非零的齐次多项式。现在我们区分两种情形。

情形 1。 g 偶数。这里我们考虑栈商

$$[W^0_{2g+2,-g}/\mathrm{GL}(W)]\,.$$

这个栈商可识别为亏格为 g 的超椭圆曲线的模堆 $\mathcal{H}_g$，其中 g 为偶数。事实上，$t\cdot \mathrm{Id}_W$ 的作用（在非齐次方程上）为

$$f \mapsto t^{-2g} f, \quad y \mapsto y/t^{g+1},$$

因此，$y^2 = f$ 映射到 $y^2 = t^2 f$，所以稳定子为 μ_2，正如所要求的那样。另请注意，$-1 \in \mathrm{GL}(W)$ 的作用是通过 $y \mapsto -y$ 进行的，因此 y 是一个奇元素。$H^0(C, \Omega_C^1)$ 的一个基为

$$x^i dx/y, \quad (i = 0, \dots, g-1).$$

dx 上的作用是通过 $(ad-bc)dx/(cx+d)^2$ 进行的，从而在微分空间上的作用为

$$x^i dx/y \mapsto (ad-bc)(cx+d)^{g-1-i}(ax+b)^i \, dx/y.$$

如果忽略 y 上的扭曲作用，我们可以将 $H^0(C, \Omega_C^1)$ 识别为 $W_{g-1,\,1}$。但是，y^2 必须被视为 $W_{2g+2,\,-g}$ 中的一个元素，因此 $t\,1_W$ 在 y 上的作用应通过 $t^{-g} = \det^{-g/2}$ 进行扭曲。于是得到

$$H^0(C, \Omega_C^1) \cong W_{g-1,(2-g)/2} \quad \text{for } g \text{ even}.$$

我们看到，在识别 $h\colon [W^0_{g+2,-g}/\mathrm{GL}(W)] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_g$ 下，霍奇丛 $\mathbb{E}$ 的拉回 $h^*(\mathbb{E})$ 是等变丛 $W_{g-1,\,(2-g)/2}$。-1_W 的作用通过 -1 在 $W_{g-1,\,(2-g)/2}$ 上进行。我们还注意到 $h^*(\det(\mathbb{E})) = \det(W)^{g/2}$。

情形 2。g 奇数。这里我们取 $W_{2g+2,\,-g+1}$。

备注 5.1。如果我们考虑 $W_{2g+2,\,r}$ 那么 r 必须为偶数，因为如上所述，我们稍后将 y^2 视为 $W_{2g+2,\,r}$ 的一个元素，并且需要 y 上由 $\det^{r/2}$ 给出的作用。

这里，一般元素的稳定子为 μ_4。现在，在非齐次方程上，作用为

$$f \mapsto t^{-2g+2} f, \quad y \mapsto y/t^{g+1},$$

因此 $y^2 = f$ 映射到 $y^2 = t^4 f$。注意，在这里 -1_W 通过 $f \mapsto f$ 和 $y \mapsto y$ 作用。但 $\sqrt{-1}_W$ 通过 $f \mapsto f$ 和 $y \mapsto -y$ 作用。为了得到一般元素的稳定子阶为 2 的正确的栈商，我们取

$$[W^0_{2g+2,1-g}/(\mathrm{GL}(W)/(\pm 1_W))].$$

对微分 $x^i dx/y$（其中 $i = 0$，……，$g-1$）的作用为

$$x^i dx/y \mapsto (ad-bc)^{(1-g)/2}(cx+d)^{g-1-i}(ax+b)^i \, dx/y,$$

因此，在不进行扭曲的情况下，我们得到 $H^0(C, \Omega_C^1) = W_{g,\,1}$。由于我们将 y^2 视为 $W_{g+3,\,1-g}$ 的元素，在 h 下：$[W^0_{2g+2,1-g}/(\mathrm{GL}(W)/(\pm 1_W))] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_g$，我们得到 $h^*(\mathbb{E}) = W_{g-1,\,(3-g)/2}$。元素 $\sqrt{-1}\,1_W$ 对微分的作用为 $(-1)^{(3-g)/2}(\sqrt{-1})^{g-1} = -1$。

我们总结如下。

命题 5.2。记 $W_{a,\,b}$ = 对称幂$^a(W) \otimes$ 行列式$(W)^b$，我们得到代数栈的如下刻画

$$h^{-1} : \mathcal{H}_g \xrightarrow{\sim} \begin{cases} [W^0_{2g+2,-g}/\mathrm{GL}(W)] & g \quad \text{even} \\ [W^0_{2g+2,1-g}/(\mathrm{GL}(W)/(\pm 1_W))] & g \quad \text{odd}, \end{cases}$$

and

$$h^*(\mathbb{E}) \cong \begin{cases} W_{g-1,(2-g)/2} & g \quad \text{even} \\ W_{g-1,(3-g)/2} & g \quad \text{odd}, \end{cases} \qquad h^*(\det(\mathbb{E})) = \begin{cases} \det(W)^{g/2} & g \quad \text{even} \\ \det(W)^g & g \quad \text{odd}. \end{cases}$$

关于一种略有不同的描述，参见 [2, 推论 4.7，第 654] 页。

回顾，模堆 $\mathcal{H}_g$ 的紧化是模堆 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 中 $\mathcal{H}_g$ 的闭包 $\overline{\mathcal{H}}_g$。根据 [2]， $\mathcal{H}_g$ 的 Picard 群是有限循环群；当 g 为偶数时，其阶为 $4g+2$ 的 $g \geq 2$，否则为 $8g+4$。Cornalba（见 [7]）已知， $\overline{\mathcal{H}}_g$ 的有理皮卡群是秩为 g 的自由阿贝尔群，由类 δ_i 和 ζ_j（其中 $i = 0$，……， $\lfloor g/2 \rfloor$ 和 $j = 1$，$\ldots \lfloor (g-1)/2 \rfloor$）生成。Cornalba 还给出了霍奇丛 $\mathbb{E}$ 在 $\overline{\mathcal{H}}_g$ 上的第一陈类 λ

$$(8g+4)\,\lambda = g\,\delta_0 + 4\sum_{i=1}^{\lfloor g/2 \rfloor} i(g-i)\,\delta_i + 2\sum_{i=1}^{\lfloor (g-1)/2 \rfloor} (i+1)(g-i)\,\zeta_i\,,$$

其中，除子 ζ_i 的一般点有一个容许模型 $C' \cup C''$，其两个节点 $C' \cap C'' = \{p, q\}$ 映到两个 $\mathbb{P}^1$ 的并，其中 C' 上有 $2i+2$ 个标记点，见第 7 节图 1。

6. Modular forms on the hyperelliptic locus of genus three

令 $\mathbb{E}$ 为 $\overline{\mathcal{H}}_3$上的霍奇丛。我们将 $\overline{\mathcal{H}}_3$ 上权为 k 的模形式定义为 $\det(\mathbb{E})^{\otimes k}$的一个截面。前一节的构造表明，将 $\overline{\mathcal{H}}_3$上权为 k的模形式拉回到栈 $[W^0_{2,0}/(\mathrm{GL}(W)/\pm \mathrm{id}_W)]$ 后，会得到一个次数为 $3k/2$的不变量。实际上，它定义了一个 $\det(W)^{3k}$ 的等变丛的截面，该截面在 $\mathrm{SL}(W)$下保持不变；但鉴于我们要对 $\mathrm{GL}(W)/(\pm\mathrm{id}_W)$的作用取商，因此得到的是一个次数为 $3k/2$的不变量。

令 $M_k(\Gamma_3) = H^0(\mathcal{A}_3, \det(\mathbb{E})^k)$为 $\Gamma_3 = \mathrm{Sp}(6,\mathbb{Z})$上 3 次的 Siegel 模形式空间。在 [19] 中，Igusa 考虑了一个正合列

$$0 \to M_{k-18}(\Gamma_3) \xrightarrow{\cdot\chi_{18}} M_k(\Gamma_3) \to I_{3k/2}(2,8)$$

其中 $I_d(2,8)$ 是次数为 d 的二元八次形式不变量向量空间。我们可以用以下方式解读 Igusa 的序列：权为 k 的 Siegel 模形式经限制到双曲线轨迹后，定义了一个权为 k 的模形式于 $\overline{\mathcal{H}}_3$ 上，因此它定义了一个次数为 $3k/2$ 的不变量。

对于 GL(3) 的每个不可约表示 ρ，我们都有一个向量丛 $\mathbb{E}_\rho$，它由 $\mathbb{E}$ 经舒尔函子构造而成。我们所说的 $\overline{\mathcal{H}}_3$ 上权为 ρ 的模形式，是指向量丛 $\mathbb{E}_\rho$ 的一个截面。我们可以拉回到栈 $[W^0_{8,-2}/(\mathrm{GL}(W)/\pm\mathrm{id}_W)],$，但情况更加复杂，因为 $\mathrm{Sym}^n(\mathrm{Sym}^2(W))$ 作为 $\mathrm{GL}(W)$ 的表示可以分解。例如，我们有 $W_{a,\,b} = \mathrm{Sym}^a(W) \otimes \det(W)^b$

$$h^*(\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E})) = \mathrm{Sym}^4(\mathrm{Sym}^2(W)) = W_{8,0} \oplus W_{4,2} \oplus W_{0,4}\,.$$

此处及本节余下部分，我们假设特征为 0，或不为 2，且足够大，使表示论（复合运算）能够适用[1]。在这种情形下，我们可以将 Siegel 模形式$\chi_{4,\,0,\,8}$ 限制到双曲线轨迹上，并且根据 [5, 引理 7.7]，我们知道它不恒等于零。另一方面，我们有基本协变量 $f_{8,\,-2}$，即栈$[W^0_{8,-2}/(\mathrm{GL}(W)/\pm\mathrm{id}_W)]$上的 $W_{8,\,-2}$ 的对角截面。

二元八次形式的判别式形式 $\mathfrak{d}$ 是一个次数为 14 的不变量，并不定义模形式，但它的三次方 $\mathfrak{d}^3$ 可以。它定义了一个权为 28 的模形式，见[27, 第 811] 页，另见注 13.1。

通过投影 $p_{8,\,0}$：对称幂 $\mathrm{Sym}^4(\mathrm{Sym}^2(W)) \to W_{8,\,0}$，$\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^8$ 的一个截面定义了一个关于 $\mathrm{GL}(W)$ 作用的双次数为 $(8, 24/2) = (8, 12)$ 的协变量。

命题 6.1。截面 $\chi_{4,\,0,\,8}$ 在双曲线轨迹上的限制，经由投影 $p_{8,\,0}$ 对应于协变量 $f_{8,\,-2}\cdot\mathfrak{d}$ 的一个倍数，其中 $\mathfrak{d}$ 是二元八次形式的判别式。

证明。通过限制并投影，我们得到一个双次数为 (8, 12) 的协变量。这个协变量可被判别式整除，并且在光滑超椭圆曲线的轨迹上不消失。因此，除以 $\mathfrak{d}$ 后可得到一个双次数为 $(8, -2)$ 的非零协变量。考虑到 $\det(W)^{-2}$ 的“扭曲”，它必定是泛二元八次形式的一个倍数。□

我们将在引理 14.3 中稍后讨论另外两个投影。注意，定义 $\chi_{4,\,0,\,8}$ 的除子D，即万有曲线在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中的典范像，在光滑超椭圆曲线轨迹上的限制可被 2 整除。事实上，超椭圆曲线的典范像是一条双圆锥曲线。这表明，我们可以对 $\chi_{4,\,0,\,8}$ 在双曲线轨迹上的限制取“平方根”。然而，边界除子阻碍了这一点。如果我们取模空间的层结构覆盖，就可以构造一个权为 (2, 0, 4) 的模形式。我们将在稍后（推论 13.4 中）完成这一构造，具体是在下一节将要介绍的 Hurwitz 空间上进行。

7. The Hurwitz space of admissible covers of degree two

在本节及接下来的各节中，我们将使用超椭圆曲线的模的另一种描述，即 $\overline{\mathcal{H}}_{g,\,2}$ 的 2 次、亏格为g 的容许覆盖的模空间，按照 [16], 的定义，见 [15]。因此，我们考察覆盖 $f\colon C \to P$，其次数为 2，C 为亏格 g 的节点曲线，而 P 是一条稳定的、带有 b 个标记点的 0 亏格曲线。这里的 $b = 2g+2$ 个分支点带有顺序，并且 $\mathcal{H}_{g,\,2} \to \mathcal{H}_g$ 是一个伽罗瓦覆盖，其伽罗瓦群为对称群 $\mathfrak{S}_{2g+2}$。

边界 $\overline{\mathcal{H}}_{g,\,2} - \mathcal{H}_{g,\,2}$ 由有限个除子组成，我们将其记为$\Delta^\Lambda_b = \Delta^\Lambda$；若 g 明确，则省略指标 b。这里，指标 Λ 定义了一个划分$\{1, 2, \ldots, b\} = \Lambda \sqcup \Lambda^c$，而 Δ^Λ 的一般点对应一个容许覆盖，它映射到一条亏格为 0 的稳定曲线；该曲线由两份曲线 C $\mathbb{P}^1$组成，其中一份包含

[1]或者也可以像 [1, 3 中那样使用除幂。1]

标记位于 Λ 的点，另一份包含标记位于 Λ^c 的点。这里我们假设 $\#\Lambda = j$ 满足 $2 \le j \le g+1$。

$\#\Lambda$ 的奇偶性在此处起着重要作用。如果 $\#\Lambda = 2i+2$ 为偶数，那么与 Δ^Λ 中一点对应的一般容许覆盖由 $C_i \cup C_{g-i-1}$ 组成，它是两条有理曲线 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 的并的双覆盖，其中 C_i 位于 $\mathbb{P}_1$ 上方，而 C_{g-i-1} 位于 $\mathbb{P}_2$ 上方。此处 C_i（分别为 C_{g-i-1}）的亏格为 i（分别为 $g-i-1$），且有 $0 \le i \le (g-1)/2$，并在 Λ（分别为 Λ^c）的点处分歧。

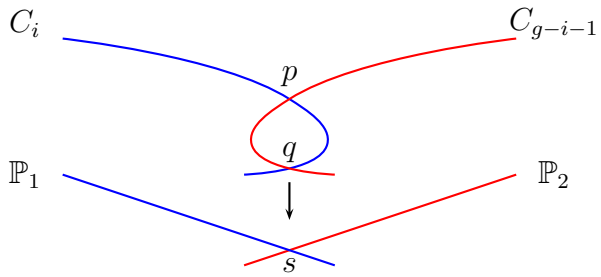


Fig. 1: Λ even

如果 $\#\Lambda = 2i+1$ 为奇数且有 $1 \le i \le g/2$，那么我们有一个位于 $\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ 上方的并 $C_i \cup C_{g-i}$，其中亏格为 i（分别为 $g-i$）的 C_i（分别为 C_{g-i}）在 Λ 处以及在 p 中分歧；p 是 C_i 与 C_{g-i} 的交点（分别在 Λ^c 处以及在 p 中分歧）。注意，p 是一个简单节点。

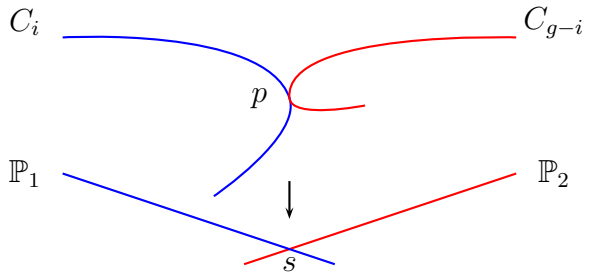


Fig. 2: Λ odd

假设 g 和 $b = 2g+2$ 固定，我们将记

$$\Delta_j = \sum_{\#\Lambda = j} \Delta^\Lambda \qquad \text{with } 2 \le j < b/2$$

并在对称情形中乘以因子 $1/2$，即 $\Delta_{b/2} = \frac{1}{2}\sum_{\#\Lambda = b/2} \Delta^\Lambda$。

8. Divisors on the moduli of stable curves of genus zero

为后续使用，我们回顾模空间 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ 上除子的一些记号和事实。参见 [20]。$\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ 上的边界除子记为 S_n^Λ，并由将 $\{1,\dots,n\} = \Lambda \sqcup \Lambda^c$ 划分为两个不相交集合的划分来索引，其中 $2 \le \#\Lambda \le n-2$，且我们有 $S_n^\Lambda = S_n^{\Lambda^c}$。通过自然映射 $\pi_{n+1} : \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,n}$，我们可以将 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$视为万有曲线，而 π_{n+1} 有 n 个截面。S_n^Λ 的一般点对应于

一条具有两个有理分支的稳定曲线，其中一个分支包含由 Λ 标记的点。对于 π_{n+1} 的拉回，我们有如下关系

$$\pi_{n+1}^*(S_n^\Lambda) = S_{n+1}^{\{\Lambda,n+1\}} \cup S_{n+1}^{\{\Lambda^c,n+1\}}.$$

n 截面 of π_{n+1} 的像为 $S_{n+1}^{\{i,n+1\}}$，其中 $i = 1, \ldots, n$。

我们可以通过以下方式收集 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ 上的这些边界除子：

$$T_{n+1,j} = \sum_{\#\Lambda=j} S_{n+1}^{\{\Lambda,n+1\}}, \quad T_{n+1,j}^c = \sum_{\#\Lambda=j} S_{n+1}^{\{\Lambda^c,n+1\}},$$

按照约定，鉴于对称性，对于偶数 n，我们乘以因子 $1/2$，并且$j = n/2$

$$T_{n+1,n/2} = \frac{1}{2} \sum_{\#\Lambda=n/2} S_{n+1}^{\{\Lambda,n+1\}}, \quad T_{n+1,n/2}^c = \frac{1}{2} \sum_{\#\Lambda=n/2} S_{n+1}^{\{\Lambda^c,n+1\}}.$$

稍后，给定固定指标 k 时，我们将这些除子拆分为 $T = T(k^+) + T(k^-)$，其中 (k^+)（分别为 (k^-)）表示求和遍历包含 k（分别不包含 k）的 Λ。因此 $T_{n+1,j}(k^+) = \sum_{\#\Lambda=j,\ k\in\Lambda} S_{n+1}^{\{\Lambda,n+1\}}$（若 $j = n/2$，则乘以因子 $1/2$）。

9. 一个良好的模型

现在我们将使用 $\overline{\mathcal{H}}_{g,2}$ 上普适可容许覆盖的一个“良好模型”。该模型在 [11, 第 4] 节中构造。我们从以下观察开始：~空间 $\overline{\mathcal{H}}_{g,2}$ 并非正规，因此我们对其进行正规化。所得的 $\mathcal{H}_{g,2}$ 如今是一个光滑~ ~栈，其上有一条万有曲线 $\mathcal{C} \to \mathcal{H}_{g,2}$。

~我们有一个自然映射 $h : \mathcal{H}_{g,2} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,b}$，其中 $b = 2g + 2$，且万有曲线现在纳入以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{\mathcal{C}} & \xrightarrow{c} & \overline{\mathcal{M}}_{0,b+1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varpi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{b+1}} \\ \overline{\mathcal{H}}_{g,2} & \xleftarrow{\nu} & \widetilde{\mathcal{H}}_{g,2} & \xrightarrow{h} & \overline{\mathcal{M}}_{0,b} \end{array}$$

我们可以通过取 $\overline{\mathcal{M}}_{0,b+1}$ 与 $\mathcal{H}_{g,2}$ 在 $\overline{\mathcal{M}}_{0,b}$ 上的纤维积 $\mathbb{P}$，构造一个延拓相对典范态射 $\mathcal{C} \to_\sim^{\mathbb{P}^1_{\mathcal{H}_{g,2}}}$ 的适当平坦映射，从而得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{P} & \xrightarrow{c'} & \overline{\mathcal{M}}_{0,b+1} \\ & \searrow^{\varpi} & \downarrow{\scriptstyle \varpi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{b+1}} \\ & & \widetilde{\mathcal{H}}_{g,2} & \xrightarrow{h} & \overline{\mathcal{M}}_{0,b} \end{array}$$

所得空间 $\mathbb{P}$ 并非光滑，但具有有理奇点。以~ ~最小方式消解这些奇点，可得到一个模型 $\mathbb{P}$；对 Y 正规化 Y 进行消解，

~ ~上 $\mathbb{P}$与 $\mathcal{C}$ 的纤维积，再取其在 $\mathbb{P}$ 上的纤维积，最终得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Y} & \xrightarrow{f} & \widetilde{\mathbb{P}} & & \\ & \searrow^{t} & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ & & B & \xrightarrow{\beta} & \widetilde{\mathcal{H}}_{g,2} \end{array} \tag{3}$$

~其中， B 是我们的底空间 $\mathcal{H}_{g,\,2}$ 或映射到该底空间的任何其他底空间。我们将所得的~态射 $\mathbb{P} \to B$记为 π，将自然映射 $B \to \overline{\mathcal{M}}_{0,\,b}$ 记为 h，并将 $B \to \overline{\mathcal{H}}_{g,\,2}$记为 ν。更多详情请参见[11, 第 4] 节。

接下来，我们假设有一个位于底空间 B上的物理族。我们将滥用记号 Δ^{Λ}，表示除子 Δ^{Λ} 在 ν 下的拉回：$B \to \overline{\mathcal{H}}_{g,\,2}$。

当 #Λ 为偶数时，设 $\#\Lambda = 2i+2$，其中 $0 \le i \le (g-1)/2$，则Δ^{Λ} 的拉回分解为

$$\pi^*(\Delta^{\Lambda}) = \Pi^{\Lambda} + \Pi^{\Lambda^c},$$

对应于 π的一般纤维的两个分支，其中 Π^{Λ} 在$\widetilde{\mathbb{P}} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,\,b+1}$下映射到 $S_{b+1}^{\{\Lambda, b+1\}}$，而 Π^{Λ^c} 同样映射到 $S_{b+1}^{\{\Lambda^c, b+1\}}$。注意，我们用 $\le g+1$限制 #Λ，因此记号 Π^{Λ} 不应造成混淆。

当 #Λ 为奇数时，我们得到类似的分解

$$\pi^*(\Delta^{\Lambda}) = \Pi^{\Lambda} + R^{\Lambda} + \Pi^{\Lambda^c},$$

这对应于 π 的一般纤维有三个分支这一事实，其中一个来自吹起。

我们注意到

$$h^*(S_b^{\Lambda}) = \begin{cases} \Delta^{\Lambda} & \#\Lambda \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2) \\ 2\,\Delta^{\Lambda} & \#\Lambda \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2) \end{cases}$$

若采用记号 $\Delta_j = \sum_{\#\Lambda = j} \Delta^{\Lambda}$，则对于典范类 $\lambda = c_1(\mathbb{E})$ 和 $h^*(\psi_k)$（简记为 ψ_k），其定义为线丛的第一陈类，而该线丛由带标记点的曲线 $(k = 1, \ldots, b)$ 上第 k 个点处的余切空间给出，我们在底空间 B 上得到以下公式（见 [10]）

$$\lambda = \sum_{i=0}^{(g-1)/2} \frac{(i+1)(g-i)}{2(2g+1)} \Delta_{2i+2} + \sum_{i=1}^{g/2} \frac{i(g-i)}{2g+1} \Delta_{2i+1} \tag{4}$$

and

$$\begin{aligned} \psi_k = & \sum_{i=0}^{(g-1)/2} \left(\frac{(g-i)(2g-2i-1)}{g(2g+1)} \Delta_{2i+2}(k^+) + \frac{(i+1)(2i+1)}{g(2g+1)} \Delta_{2i+2}(k^-) \right) \\ & + 2 \sum_{i=1}^{g/2} \left(\frac{(g-i)(2g-2i+1)}{g(2g+1)} \Delta_{2i+1}(k^+) + \frac{i(2i+1)}{g(2g+1)} \Delta_{2i+1}(k^-) \right) \end{aligned} \tag{5}$$

其中，我们用记号 (k^+)（分别用 (k^-)）表示上述条件 $k \in \Lambda$（分别为 $k \notin \Lambda$）。关系式 (4) 推出如下结论。

推论 9.1. 存在一个定义在~模空间 $\mathcal{H}_{g,\ 2}$ 上的权为 2(2g + 1) 的标量值模形式，其除子是边界除子的并。它下降到双曲线轨迹 $\overline{\mathcal{H}}_g$ ，并对应于次数为 $2g+2$ 的二元形式的判别式的某个幂。

10. Extending the linear system

超椭圆曲线上的典范系由射影直线上次数为 $g-1$ 的 $\mathcal{O}(g-1)$ 线丛的截面的拉回来定义。现在我们尝试将这个线丛延拓到我们的紧化上。

~ ~ ~第一个尝试是考虑除子 $(g-1)$ S_k，其中 S_k 是 $\mathbb{P}$ 上~的截面 S_k 的拉回：$\overline{\mathcal{M}}_{0,\ b+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,\ b}$。回想态射 $t = \pi f\colon Y \to B$。我们可以向其中添加一个边界除子 Ξ_k，使得 $f^*\mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}}(D_k)$ 与 $D_k = (g-1)S_k + \Xi_k$ 在 t 的纤维上重合，即根据交数，取 Ξ_k 等于

$$\sum_{i=0}^{(g-1)/2} \big((g-1-i)\,\Pi_{2i+2}(k^+) + i\,\Pi^c_{2i+2}(k^-)\big) +$$

$$\sum_{i=1}^{g/2} \big((g-i-1)\,\Pi_{2i+1}(k^+) - (g-i)\,\Pi^c_{2i+1}(k^+)\big) + \sum_{i=1}^{g/2} \big((i-1)\,\Pi^c_{2i+1}(k^-) - i\,\Pi_{2i+1}(k^-)\big)$$

这里 $\Pi_j = \sum_{\#\Lambda=j} \Pi^\Lambda$ 和 $\Pi^c_j = \sum_{\#\Lambda=j} \Pi^{\Lambda^c}$ 以及 (k^+)（分别地，(k^-)）表示这样的条件：$k \in \Lambda$（分别地，$k \notin \Lambda$）；此外，在 $j = b/2$的情形下，我们再乘以一个因子 $1/2$。

现在，$f^*\mathcal{O}(D_k)$ 和 ω_t 在 t 的纤维上相同，因此它们相差一个经由 $t = \pi \circ f$ 的拉回，见图 (2)。

为了解释上述内容，例如当#Λ = 2i + 1为偶数时，ω在这种情形下，纤维C_i 中$p+q$，C_{g-i-1}中$(g-i-1)(p+q)$ $= f^*(i, g-i-1)$，其中我们用 i 表示 $\mathbb{P}^1$ 上次数为 i 的线丛。由此可直接检验，按照上述对 Ξ_k 的选择，D_k 在 π 的相应纤维上的限制属于类型~$(i, g-1-i)$。事实上，在 $k \in \Lambda$ 的情形下，$(g-1)S_k + (g-1-i)\Pi_{2i+2}(k^+)$ 限制为~$((g-1) - (g-i-1)\ g-i-1) = (i, g-i-1)$；而在 $k \notin \Lambda$ 的情形下，$(g-1)S_k + i\Pi^c_{2i+2}(k^-)$ 限制为 $(i, (g-1) - i) = (i, g-i-1)$。$\#\Lambda = 2i+1$ 为奇数的情形虽然稍微复杂一些，但可以类似处理。

因此，我们将通过 π 将 D_k 拉回。定义 B 上的一个除子类如下：

$$E_k = \frac{2g-1}{2}\psi_k - \sum_{i=0}^{(g-1)/2} \big((g-i-1)\,\Delta_{2i+2}(k^+) + i\,\Delta_{2i+2}(k^-)\big)$$
$$- \sum_{i=1}^{g/2} \big((g-i-1)\,\Delta_{2i+1}(k^+) + (i-1)\,\Delta_{2i+1}(k^-)\big)$$

~并在 $\mathbb{P}$ 上定义一个线丛：

$$M = \mathcal{O}(D_k + \pi^* E_k)\,. \tag{6}$$

引理 10.1. 线丛 M与 k无关，满足 $f^*(M) = \omega_t$，并且在 π 的一般纤维 $\mathbb{P}^1$ 上的限制为 $\mathcal{O}(g-1)$。对于 $\#\Lambda = 2i+2$，其在 Δ^Λ 上方的一般纤维 $\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ 上的限制的次数为 $(i, g-i-1)$; 对于 $\#\Lambda = 2i+1$，其在一般纤维 $\mathbb{P}_1 \cup R \cup \mathbb{P}_2$ 上的限制的次数为 $(i, -1, g-i)$。

证明。我们使用 t 的截面 $\tau_k\colon Y \to B$，其中 $f\tau_k = \tilde{s}_k$，并且 $\tilde{s}_k$ 是映射 π 的自然截面，其像为 S_k。于是我们有 $\tau_k^*\omega_t = \psi_k/2$ 和 $\tau_k^* f^* D_k = \tilde{s}_k^* D_k$，对此我们有

$$\begin{aligned}\tilde{s}_k^* D_k = -(g-1)\psi_k + \sum_{i=0}^{(g-1)/2} \big((g-i-1)\,\Delta_{2i+2}(k^+) + i\,\Delta_{2i+2}(k^-)\big) \\ + \sum_{i=1}^{g/2} \big((g-1-i)\,\Delta_{2i+1}(k^+) + (i-1)\,\Delta_{2i+1}(k^-)\big)\,.\end{aligned}$$

由此得到 $\tau_k^*(\omega_t) - \tau_k^* f^* D_k = \pi^*(E_k)$，因此 $\omega_t = f^*(\mathcal{O}(D_k + E_k))$。我们还看到，$M$ 在 π 的纤维上的限制不依赖于 k。此外，我们有

$$\tilde{s}_j^*(D_k + \pi^* E_k) = \tau_j^* f^*(D_k + E_k) = \tau_j^*(\omega_t) = \psi_j/2 = \tilde{s}_j^*(D_j + \pi^* E_j)\,,$$

这表明 $\mathcal{O}(D_k + \pi^* E_k)$ 和 $\mathcal{O}(D_j + \pi^* E_j)$ 在 S_j 上的限制相同。容易验证，π 在 Δ_b^Λ 的一般点上方的纤维的限制为。□

现在我们要比较 $\pi_*(M)$ 与 B 上的霍奇丛 $\mathbb{E} = t_*(\omega_t)$。下一个命题表明，它们在余维 2 意义下相同。

命题 10.2. 我们有一个正合列 $0 \to \pi_*(M) \to \mathbb{E} \to \mathcal{T} \to 0$，其中 $\mathcal{T}$ 是一个相干层，它是支撑在边界上的挠层。此外，我们有 $c_1(\pi_*(M)) = \lambda$。

证明。由引理 10.1 可得 $\omega_t = f^*(M)$。但是 $R^1\pi_*(M) = 0$，因此我们有

$$\pi_*(M \otimes f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = \pi_* f_*(f^*(M)) = \pi_* f_*(\omega_t) = t_*(\omega_t)\,.$$

我们有一个正合列 $0 \to \mathcal{O}_{\tilde{\mathbb{P}}} \to f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}} \to \mathcal{F} \to 0$，其中 $\mathcal{F}$ 是一个秩 1 的相干层，其限制到 π 的光滑纤维上的次数为 $-(g+1)$; 这可通过对 f 和 $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ 应用黎曼-罗赫定理得到。将该列与 M 张量积并应用 π_*，得到正合列

$$0 \to \pi_*(M) \to \pi_*(M \otimes f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) \to \pi_*(M \otimes \mathcal{F}) \to 0\,.$$

在 π 的光滑纤维上，层 $M \otimes \mathcal{F}$ 限制为次数为 $(g-1) - (g+1) = -2$ 的线丛，因此 $\pi_*(M \otimes \mathcal{F})$ 是一个挠层。

现在我们计算 $c_1(\pi_*(M))$。我们对 π 和 $\mathcal{O}(D_k)$ 应用格罗滕迪克-黎曼-罗赫定理。该定理指出

$$\mathrm{ch}(\pi_!(\mathcal{O}(D_k))) = \pi_*(\mathrm{ch}(\mathcal{O}(D_k)))\mathrm{Td}^\vee(\omega_\pi)\,,$$

根据 $\pi_*(\mathrm{Td}_2^\vee(\omega_\pi)) = 0$ 可得

$$c_1(\pi_*(\mathcal{O}(D_k))) = \frac{1}{2}\pi_*(-D_k\,\omega_\pi + D_k^2)\,.$$

我们计算得

$$\pi_*(D_k\omega_\pi) = (g-1)\psi_k - \sum_{i=0}^{(g-1)/2} \big((g-i-1)\,\Delta_{2i+2}(k^+) + i\,\Delta_{2i+2}(k^-)\big) + \sum_{i=1}^{g/2} \Delta_{2i+1}\,, \quad (7)$$

and

$$\begin{aligned}\pi_*(D_k^2) = &-(g-1)^2\psi_k + \sum_{i=0}^{(g-1)/2} (g-i-1)(g+i-1)\,\Delta_{2i+2}(k^+) \\ &+ \sum_{i=0}^{(g-1)/2} (2g-2-i)i\,\Delta_{2i+2}(k^-) + \sum_{i=1}^{g/2}((2g-i-1)(i-1)-i^2)\,\Delta_{2i+1}\,.\end{aligned} \quad (8)$$

加上 $\pi_*(\pi^*E_k)$ 得到

$$\begin{aligned}c_1(\pi_*(M)) = \frac{g^2}{2}\,\psi_k - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{(g-1)/2} &\big((g-i-1)(g-i)\,\Delta_{2i+2}(k^+) + i(i+1)\,\Delta_{2i+2}(k^-)\big) \\ &- \sum_{i=1}^{g/2} \big((g-i)^2\,\Delta_{2i+1}(k^+) + i^2\,\Delta_{2i+1}(k^-)\big)\,.\end{aligned}$$

代入 ψ_k 的公式，我们得到

$$c_1(\pi_*(M)) = \sum_{i=0}^{(g-1)/2} \frac{(g-i)(i+1)}{2(2g+1)}\Delta_{2i+2} + \sum_{i=1}^{g/2} \frac{i(g-i)}{2g+1}\Delta_{2i+1} = \lambda\,.$$

□

˜如命题 10.2 所示， M 在 $\mathbb{P}$ 上不是无基点的；其在 R 部分上的限制次数为负。我们可以通过定义使其无基点：

$$N = M(-R) = \mathcal{O}(D_k + \pi^*E_k - R)\,. \quad (9)$$

现在， N 在 Δ_{2i+1} 上的一般纤维上的限制——该纤维由三条有理曲线 $\mathbb{P}_1$、 R、 $\mathbb{P}_2$ 链接而成——的次数为 $(i-1, 1, g-i-1)$，并且可以验证 N 是无基点的。

引理 10.3. 在余维 2 之外，我们在 B 上有 $\pi_*(N) = \mathbb{E}$。

证明。我们有 $R^1\pi_*(N) = 0$。因此，正合列 $0 \to N \to M \to M_{|R} \to 0$ 导出正合列

$$0 \to \pi_*(N) \to \pi_*(M) \to \pi_*(M_{|R}) \to 0\,.$$

现在我们证明 $c_1(\pi_*(N)) = c_1(\pi_*(M))$。由于 $R^1\pi_*(M) = 0 = R^1\pi_*(N)$，由格罗滕迪克-黎曼-罗赫定理可得

$$c_1(\pi_*(M)) = \frac{1}{2}\pi_*(c_1(M)^2 - c_1(M)\omega_\pi), \quad c_1(\pi_*(N)) = \frac{1}{2}\pi_*(c_1(N)^2 - c_1(N)\omega_\pi)\,.$$

根据 N 的定义，以及 R 是一个 (-2)-曲线这一事实，若取一个维数为 1 的底空间 B，则其与一个纤维的交数为 0，因此我们有

$$\pi_*(c_1(N))^2 = \pi_*(c_1(M))^2$$

且 $c_1(N)\ \omega_\pi = c_1(M)\ \omega_\pi$因为将 ω_π限制到 R上是平凡的。 □

11. The rational normal curve

超椭圆曲线经典范映射的像是一条有理正规曲线，也就是说，$\mathbb{P}^1$ 通过次数为 $g-1$的线性系嵌入到 $\mathbb{P}^{g-1}$ 中。

在我们的设定中，可以利用将次数为 $g-1$的线丛的延拓 N（如（9）中所定义）延拓到前一节所构造的紧化上，来观察有理正规曲线及其退化。

令 $u\colon \mathbb{P}(\mathbb{E}) \to B$ 为自然投影。现在 N 是无基点的，并且除去余维 2的部分，我们有 $\pi_*(N) = \mathbb{E}$，因此整体到局部映射 $\pi^*\pi_*(N) \to N$诱导出一个满射 $\nu\colon \pi^*(\mathbb{E}) \to N$，其定义在 $\mathbb{P}$上。由将 $\mathbb{P}$中的一点对应于 ν的核，这诱导出一个态射 $\phi\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$。它与如下图表相容

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow u \\ & & B \end{array}$$

命题 11.1. 对于 B 中一个在 π 下具有光滑纤维的点，ϕ 的像是一条次数为 $g-1$ 的有理正规曲线。对于一般点 $\beta \in \Delta_{2i+2}$，其纤维为 $\mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$，像是两条次数分别为 i 和 $g-i-1$ 的有理正规曲线之并。对于一般点 $\beta \in \Delta_{2i+1}$，其纤维为 $\mathbb{P}_1, R, \mathbb{P}_2$，像是三条次数分别为 $i-1$、1 和 $g-i-1$ 的有理正规曲线之并。这里将次数为 0 的情形解释为一条收缩曲线。

证明。该命题几乎可由引理 10.1 立即推出。 □

注 11.2. 若 $i=1$，则 $\mathbb{P}_1$ 被收缩。若还有 $g=2$，则 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 均被收缩，且 R 的像与 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}$）的纤维重合。

˜注 11.3. 截面 $\tilde{s}_i\colon B \to \mathbb{P}$（$i = 1, \ldots, b$）通过将 β 映至 $\mathbb{E} = \tilde{s}_i^*\pi^*(\mathbb{E}) \to s_i^*(N)$ 的核，从而诱导出截面 $\sigma_i = \phi \circ s_i\colon B \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$。

˜注11.4。在情形 $g=2$ 下，映射 ϕ 是一个双有理映射 $\mathbb{P} \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$，它将边界分支压缩掉。更准确地说，在 Δ_2 上它压缩掉 Π_2，而在 Δ_3 上则压缩掉支撑于 $\Pi_3 = \Pi_3^c$处的分支。

12. Symmetrization

我们一直在研究模空间 $\mathcal{H}_{g,\ 2}$ 和$\mathcal{M}_{0,\ b}$ 及其紧化。这里对称群 $\mathfrak{S}_b$ 作用。因此，我们使构造具有对称性。

我们令 $D=\sum_{k=1}^b D_k$ 和 $E=\sum_{k=1}^b E_k$，并设

$$\tilde{M}=\mathcal{O}(D+E)\,,\quad \psi=\sum_{k=1}^b \psi_k\,,\quad \text{and}\quad \tilde{S}=\sum_{k=1}^b \tilde{S}_k\,.$$

我们发现

$$\psi=4\sum_{i=0}^{(g-1)/2}\frac{(g-i)(i+1)}{2g+1}\,\Delta_{2i+2}+2\sum_{i=1}^{g/2}\frac{(2g-2i+1)(2i+1)}{2g+1}\,\Delta_{2i+1}$$

and

$$D=(g-1)\tilde{S}+2\sum_{i=0}^{(g-1)/2}\big((g-i-1)(i+1)\Pi_{2i+2}+i\,(g-i)\,\Pi^c_{2i+2}\big)+\sum_{i=1}^{g/2}\big((g-4i-1)\Pi_{2i+1}-(3g-4i+1)\,\Pi^c_{2i+1}\big)$$

and

$$E=\frac{2g-1}{2}\psi-2\sum_{i=0}^{(g-1)/2}\left((g-i)(2i+1)-(i+1)\right)\Delta_{2i+2}-\sum_{i=1}^{g/2}\left(4i\,(g-i)-(g+2)\right)\Delta_{2i+1}$$

13. The Case of Hyperelliptic Genus Three

Hurwitz 空间 $\mathcal{H}_{3,\,2}$ 可紧化为 $\overline{\mathcal{H}}_{3,\,2}$，其边界分支为 Δ^Λ，其中有 $\#\Lambda\in\{2,3,4\}$。将固定基数 Λ 的分支合并后，得到边界分支 Δ_2、Δ_3 和 Δ_4。在态射 $\overline{\mathcal{H}}_{3,\,2}\to\overline{\mathcal{M}}_3$ 下，分支 Δ_2 和 Δ_4 映射到 δ_0，而 Δ_3 映射到 δ_1。公式 (4) 和 (5) 特化为

$$\lambda=\frac{3}{14}\Delta_2+\frac{2}{7}\Delta_3+\frac{2}{7}\Delta_4 \tag{10}$$

and

$$\psi_k=\frac{5}{7}\,\Delta_2(k^+)+\frac{1}{21}\,\Delta_2(k^-)+\frac{20}{21}\,\Delta_3(k^+)+\frac{2}{7}\,\Delta_3(k^-)+\frac{2}{7}\,\Delta_4\,.$$

注 13.1. 方程 (10) 表明，在 $\overline{\mathcal{H}}_{3,\,2}$ 上存在一个权为 14 的标量值模形式，其平方等于 χ_{28}；第 6 节提到了这个形式。由于在 $\overline{\mathcal{H}}_3$ 上有 $28\,\lambda=3\,\delta_0+8\,\delta_1\underline{+}\,8\,\zeta_1$，这是一个不能被 2 整除的整类，因此在 $\mathcal{H}_3$ 上不存在平方为 χ_{28} 的权为 14 的模形式。请与第 5 节末尾的 Cornalba 公式比较。

˜我们有在（6）中定义于 $\mathbb{P}$ 上的线丛 M，它对应于由下式给出的除子类D_k+E_k

$$D_k=2\,\tilde{S}_k+2\,\Pi_2(k^+)+2\,\Pi_4(k^+)+\Pi_3(k^+)-2\,\Pi_3^c(k^+)-\Pi_3(k^-)$$

and

$$E_k=\frac{5}{2}\psi_k-\left(2\,\Delta_2(k^+)+\Delta_3(k^+)+\Delta_4\right),$$

其中 ψ_k 由（6）给出。定义有理除子类

$$U := \frac{1}{14}\Delta_2 + \frac{3}{7}(\Delta_3 + \Delta_4) = \frac{3}{2}\psi_k - (\Delta_2(k^+) + \Delta_3(k^+)) .$$

$D_k + E_k$ 的除子类与 k 无关，正如引理 10.1 中所见；但从下一个引理也可以直接看出这一点。

引理 13.2. 我们有线性等价关系 $D_k + E_k \sim -\omega_\pi + \Pi_2 + \Pi_3 + \pi^*(U)$。

证明。容易验证，$-\omega_\pi + \Pi_2 + \Pi_3$ 和 $D_k + E_k$ 在 π 的各个纤维上的限制相同。我们有 $s_k^*(-\omega_\pi + \Pi_2 + \Pi_3) = -\psi_k + \Delta_2(k^+) + \Delta_3(k^+)$ 以及 $s_k^*(D_k + E_k) = \psi_k/2$。□

令 Q 为 ϕ 的像：$\mathbb{P} \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$，见命题 11.1。映射 ϕ 是映射 $\phi' : \mathbb{P} \to Q$ 与包含映射 $\iota : Q \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{E})$ 的复合。$Q \to B$ 的一般纤维是圆锥曲线，因此对于某个定义在 B 上的除子 A，有 $\mathcal{O}(Q) = \mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(u^*A)$。我们来确定 A。

引理 13.3。在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上，我们有线性等价

$$[Q] \sim [\mathcal{O}(2)] + u^*(4\,\lambda - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)) .$$

证明。我们有 $\omega_{\mathbb{P}(\mathbb{E})} \otimes u^*(\omega_B^{-1}) = \mathcal{O}(-3) \otimes u^*(\det \mathbb{E})$，由伴随公式可得 $\omega_Q = \iota^*(\mathcal{O}(Q) \otimes^{\omega_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}})$。由于 ϕ' 是一次吹下，我们有 $\omega_{\tilde{\mathbb{P}}} = (\phi')^*\omega_Q \otimes \mathcal{O}(\Pi_2 + \Pi_3)$。于是得到

$$\begin{aligned}\phi^*(\mathcal{O}(Q)) =& \phi'^*\omega_Q \otimes \phi^*\omega_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}^{-1} \\ =& \omega_{\tilde{\mathbb{P}}} \otimes \mathcal{O}(-\Pi_2 - \Pi_3) \otimes \phi^*\mathcal{O}(3) \otimes \pi^* \det(\mathbb{E})^{-1} \otimes \pi^*\omega_B^{-1} \\ =& \omega_\pi \otimes \mathcal{O}(-\Pi_2 - \Pi_3) \otimes \phi^*\mathcal{O}(3) \otimes \pi^* \det(\mathbb{E})^{-1} .\end{aligned}$$

另一方面，我们有 $\phi^*\mathcal{O}(Q) = \phi^*\mathcal{O}(2) \otimes \mathcal{O}(\pi^*A)$，且 $\phi^*\mathcal{O}(1) = N$，因此得到

$$\mathcal{O}(u^*A) = N \otimes \omega_\pi \otimes \mathcal{O}(-\Pi_2 - \Pi_3) \otimes \pi^* \det(\mathbb{E})^{-1} . \tag{11}$$

由引理 13.2，我们有 $N = \omega_\pi^{-1} \otimes \mathcal{O}(\Pi_2 + \Pi_3) \otimes O(U)$。将其代入 (11)，即可得到所需结果。□

有效除子 Q 给出一个模形式，而引理 13.3 给出了它的权。

推论 13.4。曲线 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上的有效除子 Q 定义了一个模形式 $\chi_{2,\,0,\,4}$ 在 $\mathcal{H}_{3,\,2}$ 上，其权为 (2, 0, 4)，也就是说，它是 $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^4$ 的一个非零截面。

由于除子 $\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$ 不是从模空间 $\overline{\mathcal{H}}_3$ 拉回的，因此该模形式不能下降到 $\overline{\mathcal{H}}_3$。回想一下，限制在双曲线轨迹上的模形式 $\chi_{4,\,0,\,8}$ 与除子 D 相关联，而该除子等于 $2\,Q$。

注记 13.5. 与上文类似，我们也可以用另一种方式确定命题 2.1 关于通用属 2 曲线的分歧除子闭包 $\overline{D}$ 的类 D 的结果。根据容许覆盖理论，存在自然映射 $\overline{\mathcal{H}}_{2,\,2} \to \overline{\mathcal{M}}_2$，使得 $\overline{\mathcal{M}}_2$ 上的霍奇丛拉回后，等于与相应容许覆盖族相关联的 $\overline{\mathcal{H}}_{2,\,2}$ 上的霍奇丛。因此，丛 $\mathbb{P}(\mathbb{E}) \to \overline{\mathcal{M}}_2$ 的 $\mathcal{O}(1)$ 拉回后，等于丛 $\mathbb{P}(\mathbb{E}) \to \overline{\mathcal{H}}_{2,\,2}$ 的 $\mathcal{O}(1)$。设

$\Sigma = \phi_*(\sum_{k=1}^6 \tilde{S}_k)$，其中 $\phi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$ 是第11节中定义的映射。根据几何，$\overline{D}$ 拉回到 $\overline{\mathcal{H}}_{2,\,2}$ 上的丛 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 后等于 Σ。由注11.4可得$\phi^*\Sigma = S + 2\,\Pi_2 + 6\,\Pi_3$。利用第12节的公式，对于 $g = 2$，有：

$$\phi^*\mathcal{O}(6) = \tilde{M} - 6\,R = \tilde{S} + \frac{12}{5}\Pi_2 + \frac{2}{5}\Pi_2^c + \frac{24}{5}\Pi_3 - \frac{3}{5}R\,.$$

现在我们写作 $[\overline{D}] = \mathcal{O}(6) + u^*(a\,\delta_0 + b\,\delta_1)$。通过拉回到 $\mathbb{P}$ 并使用上述公式，我们得到（记号参见第11节中的图）

$$\tilde{S} + \frac{12}{5}\Pi_2 + \frac{2}{5}\Pi_2^c + \frac{24}{5}\Pi_3 - \frac{3}{5}R + \pi^*(2a\,\Delta_0 + b\,\Delta_3) = \tilde{S} + 2\,\Pi_2 + 6\,\Pi_3\,.$$

这意味着

$$\pi^*(2a\,\Delta_0 + b\,\Delta_3) = -\frac{2}{5}(\Pi_2 + \Pi_2^c) + \frac{3}{5}(2\,\Pi_3 + R) = \pi^*(-\frac{2}{5}\Delta_2 + \frac{3}{5}\Delta_3)\,,$$

因此，$a = -1/5$ 且 $b = 3/5$，使用公式 $10\,\lambda = \delta_0 + 2\,\delta_1$即可得出结果。

14. Comparison with the Hodge Bundle

根据引理 10.3，我们知道线丛 $N = \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}}}(D_k + E_k - R)$ 在 $\mathcal{H}_3$上的 $\mathbb{P}_{\,2}$具有如下性质：$\pi_*(N) \cong \mathbb{E}$，直到余维 2。现在我们来处理 N 的张量幂的推前。

引理14.1。对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，有

$$c_1(\pi_*(N^{\otimes m})) = \frac{2\,m^2 + m}{14}\,\Delta_2 + \frac{5\,m^2 - m}{14}(\Delta_3 + \Delta_4)\,.$$

证明。我们如命题 10.2 的证明中式 (10) 那样，对 π 和 $N^{\otimes m}$ 应用格罗滕迪克-黎曼-罗赫定理。回顾一下，N 对应于除子（类） $D_k + E_k - R$。我们利用对所有 m，$R^1\pi_*N^{\otimes m} = 0$，得到

$$c_1(\pi_*(N^{\otimes m})) = \frac{1}{2}\pi_*\left(m^2(D_k + E_k - R)^2 - m\,\omega_\pi \cdot (D_k + E_k - R)\right)$$

并利用命题 10.2 的证明中的关系式 (8) 和 (9)，可得 t

$$c_1(\pi_*(N^{\otimes m})) = \frac{2\,m^2 + m}{14}\,\Delta_2 + \frac{5\,m^2 - m}{14}(\Delta_3 + \Delta_4)$$

如所需。 □

命题14.2。在 B 上有正合列

$$0 \to \mathrm{Sym}^{m-2}(\mathbb{E}) \otimes \mathcal{O}(-A) \to \mathrm{Sym}^m(\mathbb{E}) \to \pi_*(N^{\otimes m}) \to 0\,,$$

其中 $A = 4\,\lambda - (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)$。

证明。由引理 13.3 可知，在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上有正合列

$$0 \to \mathcal{O}(m-2) \otimes u^*\mathcal{O}(-A) \to \mathcal{O}(m) \to \mathcal{O}(m)_{|Q} \to 0$$

应用 u_* 并注意到 $R^1u_*\mathcal{O}(m-2)$ 消失，即得所需结果。 □

$\mathrm{Sym}^j(\mathbb{E})\otimes\det(\mathbb{E})^k$ 上的一个截面拉回到 $\mathcal{H}_3$ 上的栈 $[W^0_{8,-2}/(\mathrm{GL}(W)/(\pm 1_W))]$，成为 $\mathrm{Sym}^j(\mathrm{Sym}^2(W))\otimes\det(W)^{k/2}$ 的一个截面，其中 k 为偶数。我们有如下等型分解

$$\mathrm{Sym}^j(\mathrm{Sym}^2(W))=\oplus_{n=0}^{\lfloor j/2\rfloor}\mathrm{Sym}^{2j-4n}(W)\otimes\det(W)^{2n}\,,$$

此处以及本节其余部分中，我们假设特征为 0，或不为 2 且足够大，使此恒等式成立（或者如 [1, 3.1] 中那样使用除幂）。$\mathrm{Sym}^j(\mathbb{E})\otimes\det(\mathbb{E})^k$ 在 $\mathcal{M}_3^{nh}$ 上的一个截面拉回为 $[V_{4,0,-1}/\mathrm{GL}(V)],$，这里我们现在用 V 表示维数为 3 的标准空间。一个同一化 $V\cong\mathrm{Sym}^2(W)$ 对应于一个嵌入 $\mathbb{P}^1\hookrightarrow\mathbb{P}^2$，其像是一张光滑二次曲面。若我们将 V 视为具有基 x、y、z 的空间，则投影的核

$$\mathrm{Sym}^j(V)=\mathrm{Sym}^j(\mathrm{Sym}^2(W))\to\mathrm{Sym}^{2j}(W)$$

由 x、y、z 中次数为 j 且在该二次曲面上消失的多项式构成。因此，鉴于上文的同型分解，正合列

$$0\to\mathrm{Sym}^{m-2}(\mathbb{E})\otimes\mathcal{O}(-A)\to\mathrm{Sym}^m(\mathbb{E})\to\pi_*(N^{\otimes m})\to 0\,.$$

对应于一个正合列（拉回至 $W^0_{8,\,-2}$）

$$0\to\left(\mathrm{Sym}^{m-2}(\mathrm{Sym}^2W)\right)\otimes\det(W)^2\to\mathrm{Sym}^m(\mathrm{Sym}^2W)\to\mathrm{Sym}^{2m}(W)\to 0\,.$$

将 $\chi_{4,0,8}$ 限制到双曲线轨迹后，其在 $\mathrm{Sym}^4(\mathbb{E})\otimes\det(\mathbb{E})^8$ 上的截面允许根据分解进行三种投影

$$\mathrm{Sym}^4(\mathrm{Sym}^2W)\otimes\det(W)^{24}=W_{8,24}\oplus W_{4,26}\oplus W_{0,28}\,.\tag{12}$$

引理 14.3. 将 $\chi_{4,0,8}$拉回到 $\mathcal{H}_{3,2}$ 后，对其在 (12) 中三个直和项上的投影定义了 $\overline{\mathcal{H}}_{3,2}$ 上的模形式，其权分别为 (4,0,8)、(2,0,4) 和 (0,0,14)；除一个标量因子外，它们分别由协变式 $f_{8,-2}\mathfrak{d}$、$f_{4,-1}\mathfrak{d}$ 以及判别式 $\mathfrak{d}$ 给出。

证明。将 $\mathbb{E}$ 与 $\mathrm{Sym}^2(W)$ 的同一化对应于将 $\mathbb{P}^1$ 嵌入为 $\mathbb{P}^2$ 中的圆锥曲线 C。一个三元四次型 Q 与 C 相交的次数可以是 0、1 或 2，设为 $Q=mC+R$，其中 $0\le m\le 2$。这三种投影对应于 $R\cap C$，并在扭曲意义下给出泛二元八次形式、泛二元四次形式和 1。第一种投影已在命题 6.1 中确定。第二种的论证类似，而第三种下降到 $\overline{\mathcal{H}}_3$，且在 $\mathcal{H}_3$ 上不消失。因此它必为判别式的倍数。考虑 $\mathrm{GL}_2/\pm 1_W$ 的作用后，我们得到所示的权（即 $2(14+\epsilon)$，其中 $\epsilon=-2$、-1、0）。□

15. More Modular Forms for Genus Three

我们将利用射影化霍奇丛上的更多有效除子来构造更多模形式。注意，射影化霍奇丛上的除子与模形式之间的联系也可以反向使用：利用模形式获得关于循环类的结果。下面给出几个例子。对于一个典范四次平面曲线 C，我们可以关联对偶平面中的一条曲线 S，其直线与 C 等谐相交。它对应于 Salmon 在 [25, p. 264] 中给出的三元四次型的一个反变式（伴随式）σ，并且由一个等变 GL(3) 嵌入定义

$W[4,4,0] \hookrightarrow \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Sym}^4(W))$。它在 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 中产生一个除子以及一个权为 (0, 4, 16) 的模形式$\chi_{0,}$4,16。关于三元四次型不变量理论与模形式之间的关系，参见 [5, p. 54] 。Siegel 模形式 $\chi_{0,}$4,16 在无穷远点处以 2 阶消失，并沿着可分解阿贝尔三维簇的轨迹 $\mathcal{A}_{2,}$1 以 4 阶消失。令 $\check{}u\colon \mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee) \to \overline{\mathcal{M}}_3$为投影，我们有 $\check{}u_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1)) = \mathbb{E}^\vee \cong \wedge^2\mathbb{E}\otimes\det(\mathbb{E})^{-1}$，因此在 $\tilde{\mathcal{A}}_3$ 上的 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 上找到一个有效除子，其类为 $[\check{}S] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(4)] + 20\,\lambda - 2\,\delta$，并且沿着 $\mathcal{A}_{2,}$1 以重数 4 消失。于是，我们在 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上的 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 上得到一个关系

$$[\check{S}] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(4)] + 20\,\lambda - 2\,\delta_0 - 4\,\delta_1\,,$$

其中我们将 λ 和 δ_i 视为其在 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 上的拉回。同样，在对偶平面 $\check{}$ 中，我们有由与四次曲线交于四重交点且具有 j-不变量 1728 的直线组成的六次曲线 T 。相应的伴随式 τ 对应于 $W[6,6,0] \hookrightarrow \mathrm{Sym}^3(\mathrm{Sym}^4(W))$，并定义了一个权为 (0, 6, 24) 的模形式，在无穷远点处具有重数 3，并沿 $\mathcal{A}_{2,\ 1}$ 具有重数 6。因此我们得到一个循环关系

$$[\check{T}] = [\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(6)] + 30\,\lambda - 3\,\delta_0 - 6\,\delta_1\,.$$

伴随式 $\sigma^3 - 27\,\tau^2$ 在双圆锥曲线的轨迹上消失，相应的权为 (0, 12, 48) 的模形式可被 χ_{18}^2 整除，这可以利用 [5] 的方法加以验证。除以 χ_{18}^2 后得到一个权为 (0, 12, 12) 的尖点形式，在无穷远点处具有重数 2，并沿 $\mathcal{A}_{2,\ 1}$ 具有重数 3。众所周知（例如参见 [3, 第 43] 页），该伴随式定义了典范像 C 在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中的对偶曲线 $\check{}C$ 。因此我们在 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 中得到一个包含该对偶曲线闭包、类为

$$12\,[\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1)] + 24\,\lambda - 2\,\delta_0 - 3\,\delta_1\,.$$

这个有效除子类也可以由循环给出

$$B = \{(C,\eta) \in \mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee) : \mathrm{div}(\eta) \text{ has a point of multiplicity } 2\}$$

在 $\mathcal{M}_3$ ，Korotkin 和 Zograf 在 [22, 定理 1] 中确定了其闭包 $\overline{B}$ 的类

$$[\overline{B}] = 12\,[\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1)] + 24\,\lambda - 2\,\delta_0 - 3\,\delta_1\,.$$

亏格 3 的有效除子的另一个例子是魏尔斯特拉斯除子W ，其类为

$$[\overline{W}] = 24\,[\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1)] + 68\,\lambda - 6\,\delta_0 - 12\,\delta_1$$

正如 Gheorghita 在 [12] 中所给出的。这里我们得到一个截面

$$\mathrm{Sym}^{24}(\wedge^2\mathbb{E}) \otimes \det(\mathbb{E})^{44}(-6\,\delta_0 - 12\,\delta_1)$$

这给出了一个权为 (0, 24, 44) 的 Teichmüller 模形式，它在尖点处以重数 6 消失。它下降为一个 Siegel 模形式。

推论 15.1。典范曲线的对偶定义了一个次数 3、权为 (0,12,12) 且在无穷远点处以重数 2 消失的西格尔模尖点形式。魏尔斯特拉斯除子定义了一个权为 (0,24,44) 且在无穷远点处以重数 6 消失的尖点形式。

16. The hypertangent divisor

一个亏格 3 的一般典范嵌入曲线 C 有 24 个（魏尔斯特拉斯）点，在这些点处切线与 C 的交点重数为 3。这 24 条直线的并在 $\mathbb{P}^2$中构成一个除子。取万有曲线在 $\mathcal{M}_3$ 上的这个除子的闭包，得到 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中位于 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 之上的一个除子 H，我们称之为超切线因子。我们计算了该除子在 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上的类，并计算了相应除子在 $\overline{\mathcal{H}}_{3,\,2}$上的类。

在 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上的计算使用前一节中定义的、位于 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上的 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 中的除子 $\check{}S$ 和 $\check{}T$。一个经典结果是，一般纤维中的交 $S\cdot T$ 是由定义一般曲线 C 的 24 个双重拐点构成的 0-循环，见 [25]。我们考虑关联簇

$$I=\{(p,\ell)\in\mathbb{P}(\mathbb{E})\times_{\overline{\mathcal{M}}_3}\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee):p\in\ell\}$$

设 $\rho\colon I\to\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 和 $\check{}\rho\colon I\to\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 是满足交换图的两个投影

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\check{\rho}} & \mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee) \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\check{u}} \\ \mathbb{P}(\mathbb{E}) & \xrightarrow{u} & \overline{\mathcal{M}}_3 \end{array}$$

在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上有典范正合列

$$0\to F\to u^*(\mathbb{E})\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}(1)\to 0$$

在 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 上也有一个类似的典范正合列

$$0\to\check{F}\to\check{u}^*(\mathbb{E}^\vee)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1)\to 0\,.$$

现在注意到，I 可以被识别为 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$上的 $\mathbb{P}^1$丛 $\mathbb{P}(F^\vee)$，也可以被识别为 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$上的$\mathbb{P}^1$丛 $\mathbb{P}(\check{}F^\vee)$。

典范包含 $F\to u^*\mathbb{E}$ 诱导出一个满射 $u^*\mathbb{E}^\vee\to F^\vee$，由此得到 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$上射影丛 $\mathbb{P}(F^\vee)\to\mathbb{P}(u^*\mathbb{E}^\vee)$ 之间的包含映射；该映射与自然映射 $\mathbb{P}(u^*\mathbb{E}^\vee)\to\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$复合后，得到映射$\check{}\rho\colon I=\mathbb{P}(F^\vee)\to\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$。这意味着

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^\vee)}(1)=\check{\rho}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1)\quad\text{and similarly}\quad\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{F}^\vee)}(1)=\rho^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}(1)\,.\tag{13}$$

With

$$f=c_1(F),\quad\check{f}=c_1(\check{F}),\quad h=c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}(1)),\quad\check{h}=c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)}(1))\,,$$

这给出了第一陈类拉回的恒等式 $c_1(\mathbb{E})=-c_1(\mathbb{E}^\vee)=\lambda$

$$\rho^*(f)+\rho^*(h)=\rho^*u^*(\lambda)=\check{\rho}^*\check{u}^*(\lambda)=-\check{\rho}^*(\check{f})-\check{\rho}^*(\check{h})\,.$$

由于 $I=\mathbb{P}(F^\vee)$ 在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上，且 $\check{}\rho^*\check{}h=c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F^\vee)}(1))$，$F^\vee$ 的陈类与典范线丛的第一陈类满足关系

$$\check{\rho}^*\check{h}^2+\rho^*(f)\,\check{\rho}^*(\check{h})+\rho^*(c_2(F))=0\,.\tag{14}$$

推论 16.1。在映射 $\rho_*\check{}\rho^*$ 下，我们有

$$\check{h}^2 \mapsto h - u^*(\lambda), \quad \check{h}\,\check{u}^*(\xi) \mapsto u^*(\xi), \quad \check{u}^*(\eta) \mapsto 0$$

对于 $\xi \in \mathsf{CH}^1(\overline{\mathcal{M}}_3)$ 和 $\eta \in \mathsf{CH}^2(\overline{\mathcal{M}}_3)$。

证明。利用关系式 (14) 得到

$$\rho_*(\check{\rho}^*(\check{h})^2) = -\rho_*(\rho^*(f)\check{\rho}^*(\check{h}) - \rho^*(c_2(F)) = -f = h - u^*(\lambda)\,.$$

其他性质可由一般的交叉理论推出。 □

˘ ˘ 现在令 ψ 为余维 2 上循环 $S \cdot T$ 的类。

引理 16.2。我们有 $\rho_*\check{}\rho^*\psi = 24\,h + 216\,\lambda - 24\,\delta_0 - 48\,\delta_1$。

证明。由前一节的结果可知

$$\psi = 24\,\check{h}^2 + 240\,\check{h}\lambda - 24\,\check{h}\delta_0 - 48\,\check{h}\delta_1 + r$$

其中 $r \in \check{}\rho^*\mathsf{CH}^2(\overline{\mathcal{M}}_3)$。由推论 16.1 得出所需结果。 □

˘ ˘ 现在我们断言，余维 2 循环 $S \cdot T$ 限制在双曲线轨迹上时具有 $12\check{}h$ 的形式；换言之，根据 (2)，它包含一个类为

$$12\,(9\,\lambda - \delta_0 - 3\,\delta_1)\,\check{h} + \check{u}^*(\xi)$$

的有效余维 2 循环，其中 ξ 是 $\overline{\mathcal{M}}_3$ 上的一个余维 2 类。我们利用定义 S 和 T 的两个协变式 σ 和 τ 的显式形式来验证这一点。这里，σ 是关于 $a_0, \ldots, a_{14}$ 的 4 次多项式，也是关于坐标 u_0, u_1, u_2 的 4 次多项式，其中 $a_0, \ldots, a_{14}$ 是一般三元四次型的系数。计算表明，σ 限制在双重圆锥曲线的轨迹上后成为一个平方 q^2，其中 q 是关于 u_i 的 2 次多项式；而 τ 则成为一个立方 q^3。因此，循环 $S^\vee \cdot T^\vee$ 限制在双曲线轨迹上后，由一个表示 $6\,q \sim 12h$ 的有效循环表示。根据推论 16.1，在 $\rho_*\hat{}\rho^*$ 下，这对应于一个类为 $12(9\,\lambda - \delta_0 - 3\,\delta_1)$ 的有效循环。由于 H 定义为一般纤维中超切除子的闭包，H 的类等于 $\rho_*\check{}\rho^*\psi$ 减去双曲线轨迹的类的 12 倍；由引理 16.2 可得

$$24\,h + 216\,\lambda - 24\,\delta_0 - 48\,\delta_1 - 12(9\lambda - \delta_0 - 3\delta_1) = 24\,h + 108\,\lambda - 12\,\delta_0 - 12\,\delta_1\,.$$

我们总结如下。

命题 16.3. 超切除子 H 在 $\mathbb{P}_{\overline{\mathcal{M}}_3}(\mathbb{E})$ 中的类 $[H]$ 等于 $[\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}(24)] + 108\,\lambda - 12\,\delta_0 - 12\,\delta_1$。它对应一个 3 次、权为 (24,0,108) 的 Siegel 模形式，该模形式沿边界消失，重数为 12。

我们现在研究 Hurwitz 空间，并定义和计算其中超切除子 H_h 的类。它由典范像的分歧点˜处的八条切线定义。更确切地说，在 $\mathbb{P}$ 上，我们有式 (9) 中定义的线丛 N。˜回想一下，对于 $1 \le k \le 8$，S_k 是截面 S_k 在 π_9 上的拉回：$\overline{\mathcal{M}}_{0,\,9} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,\,8}$。限制到双曲线轨迹时，魏尔斯特拉斯点退化为分歧点。我们通过取 $\overline{\mathcal{H}}_{3,\,2}$ 上一般曲线的典范像在截面 H_h 处的切线，定义 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 上相应的超切除子

˜在 $\mathcal{H}_{3,\ 2}$ 上，一般曲线的典范像在截面 S_k、$k=1$、.....、8 处的切线，然后取其在 $\overline{\mathcal{H}}_{3,\ 2}$上的闭包。

˜ ˜现在我们考虑 $\mathbb{P}$上的丛 $N(-2S_k)$。这个线丛在 π 的泛

˜ ˜纤维上是平凡的： $\mathbb{P}\to B$，因此 $\pi_*(N(-2S_k))$是 B上的线丛。

引理 16.4. 我们有

$$c_1(R^1\pi_*N(-2\tilde{S}_k))=\Delta_2(k^+)+\Delta_3(k^+),\quad \text{and}\quad c_1(\pi_*N(-2\tilde{S}_k))=-\Delta_3(k^+)-\Delta_3+E_k\,.$$

证明。回忆 $N=\mathcal{O}(D_k+\pi^*(E_k)-R)$。第一个结论可通过分析边界分支上的限制得到。对于第二个结论，我们像命题 10.2 的证明中那样应用 Grothendieck-黎曼-罗赫。由（7）和（8）可得

$$\begin{aligned}c_1(\pi_*N(-2\tilde{S}_k))&=-\Delta_2(k^+)-2\,\Delta_3(k^+)-\Delta_3+c_1(R^1\pi_*N(-2\tilde{S}_k))\\&=-\Delta_3(k^+)-\Delta_3+E_k\,.\end{aligned}$$

□

˜ ˜令 $\mathcal{F}_k=\pi_*(N(-2S_k))$。单射 $N(-2S_k)\hookrightarrow N$诱导出一个单射 $\mathcal{F}_k\to\mathbb{E}$。通过 u^* 将其拉回到 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$，再与典范满射 $u^*(\mathbb{E})\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}(1)$复合，我们得到一个诱导映射

$$q:u^*\mathcal{F}_k\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}(1)\,.$$

q的退化轨迹是一个有效除子 F_k，它是截面 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E})}(1)\otimes u^*\mathcal{F}_k^{-1}$ 的零点除子。其解释如下。映射 ϕ 将 $\tilde{\mathbb{P}}$ 的一般纤维嵌入到一般纤维 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中。若将 $H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(2))$ 识别为 $\mathbb{E}$ 的纤维并将其射影化，则除子 $p_1+p_2\in|\mathcal{O}(2)|$ 映射为经过点 $\phi(p_1)$、$\phi(p_2)$ 的直线。现在将这些除子 F_k 相加，得到一个有效除子 H_h，其类为

$$\begin{aligned}[H_h]=8\,[\mathcal{O}(1)]-\sum_{k=1}^{8}[u^*\mathcal{F}_k]&=[\mathcal{O}(8)]+u^*(3\,\Delta_3+8\,\Delta_3-\sum_{k=1}^{8}E_k)\\&=[\mathcal{O}(8)]+u^*(8\,\lambda-2\,\Delta_2+\Delta_3)\,,\end{aligned}$$

这里我们使用第10节和第12节的公式。

现在我们可以比较双曲线超切除子 H_h 的类与超切除子 H 拉回到 Hurwitz 空间后的类。根据命题 16.3，H 的拉回类为 $[\mathcal{O}(24)]+108\,\lambda-24\,(\Delta_2+\Delta_4)-12\,\Delta_1$。由于24个魏尔斯特拉斯点以重数3塌缩到8个分歧点，我们比较（拉回后的）$[H]$ 的类与 $3\,[H_h]$的类。代入 λ 的公式，得到

$$[H]-3\,[H_h]=9\,\Delta_1\,,$$

这意味着 H 的拉回在双曲边界分量 Δ_1 上以重数 9 消失。

17. Genus Four

对于亏格 4 的光滑曲线 C，自然映射 $\mathrm{Sym}^2(H^0(C,\omega_C)) \to H^0(C,\omega_C^{\otimes 2})$ 是满射，且其核的维数为 1。它确定了 $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(H^0(C,\omega_C))$ 中一个包含典范曲线的二次曲面。在 $\overline{\mathcal{M}}_4$ 上，我们得到相应的正合列

$$0 \to U \to \mathrm{Sym}^2(\mathbb{E}) \to \pi_*\omega_C^{\otimes 2} \to 0\,.$$

线丛 U 的第一陈类为 $5\lambda - (13\lambda - \delta) = -8\lambda + \delta$，这是由 Mumford 的计算 $c_1(\pi_*\omega_c^{\otimes 2})$ [23, 定理 5.10] 得出的。在丛 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 中，包含典范曲线的二次曲面确定了一个除子 Q。令 $u\colon \mathbb{P}(\mathbb{E}) \to \overline{\mathcal{M}}_4$ 为投影。

L引理 17.1. 除子类 Q 满足：$[Q] = [\mathcal{O}(2)] + u^*(8\lambda - \qquad\qquad \delta)$.

证明。注意到 $u^*u_*\mathcal{O}(2) = u^*$(对称幂$^2(\mathbb{E})$). 自然态射 $u^*u_*\mathcal{O}(2) \to \mathcal{O}(2)$ 诱导出 $u^*U \to \mathcal{O}(2)$。除子 Q 是该态射的零点轨迹，因此其类为 $[\mathcal{O}(2)] + u^*(8\lambda - \delta)$。□

推论 17.2. 有效除子 Q 定义了一个亏格 4、权为 (2, 0, 0, 8) 的 Teichm ¨uller 模形式尖点形式 χ。

若将 $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{E})$ 的一个截面视为 $\mathbb{E}^\vee$ 上的二次形式，我们便可以取其判别式，参见 [6]。对刚构造出的权为 (2, 0, 0, 8) 的形式 χ 如此处理，可得到一个权为 34 的标量模形式 $D(\chi)$。此模形式在规范模型位于二次锥面上的曲线轨迹闭包上消失。根据 Teixidor i Bigas [26, 命题 3.1]，该轨迹的类为$34\lambda - 4\,\delta_0 - 14\,\delta_1 - 18\,\delta_2$，且等于具有消失的 theta 零点的曲线所成的除子。模形式 $D(\chi)$是偶 theta 特征在 $\mathcal{A}_4$上的乘积限制到 $\mathcal{M}_4$ 后的平方根。

18. Appendix on base-point freeness

万有族 π 的相对对偶化层 ω_π：亏格为 g 的光滑曲线族 $\mathcal{C}_g \to \mathcal{M}_g$ 的相对对偶化层无基点，而满射 $\pi^*\mathbb{E} \to \omega_\pi$ 给出一个映射 $\varphi\colon \mathcal{C}_g \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$，其定义在 $\mathcal{M}_g$ 上，并且一般而言是一个嵌入。令 Γ 为像 $\varphi(\mathcal{C}_g)$。我们希望描述边界分支 Δ_i 在一般点上方像的闭包，其中 $i = 0$，……，$[g/2]$。在 Δ_0 的一般点上，层 ω_π 无基点，映射 φ 可延拓至该轨迹。但在 Δ_i的一般点上，$i \geq 1$ 表示形如 $C_1 \cup C_2$ 的结点曲线，其中 C_1、C_2 是亏格为 i 和 $g-i$ 的光滑曲线，它们在结点 x 处相交，此时层 ω_π 在 x 处有一个基点。考虑亏格为 g 的稳定曲线族 $\pi\colon Y \to B$，其中 B 是一个离散赋值环的谱。假设中心纤维 C 是一条结点曲线 $C = C_1 \cup C_2$，其分支的亏格分别为 i 和 $g-i$，且一般纤维光滑。经过 2 次基变换 $B' \to B$ 后，我们得到一个 A_1-奇点；将其消解后得到一个半稳定族 $\pi'\colon X \to B'$，其特殊纤维是一条由三条曲线组成的链 $C = C_1' \cup R \cup C_2'$，其中 $C_1' \cong C_1$ 和 $C_2' \cong C_2$ 是亏格为 i 的光滑曲线

以及 $g-i$，而 R 是一条有理（-2）曲线。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{v} & Y \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B' & \xrightarrow[\sigma]{} & B \end{array}$$

态射 v 是一个在 C_1、C_2 处分歧的 (2 : 1) 映射。我们有 $v^*\omega_\pi = \omega_{\pi'}$，并且对于 $j=1$，有 $\sigma^*\mathbb{E}_B = \mathbb{E}_{B'}$ 和 $v^*C_j = 2\,C_j' + R$，2。因此存在一个自然的 (2 : 1) 映射 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_{B'})$ 到 $\to \mathbb{P}(\mathbb{E}_B)$。

现在我们将证明，系统 $\omega_\pi(-R)$ 定义了一个映射 $X \to \mathbb{P}(\mathbb{E}_{B'})$，它与上述 (2 : 1) 映射结合后，给出一个 (2 : 1) 映射 $\varphi'\colon X \to \mathbb{P}(\mathbb{E}_B)$，将曲线 C_1' 和 C_2' 映到它们的典范像，并将 R 映到一条重直线。映射 φ' 的约化像描述了 b_0 上 D 的闭包，其中 b_0 是 B 的特殊点。

为避免不必要的记号，我们现在将半稳定族 $\pi'\colon X \to B'$ 记作 $\pi\colon X \to B$。

命题 18.1. 设 ω 为 $\pi\colon X \to B$的相对对偶化层。则有 $\pi_*(\omega(-R)) \cong \pi_*(\omega)$，且 $\pi_*(\omega(-R))$ 的中心纤维在 $H^0(C,\omega(-R))$ 中余维为 1，并在 C 上定义一个无基点线性系。

证明。令 $q = C_1 \cap R$ 和 $p = C_2 \cap R$。正合列 $0 \to \omega(-R) \to \omega \to \omega_{|R} \to 0$ 诱导出一个序列

$$0 \to \pi_*(\omega(-R)) \to \pi_*(\omega) \xrightarrow{r} \pi_*(\omega)_{|R}$$

且映射 r 为零，因为 $\omega_{|C} = (\omega_{C_1}(q)\ \mathcal{O}_R, \omega_{C_2}(p))$，因此在 C_1（分别在 C_2）上的限制必在 q（分别在 p）处消失，故可在 R 上延拓为 0。由正合性可知，$\pi_*(\omega(-R)) \cong \pi_*(\omega)$。

接下来我们注意到 $\dim H^0(C,\omega(-R)) = g_1+g_2+1$ with g_i 曲线 C 的亏格。这直接由 $\omega(-R)_{|C} = (\omega_{C_1}, \mathcal{O}_R(2)\ \omega_{C_2})$ 得出。

我们有正合列

$$0 \to \omega(-R-C_1) \to \omega(-R) \to \omega(-R)_{|C_1} \to 0\,, \tag{15}$$

其中 $\omega(-R)_{|C_1} \cong \omega_{C_1}$ 且 $\omega(-R-C_1)_{|C} = (\omega_{C_1}(q)\ \mathcal{O}_R(1)\,\omega_{C_2})$。对于截面 $(s_1,s,s_2) \in H^0(C,\omega(-R-C_1))$，截面 s 是 $\mathcal{O}_R(1)$ 的唯一一个在 q 处消失且满足 $s(p) = s_2(p)$ 的截面。因此我们看到 $\dim H^0(C,\omega(-R-C_1)) = g_1+g_2$。所以，$h^0(\omega(-R-C_1))$ 在 π 的纤维上具有常秩 g_1+g_2，故 $R^1\pi_*(\omega(-R-C_1))$ 是线丛。我们得出 $\pi_*(\omega(-R-C_1))$ 的特殊纤维等于 $H^0(C,\omega(-R-C_1))$。但是 $\pi_*(\omega(-R)_{|C_1})$ 是挠层，因此 (15) 的连接同态 $\pi_*(\omega(-R)_{|C_1}) \to R^1\pi_*(\omega(-R-C_1))$ 必为零，于是得到一个诱导的正合列

$$0 \to \pi_*(\omega(-R-C_1)) \xrightarrow{\iota} \pi_*(\omega(-R)) \xrightarrow{j} \pi_*(\omega(-R))_{|C_1}) \to 0\,.$$

现在考虑 σ of $\pi_*(\omega(-R-C_1))$ 的一个截面，其对 C 的限制为 (s_1,s,s_2)。设 $s \neq 0$。若将 σ 与 X 上一个局部截面 τ of $\mathcal{O}(C_1)$ 相乘，其除子为 C_1，那么$\iota(\sigma) = \sigma\cdot\tau_{|C}$ 对 R 的限制是 $\mathcal{O}_R(2)$ 的一个截面，它在q 处的重数为 2，因此在其他任何地方都不为零。因此，特殊纤维的子空间

V of $\pi_*(\omega(-R))$ 中在 C_1 上消失的截面，其唯一的基点是 R 上的 q。此外，映射 j 是满射；取一个截面 $s_1 \in H^0(C_1, \omega_{C_1})$，使得 $s_1(q) \neq 0$，我们看到 q 不是基点。因此， R 上没有基点。由 j 的满射性可知， V 对 C_1 的限制是 $H^0(C_1, \omega_{C_1})$，因此C_1 上没有基点。由对称性可知， C_2 上也同样如此。

与 (15) 类似，我们有一个正合列

$$0 \to \omega(-R - C_1 - C_2) \to \omega(-R) \to \omega(-R)_{|C_1+C_2} \to 0$$

通过类似的推理，我们看到可以得到一个正合列

$$0 \to \pi_*(\omega(-R - C_1 - C_2)) \xrightarrow{\iota} \pi_*(\omega(-R)) \xrightarrow{j} \pi_*(\omega(-R))_{|C_1+C_2}) \to 0\,.$$

这意味着，给定 $s_1 \in H^0(C_1, \omega_{C_1})$ 和 $s_2 \in H^0(C_2, \omega_{C_2})$，在 $\pi_*(\omega(-R))$ 的特殊纤维 V 中存在唯一的元素 (s_1, s, s_2)，它在 j 下映射到 (s_1, s_2)。态射$X \to \mathbb{P}(\pi_*(\omega(-R)))$ 由满射 $\pi^*\pi_*(\omega(-R)) \to \omega(-R)$ 给出。曲线 C 在 $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ 的特殊纤维中的像由 C_1 和 C_2 的典范像组成，并附带 p 和 q 的像以及 R 的像，也就是说，连接 p 和 q 的像的直线。如果亏格 $g(C_i) = 1$，那么 C_i 的像是一个点。□

19. Appendix: divisor classes of Gheorghita-Tarasca and Korotkin-Sauvaget-Zograf

这里，我们采用第16节中使用的方法，以相对直接的方式确定 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee)$ 中具有 $\mathbb{E}_k = \pi_*(\omega_\pi^k)$ 的两个除子的除子类，从而重新证明 Gheorghita-Tarasca 的一个定理（[13, 定理 1]）以及 Korotkin-Sauvaget-Zograf 的一个定理（[21, 定理 1.12]）。第一个除子是 Gheorghita 在 [12] 中考虑的 $\mathbb{P}(\mathbb{E}^\vee)$ 内一个除子的推广。我们在 $\mathcal{M}_g$ 上的 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee)$ 中考虑除子

$$G_k = \{(C, \omega) \in \mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee) : \mathrm{div}(\omega) \text{ contains a Weierstrass point}\}$$

并令 $\overline{G}_k$ 为 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee)$ 中 G_k 的闭包。我们令 $\check{u}\colon \mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee) \to \overline{\mathcal{M}}_g$ 为自然态射，并令 $\check{h}$ 为 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee)$ 上的超平面类。

定理19.1。（Gheorghita-Tarasca） $\overline{G}_k$ 的类由下式给出

$$\frac{1}{k}[\overline{G}_k] = g(g^2-1)\check{h} + 2(3g^2+2g+1)\check{u}^*\lambda - \binom{g+1}{2}\check{u}^*\delta_0 - \sum_{i=1}^{[g/2]}(g-i)i(g+3)\check{u}^*\delta_i\,.$$

第二个除子是 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上正则 k-微分的 $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee)$ 中满足 $k \geq 2$ 且具有二重零点的除子 Z_k。

定理 19.2。（Korotkin-Sauvaget-Zograf） Z_k for $k \geq 2$ for$k \geq 2$ and $(g, k) \neq (2, 2)$ 的除子类由下式给出

$$[Z_k] = (4k+2)(g-1)\,\check{h} + k(k+1)\,\check{u}^*(12\lambda - \sum_{i=0}^{[g/2]}\delta_i)\,.$$

证明这两个定理时，我们与第16节一样，使用关联簇 $I_k$between $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k)$ and $\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee)$, 它位于以下交换图中:

$$\begin{array}{ccc} I_k & \xrightarrow{\check{\rho}} & \mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \check{u} \\ \mathbb{P}(\mathbb{E}_k) & \xrightarrow{u} & \overline{\mathcal{M}}_g \end{array}$$

ˇ我们用 h （分别用 h）表示 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}_k$）上的超平面线丛的第一陈类（分别表示 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}_k^\vee$）上的超平面线丛的第一陈类），从而省略对 k 的依赖。如第16节所述，我们有作为 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}_k^\vee$）上丛的 $I_k = \mathbb{P}$（ˇ$F_k^\vee$），其中ˇF_k由 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}_k^\vee$）上的正合列定义

$$0 \to \check{F}_k \to \check{u}^*\mathbb{E}_k^\vee \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee)}(1) \to 0.$$

于是 $\rho^* h = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\check{F}_k{}^\vee)}$(1)。类似地， $I_k = \mathbb{P}$（$F_k^\vee$）是 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}_k$）上的丛，其中 F_k 是 $\mathbb{P}$（$\mathbb{E}_k$）上的ˇ泛秩 $r-1$ 丛。于是ˇρ^*（h）$= \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F_k{}^\vee)}$(1)。

我们令

$$\gamma = \check{\rho}_*\rho^* : \mathrm{CH}^*_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}(\mathbb{E}_k)) \to \mathrm{CH}^*_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee))$$

为诱导映射。

引理 19.3。对于 $i \le r-3$，有 γ（h^i）$=0$；并且 γ（h^{r-2}）$=1$，以及 γ（h^{r-1}）$=$ˇ$h+$ˇu^*c$_1$（$\mathbb{E}_k$）。

证明。由维数原因， γ(h^i) $=0$ 对于 $i \le r-3$。此外， γ(h^{r-2}) $=1$ 是按构造得到的。将ˇρ_* 应用于陈类关系 $\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{r-1-i}(\rho^* h)^i$ˇ$\rho^* c_{r-1-i}$(ˇ$F_k^\vee$) $=0$，可得 γ(h^{r-1}) $= c_1$(ˇ$F_k^\vee$)；根据正合列，这等于ˇ $h+$ˇu^*c$_1$($\mathbb{E}_k$)。□

Proof of Theorem 19.1. 令 W 为 $\overline{\mathcal{C}}_g$上的魏尔斯特拉斯除子。这是一个不可约除子。记 φ_k : $\overline{\mathcal{C}}_g \to \mathbb{P}(\mathbb{E}_k)$ 为第3节中定义的态射。对于 $k \ge 2$，我们有 $G_k = \rho_*\rho^*(\varphi_k(W))$ 在 $\mathcal{M}_g$ 上，且 $\rho_*\rho^*$ 将 $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上方的不可约除子映到一个不可约除子。因此，我们有 $[\overline{G}_k] = \gamma(\varphi_{k*}[W])$。群 Pic$_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathcal{C}}_g)$ 由 ω_π、$\pi^*\lambda$、$\pi^*\delta_0$ 和 γ_i 生成（对于 $i = 1, \ldots\ldots, g-1$），其中 γ_i 是位于 $\Delta_{\min(i,g-i)}$ 上方的亏格为 i 的分支所定义的除子类。根据 Cuckierman，除子类$[W]$ 可写为 $w_1 - w_2$，其中

$$w_1 = \binom{g+1}{2}\omega_\pi - \pi^*\lambda, \quad w_2 = \binom{g-i+1}{2}\sum_{i=1}^{g-1}\gamma_i\,.$$

注意到 $\varphi_k^* h = k\,\omega_\pi$。因此我们得到

$$\begin{aligned} \varphi_{k*}w_1 &= \varphi_{k*}(\frac{g(g+1)}{2}\omega_\pi - \pi^*\lambda) = \varphi_{k*}\varphi_k^*\left(\frac{g(g+1)}{2k}h - u^*\lambda\right) \\ &= \left(\frac{g(g+1)}{2k}h - u^*\lambda\right)\varphi_{k*}[1] = \left(\frac{g(g+1)}{2k}h - u^*\lambda\right)(\sum_{i=0}^{r-2}h^i\beta_{r-2-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1}h^i u^*(\frac{g(g+1)}{2k}\beta_{r-1-i} - \lambda\beta_{r-2-i})\,, \end{aligned}$$

这里我们用到了 (1)。由引理 19.3 可知，在应用 γ 时，只有满足 h^j（其中 $j = r-1$ 或 $r-2$）的项才有贡献，因此我们得到

$$\gamma(\varphi_{k*}w_1) = \gamma(h^{r-1})\frac{g(g+1)}{2k}\beta_0 + \gamma(h^{r-2})\check{u}^*(\frac{g(g+1)}{2k}\beta_1 - \lambda\beta_0)\,.$$

S将 Proposition 3.1 中 β_0 和 β_1 的表达式代入，得到

$$\gamma(\varphi_{k*}w_1) = g(g^2-1)\,\check{h} + 2\,k\,(3g^2+2g+1)\check{u}^*\lambda - \frac{k}{2}\,g(g+1)\sum_{i=0}^{[g/2]}\check{u}^*\delta_i\,.$$

对于项 $\gamma(\varphi_{k*}w_2)$，我们首先注意到 $\gamma(\varphi_{k*}\gamma_i) = (2i-1)k\check{u}^*\delta_i$，因为 $\Delta_{\min(i,g-i)}$上的亏格为 i 的分支的次数为 $(2i-1)k$，且在 $\mathbb{P}^{r-1}$ 中，因此在 γ 下映射为 $(2i-1)k$ 倍的 $\Delta_{\min(i,g-i)}$ 上 $(\mathbb{P}^{r-1})^\vee$ 的类 $[1]$。由此得到

$$\begin{aligned}\gamma(\varphi_{k*}w_2) &= \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{g-1}(g-i)(g-i+1)(2i-1)\,\check{u}^*\delta_i \\ &= \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{[g/2]}((g-i)(g-i+1)(2i-1) + i(i+1)(2g-2i-1))\check{u}^*\delta_i \\ &= \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{[g/2]}(2i(g-i)(g+3) - g(g+1))\check{u}^*\delta_i.\end{aligned}$$

Toge否则，这便给出了定理19.1 中 $[\overline{G}_k]$ 的正确类表达式。

当 $k=1$ 时，在 $\mathcal{M}_g \cup \Delta_0$ 上我们按上述方法处理，公式中 λ 和 δ_0 的系数与情形 $k \geq 2$ 中相同。为了求出 β_1 的公式中 δ_i 的贡献，我们在底空间为 B 的族上进行计算，如附录 18 中所述，其中有一个由 $\omega_{\pi'}(-R)$ 定义的 (2 : 1) 态射 $\varphi' : X \to \mathbb{P}(\mathbb{E})$。我们沿用附录 18 的记号，在公式中只需考虑对边界类 δ_i 有贡献的项。根据 [8]，魏尔斯特拉斯除子不经过 Δ_i 上一般元素的节点，因此 v^*W 不包含“例外”除子 R。由 Cuckierman 公式 $[v^*W] = w_1 - w_2$，其中 $w_1 = \binom{g+1}{2}\omega_{\pi'} - \pi'^*\lambda$；而作为对 Δ_i 上 w_2 的贡献（当 $i \leq [g/2]$ 时），我们得到表达式

$$i(i+1)(2\gamma_1 + \mathfrak{r}) + (g-i)(g-i+1)(2\gamma_2 + \mathfrak{r})\,, \tag{16}$$

其中，γ_1（分别地，γ_2）是亏格为 i 的分支 C_1'（分别地，亏格为 $g-i$ 的分支 C_2'）在 $\Delta_i \cap B$ 上的类，而 $\mathfrak{r}$ 是 R 的类。

若将 v^*W 在二对一映射 $\varphi' : X' \to \mathbb{P}(\mathbb{E}_B)$ 下的约化像的闭包记为 T，则 $[G_1] = \gamma([T])$。回顾一下，$\varphi'^*h = \omega_{\pi'} - R$。因此，$w_1$ 对 $2[T]$ 产生的 δ_i 项为

$$\frac{g(g+1)}{2}\varphi'_*(\omega_{\pi'}) = \frac{g(g+1)}{2}\varphi'_*(\varphi'^*h + \mathfrak{r}) = \frac{g(g+1)}{2}\,(h\varphi'_*[1] + \varphi'_*\mathfrak{r}))\,.$$

若将 (1) 应用于 δ_i，则其在

$$\gamma(h\varphi'_*[1]) = \gamma(\sum_{i=0}^{g-2} h^{i+1}u^*\beta_{g-2-i}) = 2(g-1)(\check{h}+\check{u}^*\lambda)+\check{u}^*\beta_1$$

仅由$\check{u}^*\beta_1$产生，且等于$-4\check{u}^*\delta_i$，因为δ_i在β_1的公式中以系数-2出现。由于$\gamma(\varphi'_*\mathfrak{r}) = 2\check{u}^*\delta_i$，我们从$w_1$得到贡献$-g(g+1)\check{u}^*\delta_i$。由$w_2$出发，将$\gamma$应用于（16），并利用$\gamma(\varphi'_*\gamma_1) = (2i-2)\check{u}^*\delta_i$、$\gamma(\varphi'_*\gamma_2) = (2g-2i-2)\check{u}^*\delta_i$以及$\gamma(\varphi'\mathfrak{r}) = 2\check{u}^*\delta_i$，得到贡献$2(g+3)i(i-g)+g(g+1)$。因此，$w_1-w_2$合起来对$\delta_i$的系数贡献$-2(g+3)i(i-g)$，正如所需。

□

Proof of Theorem 19.2. 这里$k\geq 2$，因此我们有态射$\varphi_k : \overline{\mathcal{C}}_g \to \mathbb{P}(\mathbb{E}_k)$。令$\pi_1 : \overline{\mathcal{C}}_{g,1} \to \overline{\mathcal{C}}_g$为$\overline{\mathcal{C}}_g$上的万有曲线，并令$s: \overline{\mathcal{C}}_g \to \overline{\mathcal{C}}_{g,1}$为典范截面，其像记为$S$。

我们断言：$\varphi_k^* F_k = \pi_{1*}(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-S))$。事实上，根据我们对$g$和$k$的假设，有$R^1\pi_{1*}(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-S)) = 0$，因此$\pi_{1*}(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-S))$是$\overline{\mathcal{C}}_g$上的向量丛。对于一点$x\in\mathbb{P}(\mathbb{E}_k)$，$F_k$的纤维是$\mathbb{E}_k$相应纤维中的超平面，它表示点$x$。当$x=\varphi_k(p)$且$p\in\overline{\mathcal{C}}_g$时，则$(F_k)_x = H^0(C_p, \omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-p))$，其中$C_p$是$\pi_1$在$p$上对应的纤维。因此断言成立。现在我们在$\overline{\mathcal{C}}_g$上有如下序列

$$0 \to \pi_{1*}(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-2S)) \to \pi_{1*}(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-S)) \to s^*(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-S)) \to 0\,, \tag{17}$$

其中$s^*(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-S)) \cong \omega_\pi^{k+1}$，并且由于关于$(g,k)$的条件，$R^1\pi_{1*}(\omega_{\pi_1}^{\otimes k}(-2S))$在余维 2 中消失，因此该序列在余维 2 意义下是正合的。

令$F_k(\nu) = \pi_{1*}(\omega^{\otimes k}(-\nu S))$对于$\nu = 1,2$，且$F_k(1) \cong \varphi^* F_k$。令$j: \mathbb{P}(F_k(1)^\vee) \to \mathbb{P}(F_k^\vee)$为自然映射。则$\tilde{h} = j^*\check{\rho}^*(\check{h})$是$\mathbb{P}(F_k(1)^\vee)$上超平面线丛的类。包含映射$F_k(2) \hookrightarrow F_k(1)$诱导映射$\sigma : \mathbb{P}(F_k(2)^\vee) \to \mathbb{P}(F_k(1)^\vee)$。我们有交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{P}(F_k(2)^\vee) & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}(F_k(1)^\vee) & \xrightarrow{j} & I=\mathbb{P}(F_k^\vee) & \xrightarrow{\check{\rho}} & \mathbb{P}(\mathbb{E}_k^\vee) \\
 & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle \check{u}} \\
 & & \overline{\mathcal{C}}_g & \xrightarrow{\varphi_k} & \mathbb{P}(\mathbb{E}_k) & \xrightarrow{u} & \overline{\mathcal{M}}_g
\end{array}$$

令$\alpha = j\sigma : \mathbb{P}(F_k(2)^\vee) \to I$，并令$A = \mathrm{Im}(\alpha)$为此映射的像。于是$[Z_k] = \check{\rho}_*[A]\tilde{}$由正合列 (17) 可得$\sigma_*[\mathbb{P}(F_k(2)^\vee)] = h + (k+1)\rho_1^*\omega_\pi$。我们注意到$j_*[1] = \rho^*[\overline{\Gamma}_k]$且$k\,\omega_\pi = \varphi_k^* h$，从而得到

$$\begin{aligned}
k[A] &= k\, j_*(j^*\check{\rho}^*\check{h}) + (k+1)j_*(\rho_1^*\phi_k^* h) = k\,\check{\rho}^*\check{h}\, j_*[1] + (k+1)\rho^*(h) j_*[1] \\
&= k\,\check{\rho}^*\check{h}\,\rho^*[\overline{\Gamma}_k] + (k+1)\rho^*(h[\overline{\Gamma}_k])\,.
\end{aligned}$$

由命题 3.1 和引理 19.3 可得$h\gamma([\overline{\Gamma}_k]) = 2k(g-1)h$且

$$\gamma(h[\overline{\Gamma}_k]) = \gamma(\sum_{i=0}^{r-2} h^{i+1}u^*\beta_{r-2-i}) = 2k(g-1)(\check{h}+\check{u}^*\mathrm{c}_1(\mathbb{E}_k)) + \check{u}^*\beta_1 = 2k(g-1)\check{h} + k^2\check{u}^*\kappa_1$$

ˇ 因此 $[Z_k] = 2(2k+1)(g-1)h + k(k+1)\check{}u^*\kappa_1$ 这与定理 19.2 的公式一致。□

References

[1] M. Aprodu, G. Farkas, S. Papadima, C. Raicu, J. Weyman：Koszul 模与 Green 猜想。《数学发明》218（2019年），657–720。[2] A. Arsie, A. Vistoli：射影空间循环覆盖栈。《数学汇编》140（2004年），647—666。[3] A. Clebsch：代数形式的符号表示。纯粹与应用数学杂志 59，1–62（1861年）。[4] F. Cl´ery, C. Faber, G. van der Geer：二元六次型的协变式与亏格 2 的向量值 Siegel 模形式。《数学年刊》369(3—4)，1649—1669（2017年）。[5] F. Cl´ery, C. Faber, G. van der Geer：三元四次型的伴随式以及亏格三的向量值 Siegel 模形式与 Teichmüller 模形式。《数学精选》（2020年）26:55。[6] F. Cl´ery, G. van der Geer：通过不变量理论研究模形式。《数论研究》（2023年）9:35。[7] M. Cornalba：稳定超椭圆曲线模堆的 Picard 群。Rend. Lincei Mat. Appl. 18（2007年），109—115。[8] F. Cuckierman：魏尔斯特拉斯点族。《杜克数学杂志》58（1989年），317–346。[9] D. Eisenbud, J. Harris：3264 及其他：代数几何中的交叉理论。英国剑桥：剑桥大学出版社，2016年。[10] G. van der Geer, A. Kouvidakis：Hurwitz 空间上的霍奇丛。《纯粹与应用数学季刊》7（2011年），第 4 期，专刊：纪念 Eckart Viehweg，1297–1307。[11] G. van der Geer, A. Kouvidakis：除子型 Maroni 轨迹的循环类。《国际数学研究通讯》，第 2016 卷，第 00 期，第 1—47 页，doi: 10.1093/imrn/rnw133[12] I. Gheorghita：射影化霍奇丛中的有效除子。《国际数学研究通讯》，第 2021年 卷，第 1 期，303—325。[13]I. Gheorghita, N. Tarasca：k通过 Brill-Noether 特殊点构造 k典除子。arXiv:2110.07624，比萨高等师范学院学报，即将发表。[14] J. Harris：曲线及其模。在：《鲍登 1985 年代数几何会议》。纯粹数学研讨会论文集 48（1987年），99–143。[15] J. Harris, I. Morrison：《曲线模空间》。《数学研究生教材》187，1998年，施普林格出版社。[16] J. Harris, D. Mumford：曲线模空间的 Kodaira 维数。《数学发明》67（1982年），23–86。[17] J.-I. Igusa：亏格二的算术模。《数学年刊》72（1960年），612–649。[18] J.-I. Igusa：亏格二的 Siegel 模形式。《美国数学杂志》84（1962年），175–200。[19] J.-I. Igusa：模形式与射影不变量。《美国数学杂志》89（1967年），817–855。[20] S. Keel：亏格零稳定 N 标记曲线模空间的交叉理论。《美国数学会汇刊》330（1992年），545–574。[21] T. Korotkin, A. Sauvaget, P. Zograf：Tau 函数、Prym-Tyurin 类与退化微分的轨迹。《数学年刊》375，213–246（2019年）。[22] D. Korotkin, P. Zograf：Tau 函数与微分的模空间。《数学研究快报》18，第 3 期（2011年）：447—58。[23] D. Mumford：射影簇的稳定性。《数学教学》XXIII（1977年），39–110。[24] D. Mumford：迈向曲线模空间的枚举几何。《算术与几何》。献给 I. R. Shafarevich 的论文集，第二卷：几何。《数学进展》36，第 271—328 页。[25] G. Salmon：《高次平面曲线论》。都柏林，Hodges, Foster and Figgis，1879年。

[26] M. Teixidor i Bigas：具有消失 theta 零点的曲线除子。《数学汇编》66（1988年），15–22。
[27] S. Tsuyumine：三阶 Siegel 模形式。《美国数学杂志》108（1986年），755–862。