重叠网格上的时空 CutFEM：简单的连续网格运动

Mats G. Larson*、Anders Logg†、Carl Lundholm‡

2023年3月2日

arXiv:2302.00337v2 [math.NA] 1 Mar 2023

摘要

我们提出一种用于两个重叠网格上热方程的切割有限元方法：一个静止背景网格，以及一个在其内部／“上方”移动的重叠网格。这里，重叠网格按照一种简单的连续运动方式移动，即其位置随时间变化连续 且为分段线性。对于离散函数空间，我们在空间上采用连续 Galerkin 方法，在时间上采用间断 Galerkin 方法，并在两个网格之间的边界上加入一个不连续项。有限元公式基于 Nitsche 方法，还包括一个在两个网格之间的时空边界上的积分项，该项模拟了标准的间断 Galerkin 时间跳跃项。简单的连续网格运动产生了一种时空离散化，使得标准分析方法要么失效，要么不适用。因此，我们采用一种似乎相对较新的能量分析框架，它具有足够的通用性和稳健性，可用于当前问题。能量分析包括一个略强于标准基本估计的稳定性估计，以及一个关于时间步长和网格尺寸均达到最优阶的先验误差估计。我们还给出了一维空间问题的数值结果，验证了理论误差收敛阶。

关键词： CutFEM、时空 CutFEM、时变 CutFEM、重叠网格、抛物型问题、能量分析

1 引言

问题 - 网格生成成本：用于数值求解微分方程的计算网格生成过程可能会带来高昂的计算成本。在实际应用中，网格生成往往占总计算时间的相当一部分。对于求解过程中求解域会发生变化的问题，这一点尤其明显

*乌梅奥大学数学与数理统计系，瑞典乌梅奥 SE-901 87

†查尔姆斯理工大学与哥德堡大学数学科学系，瑞典哥德堡 SE-41296

‡乌梅奥大学数学与数理统计系，瑞典乌梅奥 SE-901 87

例如演变几何和形状优化。使用标准方法时，必须持续检查网格是否退化，并在必要时进行更新，这意味着整个求解过程中都要不断承担网格剖分成本。

补救措施 - CutFEM： 切割有限元法（CutFEM）提供了一种将计算网格与问题几何解耦的方法。这意味着对于不断变化的求解域，可以使用相同的离散化。因此，对于几何形状不断变化的问题，以及涉及网格剖分的其他应用（例如自适应网格加密），CutFEM 可以使重新网格剖分变得多余。CutFEM 的代价在于需要处理被独立问题几何任意切割的网格单元。

重叠网格上的 CutFEM： 一类常见的几何形状变化问题是求解域中存在移动物体的问题，例如参见图1。针对此问题，一种直接的 CutFEM 方法是将其视为界面问题的 CutFEM，即对空的求解域使用背景网格，并配合表示该物体的界面。然而，一种更具优势且更为复杂的方法是采用重叠网格上的 CutFEM，即使用按照网格层次结构组织的两个或更多网格。在相关文献中，这也被称为复合网格或多重网格。其基本思想是：与界面问题一样，对空的求解域使用背景网格，但不采用界面，而是将物体封装在第二个网格中。包含该物体的网格

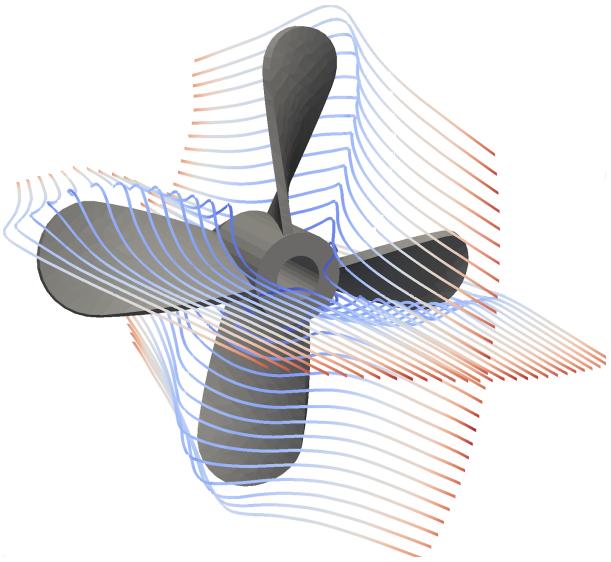


图1： 螺旋桨周围计算得到的流线。Anders Logg 拍摄的图像，依据 CC BY 4.0 许可。

随后将物体放置在背景网格“上方”，从而形成网格层次结构。因此，物体的运动也会带动包围它的网格移动。与使用界面相比，使用第二个重叠网格有一些优点。首先，重叠网格可以在靠近物体处纳入边界层，而界面则无法做到。其次，所得线性系统的自由度（DOF）总数可能会减少。这是因为，对于界面问题的 CutFEM，该数量可能达到背景网格自由度的两倍甚至更多；而对于重叠网格上的 CutFEM，该数量则是背景网格自由度与第二个网格自由度之和。第三，如果物体的几何形状复杂，用界面表示它可能会导致棘手的切割情形，进而提高计算成本。改用外边界形状简单、包围物体的网格，可以使切割情形不那么棘手，见图 2。进一步改进的方法是，允许运动物体使重叠网格内部发生变形，同时在初始阶段保持其外边界固定。只有当变形过大时，才将重叠网格“吸附”到位，以避免退化。这种吸附功能让我们可以在计算切割情形和计算变形之间进行选择，从而能够针对当前情形选取成本最低的方案

。与界面相比，使用第二个重叠网格的缺点是，重叠网格需要计算网格单元之间的碰撞，这可能会带来较高的计算成本。

重叠网格上的 CutFEM 也可作为自适应网格加密的替代方案：在需要更高精度的区域保留较小、较精细的网格。另一个应用示例是组合多个较简单的结构化网格来表示复杂区域。

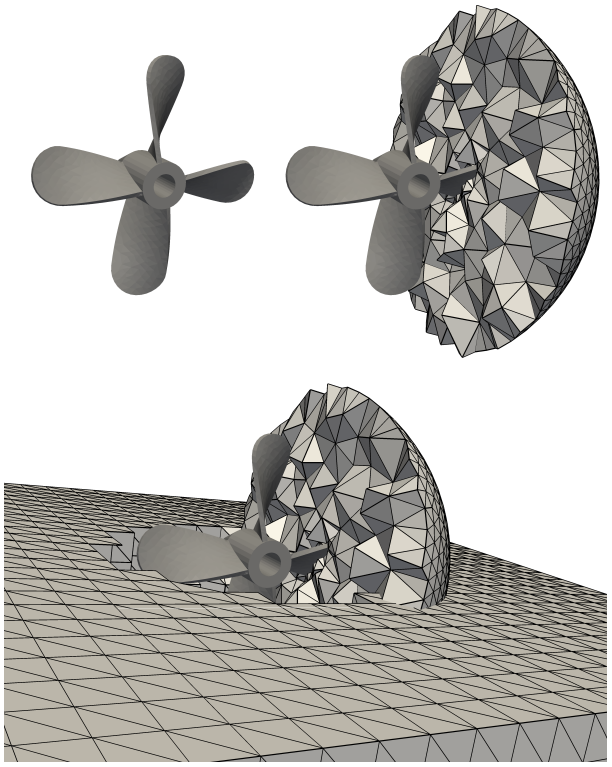


图 2：旋转螺旋桨问题中的重叠网格。图片由 Anders Logg 提供，采用 CC BY4.0 许可。

研究背景：过去二十年来，研究人员通过将 Nitsche 在 [1], 中提出的思想推广到界面条件的一般弱形式，建立了稳定化 CutFEM 公式的理论基础，从而不再需要贴合区域边界的网格。CutFEM 的基础见 [2] ，随后在 [3] 中扩展到重叠网格。此后，CutFEM 方法不断发展，并应用于许多重要的多物理场问题。例如，参见 [4–7]。关于重叠网格，特别可参见 [8–11]。迄今为止，重叠网格上的 CutFEM 仅针对稳态问题得到了充分的发展和分析，因此时间相关问题的类似研究仍有待开展。

本文工作：本文旨在作为开发和分析用于重叠网格上时变问题的 CutFEM 的初步工作。我们考虑两个重叠网格上的热方程 CutFEM：一个静止背景网格，以及一个不含物体的移动重叠网格。根据网格运动在离散层面的表示方式，可能会产生截然不同的时空离散化，从而可以采用不同类型的分析方法。通常，网格运动可以是连续的，也可以是间断的。我们研究了这两种类型中最简单的情形，分别称为简单连续网格运动和简单间断网格运动。简单连续网格运动是指重叠网格的位置随时间变化连续且分段线性，而简单间断网格运动是指其位置间断且分段常数。后者已在其他工作中研究，本文研究前者。

分析创新点：这种简单的连续网格运动会产生一种时空离散化，其时空节点轨迹是倾斜的，并包含切割的棱柱形时空单元。这种离散化不具备空间与时间之间的逐时间层乘积结构。标准

分析方法依赖于这种结构，因此在此处要么失效，要么需要过于严格的假设。原因在于，标准分析方法通常使用映射到瞬时有限元空间的空间算子，例如离散拉普拉斯算子，以及用于定义 L^2 上 H^{-1}-范数的解算子。如果空间离散化在时间层内发生变化，这些算子就会具有内在的时间依赖性，而标准方法无法将其纳入考量。因此，我们采用了一种似乎相对较新的抛物问题分析框架，它避免使用上述类型的算子，从而具有足够的通用性和稳健性，能够适用于当前的离散化。这一分析框架的核心组成部分似乎是由我们以及 Cangiani、Dong 和 Georgoulis 于 [12] 中独立发现的。该分析属于能量型分析，利用时空能量范数推导并获得稳定性估计，其结果略强于标准的基本估计；同时还得到先验误差估计，其关于时间步长和网格尺寸均具有最优阶。该新型能量分析的主要步骤如下：

0. 时间导数的处理：这是刻画整个分析并为其确定方向的初始步骤。为了将时间导数项纳入时空能量范数，使用按时间步长缩放的 L^2-范数，而不是 H^{-1}-范数。1. 分析预备知识：证明了“扰动强制性”，并利用它说明 inf-sup 条件。由于采用了新的时间导数处理方式，这些结果与相应的标准结果略有不同。2. 稳定性分析：利用“扰动强制性”推导出稳定性估计，该估计比通过与离散解进行测试所得的标准基本估计略强。3. 误差分析：与标准能量分析一样，先采用类似 Céa 引理的论证，再利用 inf-sup 条件、伽辽金正交性和连续性。不同之处在于，连续性需要结合一种特殊处理，即对时间进行分部积分；这是因为 inf-sup 条件略有不同。最后，结合插值估计，可以证明最优阶的先验误差估计。

论文概述：第2节中，我们对模型问题进行表述。第3节介绍 CutFEM。第4节介绍分析所需的工具。第5节给出并证明离散解的稳定性估计。第6节给出并证明最优阶先验误差估计。第7节展示一维空间问题的数值结果，以验证解析收敛阶。附录中给出分析中使用的技术估计和插值结果。

2 问题

对于 $d = 1$，2 或 3，设 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ 为一个具有多边形边界 $\partial\Omega_0$的有界凸域。设 $T > 0$ 为给定的终止时间。设 $G \subset \Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ 为另一个具有多边形边界 ∂G的有界区域。我们通过以下方式使 G 的位置随时间变化

为 G 指定速度 μ： $[0,T] \to \mathbb{R}^d$。需要指出的是，G 的大小和形状在所有时间内保持不变。利用 Ω_0 和 G，我们定义以下两个区域：

$$\Omega_1 := \Omega_0 \setminus (G \cup \partial G) \tag{2.1}$$
$$\Omega_2 := \Omega_0 \cap G \tag{2.2}$$

边界分别为 $\partial\Omega_1$ 和 $\partial\Omega_2$，。令它们的公共边界为

$$\Gamma := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \tag{2.3}$$

对于 $t \in [0,T]$，我们有如下划分

$$\Omega_0 = \Omega_1(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_2(t) \tag{2.4}$$

示意图见图 3。我们考察 $\Omega_0 \times (0, T]$ 中的热方程，其源项为 $f \in L^2((0, T], \Omega_0)$，齐次

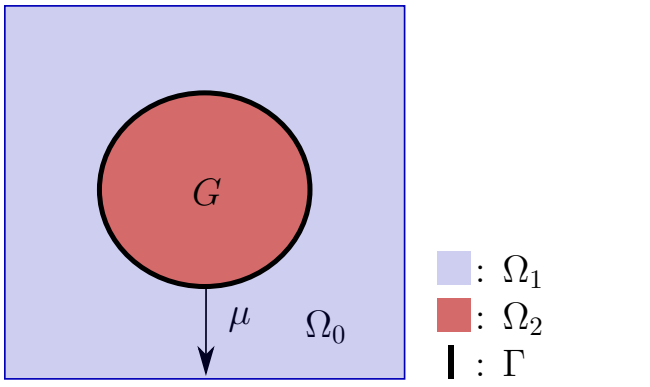


图 3： 将 Ω_0 划分为 Ω_1 （蓝色）和 Ω_2 （红色），其中 $d = 2$ 以速度μ移动。

狄利克雷边界条件，以及初始数据 $u_0 \in H^2(\Omega_0) \cap H_0^1(\Omega_0)$：

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = f & \text{in } \Omega_0 \times (0,T] \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_0 \times (0,T] \\ u = u_0 & \text{in } \Omega_0 \times \{0\} \end{cases} \tag{2.5}$$

3 方法

3.1 预备知识

设 $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{T}_G$ 分别是 Ω_0 和 G上的拟一致单纯形网格。我们用 h_K 表示单纯形 K的直径。将时间区间 $(0, T]$ 拟一致地划分为 N个子区间 $I_n = (t_{n-1}, t_n]$，每个子区间长度为 $k_n = t_n - t_{n-1}$，其中 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$且 $n = 1, \ldots\ldots, N$。我们作如下时空拟一致性假设：对于$h = \max_{K\in\mathcal{T}_0\cup\mathcal{T}_G}\{h_K\}$，且 $k = \max_{1\le n\le N}\{k_n\}$，

$$h^2 \lesssim k_{\min} \quad k \lesssim h_{\min} \tag{3.1}$$

其中 $k_{\min} = \min_{1\le n\le N}\{k_n\}$，且 $h_{\min} = \min_{K\in\mathcal{T}_0\cup\mathcal{T}_G}\{h_K\}$。接下来定义如下分片时空区域：

$$S_{0,n} := \Omega_0 \times I_n \tag{3.2}$$
$$S_{i,n} := \{(x,t) \in S_{0,n} : x \in \Omega_i(t)\} \tag{3.3}$$
$$\bar{\Gamma}_n := \{(s,t) \in S_{0,n} : s \in \Gamma(t)\} \tag{3.4}$$

通常我们用上横线，即 $\bar{\cdot}$，表示与时空相关的对象，例如区域和变量。除了区域 $\Omega_1(t)$ 和 $\Omega_2(t)$ 外，我们还考虑“覆盖的”重叠区域 $\Omega_O(t)$。为定义它，我们将使用单纯形集合 $\mathcal{T}_{0,\bar{\Gamma}_n} := \{K \in \mathcal{T}_0 : \exists t \in I_n$ 使得 $K \cap \Gamma(t) \neq \emptyset\}$，即 $\mathcal{T}_0$ 中所有被 Γ_n切割的单纯形。对于时间 $t \in I_n$，我们将重叠区域 $\Omega_O(t)$ 定义为

$$\Omega_O(t) := \bigcup_{K\in\mathcal{T}_{0,\bar{\Gamma}_n}} K \cap \Omega_2(t) \tag{3.5}$$

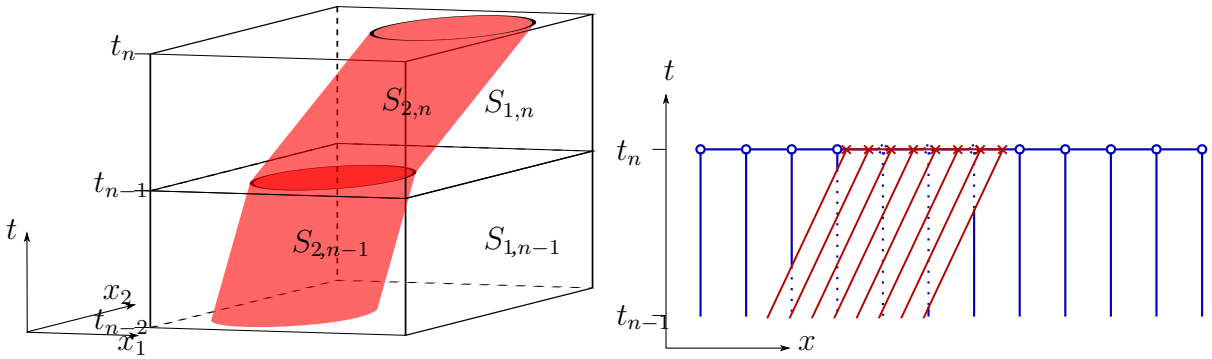


图 4：左：具有简单连续网格运动的时空片。**右：**当 $\mu > 0$时，S_0上的时空离散n 适用于 $d = 1$ 。在时间$t = t_n$，蓝色背景网格 $\mathcal{T}_0$ 的节点用圆圈标记，红色移动网格 $\mathcal{T}_G$ 的节点用叉号标记。因此，蓝色竖线是 $\mathcal{T}_0$ 的节点轨迹，红色倾斜竖线则是 $\mathcal{T}_G$的节点轨迹。

作为区域 G运动的离散对应形式，我们为重叠网格 $\mathcal{T}_G$指定一种简单的连续运动。也就是说，重叠网格 $\mathcal{T}_G$ 的位置是关于时间的函数，该函数在 $[0, T]$ 上连续，并且在每个 I_n上线性。这意味着，我们为 $\mathcal{T}_G$ 指定的离散速度在每个I_n上都是常数。下文中，我们用 μ 表示这一离散速度。令 μ_{cont} 表示为 G指定的速度，则离散速度取为 $\mu|_{I_n} = k_n^{-1} \int_{I_n} \mu_{\text{cont}}(t)\, \mathrm{d}t$，其中 n =1，……，N，即逐片平均。图 4（左）展示了由 (3.3) 定义的分片时空区域$S_{i,\ n}$。图 4（右）展示了一种分片时空离散化；由于采用简单的连续网格运动，其中既有直线时空轨迹，也有倾斜时空轨迹。在只有直线时空轨迹的标准情形下，时间导数算子 ∂_t 自然也是沿轨迹方向的导数算子。这种做法很方便，因此我们希望在当前情形下构造一个类似的算子。首先定义依赖于区域的速度 $\mu_i = \mu_i(t)$:

$$\mu_i(t) := \begin{cases} \mathbf{0} & i = 1 \\ \mu(t) & i = 2 \end{cases} \tag{3.6}$$

我们使用该速度定义依赖于区域的导数算子$D_t = D_{t,\ i}$，其定义为

$$D_{t,i}\{\cdot\} := \partial_t\{\cdot\} + \mu_i \cdot \nabla\{\cdot\} \tag{3.7}$$

算子 D_t 是沿时空轨迹方向的缩放后导数算子。为说明这一点，考虑时空向量 $\bar{\mu}_i = (\mu_i,\ 1)$以及时空梯度 $\bar{\nabla} = (\nabla,\ \partial_t)$。沿时空轨迹方向的未缩放导数算子为

$$D_{s,i} = \frac{\bar{\mu}_i}{|\bar{\mu}_i|} \cdot \bar{\nabla} = \frac{1}{|\bar{\mu}_i|}\left(\mu_i \cdot \nabla + \partial_t\right) = \frac{1}{|\bar{\mu}_i|} D_{t,i} \tag{3.8}$$

因此，我们有 $D_{t,\ i} = |\bar{\mu}_i| D_{s,\ i}$。令 $\bar{\tau} = \bar{\tau}(t)$ 表示在时间区间（t_a，t_b）上未被切割的时空轨迹，并令 v 为具有充分正则性的函数。D_t 的内禀缩放给出了方便的积分恒等式

$$\int_{\bar{\tau}(t_a)}^{\bar{\tau}(t_b)} D_s v \,\mathrm{d}s = \int_{t_a}^{t_b} D_t v \,\mathrm{d}t \tag{3.9}$$

接下来我们引入一些法向量。令空间向量 $n = n_i$ 表示指向 $\partial\Omega_i$ 外部的单位法向量。令时空向量 $\bar{n} = \bar{n}_i = (\bar{n}_i^x, \bar{n}_i^t)$ 表示指向$\partial S_{i,n}$外部的单位法向量，其中 $\bar{n}_i^x$ 和 $\bar{n}_i^t$ 分别表示空间分量和时间分量。在纯空间子集上，时空单位法向量纯粹是时间方向的，即 $\bar{n}_i = (0, \pm 1)$，反之亦然，即 $\bar{n}_i = (n_i, 0)$。剩下的情形是混合 时空子集，而

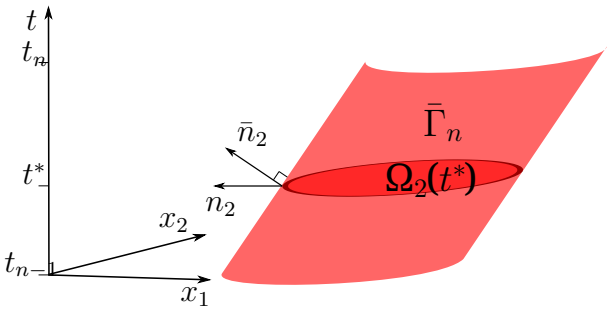


图5： 时空法向量 $\bar{n}_2$ to Γ_n(红色)，相对于空间法向量 $n_2$to $\partial\Omega_2$。

唯一这样的集合是 Γ_n。参见图5中的示意图。我们将时空单位法向量vector 定义为 Γ_n

$$\bar{n}_i|_{\bar{\Gamma}_n} = (\bar{n}_i^x, \bar{n}_i^t)|_{\bar{\Gamma}_n} := \frac{1}{\sqrt{(n_i \cdot \mu)^2 + 1}}(n_i, -(n_i \cdot \mu)) \tag{3.10}$$

3.2 有限元空间

我们将离散空间有限元空间 $V_{h,0}$ 和$V_{h,G}$ 定义为 $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{T}_G$上次数为 $\leq p$ 的连续分片多项式构成的空间。我们还令$V_{h,0}$中的函数在 $\partial\Omega_0$上为零。对于 $t \in [0, T]$，我们使用这两个空间来定义破碎有限元空间 $V_h(t)$，其定义为

$$\begin{aligned} V_h(t) := \{v : v|_{\Omega_1(t)} = v_0|_{\Omega_1(t)} \text{ for some } v_0 \in V_{h,0} \text{ and} \\ v|_{\Omega_2(t)} = v_G|_{\Omega_2(t)} \text{ for some } v_G \in V_{h,G}\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

参见图6中的示意图，其中展示了函数 $v \in V_h(t)$。对于 $n = 1, \ldots, N$，我们定义

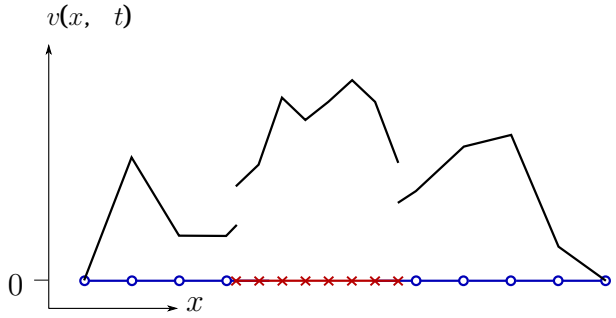


图6： $v(\cdot, t) \in V_h(t)$的示例，其中 $d = 1$ 和 $p = 1$分别为蓝色和 $\mathcal{T}_G$ 红色。

离散时空有限元空间V_h^n, 0和V_h^n, G 定义为如下函数空间：对于 $t \in I_n$，这些函数分别属于$V_{h,0}$和$V_{h,G}$；在时间方向上，它们分别沿着 $\mathcal{T}_0$和 $\mathcal{T}_G$的轨迹为次数为 $\leq q$ 的多项式，其中 $t \in I_n$。对于 $n = 1, \ldots, N$，我们使用这两个空间定义破碎有限元空间 V_h^n：

$$\begin{aligned} V_h^n := \{v : v|_{S_{1,n}} = v_0^n|_{S_{1,n}} \text{ for some } v_0^n \in V_{h,0}^n \text{ and} \\ v|_{S_{2,n}} = v_G^n|_{S_{2,n}} \text{ for some } v_G^n \in V_{h,G}^n\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

我们将全局时空有限元空间 V_h 定义如下：

$$V_h := \{v : v|_{S_{0,n}} \in V_h^n, n = 1, \ldots, N\} \tag{3.13}$$

3.3 有限元公式

现在，我们可以将第2节所述问题的时空切割有限元公式表述如下：求 $u_h \in V_h$ ，使得

$$B_h(u_h, v) = \int_0^T (f, v)_{\Omega_0} \,\mathrm{d}t + (u_0, v_0^+)_{\Omega_0} \quad \forall v \in V_h \tag{3.14}$$

非对称双线性型 B_h 定义为

$$\begin{aligned} B_h(w, v) := & \sum_{i=1}^{2} \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} (\dot{w}, v)_{\Omega_i(t)} \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} A_{h,t}(w, v) \,\mathrm{d}t \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} ([w]_n, v_n^+)_{\Omega_0} + (w_0^+, v_0^+)_{\Omega_0} + \sum_{n=1}^{N} \int_{\bar{\Gamma}_n} -\bar{n}^t [w] v_\sigma \,\mathrm{d}\bar{s} \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中，$(\cdot,\cdot)_\Omega$ 是 $L^2(\Omega)$ 内积，$[v]_n$ 是 v 在时间 t_n 处的跳跃，即 $[v]_n = v_n^+ - v_n^-, v_n^\pm = \lim_{\varepsilon \to 0+} v(x, t_n \pm \varepsilon)$。$B_h$ 中的最后一项模拟了标准间断伽辽金时间跳跃项$^-$ $^-$，但作用于 Γ_n上。这里，$\bar{n}$ 是由（3.10）定义的、相对于 Γ_n 的时空法向量，$[v]$是$^-$在 Γ_n上的 v 跳跃，即 $[v] = v_1 - v_2$, $v_i = \lim_{\varepsilon \to 0+} v(\bar{s} - \varepsilon \bar{n}_i)$，$\bar{s} = (s, t)$。如果 $\bar{n} = \bar{n}_1$，则取 $\sigma = \frac{1}{2}(3 + \mathrm{sgn}(\bar{n}^t))$；如果 $\bar{n} = \bar{n}_2$，则取 $\sigma = \frac{1}{2}(3 - \mathrm{sgn}(\bar{n}^t))$，其中 sgn 是符号函数。$^-$这样选择后，$\sigma$ 总是取时间正向 $^-$一侧 Γ_n的极限。对称双线性型 $A_{h,t}$ 定义为

$$\begin{aligned} A_{h,t}(w, v) := & \sum_{i=1}^{2} (\nabla w, \nabla v)_{\Omega_i(t)} - |\bar{\mu}|(\langle \partial_{\bar{n}^x} w \rangle, [v])_{\Gamma(t)} - |\bar{\mu}|(\langle \partial_{\bar{n}^x} v \rangle, [w])_{\Gamma(t)} \\ & + |\bar{\mu}|(\gamma h_K^{-1} [w], [v])_{\Gamma(t)} + ([\nabla w], [\nabla v])_{\Omega_O(t)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中，$|\bar{\mu}| = \sqrt{|\mu|^2 + 1}$ $\langle v \rangle$ 是 Γ上的 v 凸加权平均，即 $\langle v \rangle = \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2$，其中 ω_1, $\omega_2 \in [0, 1]$ 且 $\omega_1 + \omega_2 = 1$ $\partial_{\bar{n}^x} v = \bar{n}^x \cdot \nabla v$ $\gamma \geq 0$ 是稳定化参数，$h_K = h_K(x) = h_{K_0}$ 适用于 $x \in K_0$，其中h_{K_0} 是单纯形 $K_0 \in \mathcal{T}_0$的直径，而 $\Omega_O(t)$ 是由 (3.5) 定义的重叠区域。将因子 $|\bar{\mu}|$ 纳入 $\Gamma(t)^-$项的原因是，考虑时空问题时，这些项应当处于 Γ_n上。由于 $|\bar{\mu}|$ 是倾斜的时间尺度，因此我们有

$$\int_{I_n} |\bar{\mu}|(w, v)_{\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t = \int_{\bar{\Gamma}_n} wv \,\mathrm{d}\bar{s} \tag{3.17}$$

4 分析预备知识

4.1 双线性形式 $A_{h,t}$

由 $A_{h,t}$ 构成的空间是 $H^{3/2+\varepsilon}(\cup_i \Omega_i(t))$，其中 $\varepsilon > 0$ 可以任意小。设 $\Gamma_K(t) := K \cap \Gamma(t)$。我们定义以下两个网格相关范数：

$$\|w\|_{1/2,h,\Gamma(t)}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_{0,\Gamma(t)}} h_K^{-1} \|w\|_{\Gamma_K(t)}^2 \qquad \|w\|_{-1/2,h,\Gamma(t)}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_{0,\Gamma(t)}} h_K \|w\|_{\Gamma_K(t)}^2 \tag{4.1}$$

注意，

$$\|w\|_{\Gamma(t)}^2 \leq h \|w\|_{1/2,h,\Gamma(t)}^2 \qquad (w, v)_{\Gamma(t)} \leq \|w\|_{-1/2,h,\Gamma(t)} \|v\|_{1/2,h,\Gamma(t)} \tag{4.2}$$

我们将时变空间能量范数 $|||\cdot|||_{A_{h,\,t}}$ 定义为

$$|||w|||^2_{A_{h,t}} := \sum_{i=1}^{2} \|\nabla w\|^2_{\Omega_i(t)} + |\bar{\mu}|\|\langle \partial_{\bar{n}^x} w\rangle\|^2_{-1/2,h,\Gamma(t)} + |\bar{\mu}||[w]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} + \|[\nabla w]\|^2_{\Omega_O(t)} \quad (4.3)$$

$A_{h,\,t}$ 的连续性可通过在 (3.16) 中使用 (4.2) 得出。接下来我们讨论强制性：

引理 4.1（A_h的离散强制性，t）。设双线性形式 $A_{h,\,t}$ 和能量范数 $|||\cdot|||_{A_{h,\,t}}$ 分别由 (3.16) 和 (4.3) 定义。那么，当 $t \in [0,T]$ 和 γ充分大时，

$$A_{h,t}(v,v) \gtrsim |||v|||^2_{A_{h,t}} \quad \forall v \in V_h(t) \quad (4.4)$$

证明。 按照 [2], 中强制性的证明，我们考虑

$$\begin{aligned} 2|\bar{\mu}|(\langle \partial_{\bar{n}^x} v\rangle, [v])_{\Gamma(t)} &\le \frac{|\bar{\mu}|}{\varepsilon}\|\langle \partial_{\bar{n}^x} v\rangle\|^2_{-1/2,h,\Gamma(t)} + \varepsilon|\bar{\mu}||[v]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} \\ &\le \frac{2|\bar{\mu}|}{\varepsilon} C_I \left(\sum_{i=1}^{2} \|\nabla v\|^2_{\Omega_i(t)} + \|[\nabla v]\|^2_{\Omega_O(t)} \right) \\ &\quad - \frac{|\bar{\mu}|}{\varepsilon}\|\langle \partial_{\bar{n}^x} v\rangle\|^2_{-1/2,h,\Gamma(t)} + \varepsilon|\bar{\mu}||[v]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

whe此处我们使用了引理 A.5，并将其常数记为 C_I。我们在

$$\begin{aligned} A_{h,t}(v,v) &= \sum_{i=1}^{2} \|\nabla v\|^2_{\Omega_i(t)} - 2|\bar{\mu}|(\langle \partial_{\bar{n}^x} v\rangle, [v])_{\Gamma(t)} + \gamma|\bar{\mu}||[v]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} + \|[\nabla v]\|^2_{\Omega_O(t)} \\ &\ge \left(1 - \frac{2|\bar{\mu}|C_I}{\varepsilon}\right) \sum_{i=1}^{2} \|\nabla v\|^2_{\Omega_i(t)} + \frac{|\bar{\mu}|}{\varepsilon}\|\langle \partial_{\bar{n}^x} v\rangle\|^2_{-1/2,h,\Gamma(t)} \\ &\quad + (\gamma - \varepsilon)|\bar{\mu}||[v]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} + \left(1 - \frac{2|\bar{\mu}|C_I}{\varepsilon}\right)\|[\nabla v]\|^2_{\Omega_O(t)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

取 $\varepsilon > 2|\bar{\mu}|C_I$和 $\gamma > \varepsilon$ 后，可由 (4.6) 得到 (4.4)。 ■

4.2 双线性形式 B_h

双线性形式 B_h 可以用另一种方式表示，如下引理所述：

引理 4.2（B_h**的另一种形式**）。设 $\zeta = \frac{1}{2}(3 - sgn(\bar{n}^t))$. 由 (3.15) 定义的双线性形式 B_h 可写为

$$\begin{aligned} B_h(w,v) = &\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} (w, -\dot{v})_{\Omega_i(t)}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{N}\int_{I_n} A_{h,t}(w,v)\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1} (w_n^-, -[v]_n)_{\Omega_0} + (w_N^-, v_N^-)_{\Omega_0} + \sum_{n=1}^{N}\int_{\bar{\Gamma}_n} \bar{n}^t w_\zeta [v]\,\mathrm{d}\bar{s} \end{aligned} \quad (4.7)$$

证明。 该证明与标准情形类似。对（3.15）中的第一项关于时间进行分部积分，得到 $\int_{S_{i,n}} (\nabla, \partial_t)\cdot(\mathbf{0}, wv)\,\mathrm{d}\bar{x}$，并将结果与（3.15）中的最后三项合并。纯时间跳跃相关项的合并方式与标准情形完全相同。对于 $\bar{\Gamma}_n$-积分项，令 $\zeta = \frac{1}{2}(3 - \mathrm{sgn}(\bar{n}^t))$，若 $\sigma = \frac{1}{2}(3 + \mathrm{sgn}(\bar{n}^t))$，且 $\bar{n} = \bar{n}_1$。这样便有 $\zeta, \sigma \in \{1,2\}$ 和 $\zeta \neq \sigma$。 ■

分析中一个重要结果是，首先将同一函数作为 B_h 的两个参数。我们将这一结果表述为 B_h 的强制性，其对应的时空能量范数如下：

$$\begin{aligned}|||v|||_{B_h}^2 := &\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t\\ &+\sum_{n=1}^{N-1}\|[v]_n\|_{\Omega_0}^2+\|v_N^-\|_{\Omega_0}^2+\|v_0^+\|_{\Omega_0}^2+\sum_{n=1}^{N}\||\bar{n}^t|^{1/2}[v]\|_{\Gamma_n}^2\end{aligned}\tag{4.8}$$

引理 4.3（ B_h的离散强制性）。设双线性形式 B_h 和能量范数 $|||\cdot|||_{B_h}$ 分别由 (3.15) 和 (4.8) 定义。那么，当 γ 充分大时，有

$$B_h(v,v)\gtrsim|||v|||_{B_h}^2\quad\forall v\in V_h\tag{4.9}$$

证明。证明与标准情形类似。首先，将同一函数 v 同时作为 B_h的两个自变量。然后，通过 $\int_{S_{i,n}}(\nabla,\ \partial_t)\cdot(0,\ v^2)\,\mathrm{d}\bar{x}$ 对 (3.15) 中的第一项关于时间积分，并将结果与 (3.15) 中最后三项合并。纯时间跳跃相关项的组合¯与标准情形完全相同。对于 Γ_n-积分项，由 σ 与 $\bar{n}$ 之间的相互依赖关系可知，合并后的被积函数可写为 $\bar{n}^t\mathrm{sgn}(\bar{n}^t)[v]^2$。再利用引理 4.1，即可得到所需的估计。■

为继续进行分析，我们定义三个时空能量范数如下：

$$|||v|||_X^2:=\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}k_n\|D_tv\|_{\Omega_i(t)}^2\,\mathrm{d}t+|||v|||_{B_h}^2\tag{4.10}$$

$$|||v|||_{Y_+}^2:=\sum_{n=1}^{N}\left(\int_{I_n}\frac{1}{k_n}\|v\|_{\Omega_0}^2\,\mathrm{d}t+\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t+\|v_{n-1}^+\|_{\Omega_0}^2\right)\tag{4.11}$$

$$|||v|||_{Y_-}^2:=\sum_{n=1}^{N}\left(\int_{I_n}\frac{1}{k_n}\|v\|_{\Omega_0}^2\,\mathrm{d}t+\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t+\|v_n^-\|_{\Omega_0}^2\right)\tag{4.12}$$

X-范数是主范数，也就是说，我们用该范数得到稳定性和误差估计。 Y-范数是辅助范数。我们使用 X-范数和 Y-范数来得到 B_h 的连续性；根据起始点不同，它有两种形式，即 B_h 的标准形式 (3.15) 或替代形式 (4.7)。

引理 4.4（ B_h的连续性）。设双线性形式 B_h 由 (3.15) 定义，范数 $|||\cdot|||_X$、 $|||\cdot|||_{Y_+}$和 $|||\cdot|||_{Y_-}$ 分别由 (4.10)、(4.11) 和 (4.12) 定义。那么，对于具有足够空间和时间正则性的任意函数 w 和 v，有：

$$B_h(w,v)\lesssim|||w|||_X\,|||v|||_{Y_+}\tag{4.13}$$

$$B_h(w,v)\lesssim|||w|||_{Y_-}\,|||v|||_X\tag{4.14}$$

证明。 (4.13) 和 (4.14) 的证明类似，因此我们只考虑后者，因为它给出了误差分析所需的连续性结果。起点是 B_h (4.7) 的另一种形式。对所有项应用柯西–施瓦茨不等式（对某些项需多次应用不同形式），应用 (3.7) 拆分第一项，再对所得 $\mu_i\cdot\nabla$-部分中的 w-因子应用推论 A.1；处理第二项时利用 $A_{h,t}$ 的连续性，处理第五项时利用引理 A.3。由此得到乘积项，其中一个因子可用 $|||w|||_{Y_-}$ 估计，另一个可用 $|||v|||_X$估计。■

接下来，我们给出一个涉及双线性形式 B_h 和 X-范数的估计，可将其视为此类强制性的对应形式。根据该估计的特点，我们称之为“扰动强制性”。该估计是能量分析的基石，对稳定性分析至关重要，同时也是推导 inf-sup 条件的起点，而 inf-sup 条件又是误差分析的关键。扰动强制性证明中用到的关键技术结果是引理 A.8 和引理 A.10。

引理 4.5（ B_h的离散扰动强制性）。设双线性形式 B_h 和范数 $|||\cdot|||_X$ 分别由 (3.15) 和 (4.10) 定义。那么，对于 $q=0,\ 1$，且 γ充分大时，存在常数 $\delta>0$ 使得

$$B_h(v, v+\delta k_n D_t v) \gtrsim |||v|||_X^2 \quad \forall v \in V_h \tag{4.15}$$

证明。 利用常数为 $\beta>0$的引理 4.3，(4.15) 左端为

$$B_h(v, v+\delta k_n D_t v) \geq \beta\, |||v|||_{B_h}^2 + B_h(v, \delta k_n D_t v) \tag{4.16}$$

右端的第二项为

$$\begin{aligned} B_h(v, \delta k_n D_t v) =& \sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} (\dot{v}, \delta k_n D_t v)_{\Omega_i(t)} + \sum_{n=1}^{N}\int_{I_n} A_{h,t}(v, \delta k_n D_t v)\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N-1} ([v]_n, (\delta k_n D_t v)_n^+)_{\Omega_{i,n}} + \sum_{i=1}^{2} (v_0^+, (\delta k_n D_t v)_0^+)_{\Omega_{i,0}} \\ &+ \sum_{n=1}^{N} \int_{\bar{\Gamma}_n} -\bar{n}^t [v] (\delta k_n D_t v)_\sigma \,\mathrm{d}\bar{s} \end{aligned} \tag{4.17}$$

大多数项的处理都用到了柯西–施瓦茨不等式，其中有些项还用到了 ε 加权的杨氏不等式。(4.17) 中的第一项利用 (3.7) 拆分，其中 D_t 部分是有利项，而对 $\mu_i\cdot\nabla$ 部分我们使用标准估计。对于 (4.17) 中的第二项，我们先利用 $A_{h,\ t}$ 的连续性，再应用引理 A.8。(4.17) 中的第三项和第四项由引理 A.10 估计。对于第五项，也是最后一项，我们使用引理 A.3 和引理 A.8。汇总所有估计并利用 (4.16) 中的结果，可得

$$\begin{aligned} B_h(v, v+\delta k_n D_t v) \geq& \delta\left(1-\frac{\delta}{\varepsilon}C\right) \sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} k_n \|D_t v\|_{\Omega_i(t)}^2 \,\mathrm{d}t \\ &+ \left(\beta - \left(\varepsilon + \delta + \frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)C\right) |||v|||_{B_h}^2 \end{aligned} \tag{4.18}$$

其中 $C>0$ 表示各种常数。先取 $\varepsilon>0$ 充分小，再取 $\delta>0$ 充分小，即可得到所需的估计。■

利用引理 4.5 和引理 A.11，我们可以得到离散 inf-sup 条件：

推论 4.1（关于 B_h 的离散 inf-sup 条件）。设双线性形式 B_h 和范数 $|||\cdot|||_X$ 分别由 (3.15) 和 (4.10) 定义。则当 $q=0,\ 1$ 且 γ充分大时，有

$$|||w|||_X \lesssim \sup_{v\in V_h\setminus\{0\}} \frac{B_h(w,v)}{|||v|||_X} \quad \forall w \in V_h \tag{4.19}$$

为证明伽辽金正交性，我们需要以下关于相容性的引理 :

引理 4.6（相容性）。问题 (2.5) 的解 u 也是问题 (3.14).

证明。首先，在 (3.14) 左端用 u 替换 u_h，并利用 u 的正则性。然后通过 $\int_{S_{i,n}}(\nabla,\partial_t)\cdot(\nabla uv,0)\,\mathrm{d}\bar{x}$ 在空间中分部积分，从而得到内部项和边界项。由于对 v 施加了边界条件，外边界项为零，因此只剩下 Γ 项，并将它们合并。应用引理 A.1 并利用 u 的正则性后，只剩下的项根据 (2.5) 等于 (3.14) 的右端。■

由引理 4.6 可得伽辽金正交性:

推论 4.2（伽辽金正交性）。设双线性形式 B_h 由 (3.15) 定义，且 u 和 u_h 分别为 (2.5) 和 (3.14) 的解。那么

$$B_h(u-u_h,v)=0\quad\forall v\in V_h \tag{4.20}$$

5 稳定性分析

本节给出并证明方程 (3.14) 的解 u_h 的稳定性估计。证明的关键在于引理 4.5，即 B_h 在 V_h 上的扰动强制性。

引理 5.1（$|||\cdot|||_X$中的稳定性估计）。设 u_h 为方程 (3.14) 的解。设 u_0 和 f 分别为 (2.5) 中的初始数据和源项。则当 $q=0,\ 1$ 且 γ 充分大时，有

$$|||u_h|||_X\lesssim\|u_0\|_{\Omega_0}+\|f\|_{L^2((0,T];L^2(\Omega_0))} \tag{5.1}$$

证明。在引理 4.5 中取 $v=u_h\in V_h$，并在 (3.14) 中取 $v=u_h+\delta k_nD_tu_h\in V_h$，可得

$$\begin{aligned}|||u_h|||_X^2&\lesssim B_h(u_h,u_h+\delta k_nD_tu_h)\\&=(u_0,u_{h,0}^+)_{\Omega_0}+(u_0,\delta k_1(D_tu_h)_0^+)_{\Omega_0}\\&\quad+\sum_{n=1}^N\int_{I_n}(f,u_h)_{\Omega_0}\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^N\int_{I_n}(f,\delta k_nD_tu_h)_{\Omega_0}\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.2}$$

对所有项应用柯西–施瓦茨不等式（多次应用，且有些项采用不同形式），在处理第二项时应用引理 A.10，并在处理第三项时应用推论 A.1，可得乘积项，其中一个因子为 $\|u_0\|_{\Omega_0}$ 或 $\|f\|_{L^2((0,\ T];\ L^2(\Omega_0))}$，另一个因子可由 $|||u_h|||_X$ 估计。两边除以 $|||u_h|||_X$，即得 (5.1)。

■

6 先验误差分析

定理 6.1（关于 $|||\cdot|||_X$ 的最优阶先验误差估计）。设 $|||\cdot|||_X$ 由（4.10）定义， u 是（2.5）的解， u_h 是由（3.14）定义的有限元解。那么，对于 $q=0,\ 1$，且 γ 充分大时，有

$$|||u-u_h|||_X^2\lesssim k^{2q+1}F_k^2(u)+h^{2p}\left(F_h^2(u)+E_{h,1}^2(u)\right) \tag{6.1}$$

其中 F_k、 F_h 和 $E_{h,\ 1}$ 分别由 (B.25)、(B.26) 和 (B.23) 定义 y.

证明。 我们使用插值函数 $I_h u \in V_h$，其中 I_h 是由 (B.19) 定义的时空插值算子，将误差 $e = u - u_h$ 分解为 $\rho = u - I_h u$ 和 $\theta = I_h u - u_h$。因此

$$|||e|||_X \le |||\rho|||_X + |||\theta|||_X \tag{6.2}$$

我们首先关注 θ 部分。根据推论 4.2，即伽辽金正交性，对于任意 $v \in V_h$，有

$$B_h(\theta, v) = -B_h(\rho, v) \tag{6.3}$$

注意到 $\theta \in V_h$，并利用推论 4.1（即关于 B_h 的离散 inf-sup 条件）、伽辽金正交性结果 (6.3) 以及引理 4.4（即 B_h 的连续性），可将 θ 部分估计为

$$|||\theta|||_X \lesssim \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{B_h(\theta, v)}{|||v|||_X} = \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{-B_h(\rho, v)}{|||v|||_X} \lesssim \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{|||\rho|||_{Y_-}\, |||v|||_X}{|||v|||_X} = |||\rho|||_{Y_-} \tag{6.4}$$

将 (6.4) 代入 (6.2)，可得逼近误差估计为

$$\begin{aligned} |||e|||_X^2 &\lesssim |||\rho|||_X^2 + |||\rho|||_{Y_-}^2 \\ &\lesssim \sum_{i,n} \left(k_n \int_{I_n} \|D_t \rho\|_{\Omega_i(t)}^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{k_n} \int_{I_n} \|\rho\|_{\Omega_i(t)}^2 \mathrm{d}\overline{t} \right) + |||\rho|||_{B_h}^2 + \sum_{n=1}^{N} \|\rho_n^-\|_{\Omega_0}^2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

应用各种插值误差估计：引理 B.4，并对第一项使用 (3.1)、对第二项使用引理 B.5、对第三项使用推论 B.1，可得结果，其估计可由 (6.1) 右端给出。

■

7 数值结果

这里给出单位区间上一维空间问题的数值结果，其精确解为 $u(x,\ t) = \sin^2(\pi x) \mathrm{e}^{-t/2}$。我们计算 u_h，针对 $p = 1$ 和 $q = 0,\ 1$。对于时间上的 dG(1)，涉及时间的左端积分中有些采用求积进行局部近似。对于切割时空棱柱上的积分，时间方向采用复合三点 Lobatto 求积。对于时空边界 Γ_n 的棱柱内部线段，采用三点 Lobatto 求积。这两种求积选择都会产生求积误差 $= O(k^4)$。右端积分在时空棱柱上采用求积进行局部近似：先对时间求积，再对空间求积。在空间方向采用梯形公式，因此产生求积误差 $= O(h^2)$。对于时间上的 dG(0)，采用中点公式，因此产生求积误差 $= O(k^2)$。对于时间上的 dG(1)，采用三点 Lobatto 求积，因此产生求积误差 $= O(k^4)$。为简便起见，重叠网格的速度 μ 在每个子区间 $I_n = (t_{n-1},\ t_n]$ 上均设为常数，其值为 $\mu(t_n)$。稳定化参数 $\gamma = 10$。

在误差收敛研究中，$\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{T}_G$ 均为均匀网格，网格尺寸分别为 h_0 和 h_G。时间离散同样是均匀的，每个实例的时间步长为 k。终止时间设为 $T = 1$，$\mathcal{T}_G$ 的长度为 0.25，$\mathcal{T}_G$ 的初始位置为空间区间 $[0.125,\ 0.125 + 0.25]$。$error$ 为 $|||e|||_X = |||u - u_h|||_X$。所有涉及 u 的 X-范数中的时间积分、空间积分及时空积分均已

在局部采用三点高斯-勒让德求积进行近似：先对时间进行求积，然后在适用时对空间进行求积。这会产生求积误差$= O((k^6+h^6)^{1/2})$。在 k-收敛研究中，网格尺寸固定为 $h = 10^{-3}$和 $h = 10^{-4}$，分别对应 dG(0) 和 dG(1)。类似地，在 h-收敛研究中，时间步长固定为 $k = 10^{-4}$ 和 $k = 10^{-2}$，分别对应 dG(0) 和 dG(1)。图 7 和图 8 展示了 dG(0) 和 dG(1) 在时间方向上、具有 $\mu = 0.6$时的误差收敛图。左图显示 $error$ 与 k 的关系，右图则显示其与 $h = h_0 \geq h_G$的关系。除计算得到的 $error$外，每幅图还包含一条使用线性最小二乘法拟合误差数据计算得到的线段。该线段称为 $error$的最小二乘直线（LLS）。图中还给出了参考斜率。表 1 总结了 $error$ 在不同 μ取值下的最小二乘直线（LLS）斜率。

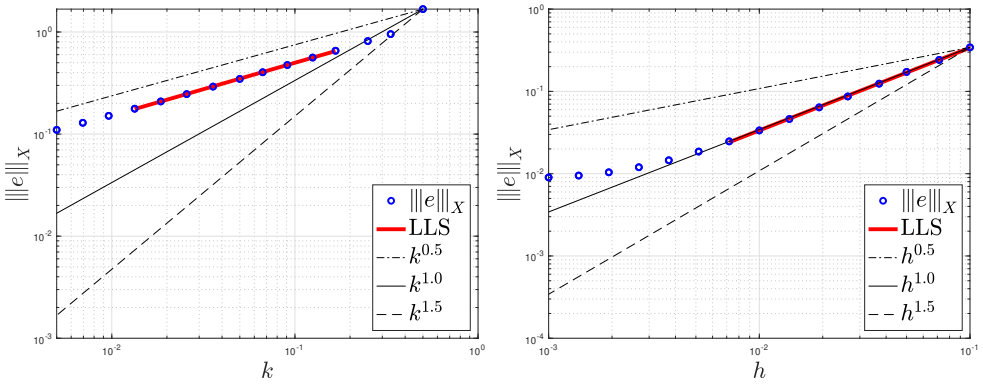


图 7： 采用 $\mu = 0.6$ 的 dG(0) 误差收敛。

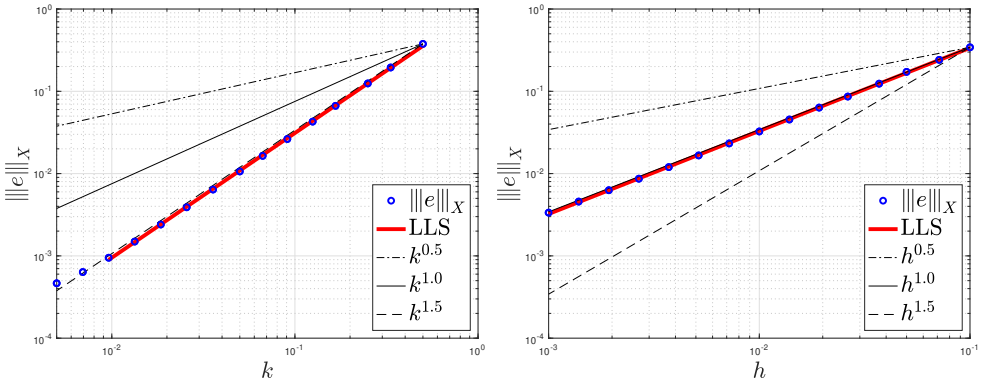


图 8： 采用 $\mu = 0.6$ 的 dG(1) 误差收敛。

	时间上的 dG(0)		时间上的 dG(1)	
μ	相对于 k （点）	相对于 h （点）	与 k （点）相比	与 h （点）相比
0	0.5058（4–12）	1.0190（1–9）	1.4506（1–5）	1.0137（1–15）
0.1	0.5026 (4–12)	1.0205 (1–9)	1.4893 (1–7)	1.0155 (1–15)
0.2	0.4985 (4–12)	1.0221 (1–9)	1.4947 (1–8)	1.0162 (1–15)
0.4	0.5163 (4–12)	1.0179 (1–9)	1.5031 (1–11)	1.0147 (1–15)
0.6	0.5179 (4–12)	1.0047 (1–9)	1.5151 (1–13)	1.0091 (1–15)

表 1： $error$ 与 k 及 h 的最小二乘直线斜率，取不同的 μ值。

图 9 所示的数值解是在等距时空离散下计算得到的： $\mathcal{T}_0$有 22 个节点， $\mathcal{T}_G$ 在所有时刻均有 7 个节点，并且在区间 $(0,3]$上有 10 个时间步。 $\mathcal{T}_G$ 的长度仍为 0.25，而为简单起见，速度 μ 在每个时间片上取常数 $\mu|_{I_n} = \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi t_n}{3})$。

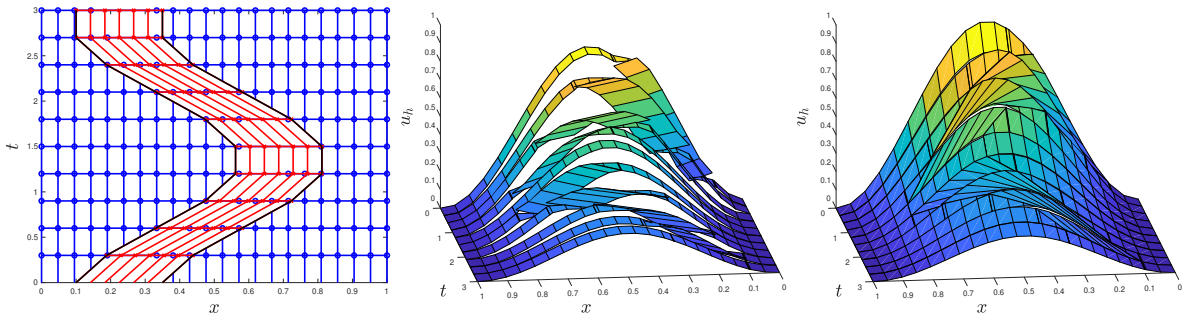


图 9： 时空离散（左）以及由此得到的 dG(0)cG(1) 解（中）和 dG(1)cG(1) 解（右）。

8 结论

我们针对重叠网格情形下的抛物型模型问题，提出了一种切割有限元方法：一个静止背景网格和一个连续移动的重叠网格。我们采用了一种我们认为相对较新的分析框架，用于抛物问题的有限元方法。可以认为，这一新的分析框架比标准框架更稳健、更自然，因为它是我们迄今唯一能够成功应用于这种重叠网格情形的框架。该分析属于能量型分析，主要结果是一个基本稳定性估计和一个最优阶先验误差估计。我们还针对一维空间中的抛物型问题给出了数值结果，验证了理论误差收敛阶。

A 解析工具

引理 A.1（一个跳跃恒等式）。令 $\omega_+, \omega_- \in \mathbb{R}$和 $\omega_+ + \omega_- = 1$，令 $[A] := A_+ - A_-$，并令 $\langle A\rangle := \omega_+ A_+ + \omega_- A_-$。则有

$$[AB] = [A]\langle B\rangle + \langle A\rangle [B] + (\omega_- - \omega_+)[A][B]. \tag{A.1}$$

证明。根据定义计算等式两边，即可得出该恒等式。 ■

A.1 空间估计

引理 A.2（$H_0^1(\cup_i \Omega_i(t))$的 Poincar´e 不等式）。对于 $t \in [0,T]$，有

$$\|v\|_{\Omega_0} \lesssim \|\nabla v\|_{\Omega_1(t)\cup\Omega_2(t)} + \|[v]\|_{\Gamma(t)} \quad \forall v \in H_0^1(\cup_i \Omega_i(t)) \tag{A.2}$$

证明。为简化记号，我们省略时间依赖性；反正这里并不重要。对于 $v \in H_0^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)$，我们考虑对偶问题：求 $\phi \in H^2(\Omega_0) \cap$

$H_0^1(\Omega_0)$，使得 $-\Delta\phi = v$ in Ω_0。利用对偶问题、分部积分，也就是说$v|_{\partial\Omega_0} = 0$、引理 A.1，以及 ϕ ($[\partial_n\phi]|_\Gamma = 0$ in $L^2(\Gamma)$) 的正则性，我们有

$$\|v\|_{\Omega_0}^2 = \sum_{i=1}^{2}(-\Delta\phi, v)_{\Omega_i} = \sum_{i=1}^{2}(\nabla\phi, \nabla v)_{\Omega_i} - (\langle\partial_n\phi\rangle, [v])_\Gamma \tag{A.3}$$

利用适用于 $\nabla\phi|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ 的标准迹不等式、 ϕ 时在 $H^2(\Omega_0)\cap H_0^1(\Omega_0)$ 上的椭圆正则性以及对偶问题，可以估计最后一个内积的第一个参数如下:

$$\|\langle\partial_n\phi\rangle\|_\Gamma \le \sum_{i=1}^{2}\|\nabla\phi_i\|_{\partial\Omega_i} \lesssim \sum_{i=1}^{2}\|\nabla\phi\|_{1,\Omega_i} \lesssim \|\phi\|_{2,\Omega_0} \lesssim \|\Delta\phi\|_{\Omega_0} = \|v\|_{\Omega_0} \tag{A.4}$$

注意，这也给出了倒数第二个内积的第一个参数的估计。因此，在 (A.3) 中使用 (A.4)，再约去等式两边的因子 $\|v\|_{\Omega_0}$ ，即可得到 (A.2)。■

将 (A.2) 两边平方，利用杨氏不等式和 (4.2)，可将所得右侧估计为$|||\cdot|||_{A_{h,\ t}}$:

推论 A.1（能量庞加莱′不等式，适用于 $H^{3/2+\varepsilon}(\cup_i\Omega_i(t)) \cap H_0^1(\cup_i\Omega_i(t))$）。令时变空间能量范数 $|||\cdot|||_{A_{h,\ t}}$ 由 (4.3) 定义。那么，对于 $t \in [0,T]$，有

$$\|v\|_{\Omega_0} \lesssim |||v|||_{A_{h,t}} \quad \forall v \in H^{3/2+\varepsilon}(\cup_i\Omega_i(t)) \cap H_0^1(\cup_i\Omega_i(t)) \tag{A.5}$$

引理 A.3（关于 $\Gamma(t)$ 的空间连续性结果）。设时空向量 $\bar{n} = (\bar{n}^x, \bar{n}^t)$ 和时变空间能量范数 $|||\cdot|||_{A_{h,t}}$ 分别由 (3.10) 和 (4.3) 定义。设 σ 在 $\Gamma(t)$ 上任意变化，取值介于 1 和 2 之间，并令 $|\mu|_{[0,T]} = \max_{t\in[0,T]}\{|\mu|\}$。那么，对于 $t \in [0,T]$，有

$$\begin{aligned}(\bar{n}^t[w], v_\sigma)_{\Gamma(t)} &\lesssim |\mu|_{[0,T]} h^{1/2}\,|||w|||_{A_{h,t}}\,|||v|||_{A_{h,t}} \\ &\forall w, v \in H^{3/2+\varepsilon}(\cup_i\Omega_i(t)) \cap H_0^1(\cup_i\Omega_i(t))\end{aligned} \tag{A.6}$$

证明。为简化记号，我们省略时间依赖性，毕竟它在此处并不重要。利用由 (3.10) 得出的 $|\bar{n}^t| \le |\mu|$，(A.6) 左端为

$$(\bar{n}^t[w], v_\sigma)_\Gamma \le |\mu|_{[0,T]}\|[w]\|_\Gamma\|v_\sigma\|_\Gamma \tag{A.7}$$

利用 (4.2) 和 (4.3)， w 因子可估计为 $h^{1/2}\,|||w|||_{A_{h,t}}$。应用关于 $H^1(\Omega_i)$ 的标准迹不等式、推论 A.1 以及 (4.3)， v 因子可估计为$|||v|||_{A_{h,t}}$。这就证明了 (A.6)。■

引理 A.4（余维 1 区域划分流形的缩放迹不等式）。对于 $d = 1$，2 或 3，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为直径为 L 的有界区域，即 $L = \mathrm{diam}(\Omega) = \sup_{x,\ y\in\Omega}|x-y|$。设 $\Gamma \subset \Omega$ 是一个将 Ω 划分为 N 个子区域的余维 1 连续流形。那么

$$\|v\|_\Gamma^2 \lesssim L^{-1}\|v\|_\Omega^2 + L\|\nabla v\|_\Omega^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{A.8}$$

证明。如果 (A.8) 对情形 $N = 2$成立，那么可以反复应用该结果，证明 (A.8) 对 $N > 2$ 也成立。因此，我们假设 Γ 将 Ω 划分为两个子区域，分别记为 Ω_1 和 Ω_2 ，其直径分别为 L_1 和 L_2。根据v的正则性假设，对于 $i = 1,\ 2$，我们有 $v \in H^1(\Omega_i)$，因此

$$\|v\|_\Gamma^2 \le \|v\|_{\partial\Omega_i}^2 \lesssim L_i^{-1}\|v\|_{\Omega_i}^2 + L_i\|\nabla v\|_{\Omega_i}^2 \tag{A.9}$$

这里用到了标准缩放迹不等式。利用三角型不等式$L \le L_1 + L_2$ 和 (A.9)，(A.8) 左端为

$$\|v\|_\Gamma^2 \le \sum_{i=1}^{2} \frac{L_i}{L}\|v\|_\Gamma^2 \lesssim \sum_{i=1}^{2}\left(L^{-1}\|v\|_{\Omega_i}^2 + L\|\nabla v\|_{\Omega_i}^2\right) \lesssim L^{-1}\|v\|_\Omega^2 + L\|\nabla v\|_\Omega^2 \tag{A.10}$$

这就证明了 (A.8)。 ■

令 $\Gamma_K = \Gamma_K(t) = K \cap \Gamma(t)$。对于 $t \in [0,T]$, $j \in \{0, G\}$、单纯形 $K \in \mathcal{T}_{j,\ \Gamma(t)} = \{K \in \mathcal{T}_j$: $K \cap \Gamma(t) \ne \emptyset\}$，以及 $v \in H^1(K)$，由引理 A.4 可得

$$\|v\|_{\Gamma_K}^2 \lesssim h_K^{-1}\|v\|_K^2 + h_K\|\nabla v\|_K^2 \tag{A.11}$$

其中 h_K 是 K 的直径。对于 $v \in \mathcal{P}(K)$，有标准逆估计

$$\|D_x^k v\|_K^2 \lesssim h_K^{-2}\|D_x^{k-1} v\|_K^2 \quad \text{for } k \ge 1 \tag{A.12}$$

将 (A.12) 代入 (A.11)，得到以下推论：

推论 A.2（关于 $\Gamma_K(t)$ 的离散空间局部逆不等式）。对于 $t \in [0,T]$, $j \in \{0, G\}$, $K \in \mathcal{T}_{j,\ \Gamma(t)}$（其直径为 h_K），令 $\Gamma_K(t) = K \cap \Gamma(t)$。那么，对于 $k \ge 0$，有

$$\|D_x^k v\|_{\Gamma_K(t)}^2 \lesssim h_K^{-1}\|D_x^k v\|_K^2 \quad \forall v \in V_h(t) \tag{A.13}$$

引理 A.5（关于 $\Gamma(t)$ 的离散空间逆不等式）。设网格相关范数$\|\cdot\|_{-1/2,h,\Gamma(t)}$ 由（4.1）定义。那么，对于 $t \in [0,T]$，有

$$\|\langle \partial_{\bar n^x} v\rangle\|_{-1/2,h,\Gamma(t)}^2 \lesssim \sum_{i=1}^{2}\|\nabla v\|_{\Omega_i(t)}^2 + \|[\nabla v]\|_{\Omega_O(t)}^2 \quad \forall v \in V_h(t) \tag{A.14}$$

证明。为简化记号，我们省略时间依赖性，反正这在此处并不重要。我们对 [2] 中相应不等式的证明稍作修改后加以沿用。我们使用指标 $j \in \{0, G\}$，使得若 $j = 0$，则 $i = 1$；若 $j = G$，则$i = 2$，并令 $\Gamma_{K_j} = K_j \cap \Gamma$ 和 $\mathcal{T}_{j,\Gamma} = \{K_j \in \mathcal{T}_j$: $K_j \cap \Gamma \ne \emptyset\}$。注意，对于 $i = 1,2$,

$$\sum_{K_0 \in \mathcal{T}_{0,\Gamma}} h_{K_0}\|v_i\|_{\Gamma_{K_0}}^2 \lesssim \sum_{K_G \in \mathcal{T}_{G,\Gamma}} h_{K_G}\|v_i\|_{\Gamma_{K_G}}^2 \tag{A.15}$$

这由 $\cup_{K_0 \in \mathcal{T}_{0,\Gamma}}\Gamma_{K_0} = \Gamma = \cup_{K_G \in \mathcal{T}_{G,\Gamma}}\Gamma_{K_G}$ 以及网格间拟一致性可得。由于 $\partial_{\bar n^x} v = \bar n^x \cdot \nabla v$ 和 $|\omega_i||\bar n^x| \le 1$，我们有 $\|\omega_i(\partial_{\bar n^x} v)_i\|_{\Gamma_{K_j}}^2 \le \|(\nabla v)_i\|_{\Gamma_{K_j}}^2$。在（A.15）之后使用此结果，并应用推论 A.2，（A.14）的左端为

$$\begin{aligned}\|\langle \partial_{\bar n^x} v\rangle\|_{-1/2,h,\Gamma}^2 &\lesssim \sum_{i=1}^{2}\sum_{K_j \in \mathcal{T}_{j,\Gamma}} h_{K_j}\|(\nabla v)_i\|_{\Gamma_{K_j}}^2 \lesssim \sum_{i=1}^{2}\sum_{K_j \in \mathcal{T}_{j,\Gamma}}\|(\nabla v)_i\|_{K_j}^2 \\ &= \sum_{K_0 \in \mathcal{T}_{0,\Gamma}}\left(\|\nabla v\|_{K_0 \cap \Omega_1}^2 + \|(\nabla v)_1\|_{K_0 \cap \Omega_2}^2\right) + \sum_{K_G \in \mathcal{T}_{G,\Gamma}}\|\nabla v\|_{K_G}^2\end{aligned} \tag{A.16}$$

所得各项可用 (A.14) 的右端进行估计。 ■

A.2 时间估计

回顾由 (3.6) 定义的依赖于区域的速度 μ_i。对于时间 $t^* \in I_n$、点$x \in \Omega_i(t^*)$ 以及从 $\Omega_i(t^*)$ 趋近的点 $s \in \Gamma(t^*)$，分别将经过 x 和经过 s 的分片时空轨迹的空间分量 $\hat{x}(t)$ 和 $\hat{s}_i(t)$ 定义为

$$\hat{x}(t) := x + \int_{t^*}^{t} \mu_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \forall t \in I_n \tag{A.17}$$

$$\hat{s}_i(t) := s + \int_{t^*}^{t} \mu_i(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \forall t \in I_n \tag{A.18}$$

对于 $i = 1$，我们得到一条平行于时间轴的直线时空轨迹。对于 $i = 2$，我们只需沿着时空曲面 Γ_n上的一点移动即可。图10对此作了示意。为简化记号，在不会引起混淆时，我们省略下标 i 和时间依赖性。因此，$(\hat{s},\ t) = (\hat{s}_i(t)\ t)$，且$\hat{s}_k = \hat{s}_{i,\ k} = \hat{s}_i(t_k)$，除非另有明确说明。

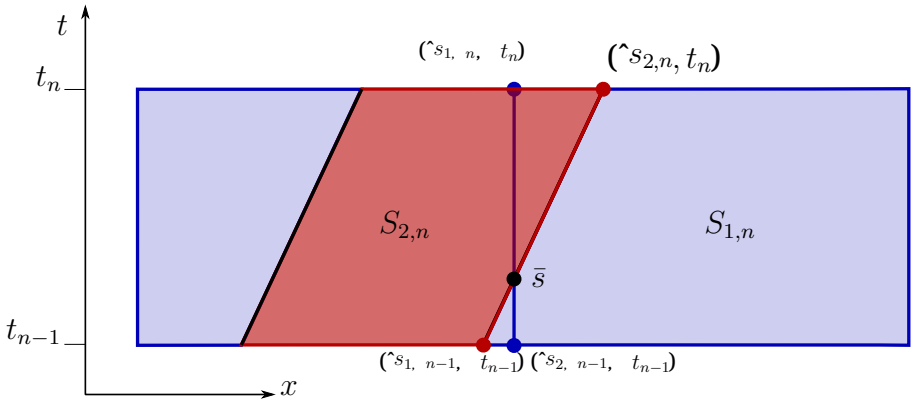


图10： 经过点 $\bar{s} \in \Gamma_n$ 的逐时间片时空轨迹$d = 1$。

引理 A.6（离散时间逆估计，在 $\|\cdot\|_{\Omega(t)}$）。设 k_n为区间 I_n 的长度，缩放微分算子 D_t 由 (3.7) 定义。对于 $v \in V_h^n$，令$w = w_r = D_x^r v$，其中 $0 \le r \le p$。那么，对于任意 $v \in V_h^n$，有

$$\int_{I_n} k_n^2 \|D_t w\|^2_{\Omega_1(t)\cup\Omega_O(t)}\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{I_n} \|w\|^2_{\Omega_1(t)\cup\Omega_O(t)}\,\mathrm{d}t \tag{A.19}$$

$$\int_{I_n} k_n^2 \|D_t w\|^2_{\Omega_2(t)}\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{I_n} \|w\|^2_{\Omega_2(t)}\,\mathrm{d}t \tag{A.20}$$

证明。这些估计可通过沿时空轨迹应用标准一维多项式逆估计得到。在 I_n积分中引入 D_t，可为往返时空轨迹提供正确的缩放。■

引理 A.7（关于 $W^{1,\ 1}((a,\ b))$的不等式）。对于开区间（a，b）、点$c \in$（a，b）以及任意函数 $w \in W^{1,\ 1}((a,\ b))$，有

$$(b-a)w(c) \le \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b |w'(x)|\,\mathrm{d}x \tag{A.21}$$

证明。考虑开区间（α， β） $\subset$ （a， b）。对于任意点 $y \in$ （α， β），利用分部积分可得

$$(\beta - y)w(\beta^-) + (y - \alpha)w(\alpha^+) \leq \int_\alpha^\beta w(x)\,\mathrm{d}x + (\beta - \alpha)\int_\alpha^\beta |w'(x)|\,\mathrm{d}x \tag{A.22}$$

(A.21) 的左端为

$$\begin{aligned}(b-a)w(c) &= (b-c)w(c) + (c-a)w(c)\\ &\leq \int_c^b w(x)\,\mathrm{d}x + (b-c)\int_c^b |w'(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_a^c w(x)\,\mathrm{d}x + (c-a)\int_a^c |w'(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_a^b w(x)\,\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b |w'(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{A.23}$$

其中，我们使用 $y = \beta^- = \beta = b$ 和 $\alpha = c$ 结合 (A.22)，并使用 $\beta = c$ 和 $y = \alpha^+ = \alpha = a$ 结合 (A.22)，得到第一个不等式。证明至此完成。■

引理 A.8 （$|||\cdot|||_{A_h}$ 中的离散时间逆估计，$_t$）。设 $|||\cdot|||_{A_{h,\,t}}$ 由 (4.3) 定义， k_n 为区间 I_n 的长度，缩放微分算子 D_t由 (3.7) 定义。则有

$$\int_{I_n} |||k_n D_t v|||^2_{A_{h,t}}\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{I_n} |||v|||^2_{A_{h,t}}\,\mathrm{d}t \quad \forall v \in V_h^n \tag{A.24}$$

证明。利用 (4.3) 展开 (A.24) 的左端

$$\begin{aligned}\int_{I_n} |||k_n D_t v|||^2_{A_{h,t}}\,\mathrm{d}t = &\underbrace{\sum_{i=1}^2 \int_{I_n} k_n^2 \|\nabla D_t v\|^2_{\Omega_i(t)}\,\mathrm{d}t}_{=\,\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{I_n} k_n^2 |\bar{\mu}| \|\langle \partial_{\bar{n}^x} D_t v\rangle\|^2_{-1/2,h,\Gamma(t)}\,\mathrm{d}t}_{=\,\mathrm{II}}\\ &+ \underbrace{\int_{I_n} k_n^2 |\bar{\mu}| \|[D_t v]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)}\,\mathrm{d}t}_{=\,\mathrm{III}} + \underbrace{\int_{I_n} k_n^2 \|[\nabla D_t v]\|^2_{\Omega_O(t)}\,\mathrm{d}t}_{=\,\mathrm{IV}}\end{aligned} \tag{A.25}$$

我们逐项处理这些项，先从第一项开始。利用 $\nabla D_t v = D_t \nabla v$ 以及引理 A.6，(A.25) 中的第一项为

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \sum_{i=1}^2 \int_{I_n} k_n^2 \|D_t \nabla v\|^2_{\Omega_i(t)}\,\mathrm{d}t \lesssim \int_{I_n} \sum_{i=1}^2 \|\nabla v\|^2_{\Omega_i(t)} + \|[\nabla v]\|^2_{\Omega_O(t)}\,\mathrm{d}t\\ &\leq \int_{I_n} |||v|||^2_{A_{h,t}}\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{A.26}$$

第二个 在先应用引理 A.5 后，(A.25) 中的第二项也可采用相同的处理方式，因此 s

$$\mathrm{II} \lesssim \int_{I_n} k_n^2 |\bar{\mu}| \left(\sum_{i=1}^2 \|\nabla D_t v\|^2_{\Omega_i(t)} + \|[\nabla D_t v]\|^2_{\Omega_O(t)} \right) \mathrm{d}t \lesssim \int_{I_n} |||v|||^2_{A_{h,t}}\,\mathrm{d}t \tag{A.27}$$

(A.25) 中的第三项比其他项需要更多处理。回顾穿过点 $\bar{s} \in \Gamma_n$ 的分片时空轨迹 $^-$，其空间分量 $\hat{}s = \hat{}s_i(t)$ 定义为

由 (A.18) 定义。令 S_n^q 表示 I_n 中与 V_h^n 的时间自由度相对应的点集。因此 $S_n^0 = \{t_n\}$ 和 $S_n^1 = \{t_n, t_{n-1}^+\}$。对于 $q > 1$，I_n 的内部点也包含在 S_n^q 中。我们考虑时间基函数 $\lambda_k \in \mathcal{P}^q(I_n)$，其中每个 λ_k 都对应一个点 $t_k \in S_n^q$。写作 $\hat{x}_k = \hat{x}(t_k)$，其中 $\hat{x}$ 由 (A.17) 定义，并采用稍微宽松的记法，任意 $v \in V_h^n$ 均可表示为 $v(x, t) = \sum_{t_k \in S_n^q} v(\hat{x}_k, t_k)\lambda_k(t)$。在简单连续网格运动下，$\mu$ 沿每条分片时空轨迹保持不变，这意味着 $D_t v(\hat{x}_k, t_k) = 0$。结合这一点和稍微宽松的表示法，我们得到

$$D_t v(x,t) = \sum_{t_k \in S_n^q} v(\hat{x}_k, t_k) D_t \lambda_k(t) = \sum_{t_k \in S_n^q} v(\hat{x}_k, t_k)\lambda_k'(t) \tag{A.28}$$

利用 (A.28)，(A.25) 中的第三项为

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &\le \frac{k_n^2}{h_{\min}} \int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} |(D_t v(s,t))_1 - (D_t v(s,t))_2|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{k_n^2}{h_{\min}} \int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} \Bigg(\sum_{t_k \in S_n^q} |v_1(\hat{s}_{1,k}, t_k) - v_2(\hat{s}_{2,k}, t_k)| \underbrace{|\lambda_k'(t)|}_{\le C(q)/k_n} \Bigg)^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\lesssim h_{\min}^{-1} \sum_{t_k \in S_n^q} \underbrace{\int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} |v_1(\hat{s}_{1,k}, t_k) - v_2(\hat{s}_{2,k}, t_k)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{III}.k}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

我们将 III.k 拆分为

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}.k \lesssim\ & \underbrace{\int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} |v_1(\hat{s}_{1,k}, t_k) - v_1(\hat{s}_{2,k}, t_k)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{III}.k.1} \\
&+ \underbrace{\int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} |v_1(\hat{s}_{2,k}, t_k) - v_2(\hat{s}_{2,k}, t_k)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{III}.k.2}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

对于 (A.30) 中的第一项，我们考虑将 $s(\tau) \in \Gamma(\tau)$ 投影到时间 t_k 所在空间平面上后得到的空间平面曲线，其中 τ 在 t_k 与 t 之间取值。对这条曲线应用线积分基本定理，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}.k.1 &= \int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} |v_1(s(t), t_k) - v_1(s(t_k), t_k)|^2 \,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} \left| \int_{t_k}^{t} \mu(\tau) \cdot \nabla v_1(s(\tau), t_k) \,\mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\le |\mu|_{I_n}^2 k_n \int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} \int_{I_n} |\nabla v_1(s(\tau), t_k)|^2 \,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= |\mu|_{I_n}^2 k_n^2 |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t_k)} \int_{I_n} |\nabla v_1(s(\tau), t_k)|^2 \,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s \\
&\lesssim |\mu|_{I_n}^2 k_n^2 |\bar{\mu}| \int_{\Omega_1(t_k) \cup \Omega_O(t_k)} |\nabla v_1(x, t_k)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\lesssim |\mu|_{I_n}^2 k_n \int_{I_n} \|\nabla v_1\|_{\Omega_1(t) \cup \Omega_O(t)}^2 \,\mathrm{d}t \\
&\lesssim |\mu|_{I_n}^2 k_n \int_{I_n} |||v|||_{A_{h,t}}^2 \,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{A.31}$$

其中，在第五步中，我们考虑了相同线积分可能出现的倍数，并扩展了积分域。在第六步中，我们使用了多项式的标准逆不等式。对于 (A.30) 中的第二项，我们使用引理 A.7，得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}.k.2 &= k_n|\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t_k)} |v_1(s,t_k) - v_2(s,t_k)|^2 \,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma(t_k)} \left(k_n|\bar{\mu}|[v]^2(s,t_k) \right) \mathrm{d}s \\
&\lesssim \int_{\Gamma(t_k)} \left(\int_{I_n} |\bar{\mu}|[v]^2(\hat{s}_2,t) \,\mathrm{d}t + k_n|\bar{\mu}| \int_{I_n} \left| D_{t,2}[v]^2(\hat{s}_2,t) \right| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \\
&\lesssim \int_{\bar{\Gamma}_n} |[v]|^2 \,\mathrm{d}\bar{s} + k_n \int_{\bar{\Gamma}_n} |[v]||D_{t,2}[v]| \,\mathrm{d}\bar{s} \\
&\leq \|[v]\|^2_{\bar{\Gamma}_n} + k_n \|[v]\|_{\bar{\Gamma}_n} \|D_{t,2}[v]\|_{\bar{\Gamma}_n} \\
&\leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \|[v]\|^2_{\bar{\Gamma}_n}}_{=\mathrm{III}.k.2.1} + \underbrace{\varepsilon k_n^2 \|D_{t,2}[v]\|^2_{\bar{\Gamma}_n}}_{=\mathrm{III}.k.2.2}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

利用 (4.2)，第一项为

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}.k.2.1 &= \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{I_n} |\bar{\mu}| \|[v]\|^2_{\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t \lesssim h \int_{I_n} |\bar{\mu}| \|[v]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t \\
&\leq h \int_{I_n} |||v|||^2_{A_{h,t}} \,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{A.33}$$

再次利用 (4.2)，第二项为

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}.k.2.2 &= \varepsilon k_n^2 \|D_{t,2}v_1 - D_{t,2}v_2\|^2_{\bar{\Gamma}_n} = \varepsilon k_n^2 \|D_t v_1 + \mu \cdot \nabla v_1 - D_t v_2\|^2_{\bar{\Gamma}_n} \\
&\lesssim \varepsilon k_n^2 \|[D_t v]\|^2_{\bar{\Gamma}_n} + \varepsilon k_n^2 \|\mu \cdot \nabla v_1\|^2_{\bar{\Gamma}_n} \\
&\leq \varepsilon k_n^2 \int_{I_n} |\bar{\mu}| \|[D_t v]\|^2_{\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t + |\mu|^2_{I_n} k_n^2 \|\nabla v_1\|^2_{\bar{\Gamma}_n} \\
&\leq \varepsilon h \underbrace{\int_{I_n} k_n^2 |\bar{\mu}| \|[D_t v]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{III}} + \underbrace{|\mu|^2_{I_n} k_n^2 \|\nabla v_1\|^2_{\bar{\Gamma}_n}}_{=\mathrm{III}.k.2.2.2}
\end{aligned} \tag{A.34}$$

其中第一项已处理。对于第二项，我们使用推论 A.2，因此 s

$$\begin{aligned}
\mathrm{III}.k.2.2.2 &= |\mu|^2_{I_n} k_n^2 \int_{I_n} |\bar{\mu}| \sum_{K \in \mathcal{T}_{0,\Gamma(t)}} \|\nabla v_1\|^2_{\Gamma_K} \,\mathrm{d}t \\
&\lesssim \frac{|\mu|^2_{I_n} k_n^2}{h_{\min}} \int_{I_n} \sum_{K \in \mathcal{T}_{0,\Gamma(t)}} \|\nabla v_1\|^2_K \,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{|\mu|^2_{I_n} k_n^2}{h_{\min}} \int_{I_n} \|\nabla v_1\|^2_{\Omega_1(t) \cup \Omega_O(t)} \,\mathrm{d}t \lesssim \frac{|\mu|^2_{I_n} k_n^2}{h_{\min}} \int_{I_n} |||v|||^2_{A_{h,t}} \,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{A.35}$$

至此，我们已分别处理了估计

(A.25) 中第三项时出现的所有项。汇总所有估计并利用 (3.1)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{III} &\lesssim h_{\min}^{-1}\sum_{t_k\in S_n^q}\left(|\mu|_{I_n}^2 k_n\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t + h\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t + \mathrm{III}.k.2.2\right)\\ &\lesssim h_{\min}^{-1}\left(\left(|\mu|_{I_n}^2 k_n + h + \frac{|\mu|_{I_n}^2 k_n^2}{h_{\min}}\right)\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t + \varepsilon h(\mathrm{III})\right)\\ &\lesssim \int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t + \varepsilon(\mathrm{III})\end{aligned} \tag{A.36}$$

通过移项处理 ε 项并令 ε 足够小，我们可以用 A.36 右端的第一项来估计 (A.25) 中的第三项。(A.25) 中的第四项采用与第一项相同的处理方式，因此

$$\mathrm{IV} \lesssim \int_{I_n} k_n^2\left(\|D_t\nabla v\|_{\Omega_1(t)\cup\Omega_O(t)}^2 + \|D_t\nabla v\|_{\Omega_2(t)}^2\right)\mathrm{d}t \lesssim \int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t \tag{A.37}$$

(A.25) 中所有项的处理均已完成。这就证明了 (A.24)。 ■

引理 A.9（关于 $\mathcal{P}((a,c),(c,b))$ 的逆不等式）。对于开区间 (a,b)、点 $c\in(a,b)$ 以及 $w\in\mathcal{P}((a,c),(c,b))$，即 w 在 (a,c) 上是一个多项式，在 (c,b) 上可能是另一个多项式，并且在 c 处可能不连续，存在一个依赖于多项式次数的正常数，使得

$$\begin{aligned}(b-a)|w(a^+)|^2 \lesssim{}& \int_a^c |w(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_c^b |w(x)|^2\,\mathrm{d}x + (b-c)|[w](c)|^2\\ &+ (b-c)(c-a)\int_a^c |w'(x)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{A.38}$$

证明。利用多项式的标准逆不等式，其中正常数取决于多项式次数，(A.38) 的左端为

$$(b-a)|w(a^+)|^2 \lesssim \int_a^c |w(x)|^2\,\mathrm{d}x + (b-c)|w(a^+)|^2 \tag{A.39}$$

在绝对值内加上并减去 $w(c^-)$和 $w(c^+)$，然后使用标准估计，第二项为

$$\begin{aligned}(b-c)|w(a^+)|^2 &= (b-c)\left|-\int_a^c w'(x)\,\mathrm{d}x - [w](c) + w(c^+)\right|^2\\ &\lesssim (b-c)(c-a)\int_a^c |w'(x)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad + (b-c)|[w](c)|^2 + \int_c^b |w(x)|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{A.40}$$

■

引理 A.10（针对 V_h^n 的离散时间逆不等式）。设 k_n 为区间 I_n的长度，缩放微分算子 D_t 由（3.7）定义， $|\mu|_{I_n}$ =

$\max_{t\in I_n}\{|\mu(t)|\}$，且 $|||\cdot|||_{A_{h,\,t}}$ 由（4.3）定义。则对于 $q=0$，1，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} k_n^2\|(D_t v)_{n-1}^{+}\|_{\Omega_{i,n-1}}^2 \lesssim \sum_{i=1}^{2}\int_{I_n} k_n\|D_t v\|_{\Omega_i(t)}^2\,\mathrm{d}t \\ + |\mu|_{I_n}\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t \quad \forall v\in V_h^n\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} k_n^2\|(D_t v)_{n}^{-}\|_{\Omega_{i,n}}^2 \lesssim \sum_{i=1}^{2}\int_{I_n} k_n\|D_t v\|_{\Omega_i(t)}^2\,\mathrm{d}t \\ + |\mu|_{I_n}\int_{I_n}|||v|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t \quad \forall v\in V_h^n\end{aligned} \tag{A.42}$$

证明。 我们只证明 (A.41)，因为 (A.42) 的证明类似。回忆一下，根据 (A.17) 定义的 $\hat{x}(t)^{-}$。我们用 $\hat{x}_i^n$ 表示经过点 $x_{i,n-1}\in\Omega_{i,n-1}$ 的分片时空轨迹。我们将 $\Omega_{1,n-1}$ 中具有被切断和未被切断的时空轨迹的点集定义为

$$\Omega_{1,n-1}^{\Gamma} := \{x\in\Omega_{1,n-1} : \bar{\hat{x}}_1^n \cap \bar{\Gamma}_n \neq \emptyset\} \tag{A.43}$$

$$\Omega_{1,n-1}^{n} := \{x\in\Omega_{1,n-1} : \bar{\hat{x}}_1^n \cap \bar{\Gamma}_n = \emptyset\} \tag{A.44}$$

证明 (A.41) 的思路是：如果一个点的时空轨迹未被切断，我们就使用标准逆不等式；如果被切断，则使用引理 A.9。由于 $\Omega_{1,n-1}^{\Gamma}$ 和 $\Omega_{1,n-1}^{n}$ 构成 $\Omega_{1,n-1}$ 的一个划分，(A.41) 的左边为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2} k_n^2\|(D_t v)_{n-1}^{+}\|_{\Omega_{i,n-1}}^2 = \underbrace{k_n^2\|(D_t v)_{n-1}^{+}\|_{\Omega_{1,n-1}^{n}}^2}_{=\mathrm{I}} + \underbrace{k_n^2\|(D_t v)_{n-1}^{+}\|_{\Omega_{2,n-1}}^2}_{=\mathrm{II}} \\ + \underbrace{k_n^2\|(D_t v)_{n-1}^{+}\|_{\Omega_{1,n-1}^{\Gamma}}^2}_{=\mathrm{III}}\end{aligned} \tag{A.45}$$

我们分别处理这些项。证明思路示意见图 11。利用

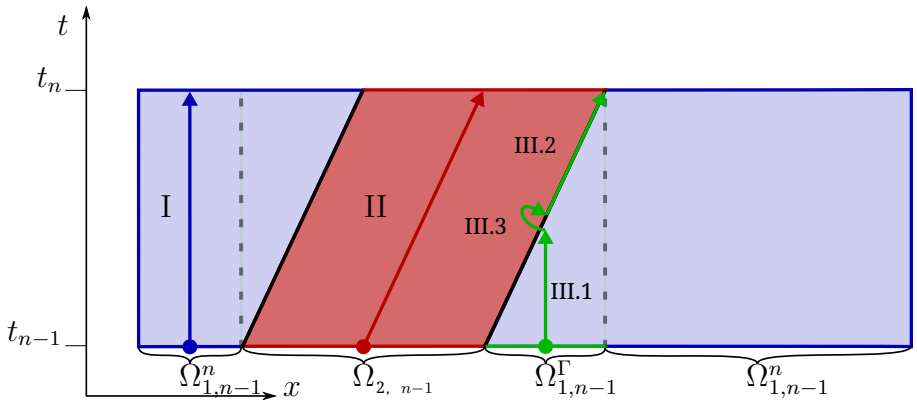


图 11： 初始区域 $\Omega_{1,\,n-1}^{n}$、$\Omega_{2,\,n-1}$ 和 $\Omega_{1,\,n-1}^{\Gamma}$。箭头表示相应右端项的处理方式。

一个标准逆不等式，(A.45) 中的第一项和第二项为

$$\mathrm{I}\lesssim\int_{I_n} k_n\|D_t v\|_{\Omega_1(t)}^2\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{II}\lesssim\int_{I_n} k_n\|D_t v\|_{\Omega_2(t)}^2\,\mathrm{d}t \tag{A.46}$$

对于 (A.45) 中的第三项，我们回顾由 (A.18) 定义的 $\hat{s}$。考虑一条时空曲线，它从 $x \in \Omega^{\Gamma}_{1,\,n-1}$ 出发，沿时间方向直线上升，直到碰到 $\bar{\Gamma}_n$，这发生在时间 t_Γ^-，然后沿着 Γ_n ($\hat{s}(t)$ t) 前进，直到 t_n。我们将引理 A.9 应用于沿这条时空曲线直到 t_Γ 为 $(D_t v)_1$、此后为 $(D_t v)_2$ 的函数。这里，(A.38) 右侧相应的导数项为零，因为对于 $q \le 1$，$D_t^2 v(x,\ t) = 0$。因此

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III} &= k_n \int_{\Omega^{\Gamma}_{1,n-1}} \left(k_n |D_t v(x, t_{n-1}^+)|^2 \,\mathrm{d}x \right) \\
&\lesssim k_n \int_{\Omega^{\Gamma}_{1,n-1}} \Bigg(\int_{t_{n-1}}^{t_\Gamma} |D_t v(x,t)|^2 \,\mathrm{d}t + \int_{t_\Gamma}^{t_n} |\bar{\mu}| |(D_t v)_2(\hat{s}(t),t)|^2 \,\mathrm{d}t \\
&\quad + (t_n - t_\Gamma)|[D_t v](x,t_\Gamma)|^2 + (t_n - t_\Gamma)(t_\Gamma - t_{n-1}) \int_{t_{n-1}}^{t_\Gamma} |D_t^2 v(x,t)|^2 \,\mathrm{d}t \Bigg) \,\mathrm{d}x \\
&\lesssim \underbrace{k_n \int_{\Omega^{\Gamma}_{1,n-1}} \int_{t_{n-1}}^{t_\Gamma} |D_t v(x,t)|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{III}.1} + \underbrace{k_n \int_{\Omega^{\Gamma}_{1,n-1}} \int_{t_\Gamma}^{t_n} |\bar{\mu}| |(D_t v)_2(\hat{s}(t),t)|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{III}.2} \\
&\quad + \underbrace{k_n \int_{\Omega^{\Gamma}_{1,n-1}} (t_n - t_\Gamma)|[D_t v](x,t_\Gamma)|^2 \,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{III}.3} .
\end{aligned}
\tag{A.47}
$$

只需扩展积分域，第一项为

$$
\mathrm{III}.1 \lesssim \int_{I_n} k_n \|D_t v\|^2_{\Omega_1(t)} \,\mathrm{d}t \tag{A.48}
$$

对于 (A.47) 中的第二项和第三项，我们希望将积分域从 $\Omega^{\Gamma}_{1,\,n-1}$ 变更为其在 $\bar{\Gamma}_n$ 上的时间投影。为此，我们注意到 $\mathrm{d}x \lesssim |\mu|_{I_n} \mathrm{d}\bar{s}$，其中 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}\bar{s}$ 分别是 $\Omega^{\Gamma}_{1,\,n-1}$ 和 $\bar{\Gamma}_n$ 的积分微分。利用这一点、$H^1(\Omega_2)$ 的标准迹不等式、$\nabla D_t v = D_t \nabla v$ 以及引理 A.6，第二项为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III}.2 &\lesssim k_n \int_{\Omega^{\Gamma}_{1,n-1}} \int_{I_n} |\bar{\mu}| |(D_t v)_2(\hat{s}(t),t)|^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x \\
&\lesssim k_n \int_{\bar{\Gamma}_n} \int_{I_n} |\bar{\mu}| |(D_t v)_2(\bar{s})|^2 \,\mathrm{d}t |\mu|_{I_n} \,\mathrm{d}\bar{s} \lesssim |\mu|_{I_n} k_n^2 \int_{I_n} |\bar{\mu}| \|(D_t v)_2\|^2_{\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t \\
&\lesssim |\mu|_{I_n} k_n \int_{I_n} k_n \|D_t v\|^2_{\Omega_2(t)} \,\mathrm{d}t + |\mu|_{I_n} \int_{I_n} k_n^2 \|D_t \nabla v\|^2_{\Omega_2(t)} \,\mathrm{d}t \\
&\lesssim \int_{I_n} k_n \|D_t v\|^2_{\Omega_2(t)} \,\mathrm{d}t + |\mu|_{I_n} \int_{I_n} |||v|||^2_{A_{h,t}} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{A.49}
$$

利用积分微分之间的关系、估计式 (4.2) 和引理 A.8，可得 (A.47) 中的第三项为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III}.3 &\lesssim k_n^2 \int_{\Omega^{\Gamma}_{1,n-1}} |[D_t v](x,t_\Gamma)|^2 \,\mathrm{d}x \lesssim k_n^2 \int_{\bar{\Gamma}_n} |[D_t v](\bar{s})|^2 |\mu|_{I_n} \,\mathrm{d}\bar{s} \\
&\lesssim |\mu|_{I_n} k_n^2 \int_{I_n} |\bar{\mu}| |||[D_t v]|||^2_{\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t \lesssim |\mu|_{I_n} h \int_{I_n} |||k_n D_t v|||^2_{A_{h,t}} \,\mathrm{d}t \\
&\lesssim |\mu|_{I_n} \int_{I_n} |||v|||^2_{A_{h,t}} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{A.50}
$$

(A.45) 中所有项的处理均已完成。由此可得 (A.41)。 ■

引理 A.11（ $|||\cdot|||_X$**上的离散时间逆估计**）。设范数$|||\cdot|||_X$ 由（4.10）定义， k_n 为时间区间 I_n的长度，缩放微分算子 D_t 由（3.7）定义。那么，对于 $q = 0$，1，有

$$|||k_n D_t v|||_X \lesssim |||v|||_X \quad \forall v \in V_h \tag{A.51}$$

证明。（A.51）左端的平方为

$$\begin{aligned} |||k_n D_t v|||_X^2 = &\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n} k_n \|D_t(k_n D_t v)\|_{\Omega_i(t)}^2 \,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{n=1}^{N}\left(\int_{I_n} |||k_n D_t v|||_{A_{h,t}}^2 \,\mathrm{d}t + \||\bar{n}^t|^{1/2}[k_n D_t v]\|_{\bar{\Gamma}_n}^2\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N-1} \|[k_n D_t v]_n\|_{\Omega_{i,n}}^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\left(\|(k_n D_t v)_N^-\|_{\Omega_{i,N}}^2 + \|(k_n D_t v)_0^+\|_{\Omega_{i,0}}^2\right) \end{aligned} \tag{A.52}$$

第一项为零，因为对于 $q \le 1$， $D_t^2 v(x,\ t) = 0$。利用（4.2），可用$A_{h,\ t}$-范数项估计 $\bar{\Gamma}_n$-范数项。将引理 A.8 应用于$A_{h,\ t}$-范数项，并将引理 A.10 应用于最后两行中的所有项，可得这些项均可由 $|||v|||_X^2$估计。■

B 插值

令 $\cdot^\circ$ 表示集合的内部，例如 $I_n^\circ = (t_{n-1},\ t_n)$。此外，令 $C_b(\cup_n I_n^\circ)$表示在每个 I_n°上连续且有界的函数空间。本节将依次构造时空插值算子 $\bar{I}_h :\ C_b(\cup_n I_n^\circ; L^1(\Omega_0)) \to V_h$ ：首先定义空间插值算子，然后定义时间插值算子，最后将二者组合起来。本文还给出了插值误差估计。

B.1 分片算子和局部估计

定义 B.1。（空间插值算子）我们将空间插值算子 $\pi_{h,0} : L^1(\Omega_0) \to V_{h,0}$ 和 $\pi_{h,G} : L^1(G) \to V_{h,G}$ 分别定义为适用于空间$V_{h,0}$ 和 $V_{h,G}$的 Scott-Zhang 插值算子，其中定义积分是在整个单纯形上进行的。

注意，$\pi_{h,G}$ 是时间相关的，但为简化记号，我们省略了这一点。时间插值算子将在区域 Ω_0和 G的时空轨迹上进行插值。对于 $n = 1, \dots, N$，我们定义点$x \in \Omega_0$ 的分片时空轨迹，以及点 $x_n \in G(t_n)$ 的分片时空轨迹如下：

$$\bar{\hat{x}}_0^n := \{(\hat{x}(t), t) : \hat{x}(t) = x, t \in I_n\} \tag{B.1}$$

$$\bar{\hat{x}}_G^n := \{(\hat{x}(t), t) : \hat{x}(t) = x_n - \int_t^{t_n} \mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau, t \in I_n\} \tag{B.2}$$

注意，(A.17) 可用于获得由 (B.2) 定义的所有轨迹，但不能获得由 (B.1) 定义的所有轨迹，因为某些 $\hat{x}_0^n$ 可能完全位于 $S_{2,n}$ 内。令 S_n^q 表示用于插值到 $\mathcal{P}^q(I_n)$ 的时间插值点集合。我们取 $S_n^0 = \{t_n^-\}$ 和 $S_n^1 = \{t_n^-, t_{n-1}^+\}$。对于 $q > 1$，我们以某种合适的方式纳入 I_n 的内部点。

定义 B.2. （时间插值算子）对于每个时间子区间 I_n，其中 $n = 1, \dots, N$，我们定义时间插值算子 $\pi_0^n \colon C_b(\bar{x}_0^{n\circ\wedge}) \to \mathcal{P}^q(\bar{\wedge}x_0^n)$ 和 $\pi_G^n : C_b(\bar{x}_G^{n\circ\wedge}) \to \mathcal{P}^q(\bar{\wedge}x_G^n)$，使其成为使用 S_n^q 中的点作为节点插值点的节点插值算子。

请注意，π_0^n 和 π_G^n 具有空间相关性，但为简化记号，我们省略了这一点。我们将空间插值算子与时间插值算子结合起来，定义时空插值算子。

定义 B.3. （分片时空插值算子）对于 $n = 1, \dots, N$，我们定义分片时空插值算子 $\bar{I}_{h,0}^n \colon C_b(I_n^\circ; L^1(\Omega_0)) \to V_{h,0}^n$ 和 $\bar{I}_{h,G}^n \colon C_b(I_n^\circ; L^1(G)) \to V_{h,G}^n$ 如下

$$\bar{I}_{h,0}^n := \pi_0^n \pi_{h,0} \qquad \bar{I}_{h,G}^n := \pi_G^n \pi_{h,G} \tag{B.3}$$

回顾相互依赖的指标 $i \in \{1, 2\}$ 和 $j \in \{0, G\}$，其中 $j = 0$ 对应于 $i = 1$，而 $j = G$ 对应于 $i = 2$。令 $K_n := \{(x, t) : x \in K = K(t)\ t \in I_n\}$ 表示任意一个时空棱柱，其中 $K = K_j \in \mathcal{T}_j$。令 $\mathcal{N}(K)$ 表示单纯形 K 的邻域，即所有与 K 相邻及包含 K 在内的单纯形所构成的集合。我们还使用记号 $\|w\|_{K,\, I_n} = \max_{t \in I_n} \{\|w(\cdot,\ t)\|_{K(t)}\}$。

引理 B.1（K_n **的局部时空插值误差估计**）。令 $I_{h,\, j}^n$ 由 (B.3) 定义，其中 $j \in \{0, G\}$，并令 D_t 由 (3.7) 定义。那么，对于具有足够空间和时间正则性的函数 v，对 $0 \le s \le q+1$ 和 $0 \le r \le p+1$ 有

$$\|D_t^s (v - \bar{I}_{h,j}^n v)\|_{\bar{K}_n} \lesssim k_n^{q+1-s} \|D_t^{q+1} v\|_{\bar{K}_n} + h^{p+1} k_n^{1/2} \|D_x^{p+1} D_t^s v\|_{\mathcal{N}(K), I_n} \tag{B.4}$$

$$\|D_x^r (v - \bar{I}_{h,j}^n v)\|_{\bar{K}_n} \lesssim k_n^{q+1} \|D_t^{q+1} D_x^r v\|_{\bar{K}_n} + h^{p+1-r} k_n^{1/2} \|D_x^{p+1} v\|_{\mathcal{N}(K), I_n} \tag{B.5}$$

证明。我们分别证明这两个估计，先从第一个开始。利用 $I_{h,j}^n = \pi_j^n \pi_{h,j} = \pi_{h,j} \pi_j^n$、$D_t^s \pi_{h,j} = \pi_{h,j} D_t^s$、$\pi_{h,j}$ 的稳定性以及一个平凡估计，(B.4) 的左端为

$$\begin{aligned} \|D_t^s (v - \bar{I}_{h,j}^n v)\|_{\bar{K}_n} &\le \|D_t^s \pi_{h,j} (\mathbb{1} - \pi_j^n) v\|_{\bar{K}_n} + \|D_t^s (v - \pi_{h,j} v)\|_{\bar{K}_n} \\ &\lesssim \|D_t^s (\mathbb{1} - \pi_j^n) v\|_{\bar{K}_n} + k_n^{1/2} \|D_t^s v - \pi_{h,j} D_t^s v\|_{K, I_n} \end{aligned} \tag{B.6}$$

对 π_j^n 和 $\pi_{h,j}$ 应用标准估计后，可得第一个估计，接下来我们讨论第二个估计。我们将把 π_j^n 的插值函数展开为关于时间插值点 $t_k \in S_n^q$ 的求和，其中 $\lambda_k \in \mathcal{P}^q(I_n)$ 表示相应的形函数。对于具有充分正则性的函数 w，有

$$\begin{aligned} \|\pi_j^n w\|_{\bar{K}_n}^2 &= \int_{I_n} \int_{K(t)} \left| \sum_{t_k \in S_n^q} w(\hat{x}(t_k), t_k) \lambda_k(t) \right|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \\ &\le (q+1) \sum_{t_k \in S_n^q} \int_{I_n} \int_{K(t)} |w(\hat{x}(t_k), t_k)|^2 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \lesssim k_n \|w\|_{K, I_n}^2 \end{aligned} \tag{B.7}$$

利用这一点，并利用 $D_x^r \pi_j^n = \pi_j^n D_x^r$，(B.5) 的左侧为

$$\begin{aligned} \|D_x^r(v - \bar{I}_{h,j}^n v)\|_{\bar{K}_n} &\le \|D_x^r(v - \pi_j^n v)\|_{\bar{K}_n} + \|D_x^r \pi_j^n (\mathbb{1} - \pi_{h,j}) v\|_{\bar{K}_n} \\ &\lesssim \|D_x^r v - \pi_j^n D_x^r v\|_{\bar{K}_n} + k_n^{1/2} \|D_x^r (\mathbb{1} - \pi_{h,j}) v\|_{K,I_n} \end{aligned} \tag{B.8}$$

对 π_j^n 和 π_{h}应用标准估计$_j$ 可得第二个估计。 ■

回顾由 (A.18) 定义的 $\hat{s}$。令 $\mathcal{T}_{j,\ D} = \{K \in \mathcal{T}_j :\ K \cap D \neq 0\}$，其中 D 是 $\mathbb{R}^{d+1}$的一个可能随时间变化的子集。

引理 B.2（分片时空插值误差估计 $\bar{\Gamma}_n$）。令$I_{h,\ j}^n$由 (B.3) 定义，其中 $j \in \{0, G\}$，并令 D_t 由 (3.7) 定义。则对于具有充分空间和时间正则性的任意函数 v，有

$$\|(v - \bar{I}_{h,j}^n v)_i\|_{\bar{\Gamma}_n}^2 \lesssim k_n^{2q+2} \|D_t^{q+1} v\|_{L^2(\bar{\Gamma}_n, L^\infty(I_n))}^2 + h^{2p+1} \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} k_n \|D_x^{p+1} v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2 \tag{B.9}$$

证明。所有 $q \ge 0$的一般证明思路都是相同的。不同之处在于如何处理时间差分。我们展示如何处理 $q = 1$，由此应可相对直接地了解如何处理其他情形。使用形函数 $\lambda_k \in \mathcal{P}^q(I_n)$，其对应于插值点 $t_k \in S_n^q$，(B.9) 左端范数中的被估计量为

$$\begin{aligned} &(v - \bar{I}_{h,j}^n v)_i|_{\bar{\Gamma}_n} = v(s,t) - \sum_{t_k \in S_n^q} \pi_{h,j} v(\hat{s}_k, t_k) \lambda_k(t) \\ &= \underbrace{\sum_{t_k \in S_n^q} \Big(v(s,t) - v(\hat{s}_k, t_k) \Big) \lambda_k(t)}_{=A} + \underbrace{\sum_{t_k \in S_n^q} \Big(v(\hat{s}_k, t_k) - \pi_{h,j} v(\hat{s}_k, t_k) \Big) \lambda_k(t)}_{=B} \end{aligned} \tag{B.10}$$

因此，可将 (B.9) 的左端拆分为 $\|(v - \bar{I}_{h,\ j}^n v)_i\|_{\bar{\Gamma}_n}^2 \lesssim \|A\|_{\bar{\Gamma}_n}^2 + \|B\|_{\bar{\Gamma}_n}^2$，其中我们分别考察各项，首先从第一项开始。我们进一步处理 A，并将讨论限制在情形 $q = 1$。不过，由此应该不难看出如何处理 $q \neq 1$ 下的 A。沿时空轨迹应用中值定理，利用形函数的显式表达式λ_{n-1} 和 $q = 1$ 下的 λ_n，再结合微积分基本定理，可得

$$A = \sum_{t_k \in S_n^q} D_t v(\hat{s}, c_k)(t - t_k) \lambda_k(t) = \frac{(t - t_n)(t - t_{n-1})}{k_n} \int_{c_{n-1}}^{c_n} D_t^2 v(\hat{s}, \tau) \, \mathrm{d}\tau \tag{B.11}$$

利用 (B.11)，可得

$$\begin{aligned} \|A\|_{\bar{\Gamma}_n}^2 &\le \int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} k_n^2 (c_n - c_{n-1}) \int_{c_{n-1}}^{c_n} |D_t^2 v(\hat{s}, \tau)|^2 \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\ &\le k_n^4 \|D_t^2 v\|_{L^2(\bar{\Gamma}_n, L^\infty(I_n))}^2 \end{aligned} \tag{B.12}$$

记 $B_k = v(\hat{s}_k, t_k) - \pi_{h,j} v(\hat{s}_k, t_k)$，利用 (A.11) 以及关于 $\pi_{h,j}$ 的标准估计，我们

得到

$$\begin{aligned}\|B\|_{\bar{\Gamma}_n}^2 &\lesssim \int_{I_n} |\bar{\mu}| \int_{\Gamma(t)} \sum_{t_k \in S_n^q} |v(\hat{s}_k, t_k) - \pi_{h,j} v(\hat{s}_k, t_k)|^2 \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t \\ &\lesssim \sum_{t_k \in S_n^q} \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} k_n \|B_k\|_{\Gamma_K}^2 \lesssim \sum_{t_k \in S_n^q} \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} k_n \left(h_K^{-1} \|B_k\|_K^2 + h_K \|D_x B_k\|_K^2 \right) \\ &\lesssim h^{2p+1} \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} k_n \|D_x^{p+1} v\|_{\mathcal{N}(K), I_n}^2\end{aligned} \tag{B.13}$$

■

引理 B.3（时间端点处的局部空间插值误差估计）。令 $\bar{I}_{h,j}^n$ 由 (B.3) 定义，其中 $j \in \{0, G\}$，令 $t_k^\tau \in \{t_{n-1}^+, t_n^-\}$，并令 D_t 由 (3.7) 定义。那么，对于具有充分空间和时间正则性的任意函数 v，对于 $q > 0$，有

$$\|(v - \bar{I}_{h,j}^n v)_k^\tau\|_K \lesssim h^{p+1} \|D_x^{p+1} v(\cdot, t_k^\tau)\|_{\mathcal{N}(K)} \tag{B.14}$$

并且对于 $q = 0$，有

$$\|(v - \bar{I}_{h,j}^n v)_n^-\|_K \lesssim h^{p+1} \|D_x^{p+1} v(\cdot, t_n^-)\|_{\mathcal{N}(K)} \tag{B.15}$$

$$\|(v - \bar{I}_{h,j}^n v)_{n-1}^+\|_K \lesssim k_n^{1/2} \|D_t v\|_{\bar{K}_n} + h^{p+1} \|D_x^{p+1} v(\cdot, t_n^-)\|_{\mathcal{N}(K)} \tag{B.16}$$

证明。估计式 (B.14) 和 (B.15) 可直接由以下事实以及对 $\pi_{h,j}$ 的标准估计得到：t_k^τ 是 π_j^n 的插值点。但这对于 (B.16) 并不适用，因为 t_{n-1}^+ 不是 $q = 0$的插值点。因此，我们沿着单元 $x \in K$ 的分片时空轨迹积分，得到

$$\begin{aligned}\|v(\cdot, t_{n-1}^+) - v(\cdot, t_n^-)\|_K^2 &= \int_K \left| v(x(t_{n-1}^+), t_{n-1}^+) - v(x(t_n^-), t_n^-) \right|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_K \left| \int_{I_n} D_t v(x(t), t) \,\mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}x \le k_n \|D_t v\|_{\bar{K}_n}^2\end{aligned} \tag{B.17}$$

利用 $q = 0$的 π_j^n 定义，(B.16) 左侧为

$$\begin{aligned}\|(v - \bar{I}_{h,j}^n v)_{n-1}^+\|_K &\le \|(v - \pi_j^n v)(\cdot, t_{n-1}^+)\|_K + \|(\pi_j^n v - \pi_j^n \pi_{h,j} v)(\cdot, t_{n-1}^+)\|_K \\ &= \|v(\cdot, t_{n-1}^+) - v(\cdot, t_n^-)\|_K + \|(v - \pi_{h,j} v)(\cdot, t_n^-)\|_K\end{aligned} \tag{B.18}$$

应用 (B.17) 以及对 $\pi_{h,j}$ 的标准估计，可得 (B.16)。 ■

B.2 全局算子与估计

定义 B.4。（主要时空插值算子）我们定义主要时空插值算子 $\bar{I}_h$：$C_b(\cup_n I_n^\circ; L^1(\Omega_0)) \to V_h$ 如下：对于 $n = 1, \ldots, N$，

$$\bar{I}_h v|_{S_{1,n}} := \bar{I}_{h,0}^n v|_{S_{1,n}} \qquad \bar{I}_h v|_{S_{2,n}} := \bar{I}_{h,G}^n v|_{S_{2,n}} \tag{B.19}$$

引理 B.4（$\boldsymbol{\Omega(0,T])}$.¯的全局时空插值误差估计）设 I_h 由 (B.19) 定义， D_t 由 (3.7) 定义。则对于具有充分空间和时间正则性的任意函数 v，对于 $0 \le s \le q+1$ 和 $0 \le r \le p+1$，有

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}\|D_t^s(v-\bar{I}_h v)\|_{\Omega_i(t)}^2\,\mathrm{d}t \lesssim k^{2(q+1-s)}E_{k,0}^2(v)+h^{2(p+1)}E_{h,s}^2(v) \tag{B.20}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\int_{I_n}\|D_x^r(v-\bar{I}_h v)\|_{\Omega_i(t)}^2\,\mathrm{d}t \lesssim k^{2(q+1)}E_{k,r}^2(v)+h^{2(p+1-r)}E_{h,0}^2(v) \tag{B.21}$$

其中

$$E_{k,r}^2(v)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{K\in\mathcal{T}_{j,S_{i,n}}}\|D_t^{q+1}D_x^r v\|_{\bar{K}_n}^2 \tag{B.22}$$

$$E_{h,s}^2(v)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{K\in\mathcal{T}_{j,S_{i,n}}}k_n\|D_x^{p+1}D_t^s v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2 \tag{B.23}$$

证明。 这两个估计均可通过应用引理 B.1 得到。 ■

¯**引理 B.5（关于 $\boldsymbol{|||\cdot|||_{B_h}}$ 的插值误差估计）**。令$|||\cdot|||_{B_h}$、 I_h和 D_t 分别由 (4.8)、(B.19) 和 (3.7) 定义。那么，对于具有充分空间和时间正则性的任意函数 v，有

$$\left|\left|\left|v-\bar{I}_h v\right|\right|\right|_{B_h}^2 \lesssim k^{2q+1}F_k^2(v)+h^{2p}F_h^2(v) \tag{B.24}$$

其中

$$\begin{aligned}F_k^2(v)=&\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{K\in\mathcal{T}_{j,S_{i,n}}}\left(\|D_t^{q+1}v\|_{\bar{K}_n}^2+\|D_t^{q+1}\nabla v\|_{\bar{K}_n}^2+\|D_t^{q+1}D_x^2 v\|_{\bar{K}_n}^2\right)\\&+\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\|D_t^{q+1}v\|_{L^2(\bar{\Gamma}_n,L^\infty(I_n))}^2\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$F_h^2(v)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{K\in\mathcal{T}_{j,S_{i,n}}}k_n\|D_x^{p+1}v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2 \tag{B.26}$$

¯**证明**。 令 $w=v-I_h v$，则 (B.24) 的左端为

$$\begin{aligned}|||w|||_{B_h}^2=&\sum_{n=1}^{N}\underbrace{\int_{I_n}|||w|||_{A_{h,t}}^2\,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{I}}+\sum_{n=1}^{N}\underbrace{\||\bar{n}^t|^{1/2}[w]\|_{\bar{\Gamma}_n}^2}_{=\mathrm{II}}+\sum_{i=1}^{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}\|[w]_n\|_{\Omega_{i,n}}^2}_{=\mathrm{III}}\\&+\sum_{i=1}^{2}\underbrace{\|w_N^-\|_{\Omega_{i,N}}^2}_{=\mathrm{IV}}+\sum_{i=1}^{2}\underbrace{\|w_0^+\|_{\Omega_{i,0}}^2}_{=\mathrm{V}}\end{aligned} \tag{B.27}$$

我们分别考察各项，先从第一项开始。

$$\begin{aligned}\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{2} \underbrace{\int_{I_n} \|\nabla w\|^2_{\Omega_i(t)} \,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{I.i}} + \underbrace{\int_{I_n} |\bar{\mu}| \|\langle \partial_{\bar{n}^x} w \rangle\|^2_{-1/2,h,\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{I.ii}} \\ + \underbrace{\int_{I_n} |\bar{\mu}| \|[w]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{I.iii}} + \underbrace{\int_{I_n} \|[\nabla w]\|^2_{\Omega_O(t)} \,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{I.iv}}\end{aligned} \tag{B.28}$$

令 $w_j^n = v - I^n_{h,\ j} v$，我们将分别处理 (B.28) 中的各项，首先从第一项开始。

$$\mathrm{I.i} \leq \int_{I_n} \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\Omega_i(t)}} \|\nabla w_j^n\|^2_K \,\mathrm{d}t \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,S_{i,n}}} \|\nabla w_j^n\|^2_{\bar{K}_n} \tag{B.29}$$

利用标准估计、(A.15) 和 (A.11)，第二项为

$$\begin{aligned}\mathrm{I.ii} &\lesssim \int_{I_n} \sum_{i=1}^{2} \sum_{K_j \in \mathcal{T}_{j,\Gamma(t)}} h_{K_j} \|(\nabla w)_i\|^2_{\Gamma_{K_j}} \,\mathrm{d}t \\ &\lesssim \sum_{i=1}^{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} \left(\|\nabla w_j^n\|^2_{\bar{K}_n} + h_K^2 \|D_x^2 w_j^n\|^2_{\bar{K}_n} \right)\end{aligned} \tag{B.30}$$

对于第三项，我们使用相同的标准估计，并再次应用 (A.15)，于是

$$\mathrm{I.iii} \lesssim \int_{I_n} |\bar{\mu}| \sum_{i=1}^{2} \sum_{K_j \in \mathcal{T}_{j,\Gamma(t)}} h_{K_0}^{-1} \|w_i\|^2_{\Gamma_{K_j}} \,\mathrm{d}t \leq h_{\min}^{-1} \sum_{i=1}^{2} \|(w_j^n)_i\|^2_{\bar{\Gamma}_n} \tag{B.31}$$

第四项为

$$\mathrm{I.iv} \lesssim \int_{I_n} \sum_{i=1}^{2} \|(\nabla w)_i\|^2_{\Omega_O(t)} \,\mathrm{d}t \leq \sum_{i=1}^{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} \|\nabla w_j^n\|^2_{\bar{K}_n} \tag{B.32}$$

我们已分别处理完 (B.28) 中的所有项，接下来处理 (B.27) 中的第二项。对于这一项，利用 $|\bar{n}^t| \leq |\mu|$ 以及 (4.2)，可得到一个因子 I.iii，它可直接用 (B.31) 估计，于是

$$\mathrm{II} \leq |\mu|_{(0,T]} h \int_{I_n} |\bar{\mu}| \|[w]\|^2_{1/2,h,\Gamma(t)} \,\mathrm{d}t \lesssim |\mu|_{(0,T]} h h_{\min}^{-1} \sum_{i=1}^{2} \|(w_j^n)_i\|^2_{\bar{\Gamma}_n} \tag{B.33}$$

将 (B.27) 中的第三、第四和第五项合并，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} &\lesssim \sum_{n=1}^{N} \left(\|w_n^-\|^2_{\Omega_{i,n}} + \|w_{n-1}^+\|^2_{\Omega_{i,n-1}} \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\Omega_{i,n}}} \|(w_j^n)_n^-\|^2_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_{j,\Omega_{i,n-1}}} \|(w_j^n)_{n-1}^+\|^2_K \right)\end{aligned} \tag{B.34}$$

分别 (B.27) 中所有项的阶处理均已完成。所得估计给出 e

$$
\begin{aligned}
|||w|||_{B_h}^2 \lesssim \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\Bigg(& \sum_{K\in\mathcal{T}_{j,S_{i,n}}} \underbrace{\|\nabla w_j^n\|_{\bar{K}_n}^2}_{=\mathrm{A}} + \sum_{K\in\mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} \underbrace{h_K^2\|D_x^2 w_j^n\|_{\bar{K}_n}^2}_{=\mathrm{B}} \\
& + \underbrace{h_{\min}^{-1}\|(w_j^n)_i\|_{\bar{\Gamma}_n}^2}_{=\mathrm{C}} + \sum_{K\in\mathcal{T}_{j,\Omega_{i,n}}} \underbrace{\|(w_j^n)_n^-\|_K^2}_{=\mathrm{D}} + \sum_{K\in\mathcal{T}_{j,\Omega_{i,n-1}}} \underbrace{\|(w_j^n)_{n-1}^+\|_K^2}_{=\mathrm{E}}\Bigg)
\end{aligned}
\tag{B.35}
$$

我们分别考虑五种不同类型的项。对于项 A，我们使用引理 B.1，并取 $r=1$:

$$
\mathrm{A} = \|\nabla(v-\bar{I}_{h,j}^n v)\|_{\bar{K}_n}^2 \lesssim k_n^{2(q+1)}\|D_t^{q+1}\nabla v\|_{\bar{K}_n}^2 + h^{2p}k_n\|D_x^{p+1}v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2 \tag{B.36}
$$

对于项 B，我们使用引理 B.1，并取 $r=2$:

$$
\mathrm{B} = h_K^2\|D_x^2(v-\bar{I}_{h,j}^n v)\|_{\bar{K}_n}^2 \lesssim k_n^{2(q+1)}\|D_t^{q+1}D_x^2 v\|_{\bar{K}_n}^2 + h^{2p}k_n\|D_x^{p+1}v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2 \tag{B.37}
$$

对于项 C，我们使用引理 B.2 和 (3.1):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C} &= h_{\min}^{-1}\|(v-\bar{I}_{h,j}^n v)_i\|_{\bar{\Gamma}_n}^2 \\
&\lesssim k_n^{2q+1}\|D_t^{q+1}v\|_{L^2(\bar{\Gamma}_n,L^\infty(I_n))}^2 + h^{2p}\sum_{K\in\mathcal{T}_{j,\bar{\Gamma}_n}} k_n\|D_x^{p+1}v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2
\end{aligned}
\tag{B.38}
$$

将引理 B.3 应用于项 D，并使用 (3.1)，可得

$$
\mathrm{D} = \|(v-\bar{I}_{h,j}^n v)_n^-\|_K^2 \lesssim h^{2p}k_n\|D_x^{p+1}v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2 \tag{B.39}
$$

对项 E 使用引理 B.3 和 (3.1)，可得

$$
\mathrm{E} = \|(v-\bar{I}_{h,j}^n v)_{n-1}^+\|_K^2 \lesssim k_n^{2q+1}\|D_t^{q+1}v\|_{\bar{K}_n}^2 + h^{2p}k_n\|D_x^{p+1}v\|_{\mathcal{N}(K),I_n}^2 \tag{B.40}
$$

将这些局部估计代入 (B.35)，即可得到 (B.24)。 ■

应用引理 B.3 并利用 (3.1)，可得以下估计:

推论 B.1（时间端点处的全局空间插值误差估计）。令 I_h 和 F_h 分别由 (B.19) 和 (B.26) 定义。那么，对于具有充分空间和时间正则性的任意函数 v，有

$$
\sum_{n=1}^{N}\|(v-\bar{I}_h v)_n^-\|_{\Omega_0}^2 \lesssim h^{2p}F_h^2(v) \tag{B.41}
$$

参考文献

[1] J. Nitsche, 《Uber ein Variationsprinzip zur L¨osung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilr¨aumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind》，载于 *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universit¨at Hamburg*，第36卷。Springer，1971年，第9–15页。

[2] A. Hansbo 和 P. Hansbo，《一种基于 Nitsche 方法、用于椭圆界面问题的非拟合有限元方法》，*Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*，第191卷，第47期，第5537–5552页，2002年。[3] A. Hansbo、P. Hansbo 和 M. G. Larson，《一种基于 Nitsche 方法的复合网格有限元方法》，*ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.*，第37卷，第03期，第495–514页，2003年。[4] E. Burman 和 M. A. Fernández，《使用 Nitsche 方法实现流固耦合的稳定显式耦合》，*C. R. Math. Acad. Sci. Paris*，第345卷，第8期，第467–472页，2007年。[5] E. Burman 和 P. Hansbo，《Stokes方程与Darcy方程的统一稳定方法》，*J. Comput. Appl. Math.*，第198卷，第1期，第35–51页，2007年。[6] R. Becker、E. Burman 和 P. Hansbo，《用于不连续弹性模量不可压弹性的 Nitsche 扩展有限元方法》，*Comp. MethodsAppl. Mech. Engrg.*，第198卷，第41期，第3352–3360页，2009年。[7] A. Massing、M. G. Larson、A. Logg 和 M. E. Rognes，《一种用于 Stokes问题的稳定 Nitsche 虚拟区域方法》，***Journal of Scientific Computing***，第61卷，第3期，第604–628页，2014年。[8] ——，《一种用于 Stokes问题的稳定 Nitsche 重叠网格方法》，***Numerische Mathematik***，第128卷，第1期，第73–101页，2014年。[9]A. Johansson、M. G. Larson 和 A. Logg，《用于Stokes问题的高阶切割有限元方法》，*Advanced ModelingandSimulation inEngineering Sciences*，第2卷，第1期，第1–23页，2015年。[在线]。链接：http://dx.doi.org/10.1186/s40323-015-0043-7[10] J. S. Dokken、S. W. Funke、A. Johansson 和 S. Schmidt，《使用 Nitsche 耦合在多个网格上进行有限元形状优化》，***SIAM Journal on Scientific Computing***，第41卷，第3期，A1923–A1948页，2019年。[11] A. Johansson、B. Kehlet、M. G. Larson 和 A. Logg，《多网格有限元方法：在多个相交网格上求解偏微分方程》，*Computer Methods inApplied Mechanics and Engineering*，2019年。[12] A. Cangiani、Z. Dong 和 E. H. Georgoulis，《棱柱网格上抛物问题的 hp 版本时空间断 Galerkin 方法》，***SIAM Journal on Scientific Computing***，第39卷，第4期，A1251–A1279页，2017年。 [在线]。链接：https://doi.org/10.1137/16M1073285