arXiv:2302.00351v1 [math.AG] 1 Feb 2023

由平面构造的 Looijenga 对的稳定映射

Michel van Garrel

Abstract. 选取一个正则交反典范除子 $\mathbb{P}^2$，会得到四个对数 Calabi–Yau 曲面，其中三个是 Looijenga 对。在这篇综述文章中，我将介绍如何计数与除子的每个分支各交于一点且具有最大接触的有理曲线。

Contents

1. 引言 1 2. 最大接触的属零对数 Gromov-Witten 不变量 4 3. 热带对应与不变量 $N_d(\mathbb{P}^2, D^{\text{toric}})$ 4 4. 退化与不变量 $N_d(\mathbb{P}^2, D_1 + D_2)$ 6 5. 散射与不变量 $N_d(\mathbb{P}^2, D_3)$ 参考文献

11

12

1. Introduction

对数 Calabi–Yau 曲面 (Y, D) 是一个曲面 Y，配有一个正则交除子 D，使得其补集为 Calabi–Yau。(Y, D) 若还满足 D 具有零维层，则称为 Looijenga 对。从 $Y = \mathbb{P}^2$开始，D 的次数为 3，构造对数 Calabi–Yau 曲面有 4 种方式：$D = D^{\text{toric}}$，由 3 条直线组成的环面除子；$D = D_1 + D_2$，一条直线D_1 与一条圆锥曲线 D_2 的并，且圆锥曲线不与 D_1相切；$D = D_3$ 一条节点三次曲线；以及 $D = E$ 一条光滑三次曲线。除最后一种外，其余都是 Looijenga 对。

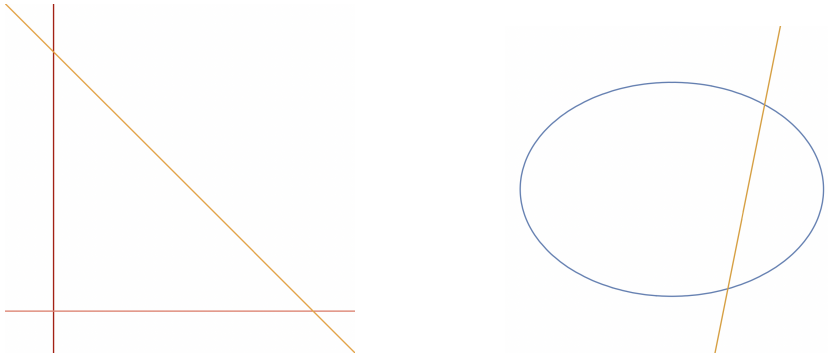


Figure 1.1. 环面除子 D^{toric} 以及由一条直线和一条圆锥曲线构成的除子 $D_1 + D_2$。

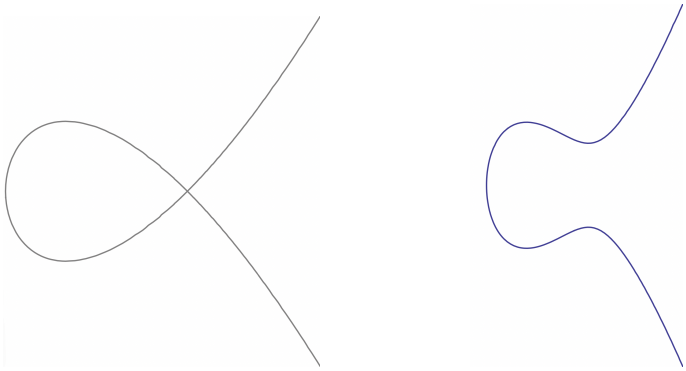


FIGURE 1.2. 分别由节点三次曲线 D_3 和光滑三次曲线 E形成的除子 .

用 $l \leq 3$ 表示 D 的不可约分支数，并令 $\mathbb{P}^1[l]$ 为 $\mathbb{P}^1$中去掉 l个点后的补集。在自同构意义下，我们有 $\mathbb{P}^1[1] = \mathbb{A}^1$、 $\mathbb{P}^1[2] = \mathbb{C}^*$ 和 $\mathbb{P}^1[3] = \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$。一个出人意料地复杂的问题是，通过计算伪全纯映射来研究 $Y \setminus D$ 的几何

$$\mathbb{P}^1[l] \longrightarrow Y \setminus D$$

次数为 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且经过 $l-1$ 个固定点的曲线。例如，当次数为 1 且对于 $D = E$时，有 9 条这样的 $\mathbb{A}^1$曲线，分别对应于 E的 9 条拐切线。

对这一计数的现代表述是亏格 0 最大接触对数Gromov–Witten不变量 $N_d(\mathbb{P}^2,\ D)$ [1, 20, 33]。这些不变量，以及更一般地说， [3],的穿孔不变量，在内禀镜像对称的镜像构造中发挥着关键作用 [34, 35]。在这篇综述中，我将介绍用于计算 $N_d(\mathbb{P}^2,\ D)$ 的方法。对于 $D = D_1 + D_2$的情形，我给出完整证明，可作为对 [15],散射图方法的深入介绍；关于强调其与物理学联系的介绍，另见 [17]。

对于环面（$\mathbb{P}^2,\ D^{\text{toric}}$），我们可以利用热带对应结果 [39, 40, 42],，它将N_d（$\mathbb{P}^2,\ D^{\text{toric}}$）转化为对带权热带曲线的计数。 [14, 定理 3.2] 的一个特例指出：

$$N_d(\mathbb{P}^2, D^{\text{toric}}) = d^2, \tag{1.1}$$

将在下文的命题 3.3 中重新证明。

对于直线和圆锥曲线的情形， N_d（$\mathbb{P}^2,\ D_1 + D_2$）是通过退化得到的。[15, 例 3.1],或下文的命题 4.3 给出的结果是：

$$N_d(\mathbb{P}^2, D_1 + D_2) = \binom{2d}{d}. \tag{1.2}$$

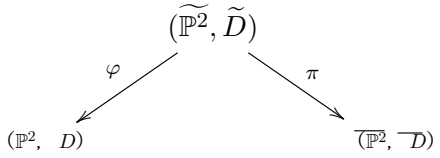
不变量 $N_d(\mathbb{P}^2,\ D_3)$ 由局部散射图中中心射线的墙穿越函数编码。该函数的各项在 [31, 方程（1.3）], 中提出猜想，并在 [43] 中得到证明。应用 [32], 后，不变量可由以下幂级数展开的等式给出

$$\sum_{d=1}^{\infty} d\, N_d(\mathbb{P}^2, D_3)\, x^d = 3 \log\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3k+1} \binom{4k}{k} x^k \right). \tag{1.3}$$

$(\mathbb{P}^2,\ E)$ 的不变量结构与 K3 曲面不变量的结构有相似之处 [16, 22]，因此有时将 $(\mathbb{P}^2,\ E)$ 称为对数K3曲面。计算 $N_d(\mathbb{P}^2,\ E)$ 不在本综述的讨论范围内。它有着悠久而丰富的历史。里程碑论文 [44]，首次对其进行了研究，并提出且为关于 $(\mathbb{P}^2,\ E)$ 的三个重要猜想提供了证据。第一个猜想首次提出了对数/局部对应，它将 $N_d(\mathbb{P}^2,\ E)$ 表述为局部曲面的属零局部 Gromov–Witten 不变量；该局部曲面由全空间 Tot $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-E))$ 给出。这个猜想最初在 [28]，中得到证明，随后在 [24]，中推广，并在 [7, 13–16, 41, 45] 中进一步扩展。第二个猜想是针对 $(\mathbb{P}^2,\ E)$ 的对数 / 局部对应的 BPS版本，即支配亏格 0 对数理论和局部理论的整数值计数之间的对应。它通过一系列工作 [11, 12, 18, 36] 得到了证明。

本文 [44] 还引入了（$\mathbb{P}^2,\ E$）的对数镜像镜像对称。作者构造了一个镜像族，并计算了该镜像族上的周期。第三个猜想进一步指出，用典范坐标表示的二阶周期是 N_d（$\mathbb{P}^2,\ E$）的生成函数。在此基础上，[18,35,36], 即将发表的工作给出了这一预测在所有维数下的几何证明；另见 [26]，其中给出了（$\mathbb{P}^2,\ E$）情形的自包含证明。

1.1. 方法。 本综述采用的方法是将 Looi-jenga 对退化为环面模型 。这些是其他的——环面——Loiijenga 对（$\mathbb{P}^2,\ D$），其中（$\mathbb{P}^2,\ D$）是通过在 D的光滑点对（$\mathbb{P}^2,\ D$）进行吹起后再作对数修改得到的。具体而言，这是一个图:



使得 φ 是对 D （的全变换）的奇点进行的一系列吹起，而 π 是一个环面模型，即对 D（的严格变换）的光滑点进行的一系列吹起。根据[29, 命题 1.3]，这样的环面模型总是存在。由 [5] φ 保持对数Gromov–Witten不变量。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$下一步是对 $(\mathbb{P}^2,\ D)$ 进行一系列标准退化。应用退化公式 [2, 4, 19, 37, 38], 后，得到的不变量 $N_d(\mathbb{P}^2,\ D)$ 可由 $(\mathbb{P}^2,\ D)$ 的对数Gromov–Witten不变量（通过热带对应计算）以及一些已知标准片段的对数Gromov–Witten不变量来计算。这一非常一般的算法在 [32]中被形式化为散射图算法。

本文的目标之一是详细阐释 [29, 30, 32] 对 $(\mathbb{P}^2, D_1 + D_2)$ 和 $(\mathbb{P}^2, D_3)$ 这两个例子的构造。若要了解完整论述，读者可参阅 [15]。
计算这些不变量还有其他方法，每种方法本身都很有趣。从模空间的层面进行研究，这些方法包括 [6, 21–24, 27, 41]；以及运用 Givental 型镜像对称 [7, 8, 45, 46]。

Acknowledgements

感谢 Dhruv Ranganathan 最初建议研究 $D_1 + D_2$ 的例子，从而引出 [13, 15]。感谢诺丁汉在线代数几何研讨会，尤其是 Al Kasprzyk 和 Livia Campo，给我机会介绍这些结果。感谢我的合作者 Pierrick Bousseau、Andrea Brini、Jinwon Choi、Navid Nabijou、Helge Ruddat、Yannik Sch¨uler 和 Bernd Siebert，感谢他们就本文涉及的多个方面展开讨论。感谢 Fenglong You 与我讨论计算这些不变量的平行方法，也感谢 Tim Gr¨afnitz 与我讨论 [36]。

2. Genus 0 log Gromov-Witten invariants of maximal tangency

对于每个 Looijenga 对（$\mathbb{P}^2$, D），赋予 $\mathbb{P}^2$ 由 D确定的除子对数结构。该对数结构作为组合工具，用于沿 D的各个分支施加相切条件。对于一个映射

$$f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \tag{2.1}$$

这是通过要求标记点处对数结构上的拉回映射由该点施加的相切阶数所对应的乘法给出来实现的。按照（2.1）中的方式将映射空间紧化，[1, 20, 33] 构造亏格 0、具有 m 个标记点的最大相切基本稳定对数映射的模空间 $\mathrm{M}_m^{\log}(\mathbb{P}^2, D, \overline{d})$，以及其虚基本类

$$[\overline{\mathrm{M}}_m^{\log}(\mathbb{P}^2, D, d)]^{\mathrm{vir}} \in \mathrm{H}_{2(l+m-1)}(\overline{\mathrm{M}}_m^{\log}(\mathbb{P}^2, D, d)).$$

在记号中，我省略携带相切条件的 l 个标记点，并记录不携带相切条件的 m个内部点。基本性/极小性的概念选出了一个普适的对数结构，这是保证模空间具有代数性和紧致性所必需的。

对于 $j = 1, \ldots, m$，模空间在第 j 个标记点处有求值映射

$$\mathrm{ev}_j : \overline{\mathrm{M}}_m^{\log}(\mathbb{P}^2, D, d) \longrightarrow \mathbb{P}^2.$$

要求曲线经过 $\mathbb{P}^2$ 中的一个固定点，相当于用 $\mathrm{ev}_j^*([\mathrm{pt}])$ 与虚基本类取杯积。如此做 $l-1$ 次，得到不变量

$$N_d(\mathbb{P}^2, D) := \int_{[\overline{\mathrm{M}}_{l-1}^{\log}(\mathbb{P}^2, D, d)]^{\mathrm{vir}}} \prod_{j=1}^{l-1} \mathrm{ev}_j^*([\mathrm{pt}]).$$

还可以施加其他插入项。例如，对于每个环面除子都数值有效的环面簇类，[14]计算所有带有点类和 psi 类的不变量。

例 2.1. 固定一个点 P，平面中有两条直线经过 P，它们分别与 D_1 相交于一个 1 阶点，与 D_2 相交于一个 2 阶点，见图 2.1。

3. Tropical correspondence and the invariants $N_d(\mathbb{P}^2, D^{\mathrm{toric}})$

Looijenga 对（$\mathbb{P}^2$, D^{toric}）是环面的，因此其自身就是环面模型；我们可以通过枚举扇 Ξ（$\mathbb{P}^2$, D^{toric}）中的带权热带曲线来计算 N_d（$\mathbb{P}^2$, D^{toric}）。

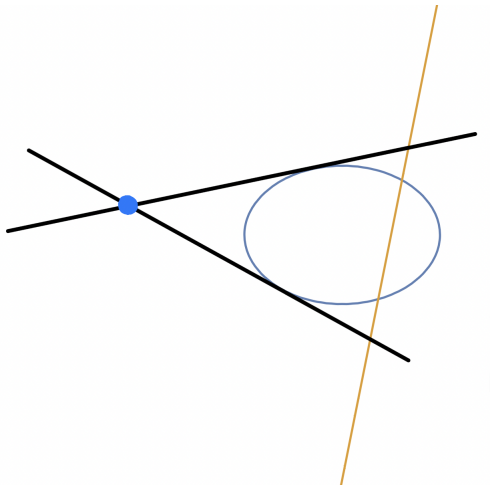


FIGURE 2.1. 经过一个点且分别与圆锥曲线、直线相交于一个二重相交点、单重相交点的两条直线。

定义 3.1。 次数为 d 、亏格 0 且具有最大接触的热带曲线 Γ 在 Ξ 中是一个图 Γ ，它可以具有无界边，满足：

(1) v Γ 的顶点是 Ξ 支集中的元素，由边 e分隔；这些边是有理斜率为 $\in \mathbb{Z}^2$ 的线段，带有权重 w（e） ≥ 1。(2) 平衡条件：对于 Γ的一个顶点 v 及其相邻边 e，记$u_{(v,e)}$ 为该边的本原出射向量。将这些向量乘以权重 w后，它们的和为 0：

$$\sum_{v\in e} w(e)\, u_{(v,e)} = 0.$$

(3) 记 $D^{\text{toric}} = T_1 + T_2 + T_3$ 为环面除子 T_i， Γ 恰有一条权重为 d 的无界边与对应于 T_i的 Ξ 射线平行，且没有其他无界边。

(4) 第一贝蒂数 b_1（Γ） $= 0$。

就我们的目的而言，可以将热带曲线视为记录稳定对数映射的相切行为。

定义 3 .2. 对于一个三价顶点 $v \in \Gamma$ ，其出射边为 e_1, e_2, e_3， v 的权重 is

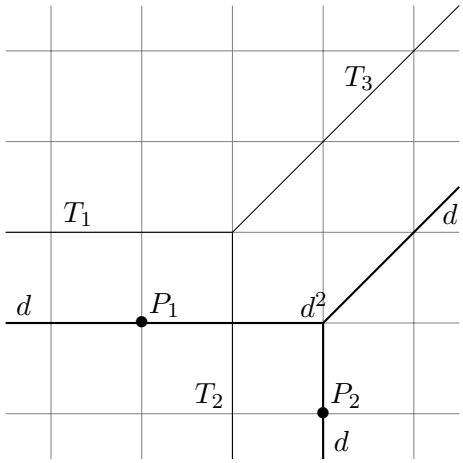
$$w(v) := w(e_i)\, w(e_j) \left| \det \left(u_{(v,e_i)}\, u_{(v,e_j)} \right) \right|$$

其中 $i \neq j$ 和 $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$。根据平衡条件，这一定义良好。$\Gamma$、 w（Γ）的权重由每个三价顶点的权重之积给出。

命题 3.3. 固定两个一般点 $P_1, P_2 \in \Xi$，在 Ξ 中，只有一条亏格 0、次数为 d 且具有最大接触阶的热带曲线经过 P_1 和 P_2。其权重为 d^2 ，因此

$$N_d(\mathbb{P}^2, D^{\text{toric}}) = d^2.$$

证明。 唯一这样的热带曲线如下图所示。其权重为 d^2。由热带对应 [39, 40, 42]可得结论。



□

4. Degeneration and the invariants $N_d(\mathbb{P}^2,\ D_1+D_2)$

4.1. 环面模型。 记 p 为 D_1 与 D_2 的两个交点之一，并记 L 为在 p处与 D_2 相切的直线。我描述一种对数修改，它是通过依次爆破除子 $D=D_1+D_2$（全变换）的零维分层上的点得到的。我选择 D_1 和 L 作为环面除子，并描述一系列修改，将 D_2 也变为环面除子（属于另一条曲面）。每次爆破和收缩都是环面的。

约定 4.1. 我用同一个字母表示不同曲面上的除子；这些除子在吹起和收缩下由严格变换相互关联。这一过程会改变自交数。

吹起 p，得到例外除子 F_1。接着吹起 F_1 与 D_2 的交点，并用 F_2 表示例外除子。由此得到对数卡拉比-丘曲面 $(\mathbb{P}^2,\ D)$，其中 D 是 D_1+D_2的全变换，见图4.1； H 表示 $\mathbb{P}^2$的超平面类的拉回。

命题 4. *2. 周群 $\mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^2)$由 $[H]$、$[F_1]$和 $[F_2]$生成，且满足以下关系*

$$[D_1]=[L]+[F_2],\quad [H]=[D_1]+[F_1]+[F_2],\quad [D_2]=[H]+[L],$$

$$[H]\cdot[D_1]=[H]\cdot[L]=1,\quad [L]^2=-1,\quad [H]^2=1,\quad [D_1]^2=0,\quad [D_2]^2=2,\quad [D_2]\cdot[L]=0.$$

证明。我无论是通过构造，还是通过由扇确定的环面关系，都可以立即得到 . □

环面模型 $(\mathbb{P}^2,\ D)$因此可通过吹下 L 的严格变换得到，它是一条 (-1)-曲线，结果为 $\mathbb{P}^2=\mathbb{F}_2$。由此得到图4.2左侧的扇。接着$D=D_1+F_1+F_2+D_2$，其中 F_1 是 (-2)-曲线， D_2 是一条 2-曲线，而 $D_1,\ F_2$ 则是丛投影 $\mathbb{F}_2\to\mathbb{P}^1$ 的环面纤维。应用扇自同构

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

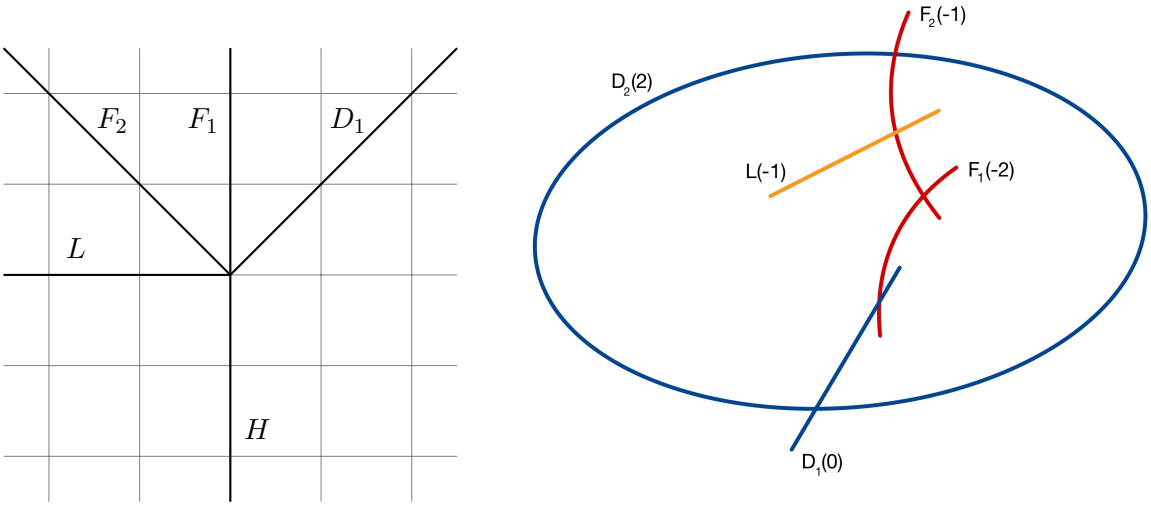


FIGURE 4.1. 对数修改（$\mathbb{P}^2$, D）。

我们得到图4.2右侧的扇。此外，我在边界除子上标出它们的自交数，并通过在 F_2 的射线上添加一个 $\times$ 来追踪 L，这表示我们吹起 F_2 的一个光滑点，以得到一个在对数意义下等价于 ($\mathbb{P}^2$, $D_1 + D_2$) 的对数 Calabi–Yau 曲面。

注意： 通过这一过程， D_2 成为了一个环面除子。

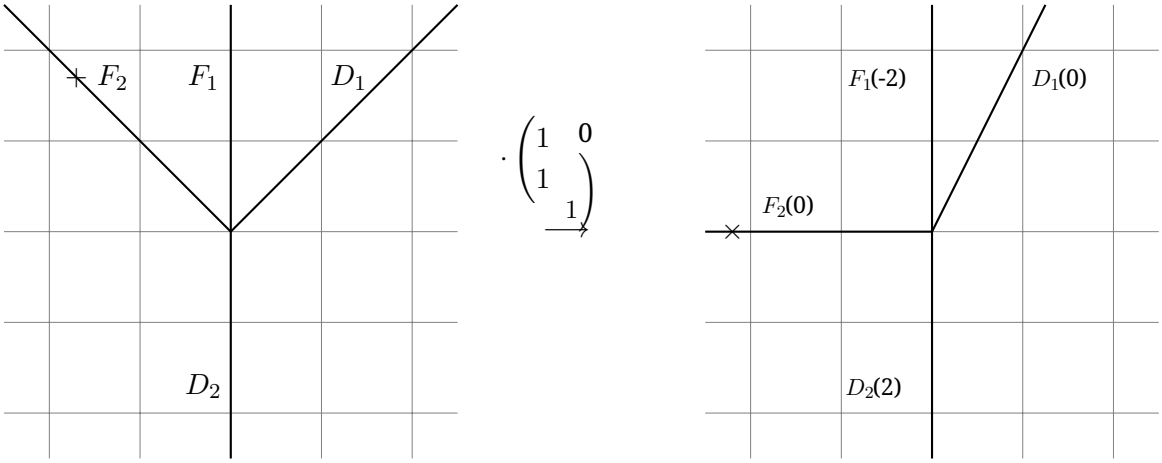


FIGURE 4.2. ($\mathbb{P}^2$, $D_1 + D_2$)的环面模型。

注4.1。 注意，光滑环面曲面的扇由其环面除子的自交数唯一确定。事实上，若 ρ_1, ρ_2, ρ_3 是扇中连续射线的本原生成元，对应于环面除子 T_1, T_2, T_3，则 $\rho_1 + (T_2)^2\rho_2 + \rho_3 = 0$。这些方程组成的集合将扇确定到相差一个 SL(2, $\mathbb{Z}$) 元素的程度。

4.2. **通过退化进行计算。** 由对数 Gromov-Witten 不变量在对数修改下的不变性可知，$N_d^{\log}(\mathbb{P}^2, D_1+D_2)$ 是 $(\widetilde{\mathbb{P}^2}, \widetilde{D})$ 的亏格 0、次数为 $d[H]$ 的对数 Gromov-Witten 不变量，其条件为经过一个内部点，与 D_1 在一个相切点 d 相交，并与 D_2 在一个相切点 $2d$ 相交，且无其他条件。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我描述了（$\mathbb{P}^2$, D）退化为两个分支的一种合适方式。其中一个分支（$\mathbb{P}^2$, D）$\widetilde{\ }$是环面的，因此适用热带对应结果。 L 专化到另一个分支，而后者足够简单，因此我们可以计算其Gromov–Witten不变量。

从平凡族 $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{A}^1$开始。吹起（沿正规锥退化）

$$\mathcal{X}' := \mathrm{Bl}_{F_2 \times \{0\}} \left(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{A}^1\right)$$

具有一般纤维 $\mathbb{F}_2$和特殊纤维 $\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} \mathbb{F}_0$，其中 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(N_{F_2/\mathbb{F}_2} \oplus \mathcal{O}_{F_2})$。记$H_1$, H_2为生成 $\mathrm{H}_2(\mathbb{F}_0, \mathbb{Z})$ 的两个有效曲线类。 $\mathbb{F}_2$通过将 F_2与 $\mathbb{F}_0$ 的一个环面除子粘合而与 $\mathbb{F}_0$粘合，该环面除子的类为 H_1。记 $\mathcal{F}$为 $F_2 \times \mathbb{A}^1$的严格变换。选择 $\mathcal{F} \to \mathbb{A}^1$ 的一个截面 $\mathcal{S}$，使其像位于 F_2的光滑轨迹（内部）中。于是

$$\mathcal{X} := \mathrm{Bl}_{\mathcal{S}} \mathcal{X}'$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$具有一般纤维（$\mathbb{P}^2$, D）和特殊纤维 $\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y$，其中 $Y = \mathrm{Bl}^{pt}(\mathbb{F}_0)$ 是在 $\mathbb{F}_0$ 的类为 H_1 的另一个环面除子上的光滑点处进行吹起所得。如果 $\mathcal{L}$ 是族 $\mathcal{X}$的例外除子，按照惯例，我将 L 记作逐纤维的例外除子。

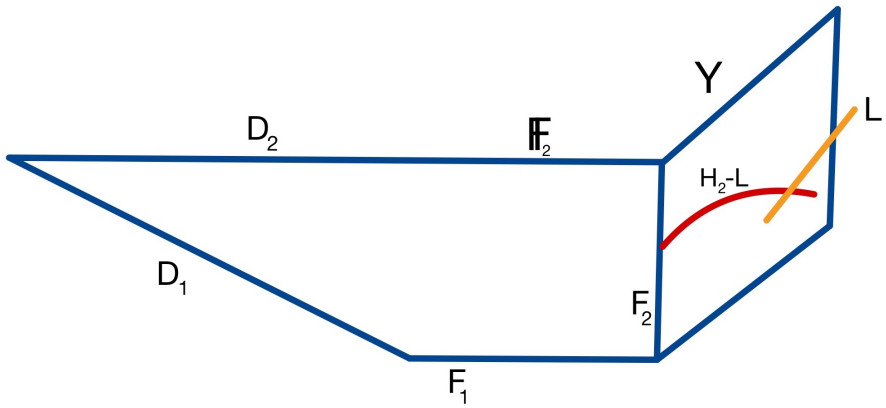


FIGURE 4.3. 中心纤维的两个分支。

退化公式以虚拟方式记录退化中的曲线计数。第一步是理解曲线从一般纤维特化到

$\sim$ $\sim$特殊纤维时的行为。先取一条曲线 C 于 $\mathbb{P}^2$ 中，或更一般地，取 Chow $\alpha \in \mathrm{CH}_*(\mathbb{P}^2)$ 中的一个元素。然后[9,10] 构造预对数 Chow 环 $\mathrm{CH}_*^{\mathrm{prelog}}(\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y)$，并伴随一个特化态射

$$\sigma : \mathrm{CH}_*(\widetilde{\mathbb{P}^2}) \to \mathrm{CH}_*^{\mathrm{prelog}}(\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y).$$

环 $\mathrm{CH}_*^{\mathrm{prelog}}(\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y)$ 定义为满足 $\alpha_1|_{F_2} = \alpha_2|_{F_2}$ 的元组 $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathrm{CH}_*(\mathbb{F}_2) \oplus \mathrm{CH}_*(Y)$ 所构成的商，其中将两个分支上作为 $\mathrm{CH}_*(\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y)$ 中的元素相等的类视为相同。

命题 4.3。 预对数 Chow 环 $\mathrm{CH}_*^{\mathrm{prelog}}(\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y)$ 由以下类生成

- $[(\mathbb{F}_2,\ Y)]$ 次数为 2；
- $[(D_2,\ H_2)]$, $[(F_2,\ 0)] = [(0,\ H_1)]$ 以及 $[(0,\ L)]$ 次数为 1；
- $[(\mathrm{pt},\ 0)] = [(0,\ \mathrm{pt})]$ 次数为 0,

并且交乘积为

$$[(D_2, H_2)] \cdot [(F_2, 0)] = 1, \quad [(D_2, H_2)] \cdot [(0, L)] = [(F_2, 0)] \cdot [(0, L)] = 0.$$

证明。 次数为 2 和 0 的情形显然。对于曲线，$\mathrm{CH}_1(\mathbb{F}_2)$ 由 D_2 和 F_2 生成。$\mathrm{CH}_1(Y)$ 由 H_1、H_2 和 L 生成。此外，粘合 $\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y$ 将类 F_2 和 H_1 等同。于是，这些类由在两个分支交集上相一致的元组确定。此外，交数可以通过在每个分支上选取代表元来计算，见定义 2.2]。□

~**命题 4.4**。 $[H] \in \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^2)$ 的特化为

$$\sigma([H]) = [(D_2, H_2 - L)] \in \mathrm{CH}_1^{\mathrm{prelog}}(\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y).$$

证明。 由命题4.2，$[H] = [D_1] + [F_1] + [F_2]$。根据构造

$$\sigma([D_1]) = [(F_2, 0)], \quad \sigma([F_1]) = [(F_1, H_2)] = [(D_2, H_2)] - 2[(F_2, 0)],$$
$$\sigma([F_2]) = [(0, [H_1] - [L])] = [(F_2, 0)] - [(0, L)].$$

由于 σ 是一个环同态，因此我们有

$$\sigma([H]) = \sigma([D_1]) + \sigma([F_1]) + \sigma([F_2]) = [(F_2 + D_2 - 2F_2 + F_2, H_2 - L)] = [(D_2, H_2 - L)].$$

□

注记 4.2. 可以明确验证，至少就与类 $[H]$的交而言， σ 是一个环同态。

设 $d \geq 1$。假设我们有两条亏格 0 曲线 C_1 和 C_2 ，分别位于 $\mathbb{F}_2$ 和 Y 中，其类为$[C_1] = d[D_2]$ 和 $[C_2] = d$（$[H_2] - [L]$）。那么，当且仅当 C_1 和 C_2 与 F_2具有相同的相交模式时， $C_1 \cup C_2$ 才能平滑化为一般纤维；也就是说，当且仅当 C_1 和 C_2 在相同的点与F_2 相交，且交数相同。这称为预变形性条件。

命题 4.3.

$$N_d(\mathbb{P}^2, D_1 + D_2) = \binom{2d}{d}.$$

证明。 退化公式 $[2, 4, 19, 37, 38]$ 指出，对满足一系列性质、类为 $d[H] \in \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^2)$ 的亏格 0 曲线进行虚拟计数 $C_{\sim}$，等同于对满足预变形条件以及这些性质的特化、类为 $([C_1],\ [C_2]) = d[(D_2,\ H_2 - L)] \in \mathrm{CH}_1^{\mathrm{prelog}}(\mathbb{F}_2 \cup_{F_2} Y)$ 的亏格 0 曲线 C_1和 C_2 进行虚拟计数。对我们而言，这一系列性质是分别在一个相切点 d、 $2d$ 与 D_1、 D_2 相交，并经过 $\mathbb{P}^2$ 内部的一个点 $\sim$。此外，退化公式还带有一个额外的重数

因子，用来计入一般纤维中的若干条不同曲线可能特化为特殊纤维中的同一条曲线这一事实。

由于 (-1)-曲线没有无穷小变形， Y 中类为 $H_2 - L$的曲线只有一条。它是 $\mathbb{F}_0$ 中类为 H_2 、经过点 $\mathcal{S}(0) \in \mathbb{F}_0$的纤维的严格变换。因此，来自 Y 的唯一贡献是该纤维上多重覆盖的并。

退化公式的精确表达式（见 [32,命题 5.3]）为

$$N_d(\mathbb{P}^2, D_1 + D_2) = \sum_{m \vdash d} \prod_{\ell=1}^{d} \frac{\ell^{m_\ell}}{m_\ell!} \left(\frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell^2} \right)^{m_\ell} N_m(\mathbb{F}_2).$$

- 求和遍历 d的分拆 $m = (m_1, \ldots, m_d)$，使得 $d = \sum_{\ell=1}^{d} \ell m_\ell$，其中 $m_\ell \geq 0$，并约定 $0! = 1$。这记录了 C_1的交截剖面，等价地说，即沿着 F_2的C_2。按此记号， C_1，等价地说， C_2，有 m_ℓ 个交截重数为ℓ 的交点，其中 $0 \leq \ell \leq d$ （m_ℓ 可以为零）。

- 由于 $H_2 - L$ 是一个（-1）曲线， C_2 分解为一组覆盖$H_2 - L$、次数为 ℓ 的多重覆盖，每个多重覆盖都在 F_2 与$H_2 - L$的唯一交点处以重数 ℓ 与 F_2 相交。为了得到一条亏格 0 的连通曲线（更准确地说，是一个亏格为0的连通稳定映射），这些曲线会粘合成一条连通曲线（更准确地说，是一个连通稳定映射） C_1，位于 $\mathbb{F}_2$中。对于每个 m，都有 $m_1 + \cdots + m_d$ 个 $H_2 - L$ 上的多重覆盖，并根据由 m确定的分歧剖面将其粘合到 C_1 上。

- 因子 ℓ^{m_ℓ} 是来自退化公式的重数。
- $1/m_\ell!$是对应于 $H_2 - L$上次数为 ℓ 的 m_ℓ 个多重覆盖的置换的对称因子。这修正了逐个计算每个星丛所造成的重复计数。

- $(-1)^{\ell-1}/\ell^2$ 是来自纤维类$H_2 - L$的次数为 ℓ 的覆盖所贡献的 Y，见 [32, 命题 5.2]。

- $N_m(\mathbb{F}_2)$是 $\mathbb{F}_2$ 上类 $d[D_2]$的亏格 0 对数 Gromov–Witten 不变量，计数满足以下条件的有理曲线：它们经过 $\mathbb{F}_2$ 中一个处于一般位置的固定点，并且– 与 D_2有一个接触阶数为 $2d$ 的接触点，– 与 D_1有一个接触阶数为 d 的接触点，– 对于每个 $1 \leq \ell \leq d$，在 F_2 上对应于 Y 中类为 $H_2 - L$的唯一纤维与 F_2 的交点的同一固定位置处，有 m_ℓ 个接触阶数为 ℓ 的接触点，

不变量 $N_m(\mathbb{F}_2)$通过热带方法计算。关于 $d = 2$ 和 $m = (2,0)$，请参见图 4.4。
只有一条热带曲线对 $N_m(\mathbb{F}_2)$ 有贡献。它有 $m_1 + \cdots + m_\ell + \cdots + m_d$ 条无穷边，分别沿着固定 F_2方向，并按 ℓ 分组。对于 $0 < m_1 + \cdots + m_{\ell-1} < n \leq m_1 + \cdots + m_\ell \leq d$，第 n条这样的曲线的权重为 ℓ，对应于该点处的交截重数。这条热带曲线对 D_1 和 D_2 各有一条无穷边，权重分别为 d 和 $2d$。要求曲线经过扇中的一点后，其余所有边和

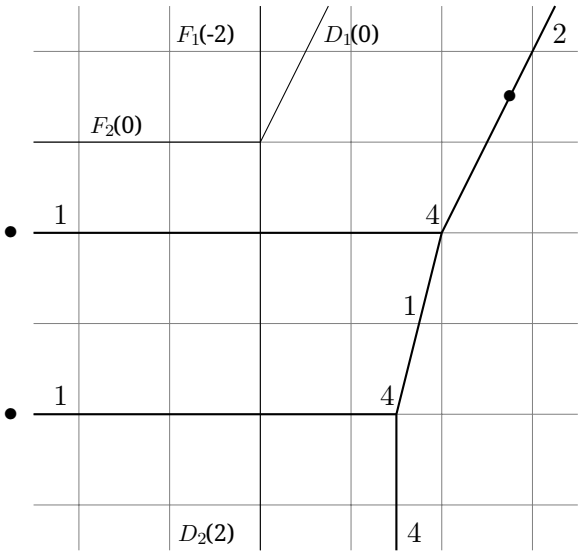


FIGURE 4.4. 对于 $d = 2$，唯一的热带曲线是 $m = (m_1, m_2) = (2,0)$。数字表示边和顶点的权重。圆点表示我们固定了 $\mathbb{F}_2$ 内部的一个点，以及 F_2上的同一个点两次。

重数均由平衡条件确定。于是

$$N_m(\mathbb{F}_2) = \prod_{\ell=1}^{d} \left(\frac{1}{\ell}(2d\ell)\right)^{m_\ell} = \prod_{\ell=1}^{d} (2d)^{m_\ell}.$$

因子 $2d\ell$ 是顶点的重数。因子 $1/\ell$ 源于接触点与 $\mathbb{F}_2$ 的位置是固定的。最后，我们得到

$$N_d(\mathbb{P}^2(1,4)) = \sum_{m \vdash d} \prod_{\ell=1}^{d} \frac{1}{m_\ell!} \left(2d\frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell}\right)^{m_\ell}.$$

这是 x^d 在 $\exp(2d\log(1+x)) = (1+x)^{2d}$ 的幂级数展开中的系数，因此即为所求。□

5. Scattering and the invariants $N_d(\mathbb{P}^2, D_3)$

接下来讨论由节点三次曲线 D_3构成的 Looijenga 对。记 P 为自交点。首先构造一个环面模型。为此，吹起 P，得到一个例外除子 E，并追踪两条切线 L_1 和 L_2。吹起 E 与 L_1 和 L_2 的严格变换的交点，并将两个新例外除子分别记为 F_1 和 F_2。

L_1 和 L_2 的严格变换现在是 (-1)-曲线，我们可以将它们都吹下，从而得到 Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_3$。这确定了一个散射图 [32], ，它由 Hirzebruch 曲面的扇添加两个位于两条环面纤维上的焦点-焦点奇点而得。

相交的两面墙分别由向量 v_1和 v_2定向，且其行列式 $|\det(v_1\, v_2)| = 3 \neq 1$。因此会发生无限散射，例如 [31]中所述。每面墙都带有一个墙穿越函数，用于标识墙两侧的函数环。散射是一个

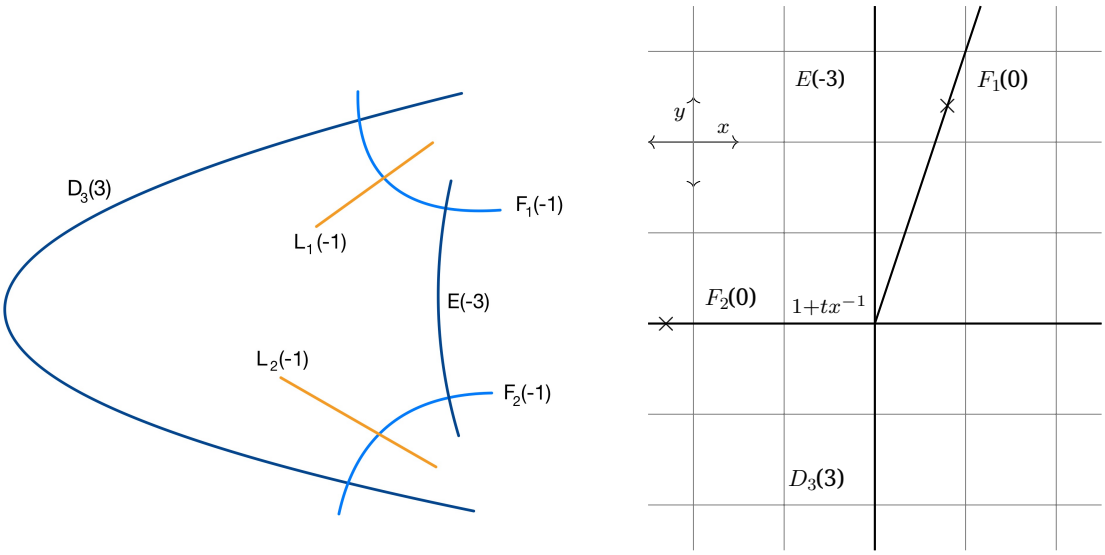


FIGURE 5.1. 由（$\mathbb{P}^2$、 D_3）构造的环面模型。

通过归纳向散射图中添加射线的过程，目的是逐阶使其保持一致。一致性意味着，沿着环绕原点的闭环所得到的自同构序列，在给定阶数以内等于恒等变换。

这些射线是墙穿越函数，其系数是如 [32]所示的对数Gromov–Witten不变量。不变量 $N_d(\mathbb{P}^2,\ D_3)$ 有一个与 D_3接触的接触点。因此，根据 [32] 关于墙穿越函数与对数Gromov–Witten不变量之间的对应结果，$N_d(\mathbb{P}^2,\ D_3)$由导向（1.3）的散射图中心射线的墙穿越函数编码。

REFERENCES

[1] D. ABRAMOVICH AND Q. CHEN，稳定对数映射到 Deligne–Faltings 对 II， *Asian J. Math.*，18 (2014)，465–488。[2] D. ABRAMOVICH Q. CHEN M. GROSS AND B. SIEBERT，退化 Gromov-Witten 不变量的分解， *Compos. Math.*，156 (2020)，2020–2075。[3] , 穿孔对数映射。预印本见 arXiv:2009.07720。[4] D. ABRAMOVICH AND B. FANTECHI，退化公式中的轨形技术， *Ann. Sc. Norm. Super.Pisa, Cl. Sci. (5)*，16 (2016)，519–579。[5] D. ABRAMOVICH AND J. WISE，对数 Gromov-Witten 理论中的双有理不变性， *Compos. Math.*，154 (2018)，595–620。[6] L. BARROTT AND N. NABIJOU，退化超曲面的切曲线， *J. Reine Angew. Math.*，793 (2022)，185–224。[7] L. BATTISTELLA NABIJOU H. N. TSENG AND F. YOU，简单正规交叉对的局部—轨形对应， *J. Inst. Math. Jussieu* (2022)。[8] L. BATTISTELLA AND N. NABIJOU，相对拟映射与镜像公式， *Int. Math. Res. Not.*，2021 (2021)，7885–7931。[9] C. BÖHNING H.-C. GRAF VON BOTHMER AND M. VAN GARREL，三次三维簇退化的自积的预对数周群， *Eur. J. Math.*，8 (2022)，260–290。

[10] ———, 预对数 Chow 环与退化， *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*， *Special Issue: Rationality Prob-lems*，将发表于 (2023)。预印本见 arXiv:1911.08930。[11] P. Bousseau，散射图、稳定性条件与 $\mathbb{P}^2$上的相干层， *J. Algebr. Geom.*，31 (2022)，593–686。[12] ———, 关于 N. Takahashi 猜想的证明：($\mathbb{P}^2, E$)的零属 Gromov-Witten 理论， *Duke Math. J.*，将发表于 (2023)。预印本见 1909.02992。[13] P. Bousseau A. Brini and M. van Garrel，到 Looijenga 对的稳定映射：轨形例子， *Lett. Math.Phys.*，111 (2021)，37。[14] ———, 关于托里克边界的对数-局部原理， *Bull. Lond. Math. Soc.*，54 (2022)，161–181。[15] ———, 到 Looijenga 对的稳定映射， *Geom. Topol.*，将发表于 (2023)。预印本见 arXiv:2011.08830。[16] P. Bousseau H. Fan S. Guo and L. Wu，($\mathbb{P}^2, E$)的全纯反常方程与局部 $\mathbb{P}^2$的 Nekrasov-Shatashvili 极限， *Forum Math. Pi*，9 (2021), 57。[17] A. Brini，曲面的枚举几何与拓扑弦。预印本见 arXiv:2211.11037。[18] M. Carl M. Pumperla and B. Siebert，Landau-Ginzburg 模型的热带视角。预印本见 2205.07753。[19] Q. Chen，对数扩张退化的退化公式， *J. Algebr. Geom.*，23 (2014)，341–392。[20] ———, 到 Deligne–Faltings 对的稳定对数映射 I， *Ann. of Math. (2)*，180 (2014)，455–521。[21] J. Choi M. van Garrel S. Katz and N. Takahashi，局部 BPS 不变量：枚举方面与墙穿越， *Int. Math. Res. Not.*，2020 (2020)，5450–5475。[22] ———, 对数 Calabi-Yau 曲面的对数 BPS 数， *Trans. Am. Math. Soc.*，374 (2021)，687–732。[23] ———, 最大交层与稳定对数映射的重数， *Sel. Math. New Ser.*，27 (2021)，51。[24] M. van Garrel T. Graber and H. Ruddat，局部 Gromov-Witten 不变量是对数不变量， *Adv. Math.*，350 (2019)，860–876。[25] M. van Garrel H. Ruddat and B. Siebert，通过墙结构研究 Landau-Ginzburg 模型的枚举周期积分， *to appear* (2023)。[26] ———, 内禀枚举镜像对称：重新审视 ($\mathbb{P}^2, E$)的 Takahashi 对数镜像对称， *to appear*(2023)。[27] M. van Garrel T. W. H. Wong and G. Zaimi，托里克 del Pezzo 曲面相对 BPS 态计数的整性， *Commun. Number Theory Phys.*，7 (2013)，671–687。[28] A. Gathmann，相对 Gromov-Witten 不变量与镜像公式， *Math. Ann.*，325 (2003)，393–412。[29] M. Gross P. Hacking and S. Keel，对数 Calabi–Yau 曲面的镜像对称 I， *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，122 (2015)，65–168。[30] M. Gross P. Hacking and B. Siebert *Theta functions on varieties with effective anti-canonical class*。《美国数学会回忆录》，1367。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2022。[31] M. Gross and R. Pandharipande，箭图、曲线与热带顶点， *Port. Math. (N.S.)*，67 (2010)，211–259。[32] M. Gross R. Pandharipande and B. Siebert，热带顶点， *Duke Math. J.*，153 (2010)，297–362。[33] M. Gross and B. Siebert，对数 Gromov-Witten 不变量， *J. Amer. Math. Soc.*，26 (2013)，451–510。[34] ———, 内禀镜像对称。预印本见 arXiv:1909.07649。[35] ———, ，典范墙结构与内禀镜像对称， *Invent. Math.*，229 (2022)，1101–1202。[36] T. Gräfnitz，光滑 del Pezzo 对数 Calabi-Yau 对的热带对应， *J. Algebraic Geom.*，31 (2022)，687–749。[37] B. Kim H. Lho and H. Ruddat，稳定对数映射的退化公式， *Manuscripta Math.* (2021)。[38] J. Li，GW 不变量的退化公式， *J. Differential Geom.*，60 (2002)，199–293。

[39] T. Mandel and H. Ruddat, 《环面簇与热带曲线的后代对数 Gromov–Witten 不变量》, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373（2020）, 1109–1152。[40] G. Mikhalkin, 《$\mathbb{R}^2$中的计数热带代数几何》, *J. Amer. Math. Soc.*, 18（2005）, 313–377。[41] N. Nabijou and D. Ranganathan, 《具有最大接触的 Gromov-Witten 理论》, *Forum Math. Sigma*, 10（2022）, 34。[42] T. Nishinou and B. Siebert, 《环面簇与热带曲线的环面退化》, *Duke Math. J.*, 135（2006）, 1–51。[43] M. Reineke, 《箭图模空间的上同调、函数方程与 Donaldson-Thomas 型不变量的整性》, *Compos. Math.*, 147（2011）, 943–964。[44] N. Takahashi, 《对数镜像对称与局部镜像对称》, *Comm. Math. Phys.*, 220（2001）, 293–299。
[45] H-H. Tseng and F. You, 《多根叠的镜像定理及其应用》, *Sel. Math. New Ser.*, 29（2023）。
[46] F. You, 《适当的 Landau–Ginzburg 势、内禀镜像对称与相对镜像映射》。预印本见 2209.15371。

University of Birmingham, School of Mathematics, B15 2TT, Birmingham, United Kingdom*Email address*: m.vangarrel@bham.ac.uk