arXiv:2302.00356v2 [math.CA] 5 Feb 2025

锥上的傅里叶延拓不等式极少有指数函数达到最大值

GIUSEPPE NEGRO、DIOGO OLIVEIRA E SILVA、BETSY STOVALL 和 JAMES TAUTGES

Abstract. 我们证明，对于 $\mathbb{R}^{1+d}$中的圆锥上的所有有效尺度不变傅里叶延拓不等式，极大化函数存在，并且模去对称变换后，L^p-归一化的极大化序列是预紧的。对于这类不等式仍属猜想的范围，我们的结果以延拓算子的有界性为条件。对于 $\mathbb{R}^{1+d}$ 中的圆锥上的 L^2 傅里叶延拓不等式，最低维情形下的全局最大化函数已得到刻画 $d \in \{2,3\}$。我们还证明，当且仅当 $p=2$时，这些函数是从 L^p 到 L^q 的傅里叶延拓不等式的临界点。

1. Introduction

本文考察圆锥上的傅里叶延拓算子，

$$\mathcal{E}f(t,x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)\cdot(|\xi|,\xi)} f(|\xi|,\xi)\, \tfrac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|}, \qquad (t,x)\in\mathbb{R}^{1+d}, \tag{1.1}$$

其最初定义在 $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$上的紧支集光滑函数上。记$\mathrm{d}\mu(\tau,\xi) := \delta\big(\tau-|\xi|\big)|\xi|^{-1}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi$ 为圆锥上除归一化因子外唯一的洛伦兹不变测度，限制猜想预言以下估计成立

$$\|\mathcal{E}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})} \le C_{p,q}\|f\|_{L^p(\,\mathrm{d}\mu)}, \tag{1.2}$$

对所有满足条件的指数 $1\le p,q\le\infty$

$$1\le p<\frac{2d}{d-1} \text{ and } q=\frac{d+1}{d-1}p' =: q(p). \tag{1.3}$$

当上下文已明确 p 时，变量 q 将不加修饰地使用。

$(p,q) = (1,\infty)$ 的情形是初等的，而 $(p,q) = (2, 2\frac{d+1}{d-1})$ 的情形可追溯至 Stein [32], Strichartz [34] 和 Tomas [37] 的工作。关于圆锥的限制猜想已由 Barcelo [2]（正交性）在$d=2$时、Wolff [41]（双线性方法）在 $d=3$时，以及最近由 Ou–Wang[27]（多项式分割）在 $d=4$时证明。所有更高维的情形仍是开放问题，目前最好的结果归功于 Ou–Wang [27]。

我们关注（1.2）的尖锐形式，因此考虑算子范数

$$\mathbf{A}_{p,q} := \sup_{f\neq 0}\frac{\|\mathcal{E}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})}}{\|f\|_{L^p(\,\mathrm{d}\mu)}}, \tag{1.4}$$

Date: 2025年2月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 42B10。

Key words and phrases. 尖锐限制理论、最大化函数、临界点、圆锥、半波方程、彭罗斯变换。

其中，上确界取遍所有非零的 $f \in L^p(\mathrm{d}\mu)$。换言之，$\mathrm{A}_{p,\,q}$是使（1.2）成立的最优（即最小）常数 $C_{p,\,q}$。容易验证，$\mathrm{A}_{1,\,\infty} = 1$，并且任意非负 f 函数都是相应不等式的极大化函数。我们的首个主要结果讨论（1.2）任意极大化序列的预紧性，尤其是极大化函数的存在性。

定理 1.1. 假设 $\mathcal{E}$ 可延拓为一个有界线性算子，从 $L^{p_0}(\mathrm{d}\mu)$ 到 $L^{q_0}(\mathbb{R}^{1+d})$，其中 $1 < p_0 < 2d/(d-1)$ 且 $q_0 := q(p_0)$。那么，对所有$1 < p < p_0$ 和 $q := q(p)$，存在非零函数 $f \in L^p(\mathrm{d}\mu)$，使得$\|\mathcal{E}f\|_q = \mathrm{A}_{p,q}\|f\|_p$。此外，若 $\{f_n\} \subseteq L^p(\mathrm{d}\mu)$ 是任意一个满足 $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{E}f_n\|_q = \mathrm{A}_{p,q}$ 的单位范数序列，则存在 $\{f_n\}$ 的一个子序列以及 $\mathcal{E}$ 的一列对称变换$\{S_n\}$，使得 $S_n f_n$ 在 L^p 中收敛到 $\mathcal{E}$ 的一个极大化函数。

此处所指的 $\mathcal{E}$ 的对称变换包括伸缩变换、洛伦兹变换以及空间—时间平移，并将在 §3 中明确给出。此前，Quilodr´an[30] ($d = 2$) 和 Ramos [31] ($d \geq 2$) 已证明，模去对称变换后，(1.2) 的极大化序列具有预紧性，但仅限于 Strichartz 情形 $p = 2$。关于 $p = 2$ 时的类似结果（但属于非端点情形）可见 [12]。对于抛物面 [33] 和球面[13]，也有定理 1.1 的类似结果。事实上，定理 1.1 的证明遵循 [33] 所确立的思路：首先证明极大化序列具有良好的频率局部化，然后利用 L^2 理论，对具有不可忽略延拓的频率局部化序列建立剖面分解。然而，圆锥的对称群比球面或抛物面的对称群更为复杂，因此我们分两个阶段进行初始频率局部化：先局部化到单个二进环带，再局部化到该环带内的一个扇形区域。

一旦证明最大化函数存在，自然就会问能否明确求出它们。只有少数情形已完成这一工作，而以下初步观察最便于将这些结果与本文背景联系起来。式 (1.1) 中定义的算子 $\mathcal{E}$ 对应于半波方程$u_t = iDu$。将半波传播子定义为

$$e^{itD}g(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{it|\xi|}\widehat{g}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi, \tag{1.5}$$

容易看出，若 $\widehat{g}(\xi) = |\xi|^{-1}f(|\xi|,\xi)$，则 $e^{itD}g(x) = (2\pi)^{-d}\mathcal{E}f(t,x)$，并且

$$\|e^{itD}g\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})}\|\widehat{g}\|^{-1}_{L^p(\mathbb{R}^d,|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)} = (2\pi)^{-d}\|\mathcal{E}f\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})}\|f\|^{-1}_{L^p(\,\mathrm{d}\mu)}.$$

因此，(1.2) 可改写为以下尖锐形式：

$$\|e^{itD}g\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})} \leq \frac{\mathbf{A}_{p,q}}{(2\pi)^d}\|\widehat{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^d,|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)}, \tag{1.6}$$

该式在与 $\mathcal{E}$相同的对称变换群作用下保持不变。Strichartz 情形 $(p,q) = (2, 2\frac{d+1}{d-1})$ 的尖锐形式为：

$$\|e^{itD}g\|_{L^{2\frac{d+1}{d-1}}(\mathbb{R}^{1+d})} \leq \frac{\mathbf{A}_{2,2(d+1)/(d-1)}}{(2\pi)^d}\|g\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.7}$$

现在我们可以引入一类函数；在少数情况下，已知这类函数能使（1.6）达到最大值。以下定义

$$\widehat{g}_\star(\xi) := C_d|\xi|^{-1}\exp(-|\xi|), \tag{1.8}$$

其中选择 $C_d > 0$，以确保 [1]

$$g_\star(x) = \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{d-1}{2}}. \tag{1.9}$$

定义 1.2. 若非零函数 $f_\star$ 可通过对$g_\star$ 施加 (1.6) 的一个或多个对称变换得到，则称其为 $\mathfrak{F}$-函数；因此，

$$\widehat{f_\star}(\xi) = |\xi|^{-1}\exp(A|\xi| + b\cdot\xi + c),$$

对于某些 A、$c \in \mathbb{C}$、$b \in \mathbb{C}^d$ 和 $|\Re(b)| < -\Re(A)$,

该定义提及了 Foschi；他在 [14, 等式 (33) 和 (46)] 中，将最低维情形 $d \in \{2,3\}$ 下 (1.7) 的极大化函数刻画为定义 1.2 中的那些函数；另见 [8]。迄今为止，这些仍是已知的 (1.7) 全局最大化函数的唯一实例，并为“指数函数是否能使圆锥曲线上的傅里叶延拓达到最大”这一一般问题提供了肯定的部分答案；参见近期的综述 [26]。因此，值得探究这是否只是孤立的事实，抑或 $\mathfrak{F}$-函数也能使其他情形下的 (1.7)，以及更一般的 (1.6)，达到最大值。

要使一个 $\mathfrak{F}$-函数 $f_\star$ 成为 (1.6) 的极大值函数，一个必要条件是它满足欧拉–拉格朗日方程

$$\Re\int_{\mathbb{R}^{1+d}} |e^{itD}f_\star|^{q-2}\overline{e^{itD}f_\star}e^{itD}g\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \lambda_{p,q}\Re\int_{\mathbb{R}^d}(|\widehat{f_\star}|^{p-2}\overline{\widehat{f_\star}\widehat{g}})(\xi)|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi, \tag{1.10}$$

其中，拉格朗日乘子 $\lambda_{p,q} = \lambda_{p,q}(f_\star)$ 与任意测试分布 g 无关。这里我们要求 $\widehat{g} \in L^p(\mathbb{R}^d, |\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)$ 和 $e^{itD}g \in L^q(\mathbb{R}^{1+d})$。如果 e^{itD} 按照 (1.6) 的意义定义了一个有界算子，则后一个条件可由前一个条件立即推出；即使没有这一假设，该条件也能确保 (1.10) 仍有定义。如果 (1.10) 对所有此类 g 都成立，则称 $f_\star$ 是不等式 (1.6) 的临界点。现在我们陈述第二个主要结果。

定理 1.3. 设 $d \geq 2$，令 $1 < p < 2d/(d-1)$，并设 $q = q(p)$。当且仅当 $p = 2$ 时，$\mathfrak{F}$-函数是不等式 (1.6) 的临界点。

定理 1.3 的一些版本已针对抛物面 [11] 和双曲抛物面 [10], 建立，但其证明采用复分析方法，并依赖于高斯函数是整函数这一事实。相比之下，任何 $\mathfrak{F}$-函数在傅里叶空间的原点处都是奇异的。

定理 1.3 的证明依赖于彭罗斯变换，这是一种与某个映射相关的函数变换，该映射通过共形地将 $\mathbb{R}^{1+d}$ 映入 $[-\pi,\pi]\times\mathbb{S}^d$，使其紧化。令 $\mathrm{d}\sigma$ 表示单位球面 $\mathbb{S}^d$上的通常曲面测度，则 (1.6) 的左边可表示为

$$\|e^{itD}g\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{S}^d}\left|e^{iTD_{\mathbb{S}^d}}G\right|^q|\Omega|^{(d+1)(\frac{p'}{2}-1)}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}T, \tag{1.11}$$

其中，g 和 G 通过彭罗斯变换相关联，而 $D_{\mathbb{S}^d}$ 是球面分数阶算子。与我们当前讨论尤其相关的是

[1]通过高斯叠加可以轻松计算出这个傅里叶变换

$$|\xi|^{-1}\exp(-|\xi|) = \frac{1}{2\pi^{1/2}}\int_0^\infty \exp\left(-s - \frac{|\xi|^2}{4s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{s^{3/2}}.$$

共形因子 Ω 是定义在 $[-\pi,\pi]\times\mathbb{S}^d$ 上的一个非常值函数，起到破坏对称性的作用。事实上，当且仅当 $p=2$时，Ω 的指数才为零，从而对 $\mathbb{S}^d$的任意旋转保持不变。当 $p=2$时，这是式 (1.6) 中一种隐藏的对称性，也是$p\neq 2$时 $\mathfrak{F}$-函数不是临界点的定性原因。值得强调的是，$|\Omega|^{(d+1)(p'/2-1)}$ 在 $[-\pi,\pi]\times\mathbb{S}^d$ 上可积，当且仅当 p、q 属于猜想范围 (1.3)；因此，这也为圆锥上的限制猜想的必要条件提供了另一种推导方式。

人们在 [24] 中认识到彭罗斯变换与尖锐限制理论的相关性，并在 [16, 25]中进一步探讨了这一点。在 Strichartz 情形 $p=2$中，当彭罗斯变换扩展为从 $H^{1/2}(\mathbb{S}^d)$到 $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$的满射等距映射时，已知 $\mathfrak{F}$-函数在所有维数 $d\geq 2$ [16]下都是式 (1.7) 的局部极大值函数（因而也是临界点），但文献似乎此前并未考察过 $p\neq 2$ 这一情形。

圆锥上的尖锐限制理论历史虽短，却内容丰富。除了上述研究外，我们还请读者参阅论文 [3, 4, 5, 6, 7] 和综述 [15]。对于双叶圆锥，若能建立定理 1.1 和 1.3 的类似结果，将会很有意义，尽管那里的情况有所不同：在维数 d 为偶数 [24]时，Strichartz 情形 $p=2$ 中的 $\mathfrak{F}$-函数并非临界点。归根结底，这是因为在偶数空间维数下，双叶圆锥的情形不满足与式 (1.11) 类似的公式；参见 §A.2。

1.1. 概述。在 §2 中，我们证明定理 1.3。在 §3 中，我们证明定理 1.1。在附录 A 中，我们介绍彭罗斯变换的相关背景材料，并进一步讨论与 (1.11) 相关的对称性考量。

1.2. 记号。$\Re z$ 和 $\Im z$ 分别表示复数 $z\in\mathbb{C}$的实部和虚部。单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}\subset\mathbb{R}^d$的曲面测度为 $|\mathbb{S}^{d-1}|=2\pi^{\frac{d}{2}}/\Gamma(\frac{d}{2})$。我们用 $X\lesssim Y$或 $Y\gtrsim X$ 表示估计式 $|X|\leq CY$，其中 C为某个绝对正常数；用 $X\simeq Y$ 表示估计式 $X\lesssim Y\lesssim X$；用 $X\cong Y$ 表示恒等式 $X=CY$。我们通常要求上述记号中的隐含常数 C 依赖于其他参数，并用下标注明（除非明确省略）；例如，$X\lesssim_j Y$ 表示形如 $|X|\leq C_jY$的估计，其中某个 C_j 依赖于 j。

2. Critical points

本节证明定理 1.3，该定理自然分为三种情形：次临界情形 $1<p<2$、Strichartz 情形 $p=2$ 和超临界情形$2<p<2d/(d-1)$。在 §2.1 中，我们回顾欧拉–拉格朗日方程 (1.10) 的简单推导。在 §2.2 中，我们将附录 A 中详述的彭罗斯工具应用于 (1.10) 的右侧和左侧，并得到适用于每个$1<p<2d/(d-1)$的有用公式。当$p=2$时，(1.9) 中定义的函数 $g_\star$ 是 (1.6) 的临界点；这一点已由 [16, 注 3.8], 所知，但也可由下文注 2.3 中的公式推出。在 §2.3 中，我们通过符号考量处理次临界情形。在 §2.4 中，我们通过渐近分析处理超临界情形。

2.1. 欧拉–拉格朗日方程。给定一个 $\mathfrak{F}$-函数 $f_\star$，令

$$\lambda_{p,q}(f_\star):=\|e^{itD}f_\star\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})}\|\widehat{f_\star}\|^{-q}_{L^p(\mathbb{R}^d,|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)}.$$

我们发现，当且仅当泛函满足以下条件时， $f_\star$ 才使不等式 (1.6) 取到最大值

$$\Phi_{p,q}(f) := \lambda_{p,q}(f_\star)\|\widehat{f}\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d,|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)} - \|e^{itD}f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})} \tag{2.1}$$

对每个满足 $\widehat{f} \in L^p(\mathbb{R}^d, |\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)$ 且$e^{itD}f \in L^q(\mathbb{R}^{1+d})$的测试分布 f ，其值均非负；这些条件确保 (2.1) 定义良好且有限。根据构造，$\Phi_{p,q}(f_\star) = 0$。

为计算与 $\Phi_{p,q}$ 在 $f_\star$ 处对应的第一变分，即 $\partial_\varepsilon \Phi_{p,q}(f_\star + \varepsilon f)|_{\varepsilon=0}$，我们对较小的 $\varepsilon > 0$ 展开，

$$\|e^{itD}(f_\star + \varepsilon f)\|_q^q = \|e^{itD}f_\star\|_q^q + \varepsilon q \Re \int_{\mathbb{R}^{1+d}} |e^{itD}f_\star|^{q-2}\overline{e^{itD}f_\star} e^{itD}f \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + o(\varepsilon),$$

$$\|\widehat{f_\star} + \varepsilon\widehat{f}\|_p^q = \|\widehat{f_\star}\|_p^q + \varepsilon q \|\widehat{f_\star}\|_p^{q-p} \Re \int_{\mathbb{R}^d} (|\widehat{f_\star}|^{p-2}\overline{\widehat{f_\star}}\widehat{f})(\xi)|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi + o(\varepsilon).$$

这里，朗道符号 $o(\varepsilon)$ 依赖于 $\|f_\star\|_p, \|f\|_p, \|e^{itD}f_\star\|_q, \|e^{itD}f\|_q$，并且我们将$\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})}$和$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^d,|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)}$简记为上述形式。欧拉–拉格朗日方程 (1.10) 立即得到。

注 2.1. 任意的 $\mathfrak{F}$-函数 $f_\star$ 在对称群 $\mathcal{S}$ 的作用下，都与式 (1.9) 中的函数 $g_\star$ 属于同一轨道（见下文 §3.1）。由于泛函 $\Phi_{p,\,q}$ 在 $\mathcal{S}$下保持不变，因此 $f_\star$ 是 (1.6) 的临界点，当且仅当 $g_\star$ 是 (1.6) 的临界点。事实上，若对给定的 $S \in \mathcal{S}$有 $f_\star = Sg_\star$ ，则

$$\Phi_{p,q}(f_\star + \varepsilon f) = \Phi_{p,q}(g_\star + \varepsilon g), \quad \text{provided } f = Sg.$$

因此，我们只在 $g_\star$处分析欧拉–拉格朗日方程 (1.10)。

2.2. 彭罗斯变换的作用。策略是将 $g_\star$ 表示为 $\mathbb{S}^d$上常值函数 1 的彭罗斯变换，并将测试函数g 选为单个球谐函数的彭罗斯变换。通过彭罗斯映射对 (1.10) 中的积分区域进行紧化，可得到有用的公式，接下来我们将对其进行探讨。

2.2.1. (1.10) 的右侧。通过变量替换，回顾 (1.8) 并应用普朗歇尔恒等式，(1.10) 的右侧可改写如下：

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS}((1.10)) &\cong_{d,p} \Re \int_{\mathbb{R}^d} e^{(1-p)|\xi|}\widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &\cong_{d,p} \Re \int_{\mathbb{R}^d} g_\star\left(\frac{x}{p-1}\right) Dg(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

现在我们引入任意 $G = G(X_0, \vec{X})$ 的彭罗斯变换 $g = g(x)$，其定义如下：

$$g(x) = (1+X_0)^{\frac{d-1}{2}} G(X_0, \vec{X}), \quad x = \frac{\vec{X}}{1+X_0}, \tag{2.3}$$

对于 $X = (X_0, X_1, \dots, X_d) = (X_0, \vec{X}) \in \mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{1+d}$(另见定义 A.2)。由于 $X_0^2 + |\vec{X}|^2 = 1$，我们推得

$$|x|^2 = \frac{1-X_0}{1+X_0}. \tag{2.4}$$

将 (2.4) 代入 $g_\star = 2^{\frac{d-1}{2}}(1+|\cdot|^2)^{\frac{1-d}{2}}$，得到

$$g_\star\left(\frac{x}{p-1}\right) = (1+X_0)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{2(p-1)^2}{(p-1)^2(1+X_0)+1-X_0}\right)^{\frac{d-1}{2}}. \tag{2.5}$$

我们注意到，(2.5) 右侧定义了 $\mathbb{S}^d$ 上的一个带状函数（即只依赖于 X_0 的函数）。特别地，考虑带有 $p=2$的 (2.5) 和 (2.3)，我们便可得出 $g_\star$ 是常值函数 1 的彭罗斯变换；参见注 A.1。我们作如下拟设：(2.2) 中的测试函数 g 是以下函数的彭罗斯变换

$$G_k(X_0,\vec{X}) = Y_k(X_0), \tag{2.6}$$

其中，Y_k 表示 $\mathbb{S}^d$ 上次数为 $k\geq 2$的实值带状球谐函数。

备注 2.2。我们要求整数 $k\geq 2$，因为零次和一次球谐函数对应于泛函 $\Phi_{p,\,q}$ 的对称变换，因此不适合用于反驳 (1.10)；详细讨论见 §A.2。

接下来，我们将说明这样的 g_k 是 §2.1 所要求的可接受测试函数。

命题 2.1。设 $d\geq 2$，令 $1<p<2d/(d-1)$，并设 $q=q(p)$。若 G_k 由 (2.6) 给出，则其彭罗斯变换 g_k 满足

$$\widehat{g_k}\in L^p(\mathbb{R}^d,|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi),\quad e^{itD}g_k\in L^q(\mathbb{R}^{1+d}). \tag{2.7}$$

证明。为验证 (2.7) 中的第一个条件，首先注意到

$$\|\widehat{g}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d,|\xi|^{p-1}\,\mathrm{d}\xi)} = \int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{Dg}(\xi)|^p\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|},\quad \text{for any } g. \tag{2.8}$$

另一方面，由交织定律（引理 A.3）、恒等式 (2.6) 和 (A.12) 可得

$$\begin{aligned} Dg_k(x) &= \left(k+\frac{d-1}{2}\right)(1+X_0)^{\frac{d+1}{2}}Y_k(X_0)\\ &= \left(k+\frac{d-1}{2}\right)\left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{d+1}{2}}Y_k\left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

由此我们推得

$$\widehat{Dg_k}(\xi)\cong_{k,\nu}\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-\nu-1}Y_k\left(\frac{1-|x|^2}{1+|x|^2}\right)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x,\quad \text{where } \nu:=\frac{d-1}{2}.$$

我们断言，对于每个 $m\in\mathbb{N}$，都有 $|\widehat{Dg_k}(\xi)|\lesssim_{k,\,\nu,\,m}(1+|\xi|)^{-m}$。一旦证明了这一点，$\widehat{g}$ 的所需 L^p 有界性将由 (2.8) 得出。由于 Y_k 是次数为 k 的多项式，因此对于每个 $(\ell,m)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{N}$，只需证明以下界

$$I_{\ell,\nu}(\xi) := \left|\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-\ell-\nu-1}(1-|x|^2)^\ell e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\right| \lesssim_{\ell,\nu,m}(1+|\xi|)^{-m}. \tag{2.10}$$

由径向性可知，我们可以假设 $\xi=(\xi_1,0,\dots,0)$。然后通过分部积分可得

$$\begin{aligned} I_{\ell,\nu}(\xi) &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-\ell-\nu-1}(1-|x|^2)^\ell\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}\left(\frac{e^{-ix_1\xi_1}}{\xi_1^m}\right)\mathrm{d}x\right|\\ &\leq \frac{1}{|\xi_1|^m}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}\left[(1+|x|^2)^{-\ell-\nu-1}(1-|x|^2)^\ell\right]\right|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

后一个积分是有限的，因为

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}\left[(1+|x|^2)^{-\ell-\nu-1}(1-|x|^2)^{\ell}\right]\right|\\&\leq\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left|\frac{\partial^{m-j}}{\partial x_1^{m-j}}\left(1+|x|^2\right)^{-\ell-\nu-1}\frac{\partial^j}{\partial x_1^j}\left(1-|x|^2\right)^{\ell}\right|\lesssim_{\ell,m,\nu}(1+|x|)^{-d-1-m}.\end{aligned}$$

估计式 (2.10) 成立，这是因为 $I_{\ell,\nu}(0)\lesssim_{\ell,\nu}1$，因此 (2.7) 中的第一个条件得以确立。(2.7) 中的第二个条件可直接由 (1.11) 得出（§A.2 中对此有进一步讨论），至此命题的证明完成。□

由 (2.2)、(2.5)、(2.9) 中的第一个恒等式以及 $(1+X_0)^d\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sigma$，我们得到

$$\mathrm{RHS}((1.10))\cong_{d,p}\left(k+\frac{d-1}{2}\right)\int_{\mathbb{S}^d}\left(\tfrac{2(p-1)^2}{(p-1)^2(1+X_0)+1-X_0}\right)^{\frac{d-1}{2}}Y_k(X_0)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{2.11}$$

若 $p=2$，则后一个积分化为 $\int_{\mathbb{S}^d}Y_k\,\mathrm{d}\sigma$，由于 $k>0$，它必为零。下文的命题 2.3 和命题 2.7 将分析 $p\neq2$ 时的这个积分。

2.2.2. (1.10) 的左侧。对于处于有界性猜想范围 (1.3) 内的 p、q，将指数 γ_p 定义为

$$\gamma_p:=(d+1)\left(\frac{p'}{2}-1\right)\in(-1,\infty). \tag{2.12}$$

由引理 A.5 以及变量替换 $s=\cos R$，(1.10) 的左端等于

$$\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kT)\int_{-1}^{1}Y_k(s)|\cos T+s|^{\gamma_p}(1-s^2)^{\frac{d-2}{2}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}T. \tag{2.13}$$

注 2.3（见 [16]）。若 $p=2$，则 $\gamma_2=0$，(2.13) 中的积分化简为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(kT)Y_k(s)(1-s^2)^{\frac{d-2}{2}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}T,$$

这显然对每个 $k>0$ 都为零。在这种情况下，我们已在 (2.11) 后一行指出，欧拉–拉格朗日方程 (1.10) 的右端也为零。因此，(1.10) 对每个 $k\geq0$ 都成立（$k=0$ 的情形显然如此）。同样的分析也适用于一般的（即不一定是纬向的）球谐函数 $Y_k=Y_k(X)$；此时，(1.10) 的左端和右端分别为：

$$\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{S}^d}\cos(kT)Y_k(X)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}T,\quad\left(k+\frac{d-1}{2}\right)\int_{\mathbb{S}^d}\left(\frac{2(p-1)^2}{(p-1)^2(1+X_0)+1-X_0}\right)^{\frac{d-1}{2}}Y_k(X)\,\mathrm{d}\sigma,$$

忽略无关的正常数。因此，在 $p=2$ 情形下，当 g 是任意球谐函数的彭罗斯变换时，方程 (1.10) 成立。在此情形下，条件 $\widehat{g}\in L^2(\mathbb{R}^d,|\xi|\,\mathrm{d}\xi)$ 化简为 $g\in\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$，其中 $\dot{H}^{1/2}$ 表示通常的齐次索博列夫空间。根据 [16, 定理 3.3]，，彭罗斯变换可扩张为一个满射等距映射 $H^{1/2}(\mathbb{S}^d)\to\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$，而球谐函数构成前一个空间的完备正交系。因此，由线性性和稠密性可知，对于每个容许的 g，当 $p=2$ 时，欧拉–拉格朗日方程成立。至此，关于 Strichartz 情形的简要分析告一段落。

接下来分析 $p \neq 2$ 情形。在 (2.13) 中作变量代换 $t = -\cos T$ 后，令 $g = g_k$，则 (1.10) 左端（记为 LHS((1.10) k, p)）可化为

$$(-1)^k |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} T_k(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} Y_k(s)(1-s^2)^{\frac{d-2}{2}} |t-s|^{\gamma_p} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t;$$

此处，$T_k(t) := \cos(k \arccos t)$ 表示次数为 k 的第一类切比雪夫多项式，它满足 $T_k(-t) = (-1)^k T_k(t)$。给定 $\alpha > -\frac{1}{2}$，定义函数

$$h_k^\alpha(t) := \begin{cases} C_k^\alpha(t)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{|t|\leq 1}, & \text{if } \alpha \neq 0, \\ T_k(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{|t|\leq 1}, & \text{if } \alpha = 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中 C_k^α 表示次数为 k 的 Gegenbauer 多项式，其定义由生成函数给出：

$$(1-2rt+r^2)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^\alpha(t) r^k. \tag{2.15}$$

Gegenbauer 多项式 $\{C_k^\alpha(t)\}_{k=0}^\infty$ 在区间 $[-1,1]$ 上关于测度 $(1-t^2)^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}t$ 正交，且 $T_k = \frac{k}{2} C_k^0$。此后，我们稍微滥用一下记号，将

$$Y_k = C_k^\nu, \quad \text{with } \nu = \tfrac{d-1}{2}.$$

于是有

$$\mathrm{LHS}((1.10), k, p) = (-1)^k |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-\infty}^{\infty} h_k^0(t)(h_k^\nu * |\cdot|^{\gamma_p})(t) \, \mathrm{d}t, \tag{2.16}$$

后一积分可以用贝塞尔函数计算。为此，我们引入以下量：

$$\begin{aligned} R_k^\alpha &:= \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(k+2\alpha)}{2^k k! \Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+k+\frac{1}{2})}, \text{ if } \alpha > -\tfrac{1}{2},\ \alpha \neq 0, \\ R_k^0 &:= \frac{\sqrt{\pi}}{2^k \Gamma(k+\frac{1}{2})}, \qquad H_\gamma := \frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}}}{\pi^{\frac{\gamma}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(-\frac{\gamma}{2})}, \text{ if } \gamma > -1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

注意，当 γ 为非负偶整数时，$H_\gamma = 0$ 成立，因为伽马函数倒数 $\frac{1}{\Gamma}$ 是整函数，并在 $\{0, -1, -2, \ldots\}$ 上为零。

引理 2.2. 设 $\alpha > -\frac{1}{2}$。由 (2.14) 定义的函数 h_k^α 的傅里叶变换为

$$\widehat{h_k^\alpha}(\tau) = 2^{\alpha+k}\Gamma(\alpha+k+\tfrac{1}{2})\sqrt{\pi} R_k^\alpha (-i\tau)^k \frac{J_{\alpha+k}(|\tau|)}{|\tau|^{\alpha+k}}.$$

证明. 罗德里格斯公式 [23, 第 22 页，引理 4] 指出，对于 $\alpha \neq 0$,

$$C_k^\alpha(t) = \frac{(-1)^k R_k^\alpha}{(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left((1-t^2)^{k+\alpha-\frac{1}{2}} \right).$$

如果 $\alpha = 0$，那么我们则有

$$T_k(t) = \frac{(-1)^k R_k^0}{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left((1-t^2)^{k-\frac{1}{2}} \right).$$

根据贝塞尔函数的泊松表示 [39, 第 II 章，2.3(3)],

$$\frac{J_{\alpha+k}(|\tau|)}{|\tau|^{\alpha+k}} = \frac{1}{2^{\alpha+k}\Gamma(\alpha+k+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{k+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-it\tau} \,\mathrm{d}t$$

对于 $\tau \in \mathbb{R}$，只要 $\Re(\alpha+k) > -\frac{1}{2}$。随后进行分部积分可得

$$\begin{aligned}\widehat{h_k^\alpha}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k^\alpha(t) e^{-it\tau} \,\mathrm{d}t &= (-1)^k R_k^\alpha \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left((1-t^2)^{k+\alpha-\frac{1}{2}}\right) e^{-it\tau} \,\mathrm{d}t \\ &= R_k^\alpha (-i\tau)^k \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{k+\alpha-\frac{1}{2}} e^{-it\tau} \,\mathrm{d}t \\ &= 2^{\alpha+k}\Gamma(\alpha+k+\frac{1}{2})\sqrt{\pi} R_k^\alpha (-i\tau)^k \frac{J_{\alpha+k}(|\tau|)}{|\tau|^{\alpha+k}},\end{aligned}$$

正如所需。至此，引理的证明完成。 □

对于 $-1 < \gamma \notin 2\mathbb{N}_0$，我们还将使用傅里叶变换

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{|\cdot|^\gamma}(\tau)\varphi(\tau) \,\mathrm{d}\tau := \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\gamma \widehat{\varphi}(t) \,\mathrm{d}t = H_\gamma \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{-1-\gamma}\varphi(\tau) \,\mathrm{d}\tau, \tag{2.18}$$

这些表达式对任意满足 $|\cdot|^{-1-\gamma}\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ 的施瓦茨函数 φ 均成立。注意，式 (2.17) 中定义的量 $H_\gamma \cong_\gamma \Gamma(\frac{\gamma+1}{2})/\Gamma(\frac{-\gamma}{2})$ 的符号在 $0 < \gamma \notin 2\mathbb{N}$ 时等于 $(-1)^{\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1}$。由 (2.16)、普朗歇尔恒等式和 (2.18)，我们进而得出

$$\begin{aligned}\mathrm{LHS}((1.10), k, p) &\cong_d (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{h_k^0}(\tau)} \widehat{h_k^\nu}(\tau) \widehat{|\cdot|^{\gamma_p}}(\tau) \,\mathrm{d}\tau \\ &\cong_d (-1)^k H_{\gamma_p} \frac{\Gamma(k+2\nu)}{k!} \int_0^{\infty} \frac{(J_k J_{\nu+k})(\tau)}{\tau^{1+\gamma_p+\nu}} \,\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{2.19}$$

当且仅当 $\gamma_p \neq 0$ 不是正偶整数时。

2.3. 次临界情形。我们首先确定欧拉–拉格朗日方程右端的符号；该项已在 (2.11) 中计算，以下记作 RHS((1.10) k, p)。

命题 2.3. 设 $k \geq 2$ 是一个整数。若 $1 < p < 2$，则对所有 k，RHS((1.10) k, p) 均为正；若 $2 < p < 2d/(d-1)$，则其符号为 $(-1)^k$。

命题 2.3 的证明依赖于罗德里格斯公式的一个特定推论，可见 [23, 第 23] 页。

引理 2.4 ([23]). 设 $\varphi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ 为 k 次连续可微函数，并设 $Y_k = Y_k(X_0)$ 表示 $\mathbb{S}^d$ 上次数为 k 的带状球谐函数。则

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) \frac{Y_k(t)}{Y_k(1)} (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^k} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(k+\frac{d}{2})} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k \varphi}{\mathrm{d}t^k}(t)(1-t^2)^{k+\frac{d-2}{2}} \,\mathrm{d}t.$$

命题 2.3 的证明。令

$$a_p := (p-1)^2 - 1, \;\; b_p := (p-1)^2 + 1 \tag{2.20}$$

并应用引理 2.4，由（2.11）可知

$$\mathrm{RHS}((1.10), k, p) \cong_{d,p,k} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(a_p t + b_p)^{\frac{1-d}{2}} (1-t^2)^{k+\frac{d-2}{2}} \,\mathrm{d}t.$$

在 p 的可容许范围内，注意到 $a_p = 0$ 当且仅当 $p = 2$；在这种情况下，正如我们已经观察到的，积分为零。由于 $b_p > |a_p|$，二项式展开表明

$$\mathrm{RHS}((1.10), k, p) \cong_{d,p,k} b_p^{\frac{1-d}{2}} \sum_{m=k}^{\infty} \binom{\frac{1-d}{2}}{m} \prod_{\ell=0}^{k-1} (m-\ell) \left(\frac{a_p}{b_p}\right)^m \int_{-1}^{1} t^{m-k} (1-t^2)^{k+\frac{d-2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

根据奇偶性考虑，只有 $m - k$ 为偶数的项才会产生非零积分。相应的二项式系数符号相同（-1）^{m} = （-1）^{k}。项（a_p/b_p）^{m} 在 $a_p < 0$ 时符号为（-1）^{k}，也就是说，当 $1 < p < 2$ 时；而在$a_p > 0$时为正，也就是说，（$d-1$） $2 < p < 2d$/。结论得证。□

接下来我们分析欧拉–拉格朗日方程的左侧，并依据以下结果；这是 [39, Ch. XIII, 13.41(2)] 的一个特例。

引理 2.5（[39]）。对于 μ， ν， $\lambda \in \mathbb{C}$，满足 $\Re$（$\mu + \nu + 1$） $> \Re$（λ） > 0,

$$\int_0^\infty \frac{(J_\mu J_\nu)(\tau)}{\tau^\lambda} \, \mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(\lambda)}{2^\lambda} \frac{\Gamma(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+\mu+\nu+1}{2})\Gamma(\frac{\lambda+\nu-\mu+1}{2})\Gamma(\frac{\lambda+\mu-\nu+1}{2})}.$$

在陈述下一个结果之前，回顾一下 γ_p 的定义 (2.12)。

命题 2.6。设 $k \geq 2$ 是一个整数。则当 $\gamma_p \in (2k-4, 2k-2)$ 时，LHS((1.10) k, p) < 0 ；当 $\gamma_p \in \{2k-4, 2k-2\}$ 时，LHS((1.10) k, p) $= 0$。

证明。若 $2k - 4 < \gamma_p < 2k - 2$，则由 (2.19) 得

$$\mathrm{LHS}((1.10), k, p) \cong_{k,d} (-1)^k H_{\gamma_p} \int_0^\infty \frac{(J_k J_{\nu+k})(\tau)}{\tau^{1+\gamma_p+\nu}} \, \mathrm{d}\tau, \tag{2.21}$$

在这种情况下，正如我们在 (2.18) 后立即指出的， H_{γ_p} 的符号为 $(-1)^{\lfloor \frac{\gamma_p}{2} \rfloor + 1} = (-1)^{k+1}$。另一方面，正数 $(k, \nu + k, 1 + \gamma_p + \nu)$ 构成一个三角三元组，也就是说，任意两项之和都大于剩余的一项。由此，根据引理 2.5，(2.21) 中的积分非负，从而证明了第一个结论。若 $\gamma \in \{2k-4, 2k-2\}$，则 (2.21) 右端的积分仍然有限。在这种情况下，LHS((1.10) k, p) 由 (2.13) 给出，而 (2.13) 定义了 γ_p 的连续函数。由于当 γ 趋近于任意非负偶整数时， $H_\gamma \to 0$ ，在 (2.21) 中取极限 $\gamma_p \downarrow (2k-4)$ 和$\gamma_p \uparrow (2k-2)$，根据连续性即可得到第二个结论。□

根据命题 2.3，我们知道，对于每个 $k \geq 2$ 和 $1 < p < 2$，右端((1.10) k, p) > 0。根据命题 2.6，我们于是得出结论：对于每个 $1 < p < 2$，都存在$k \geq 2$ 使得 (1.10) 不成立。至此，次临界情形的分析告一段落。

2.4. 超临界情形。我们继续考察带状球谐函数$Y_k = C_k^\nu$，后者表示次数为 $k \geq 2$ 的 Gegenbauer 多项式，并且$\nu = \frac{d-1}{2}$。根据 a_p, b_p 的定义 (2.20)，恒等式 (2.11) 可写为

$$\mathrm{RHS}((1.10), k, p) \cong_{d,p} (k + \nu) \int_{-1}^{1} (a_p t + b_p)^{-\nu} C_k^\nu(t) (1-t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t,$$

它可以被识别为 Gegenbauer 展开中的某个系数，并可按如下方式估计。

命题 2.7. 设 $2 < p < \frac{2d}{d-1}$ 和 $k \geq 2$。则

$$|\mathrm{RHS}((1.10), k, p)| \lesssim_{d,p} \left(\frac{2}{3}\right)^k k^{\nu}. \tag{2.22}$$

命题 2.7 的证明依赖于 [38, 定理 4.3]，该定理近期在尖锐限制理论中发挥了作用 [9]。为方便读者，我们在此回顾该定理。

引理 2.8（[38]）。设 $\alpha > 0$ 且 $\rho > 1$。设 $\mathcal{K}$ 是一个在椭圆内部及其边界上解析的函数

$$\mathcal{E}_\rho := \left\{ s \in \mathbb{C} : s = \tfrac{1}{2}\left(\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}\right),\, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$

且 $\mathcal{K}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\alpha C_k^\alpha(t)$ 是 $t \in [-1,1]$ 的相应 Gegenbauer 展开。那么，对任意 $k \geq 1$,

$$|a_k^\alpha| \lesssim_{\rho,\alpha} \left(\max_{s \in \mathcal{E}_\rho} |\mathcal{K}(s)|\right) k^{1-\alpha} \rho^{-k-1}.$$

命题 2.7 的证明。函数 $\mathcal{K}_{p,\nu}(s) := (a_p s + b_p)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^\nu C_k^\nu(s)$ 在以原点为圆心、半径为 的开圆盘内解析

$$\left|\frac{b_p}{a_p}\right| = \frac{(p-1)^2 + 1}{|(p-1)^2 - 1|}. \tag{2.23}$$

(2.23) 的右侧定义了一个关于 $p \in (2, \frac{2d}{d-1})$ 的递减函数，因此

$$\inf_{d \geq 2} \inf_{2 < p < \frac{2d}{d-1}} \left|\frac{b_p}{a_p}\right| = \inf_{d \geq 2} \frac{d^2+1}{2d} = \frac{5}{4}.$$

我们得出，$\mathcal{K}_{p,\,\nu}$ 对于每个 $2 < p < 2d/(d-1)$ 和 $\nu \geq \frac{1}{2}$，在半径为 $\frac{5}{4}$ 的开圆盘内解析。此外，该圆盘包含椭圆 $\mathcal{E}_{\frac{3}{2}}$。因此，由引理 2.8 可得估计式

$$|a_k^\nu| \lesssim_\nu \left(\frac{2}{3}\right)^k k^{1-\nu}. \tag{2.24}$$

根据 Gegenbauer 多项式 C_k^ν 关于权函数 $w_\nu(t) = (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ 的正交性，系数 a_k^ν 可表示为

$$a_k^\nu = \|C_k^\nu\|_{L^2(w_\nu)}^{-2} \int_{-1}^{1} (a_p t + b_p)^{-\nu} C_k^\nu(t) (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

所需的 (2.22) 随即由 (2.24) 和以下简单估计得出

$$\|C_k^\nu\|_{L^2(w_\nu)}^2 = \int_{-1}^{1} C_k^\nu(t)^2 \,(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{2^{1-2\nu}\,\pi}{\Gamma(\nu)^2} \frac{\Gamma(k+2\nu)}{k!\,(k+\nu)} \lesssim_\nu k^{2\nu-2},$$

其中我们使用了伽马函数 [40],的经典渐近公式

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)} k^{b-a} = 1, \text{ for } a, b \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

命题 2.3 和命题 2.6 中的符号考量不足以分析超临界情形，因为此时欧拉–拉格朗日方程 (1.10) 两边似乎具有相同的符号。因此，我们转而研究 LHS((1.10) k, p) 在 $k \to \infty$ 时的精确渐近行为。

命题 2.9. 设 $2 < p < \frac{2d}{d-1}$ 和 $k \geq 2$。则：

$$|\mathrm{LHS}((1.10), k, p)| \cong_{p,d} \frac{\Gamma(k - \frac{\gamma_p}{2})\Gamma(k + 2\nu)}{\Gamma(\frac{\gamma_p}{2} + \nu + k + 1)\Gamma(k + 1)}.$$

证明。由 (2.19) 和引理 2.5 立即可得。 □

由命题 2.7 和 2.9 可知，对任意 $2 < p < \frac{2d}{d-1}$ 和 $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{RHS}((1.10), k, p)}{\mathrm{LHS}((1.10), k, p)}\right| &\lesssim_{d,p} \left(\frac{2}{3}\right)^k k^\nu \frac{\Gamma(\frac{\gamma_p}{2} + \nu + k + 1)\Gamma(k + 1)}{\Gamma(k - \frac{\gamma_p}{2})\Gamma(k + 2\nu)} \\ &\lesssim_{d,p} \left(\frac{2}{3}\right)^k k^{\gamma_p + 2}. \qquad (2.25)\end{aligned}$$

由于 (2.25) 趋于 0（当 $k \to \infty$时），因此，对于超临界范围内的每个 p，都存在 $k \geq 2$，使得对应于 Y_k 的测试函数不满足欧拉–拉格朗日方程 (1.10)。由此完成定理 1.3 的证明。

3. Existence of maximizers

在本节中，我们证明定理 1.1。为此，将圆锥通过投影 $(|\xi|, \xi) \mapsto \xi$ 与 $\mathbb{R}^d$ 等同起来会很方便。因此，我们将滥用记号，写作 $\mathrm{d}\mu(\xi) = \frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|}$ 和

$$\mathcal{E}f(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)\cdot(|\xi|,\xi)} f(\xi) \, \frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|}.$$

在本节中，如果某个对象（例如常数）依赖于 d、p、p_0，以及算子 $\mathcal{E}$ 的算子范数上界：$L^{p_0}(\mathrm{d}\mu) \to L^{q_0}(\mathbb{R}^{1+d})$，其中 $q_0 := q(p_0)$ 如 (1.3) 所示，我们就称该对象是允许的；隐含常数也必须以此意义允许。

我们先讨论对分析而言至关重要的对称变换。

3.1. 对称变换。我们称 $\mathcal{E}$ 的对称变换为 S，即 $L^p(\frac{\xi}{|\xi|})$ 的一个等距变换，且存在 $L^q(\mathbb{R}^{1+d})$ 的一个等距变换 T，使得当 $\mathcal{E} \circ S = T \circ \mathcal{E}$ 限制在施瓦茨类上时，

以下对称变换（及其复合）在我们的分析中发挥着尤为重要的作用：

- 锥形伸缩：

$$f(\xi) \rightsquigarrow \lambda^{\frac{d-1}{p}} f(\lambda\xi), \qquad \mathcal{E}f(t, x) \rightsquigarrow \lambda^{-\frac{d+1}{q}} \mathcal{E}f(\lambda^{-1}t, \lambda^{-1}x),$$

当 $\lambda > 0$ 时；

- 洛伦兹变换：

$$f(\xi) \rightsquigarrow f(\xi^\perp + \langle \xi_0 \rangle \xi^\parallel - |\xi|\xi_0),$$
$$\mathcal{E}f(t, x) \rightsquigarrow \mathcal{E}f(\langle \xi_0 \rangle t + x \cdot \xi_0, x^\perp + \langle \xi_0 \rangle x^\parallel + t\xi_0),$$

对于 $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$，其中 ξ、x 的平行分量和垂直分量是相对于 ξ_0 和 $\langle \xi \rangle$ 取的：$= \sqrt{1 + |\xi|^2}$;

- 扇区扩张，由洛伦兹变换与伸缩复合得到：

$$f(\xi) \rightsquigarrow \lambda^{\frac{d-1}{p}} f(\tfrac{1-\lambda^2}{2}|\xi|\theta + \tfrac{1+\lambda^2}{2}\xi^{\parallel} + \lambda\xi^{\perp})$$
$$\mathcal{E}f(t,x) \rightsquigarrow \lambda^{-\frac{d+1}{q}} \mathcal{E}f(\tfrac{1+1/\lambda^2}{2}t + \tfrac{1-1/\lambda^2}{2}\theta\cdot x, \tfrac{1-1/\lambda^2}{2}t\theta + \tfrac{1+1/\lambda^2}{2}x^{\parallel} + \lambda x^{\perp}),$$

对于 $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\lambda > 0$，取相对于 θ 的平行分量和垂直分量；

- 时空平移：

$$f(\xi) \rightsquigarrow e^{-i(t_0,x_0)\cdot(|\xi|,\xi)} f(\xi), \qquad \mathcal{E}f(t,x) \rightsquigarrow \mathcal{E}f(t-t_0, x-x_0),$$

对于 $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{1+d}$。

我们令 $\mathcal{S}$ 表示由这些对称变换的复合以及乘以模为一的复常数组成的群。

3.2. 频率局部化。本节将证明，经过取子序列并对算子应用对称变换后，不等式 (1.2) 的一个极大化序列包含一个具有良好频率局部化的子序列。

引入一些额外术语会很有用。

我们令 χ_k 表示一个支集包含于 $\{|\xi| \simeq 2^{-k}\}$、且$\sum_k \chi_k \equiv 1$ 按测度的光滑截断函数。我们用 A_k 表示环域 $\{|\xi| \simeq 2^{-k}\}$。频率尺度为 2^{-k}、角宽为 2^{-j} 的扇形区域是如下形式的集合

$$\sigma = \{\xi \in A_k : |\tfrac{\xi}{|\xi|} - \omega_0| < 2^{-j}\},$$

其中 $\omega_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$为某个参数。若 σ和σ' 是频率尺度相同、角宽为 2^{-j} 的两个扇形区域，当且仅当 σ 和 σ' 都包含于某个角宽为 2^{-j+C_1}的共同扇形区域 σ'' 中，但不存在角宽为 2^{-j+C_0}的共同扇形区域包含它们，并且 $1 < C_0 < C_1$ 充分大时，我们称 $\sigma \sim \sigma'$。对于所有的 $j \geq -1$、$k \in \mathbb{Z}$，令 $\mathcal{D}_{j,k}$ 为由角宽为 2^{-j}的扇形区域构成的 A_k 的有限重叠覆盖。对于每个 k，我们可以从 $\mathcal{D}_{-1,k} = \{A_k\}$开始，归纳构造这些覆盖。对于每个 j，我们确保每个 $\sigma \in \mathcal{D}_{j,k}$ 都包含于某个 $\sigma' \in \mathcal{D}_{j-1,k}$中。根据这个定义，我们可知

$$\sum_k \sum_j \sum_{\sigma\sim\sigma' \in \mathcal{D}_{j,k}} \chi_\sigma(\xi)\chi_{\sigma'}(\eta) \simeq 1 \tag{3.1}$$

对几乎处处的 $\xi \neq \eta \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$，对 $(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})^2$ 去掉对角线 $\{(\xi,\eta)$ 进行惠特尼分解：$\xi = \eta\}$。我们将记

$$\tau_\sigma := \{(|\xi|, \xi) : \xi \in \sigma\},$$

σ 在圆锥上的提升。

为简化方程，我们将经常用 $\|\cdot\|_p$ 表示$\|\cdot\|_{L^p(\mathrm{d}\frac{\xi}{|\xi|})}$。当测度就是 $\mathrm{d}\xi$ 时，我们将其记为 $\|\cdot\|_{L^p}$。

引理 3.1（环带之间的双线性延拓）。对每个 $1 < p < p_0$，都存在一个允许的 $c_0 > 0$，使得

$$\|\mathcal{E}(f\chi_{k_1})\,\mathcal{E}(f\chi_{k_2})\|_{q/2} \lesssim 2^{-c_0|k_1-k_2|}\|f\chi_{k_1}\|_p\|f\chi_{k_2}\|_p, \tag{3.2}$$

对任意 $f \in L^p(\mathrm{d}\frac{\xi}{|\xi|})$。

证明。由于该不等式关于 k_1 和 k_2 对称，我们不妨设 $k_1 > k_2$。因此，我们只需证明将 $|k_1 - k_2|$ 替换为 $(k_1 - k_2)$ 后的不等式。

波动方程的 Strichartz 不等式（[28, 定理 1]）指出，若$\frac{1}{r}+\frac{d-1}{2s}=\frac{d-1}{4}$、 s、$r\geq 2$、 $s\neq\infty$ 且 $\gamma=\frac{d}{2}-\frac{1}{r}-\frac{d}{s}$，则

$$\|\mathcal{E}f\|_{L^r(\mathbb{R};L^s(\mathbb{R}^d))}\lesssim \||\xi|^{\gamma-1}f\|_{L^2}=\||\xi|^{\gamma-\frac{1}{2}}f\|_2.$$

（1.2）中 $p=2$ 的情形对应于 Strichartz 不等式，其中 $(r,s,\gamma)=(2\frac{d+1}{d-1},2\frac{d+1}{d-1},12)$。我们可以选取满足前述条件的两个三元组 (r_j,s_j,γ_j)、 $j=1$、2，以及 $\frac{d-1}{d+1}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}$、$\gamma_1=\frac{1}{2}-c$ 和某个 $c>0$ 对应的 $\gamma_2=\frac{1}{2}+c$。利用 H¨older 不等式以及 $f\chi_{k_1}$ 和 $f\chi_{k_2}$ 的环形支集，

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}(f\chi_{k_1})\,\mathcal{E}(f\chi_{k_2})\|_{\frac{d+1}{d-1}}&\leq\|\mathcal{E}(f\chi_{k_1})\|_{L^{r_1}L^{s_1}}\|\mathcal{E}(f\chi_{k_2})\|_{L^{r_2}L^{s_2}}\\&\lesssim\||\xi|^{\gamma_1-\frac{1}{2}}(f\chi_{k_1})\|_2\||\xi|^{\gamma_2-\frac{1}{2}}(f\chi_{k_2})\|_2\\&\simeq 2^{-c(k_1-k_2)}\|f\chi_{k_1}\|_2\|f\chi_{k_2}\|_2.\end{aligned}$$

接下来，我们选择 $1\leq p_1\leq p_0$，使得 p 介于 2 和 p_1 之间。根据柯西–施瓦茨不等式和（1.2），

$$\|\mathcal{E}(f\chi_{k_1})\,\mathcal{E}(f\chi_{k_1})\|_{q(p_1)/2}\lesssim\|f\chi_{k_1}\|_{p_1}\|f\chi_{k_2}\|_{p_1},\tag{3.3}$$

由复插值可得 (3.2)。 □

引理 3.1 立即推出 (1.2) 的一个更强版本，现陈述如下。

引理 3.2（环形细化）。对于某个允许的 $0<\theta_0<1$,

$$\|\mathcal{E}f\|_q\lesssim\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|\mathcal{E}(f\chi_k)\|_q^{\theta_0}\|f\|_p^{1-\theta_0}.\tag{3.4}$$

类似于引理 3.2 的结果已见于其他文献，例如 [20]。为方便读者，我们给出完整细节，并在下文证明一个更一般的引理（这得益于引理 3.1）。

设 (X,μ) 和 (Y,ν) 为测度空间， $1<p<q<\infty$，且$T\colon L^p(X)\to L^q(Y)$ 是一个有界线性映射。设 $\{P_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^p(X)$ 上一列有界线性算子，使得 $\sum_j P_j$ 在强算子拓扑下收敛到恒等式，且对所有 $f\in L^p(X)$ 都有 $\sum_j\|P_jf\|_p^p\lesssim\|f\|_p^p$。假设对于某个$c_0>0$,

$$\|(TP_jf)(TP_kg)\|_{q/2}\lesssim 2^{-c_0|j-k|}\|f\|_p\|g\|_p\tag{3.5}$$

对所有 $j,k\in\mathbb{Z}$，以及 $f,g\in L^p(X)$。

那么存在 $\theta_0\in(0,1)$，使得对于任意 $f\in L^p(X)$,

$$\|Tf\|_q\lesssim\sup_j\|TP_jf\|_q^{\theta_0}\|f\|_p^{1-\theta_0}.$$

证明。若 $f=0$，则无需证明，因此不失一般性，我们可以假设 $\|f\|_p=1$。为方便起见，定义 $T_j:=TP_j$。令 $N:=\lceil q\rceil+1$，并令$C>0$ 为稍后选取的一个大常数。由于$\frac{q}{N}<1$,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_q^q=\int|\big(\sum_j T_jf\big)^N|^{q/N}&=\int|\sum_{j_1,\dots,j_N}\prod_{k=1}^N T_{j_k}f|^{q/N}\\&\leq\int\sum_{j_1,\dots,j_N}|\prod_{k=1}^N T_{j_k}f|^{q/N}\lesssim\int\sum_{j_1\leq\cdots\leq j_N}|\prod_{k=1}^N T_{j_k}f|^{q/N}.\end{aligned}$$

我们将此和拆分为满足 $|j_1-j_N|<C$ 的项和满足 $|j_1-j_N|\geq C$ 的项。根据算术几何平均不等式，第一个和有 $\sum_j\int|T_jf|^q$ 的常数倍作为上界。对于第二个和，我们应用 H¨older 不等式、(3.5) 以及算术几何平均不等式，得到

$$\begin{aligned}\sum_{|j_1-j_N|\geq C}\int|\prod_{k=1}^{N}T_{j_k}f|^{q/N}&\leq\sum_{|j_1-j_N|\geq C}\prod_{k=2}^{N-1}\|T_{j_k}f\|_q^{q/N}\|T_{j_1}f\,T_{j_N}f\|_{q/2}^{q/N}\\&\lesssim\sum_{\ell=C}^{\infty}\sum_{j_1\leq\cdots\leq j_N=j_1+\ell}2^{-c_0\frac{q}{N}\ell}\|f\|_p^{2q/N}\prod_{k=2}^{N-1}\|T_{j_k}f\|_q^{q/N}\\&\lesssim\sum_{\ell=C}^{\infty}2^{-c_0\frac{q}{N}\ell}\sum_{j_1\leq\cdots\leq j_N=j_1+\ell}\sum_{k=2}^{N-1}\|T_{j_k}f\|_q^{q\frac{N-2}{N}}\\&\leq\sum_{\ell=C}^{\infty}2^{-c_0\frac{q}{N}\ell}\sum_{j_1}\ell^{N-2}\sum_{k=j_1}^{j_1+\ell}\|T_kf\|_q^{q\frac{N-2}{N}}\\&\lesssim\sum_{\ell=C}^{\infty}2^{-c_0\frac{q}{N}\ell}\ell^{N-2}\sum_j\|T_jf\|_q^{q\frac{N-2}{N}}\simeq\sum_j\|T_jf\|_q^{q\frac{N-2}{N}}.\end{aligned}$$

另一方面，由于 $q>p$，我们可以选择足够大的 N，使得 $q\frac{N-2}{N}>p$。因此，

$$\begin{aligned}\|Tf\|_q^q&\lesssim(\sup_j\|T_jf\|_q^{q-p}+\sup_j\|T_jf\|_q^{q(\frac{N-2}{N})-p})\sum_j\|T_jf\|_q^p\\&\lesssim(\sup_j\|T_jf\|_q^{q(\frac{2}{N})}+1)(\sup_j\|T_jf\|_q^{q(\frac{N-2}{N})-p})\sum_j\|P_jf\|_p^p\\&\lesssim(C\|f\|_p^{q(\frac{2}{N})}+1)(\sup_j\|T_jf\|_q^{q(\frac{N-2}{N})-p})\|f\|_p^p\\&\lesssim\sup_j\|T_jf\|_q^{q(\frac{N-2}{N})-p}.\end{aligned}$$

由于 $\theta_0:=\frac{q}{q(\frac{N-2}{N})-p}>0$ 对于充分大的 N，我们有 $\|Tf\|_q\lesssim\sup_j\|T_jf\|_q^{\theta_0}$。由归一化条件 $\|f\|_p=1$ 即得结论。□

引理 3.4（扇区间双线性延拓）。对于 $1<p<p_0$，存在一个容许的 $1<s<p$，使得以下结论成立。设 $\sigma\sim\tilde{\sigma}$ 是频率尺度为 2^{-k}、角宽为 2^{-j} 的两个扇区，并设 f、$\tilde{f}\in L^s(\mathbb{R}^d)$，其支撑分别包含于 σ、$\tilde{\sigma}$。那么

$$\|\mathcal{E}f\mathcal{E}\tilde{f}\|_{q(p)/2}\lesssim 2^{2(k+j)(d-1)(\frac{1}{s}-\frac{1}{p})}\|f\|_s\|\tilde{f}\|_s. \tag{3.6}$$

我们注意到，条件 $1<p<p_0$ 等价于 $q(p_0)<q(p)<\infty$。

证明。这是由 [35, 41] 的结果得到的众所周知的推论。事实上，在 $q=2\frac{d+3}{d+1}$、$k=0$ 和 $j=C$（某个较大的可取常数）的情形下，这是 [35] 的定理 1.1（取 $s=2$）。通过伸缩可以去掉限制 $k=0$，通过应用命题 2.6] 中的扇区扩张 [36, 可以去掉限制 $j=C$。

对于 q 的其他取值，我们可以与初等双线性延拓不等式 (3.3) 作插值，其中取某个 $1 \le p_1 \le p_0$，使得 q（p）位于 $2\frac{d+3}{d+1}$ 和 q（p_1）之间。至此，引理的证明概要完成。□

接下来，我们利用尺度细化和扇区细化，通过“小片”来界定 $\mathcal{E}f$ 的范数。令 $\sigma \in \mathcal{D}_{j,\,k}$ 和 $\ell \ge 0$。我们定义

$$f_{\sigma,\ell}(\xi) := f\chi_\sigma \chi_{\{|f|<2^\ell \mu(\tau_\sigma)^{-1/p}\|f\|_p\}}$$

and

$$f_\sigma^\ell := f_{\sigma,\ell} - f_{\sigma,\ell-1}.$$

我们进一步令 $f_\sigma^0 = f_{\sigma,\,0}$。

为帮助阐明这个定义的动机，我们注意到，对于每个 $1 \le s \le \infty$,

$$\|f_{\sigma,\ell}\|_s \le 2^\ell \mu(\tau_\sigma)^{1/s-1/p}\|f\|_p,$$

其中，回顾一下，τ_σ 是 σ 的提升，而 μ 是测度 $\mathrm{d}\frac{\xi}{|\xi|}$ 到圆锥的提升。

引理 3.5（小片细化）。存在 $0 < c_1$、$\theta_0 < 1$，使得

$$\|\mathcal{E}f\|_q \lesssim \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{\sigma\in\mathcal{D}_{j,k}} \sup_{\ell\ge 0} 2^{-c_1\ell}\|f_\sigma^\ell\|_p^{\theta_0}\|f\|_p^{1-\theta_0} \tag{3.7}$$

对所有 $f \in L^p$。

证明。必要时乘以一个常数，只需考虑 $\|f\|_p = 1$ 的情形。暂且还假设 $f = f\chi_{A_0}$，即 supp $f \subset \{\xi\colon\ 1 < |\xi| \le 2\}$。那么根据 (3.1)，我们可以分解

$$\|\mathcal{E}f\|_q \lesssim \Big(\int \big|\sum_j \sum_{\sigma\sim\sigma'\in\mathcal{D}_{j,0}} (\mathcal{E}f_\sigma)(\mathcal{E}f_{\sigma'})\big|^{q/2}\Big)^{1/q}.$$

每个乘积 $(\mathcal{E}f_\sigma)(\mathcal{E}f_{\sigma'})$ 的傅里叶支集都包含于 $\tau_\sigma + \tau_{\sigma'}$ 中。我们回顾一下，存在一个有界重叠的平行多面体族，其中每个平行多面体都包含某个和集 $\tau_\sigma + \tau_{\sigma'}$，且 $\sigma \sim \sigma' \in \bigcup_j \mathcal{D}_{j,\,0}$。事实上，当 j 固定时，相关扇区的和$\sigma + \sigma'$ 很容易看出可由一族有界重叠的矩形进行良好近似；这些矩形具有略大的宽度和相同的方向，因此提升的和也几乎互不相交。当允许 j 变化时，我们需要在第一坐标上增加额外的分离条件。这是因为，如果 ξ 和 ξ' 位于 $\mathcal{D}_{j,\,0}$ 中的相关扇区内，则它们之间的角度约为 2^{-j}。因此，

$$|\xi| + |\xi'| - |\xi+\xi'| = \frac{2(|\xi||\xi'| - \xi\cdot\xi')}{|\xi| + |\xi'| + |\xi+\xi'|} = \frac{2|\xi||\xi'|(1-\cos\angle(\xi,\xi'))}{|\xi| + |\xi'| + |\xi+\xi'|} \simeq 2^{-2j}.$$

令 $t := \min\{\frac{q}{2}, (\frac{q}{2})'\}$；因此 $2t > p > s$，其中 s如 (3.6) 所示。现在我们调用几乎正交性（[36, 引理 6.1]）和引理 3.4，并取 $k = 0$，注意到 $\frac{1}{s} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{s'} = \frac{d+1}{d-1}()_q - \frac{1}{s'}$：

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}f\|_q^2 &\lesssim \|\sum_j \sum_{\sigma\sim\sigma'\in\mathcal{D}_{j,0}} (\mathcal{E}f_\sigma)(\mathcal{E}f_{\sigma'})\|_{q/2} \lesssim \Big(\sum_j \sum_{\sigma\sim\sigma'\in\mathcal{D}_{j,0}} \|(\mathcal{E}f_\sigma)(\mathcal{E}f_{\sigma'})\|_{q/2}^t\Big)^{1/t} \\
&\lesssim \Big(\sum_j \sum_{\sigma\sim\sigma'\in\mathcal{D}_{j,0}} 2^{2jt(\frac{d+1}{q}-\frac{d-1}{s'})}\|f_\sigma\|_s^t\|f_{\sigma'}\|_s^t\Big)^{1/t} \\
&\lesssim \Big(\sum_j \sum_{\sigma''\in\mathcal{D}_{j-1,0}} 2^{2jt(\frac{d+1}{q}-\frac{d-1}{s'})}\|f_{\sigma''}\|_s^{2t}\Big)^{1/t},
\end{aligned}$$

其中 $\sigma\cup\sigma'\subseteq\sigma''$。令 $\max\{\frac{p}{2t},\frac{s}{p}\}<\theta<1$。重新编号 $\sigma''\mapsto\sigma$ 并注意到 $|\sigma|\sim 2^{j(d-1)}$，对于 $\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}$，然后应用 H¨older 不等式以及事实 $2t>p>s$，可知对任意 $c_1>0$，

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}f\|_q^{2t}&\lesssim\sum_j\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}|\sigma|^{2t(\frac{1}{s'}-\frac{1}{p'})}\Big(\sum_{\ell\geq0}\|f_\sigma^\ell\|_s^s\Big)^{2t/s}\\&\leq\Big(\sup_j\sup_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}\sup_{\ell\geq0}2^{-\frac{c_1\ell}{1-\theta}}|\sigma|^{2(\frac{1}{s'}-\frac{1}{p'})}\|f_\sigma^\ell\|_s^2\Big)^{(1-\theta)t}\\&\quad\times\sum_j\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}|\sigma|^{2t\theta(\frac{1}{s'}-\frac{1}{p'})}\Big(\sum_{\ell\geq0}2^{\frac{c_1\ell s}{2}}\|f_\sigma^\ell\|_s^{\theta s}\Big)^{2t/s}\\&\lesssim\Big(\sup_j\sup_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}\sup_{\ell\geq0}2^{-c_1\ell}\|f_\sigma^\ell\|_p^{2t(1-\theta)}\Big)\Big(\sum_j\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}|\sigma|^{2t\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})}\sum_{\ell\geq0}2^{tc_1\ell}\|f_\sigma^\ell\|_s^{2t\theta}\Big).\end{aligned}$$

（我们回顾一下，对于 $\sigma\subseteq A_0$, $|\sigma|\simeq\mu(\tau_\sigma)$。）由于我们可以任意取小的 $c_1>0$，因此只需证明

$$\sum_j\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}|\sigma|^{2t\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{s})}\|f_\sigma^\ell\|_s^{2t\theta}\tag{3.8}$$

关于 ℓ 呈几何衰减。对于 $\ell=0$，我们应用 H¨older 不等式和 $2t\theta>p$，得到

$$\begin{aligned}(3.8)&\leq\sum_j\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}|\sigma|^{\frac{2t\theta}{p}-1}\|f_\sigma^0\|_{2t\theta}^{2t\theta}\lesssim\sum_j2^{-j(d-1)(\frac{2t\theta}{p}-1)}\int_{|f|<2^{\frac{j(d-1)}{p}}}|f|^{2t\theta}\\&\lesssim\int\sum_{j\gtrsim\frac{p}{d-1}\log|f|}2^{-j(d-1)(\frac{2t\theta}{p}-1)}|f|^{2t\theta}\simeq\int|f|^p\simeq1.\end{aligned}$$

对于 $\ell\geq1$，我们两次应用 H¨older 不等式，得到

$$\begin{aligned}(3.8)&\leq\Big(\sum_j\sum_{\sigma\in\mathcal{D}_{j-1,0}}2^{-\frac{j(d-1)(s-p)}{p}}\|f_\sigma^\ell\|_s^s\Big)^{\frac{2t\theta}{s}}=\Big(\sum_j2^{\frac{j(d-1)(p-s)}{p}}\int_{|f|\simeq2^{\frac{j(d-1)}{p}+\ell}}|f|^s\Big)^{\frac{2t\theta}{s}}\\&\lesssim\Big(\sum_j2^{-\ell(p-s)}\int_{|f|\simeq2^{\frac{j(d-1)}{p}+\ell}}|f|^p\Big)^{\frac{2t\theta}{s}}\leq2^{-\ell(p-s)}\|f\|_p^{\frac{2t\theta p}{s}}\simeq2^{-\ell(p-s)}.\end{aligned}$$

现在考虑一个支集任意的函数 f。由引理 3.2 和伸缩变换，存在 $\theta_0\in(0,1)$，使得

$$\|\mathcal{E}f\|_q\lesssim\sup_k\|\mathcal{E}(f\chi_k)\|_q^{\theta_0}\|f\|_p^{1-\theta_0}=\sup_k\|\mathcal{E}g_k\|_q^{\theta_0}\|f\|_p^{1-\theta_0},$$

其中 $g_k(\xi)=2^{k\frac{d-1}{p}}f(2^k\xi)\chi_1(\xi)$。对于所有 ℓ 和 $\sigma\in\mathcal{D}_{j,0}$，我们有

$$\begin{aligned}(g_k)_\sigma^\ell(\xi)&=g_k(\xi)\chi_\sigma(\xi)\chi_{\{|g_k|\simeq2^\ell\mu(\tau_\sigma)^{-1/p}\|g_k\|_p\}}(\xi)\\&=2^{k\frac{d-1}{p}}f(2^k\xi)\chi_{2^k\sigma}(2^k\xi)\chi_{\{|f(2^k\cdot)|\simeq2^\ell\mu(\tau_{2^k\sigma})^{-1/p}\|f\|_p\}}(\xi)=2^{k\frac{d-1}{p}}f_{2^k\sigma}^\ell(2^k\xi).\end{aligned}$$

根据构造，$2^k\sigma\in\mathcal{D}_{j,\,k}$。由于我们已经证明了对支撑在环域上的函数以及 supp $g_k\subset\{1<|\xi|\leq2\}$ 的情形，

$$\begin{aligned}\sup_k\|\mathcal{E}g_k\|_q^{\theta_0}\|f\|_p^{1-\theta_0}&\lesssim\sup_k\sup_j\sup_{\sigma\in\mathcal{D}_{j,0}}\sup_\ell2^{-c_0\theta_0\ell}\|\mathcal{E}(g_k)_\sigma^\ell\|_q^{\theta\theta_0}\|g_k\|_p^{\theta_0(1-\theta)}\|f\|_p^{1-\theta_0}\\&=\sup_{j,k}\sup_{\sigma\in\mathcal{D}_{j,k}}\sup_\ell2^{-c_0\theta_0\ell}\|\mathcal{E}f_\sigma^\ell\|_q^{\theta\theta_0}\|f\|_p^{1-\theta\theta_0}.\end{aligned}$$

这就完成了该引理的证明。 □

引理 3.6（芯片提取）。对于 $1 < p < p_0$，存在一个许可序列$\rho_m \searrow 0$，使得对于每个 $f \in L^p(\mathbb{R}, \frac{\xi}{|\xi|})$，都存在一个扇区序列 σ_m，使得如果 r^m 和 f^m 按递归方式定义为

$$r^0 := f, \quad r^m := r^{m-1} - f^m, \quad f^m := r^{m-1}\chi_{\sigma_m}\chi_{\{|f|<2^m\mu(\tau_{\sigma_m})^{-1/p}\|f\|_p\}},$$

then

$$\|\mathcal{E}h^m\|_q \le \rho_m \|f\|_p,$$

对于每个满足 $|h^m| = |r^m|\chi_E$ 的可测 h^m，都存在某个可测集合 E。

证明。我们将证明该引理对 $\rho_m = Cm^{-\theta_0/p}$ 成立，其中 θ_0 取自 (3.7)。

我们不妨假设 $\|f\|_p = 1$。根据控制收敛定理，给定r^{m-1}，我们可以选取 σ_m 使 $\|f^m\|_p$ 最大。若 $|h^m| = |r^m|\chi_E$ 具有 $\|\mathcal{E}h^m\|_q > \rho_m$，则（由于$\|h^m\|_p \le 1$），

$$\sup_{\ell\ge 0}\sup_{\sigma} 2^{-c_0\ell}\|(h^m)^\ell_\sigma\|_p^\theta > \rho_m.$$

于是存在某个 $\ell \le -\frac{1}{c_0}\log_2 \rho_m$，使得 $\|(h^m)^\ell_\sigma\|_p > \rho_m^{1/\theta_0}$。由于

$$|(h^m)^\ell_\sigma| = |r^m|\chi_E\chi_\sigma\chi_{\{|r^m|<2^\ell\mu(\tau_\sigma)^{-1/p}\|h^m\|_p\}},$$

且 $\|h^m\|_p \le 1$,

$$\|r^m\chi_\sigma\chi_{\{|r^m|<2^\ell\mu(\tau_\sigma)^{-1/p}\}}\|_p > \rho_m^{1/\theta}.$$

由于 $\ell \le -\frac{1}{c_0}\log_2 \frac{C}{m^{1/p}} \le m/2$ （当 C 充分大时），由关于 σ_{m+1} 的极大条件可知 $\|f^{m+1}\|_p > \rho_m^{1/\theta}$。事实上，对于任意 $m/2 \le m' \le m$，完全相同的论证表明 $\|f^{m'}\|_p > \rho_m^{1/\theta}$。根据构造， $f^{m'}$ 具有互不相交的支集，且 $\sum|f^{m'}| \le |f|$。因此 $\|f\|_p > m/2\rho_m^{p/\theta} \ge 1$，矛盾。回溯并应用引理 3.5，可知我们始终有 $\|\mathcal{E}h^m\|_q \le \rho_n$。□

命题 3.7（一个大块）。设 $1 < p < p_0$ 和 $\{f_n\} \subseteq L^p$（$\mathbb{R}, \frac{\xi}{|\xi|}$），其中

$$\|f_n\|_p \equiv 1, \ and \ \lim_{n\to\infty}\|\mathcal{E}f_n\|_q = \mathbf{A}_{p,q}.$$

˜存在对称变换 $S_n \in \mathcal{S}$，使得令 $f_n := S_n f_n$,

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|\tilde{f}_n(1 - \chi_{\{R^{-1}\le|\xi|\le R\}}\chi_{\{|\tilde{f}_n|\le R\}})\|_p = 0. \tag{3.9}$$

证明。对于每个 n，我们令 $\{\sigma_n^m\}, \{f_n^m\}, \{r_n^m\}$ 分别表示与 f_n 相关联的扇区序列和函数，这些对象在引理 3.6 的证明中已有定义。粗略地说，我们将证明 $\{f_n^m\}$ 要么都可忽略（当 $n \to \infty$ 时），要么局限于尺度和角宽度可比的扇区。

我们首先确定适当的重标度。由三角不等式和引理 3.6，存在一个允许的 M，使得对于所有充分大的 n，都存在 $m_n \le M$ 使得 $\|f_n^{m_n}\|_p \gtrsim 1$。应用对称变换 $S_n \in \mathcal{S}$ 后，我们可以假设每个 $\sigma_n^{m_n}$ 的角宽为 $\gtrsim 1$，且位于频率尺度 1 上。分别考虑有限个允许的子序列后，我们可以假设对于所有 n，都有 $m_n = m_0$。

令 $\{2^{-k_n^m}\}$ 和 $\{2^{-j_n^m}\}$ 分别表示 σ_n^m的频率尺度和角宽。若每个子序列 $\{n_\ell\}$ 都存在一个进一步的子序列 $\{\tilde{n}_\ell\}$，使得 $\lim_{\ell\to\infty}\|f_{\tilde{n}_\ell}^m\|_p = 0$，或者 $k_{\tilde{n}_\ell}^m$ 和 $j_{\tilde{n}_\ell}^m$ 在 ℓ中为常数，则称 $m \in \mathbb{N}$ 是“良好”的。

当然，我们称不良的 m 为“不良”。自然， m_0 是良好的；事实上，我们将证明不存在不良的 m。

假设指标 m_1 是不良的。那么，根据康托尔对角化论证，存在一个子序列 $\{n_\ell\}$，沿着该子序列，

$$\lim_{\ell\to\infty}\|f_{n_\ell}^m\|_p,\ \lim_{\ell\to\infty}k_{n_\ell}^m,\ \text{and}\ \lim_{\ell\to\infty}j_{n_\ell}^m$$

对所有 m，它们都存在（后两者可能为无穷），使得

$$\lim_{\ell\to\infty}\|f_{n_\ell}^{m_1}\|_p>0;\ \text{and}\ \lim_{\ell\to\infty}k_{n_\ell}^{m_1}=\infty\ \text{or}\ \lim_{\ell\to\infty}j_{n_\ell}^{m_1}=\infty.$$

我们将通过证明 f_{n_ℓ} 并非最大化者来导出矛盾。为简化表达式，我们省略额外的下标 ℓ。

为方便起见，我们稍微修改良好和不良的定义，使得（沿着我们的子序列）

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^m\|_p=0;\ \text{or}\ \lim_{n\to\infty}k_n^m\in\mathbb{Z}\ \text{and}\ \lim_{n\to\infty}j_n^m\in\mathbb{N}$$

对于每个良好的 m，并且

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^m\|_p>0;\ \text{and}\ \lim_{n\to\infty}k_n^m\in\{\pm\infty\}\ \text{or}\ \lim_{n\to\infty}j_n^m=\infty,$$

对于每个不良的 m。注意， m_0 仍然是良好的（且 $\lim_{n\to\infty}\|f_n^{m_0}\|_p>0$），而 m_1 仍然是不良的。

对于 $M\geq 0$，我们定义

$$G_n^M:=\sum_{\text{good}\,m\leq M}f_n^m\qquad\qquad B_n^M:=\sum_{\text{bad}\,m\leq M}f_n^m.$$

因此，对所有 n，都有 $f_n=G_n^M+B_n^M+r_n^M$，且右侧各项的支集互不相交。

我们先证明 r_n^M 在 L^p 中很小。根据引理 3.6，

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|\mathcal{E}r_n^m\|_q=0.$$

因此，

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|r_n^m\|_p=0,\tag{3.10}$$

否则，

$$\frac{\|\mathcal{E}(f_n-r_n^m)\|_q}{\|f_n-r_n^m\|_p}\geq\frac{\|\mathcal{E}f_n\|_q-\|\mathcal{E}r_n^m\|_q}{(\|f_n\|_p^p-\|r_n^m\|_p^p)^{1/p}}$$

对于某些充分大的 n， m，其值会超过 $\mathsf{A}_{p,\ q}=\lim_n\frac{\|\mathcal{E}f_n\|_q}{\|f_n\|_p}$，这与我们的假设矛盾，即 $\{f_n\}$ 是最大化的。

接下来，我们将证明

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{E}(G_n^M+B_n^M)\|_q^q-\|\mathcal{E}G_n^M\|_q^q-\|\mathcal{E}B_n^M\|_q^q=0,\tag{3.11}$$

对所有 M 均成立。只需证明，对每个良好 m 和不良 m'，

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{E}f_n^m\,\mathcal{E}f_n^{m'}\|_{q/2}=0.\tag{3.12}$$

如果 $\|f_n^M\|_p\to 0$，则由柯西–施瓦茨不等式可得 (3.12)。因此，我们可以假设 k_n^m、j_n^m最终为常数，而 $k_n^{m'}$ 或 $j_n^{m'}$ 具有无穷极限。在前一种情况下，(3.12) 直接由环带解耦 (3.2) 得出，因此我们可以假设 $k_n^{m'}$ 最终为常数且 $j_n^{m'}\to\infty$。令 $\frac{1}{p_1}:=\frac{2}{p}-\frac{1}{p_0}$，

如果 p 非常接近 1，则取 $p_0 > p$ 的略小值。于是有 $1 < p_1 < p < p_0$ 和 $\frac{2}{q\,p()} = \frac{1}{q\,p_0()} + \frac{1}{q\,p_1()}$。（我们回顾一下 $q(p)$ 的定义 (1.3)。）由 Hölder 不等式以及 f_n^m 的定义，$\|f_n^m\|_{p_0}$ 有界且

$$\|f_n^{m'}\|_{p_1} \lesssim \mu(\tau_{\sigma_n^{m'}})^{1/p_1-1/p}\|f_n^{m'}\|_p \lesssim 2^{-dj_n^{m'}(1/p_1-1/p)} \to 0.$$

再应用一次 H¨older 不等式，得到 (3.12)，从而得到 (3.11)。

最后，由 (3.10) 和 (3.11)，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{p,q}^q &= \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{E}G_n^M\|_q^q + \|\mathcal{E}B_n^M\|_q^q\\ &\le \mathbf{A}_{p,q}^q \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|G_n^M\|_p^q + \|B_n^M\|_p^q\\ &= \mathbf{A}_{p,q}^q \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\max\{\|G_n^M\|_p, \|B_n^M\|_p\}^{q-p} \le \mathbf{A}_{p,q}^q,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 $\|G_n^M\|_p^p + \|B_n^M\|_p^p \le 1$ 得出。比较两边可知，所有不等式都必须取等号。然而，

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|G_n^M\|_p^p \le 1 - \lim_{n\to\infty}\|f_n^{m_1}\|_p^p, \qquad \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|B_n^M\|_p^p \le 1 - \lim_{n\to\infty}\|f_n^{m_0}\|_p^p,$$

它们都小于 1，这就产生了矛盾。追溯可知，唯一的可能是 $\tilde{m}_1$ 并非不良。最后，我们证明 (3.9)（其中 $f_n = f_n$）。由三角不等式以及

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|r_n^M(1-\chi_{\{R^{-1}\le|\xi|\le R\}}\chi_{\{|f_n|\le R\}})\|_p \le \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|r_n^M\|_p = 0,$$

我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|f_n(1-\chi_{\{R^{-1}\le|\xi|\le R\}}\chi_{\{|f_n|\le R\}})\|_p\\ &\quad= \lim_{M\to\infty}\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|G_n^M(1-\chi_{\{R^{-1}\le|\xi|\le R\}}\chi_{\{|f_n|\le R\}})\|_p.\end{aligned}$$

考虑单个良好的 f_n^m，

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|f_n^m(1-\chi_{\{R^{-1}\le|\xi|\le R\}}\chi_{\{|f_n|\le R\}})\|_p = 0,$$

因为在 n 中，每个子序列都存在一个更细的子序列，使得沿该子序列，$\|f_n^m\|_p \to 0$ 或与 σ_n^m 相关的参数保持有界。由此，命题可根据三角不等式得证。□

3.3. 空间局部化。为得到空间局部化，我们将应用波动方程剖面分解的一个简单推论，该推论可见于 [1, 7, 19, 31]。

引理 3.8（频率局部化的 L^2 剖面分解）。设 $R > 0$，且设$\{f_n\}$为一列支撑于 $\{R^{-1} < |\xi| < R\}$ 并满足 $|f_n| < R$ 的可测函数。则存在 $\{\phi^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq L^2$ 和 $\{(t_n^j,\ x_n^j)\}_{n,\ j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{1+d}$ 使得，在取一个子序列之后，

- $\phi^j = \text{wk-lim}\, e^{i(t_n^j, x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)} f_n$
- $\lim_{n\to\infty}\big(|t_n^j - t_n^{j'}| + |x_n^j - x_n^{j'}|\big) = \infty,\ j \ne j'$

指数函数很少 d t

$$w_n^J(\xi) := f_n(\xi) - \sum_{j=1}^J e^{-i(t_n^j, x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)}\phi^j(\xi) \tag{3.13}$$

obey

- 极限$_{J\to\infty}$上极限$_{n\to\infty}$ $\|\mathcal{E}w_n^J\|_{\frac{2(d+1}{d-1}}=0$,
- 极限$_{n\to\infty}$ $\|f_n\|_2^2-\sum_{j=1}^J\|\phi^j\|_2^2-\|w_n^J\|_2^2=0$，对所有 $1\le J<\infty$
- 极限$_{n\to\infty}$ $\|\mathcal{E}f_n\|_{\frac{(d+1}{d+1}}^{\frac{(d+1}{d-1}}-\sum_{j=1}^J\|\mathcal{E}\phi^j\|_{\frac{2)\frac{2}{d-1}()}{d+1}}^{\frac{(d+1}{d+1}}-\|\mathcal{E}w_n^J\|_{\frac{2)\frac{2}{d-1}()}{d-1}}^{\frac{(d+1)\frac{2}{d-1}()}{d-1}}=0$, $1\le J<\infty$。

我们注意到，根据命题 3.7， $|f_n|\le R\chi_{\{R^{-1}\le|\xi|\le R\}}$ 这一假设并无影响。

证明。该结果可直接应用剖面分解得到，例如见 [31,定理 3.1]。事实上，令

$$(u_{0,n},u_{1,n}):=(\check{f}_n,\tfrac{i}{|\nabla|}\check{f}_n),$$

我们看到，按照上述文章中的记号， $\mathcal{E}f_n=S(t)(u_{0,\ n},u_{1,\ n})$；并且得益于我们的频率局部化，$(u_{0,\ n},u_{1,\ n})$在 $\dot{H}^1\times L^2$中有界。此外，用 [7], 的术语来说，该序列是“1-振荡”的。因此， [7,$\widehat{\ }$引理 3.8] 给出(V_0^j,V_1^j)，使得 $\phi^j=V_0^j$ 满足我们的所有结论。对于所有 j， $e^{i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\xi|,\ \xi)}f_n\rightharpoonup\phi^j$ 这一断言可由 V_0^j 在[7]中的构造得出。□

命题 3.9（L^p 剖面分解）。设 $R>0$。设 f_n 为可测函数，满足 supp $f_n\subset\{R^{-1}<|\xi|<R\}$ 且 $|f_n|<R$ 几乎处处成立。那么存在 n中的一个子序列、序列$(t_n^j,x_n^j)\in\mathbb{R}^{1+d}$ 以及有界函数 $\phi^{(j)}$ ，满足 supp $\phi^j\subset\{|\xi|<R\}$ ，使得以下结论成立，其中w_n^J 如(3.13)所示。

1° $\lim_{n\to\infty}|x_n^j-x_n^{j'}|+|t_n^j-t_n^{j'}|=\infty$ *for all* $j\neq j'$*;*
2° $\lim_{J\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|\mathcal{E}w_n^J\|_q=0$*;*
3° $\liminf_{n\to\infty}\|f_n\|_p\ge(\sum_{j=1}^\infty\|\phi^j\|_p^{\tilde{p}})^{1/\tilde{p}}$ *for* $\tilde{p}=\max\{p,p'\}$*;*
4° $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{E}f_n\|_q^q-\sum_{j=1}^J\|\mathcal{E}\phi^j\|_q^q-\|\mathcal{E}w_n^J\|_q^q=0$ *for all* J*; and*
5° $e^{i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)}f_n\rightharpoonup\phi^j$ *as* $n\to\infty$*, for all* j*.*

证明。结论 1 和 5 由引理 3.8 立即得出。

我们可以假设 $p\neq 2$，否则便属于引理 3.8 所涵盖的情形。令$1<p_1<\frac{2d}{d-1}$ 满足 p 严格介于 2 和 p_1之间。由 Br´ezis–Lieb 引理和归纳法可得结论 4，因为 $\mathcal{E}(e^{i(t_n^1,x_n^1)\cdot(|\xi|,\xi)}f_n-\phi^1)\to 0$ 逐点成立，并且对于 $j>1$， $\mathcal{E}(e^{i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)}w_n^{j-1}-\phi^j)\to 0$ 逐点成立。此外，对于指数 $(p_1,q(p_1))$，结论 4 同样成立，因为 f_n 在 L^{p_1} 中有界。由 Hölder 不等式，结论 2 可由结论 4 和引理 3.8 的第二个结论推出。

要证明结论 3，我们还需要多费些功夫。设 $\varepsilon>0$ 和 φ,ψ 是光滑、非负的紧支撑函数，使得对所有 $j\le J$， $\|\varphi\|_\infty=\int\psi=1$ 和 $\|\phi^j-\psi*(\varphi\phi^j)\|_p<\varepsilon$。我们进一步假设 supp $\psi\subset\{|\xi|<\frac{1}{2}R^{-1}\}$ 且 supp $\varphi\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$。令

$$\pi_n^j(f):=e^{-i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)}\psi*(\varphi e^{i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\cdot|,\cdot)}f).$$

由于 $\psi*(\varphi\phi^j)$ 是紧支撑的，且有上界 1，因此由结论 5 可得

$$\begin{aligned}\big(\sum_{j=1}^J \|\phi^j\|_p^{\tilde p}\big)^{1/\tilde p} &\le \big(\sum_{j=1}^J \|e^{-i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)}\psi*(\varphi\phi^j)\|_p^{\tilde p}\big)^{1/\tilde p} + o_{\varepsilon,J}(1)\\ &\le \big(\sum_{j=1}^J \|\pi_n^j(f_n)\|_p^{\tilde p}\big)^{1/\tilde p} + C_J\big(\sum_{j\neq j'\le J}\|\pi_n^j e^{-i(t_n^{j'},x_n^{j'})\cdot(|\xi|,\xi)}\phi^{j'}\|_p^{\tilde p}\big)^{1/\tilde p}\\ &\qquad + \|\pi_n^J(w_n^J)\|_p + o_{\varepsilon,J}(1).\end{aligned}$$

根据控制收敛定理和分部积分，右侧中间的两项当 $n\to\infty$ 时趋于零。令 $\varepsilon\to 0$，最后一项也随之消失，因此只需估计 $n\to\infty$ 时的第一项。定义向量值泛函

$$\Pi_n^J(f) := (\pi_n^j(f))_{j=1}^J.$$

为了证明结论 3，只需证明 $\limsup_{n\to\infty}\|\Pi_n^J\|_{L^p\to\ell^{\tilde p}L^p}\le 1$。

由于对于所有 $1\le s\le\infty$ 和 $g\in L^s$，$\|\psi*(\varphi g)\|_s\le\|g\|_s$，我们知道 $\|\Pi_n^J\|_{L^1\to\ell^\infty L^1}$，$\|\Pi_n^J\|_{L^\infty\to\ell^\infty L^\infty}\le 1$。因此，通过复插值和对偶性，我们需要证明

$$\limsup_{n\to\infty}\|(\Pi_n^J)^*\mathbf{g}\|_2^2\le\|\mathbf{g}\|_2^2$$

对于所有 $\mathbf{g}=(g_1,\dots,g_J)\in(L^2)^J$。我们展开

$$\begin{aligned}\|(\Pi_n^J)^*\mathbf{g}\|_2^2 &= \Big\|\sum_j e^{-i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)}\varphi(e^{i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\cdot|,\cdot)}g_j*\psi)\Big\|_2^2\\ &\le \sum_j\|(\pi_n^j)^*g_j\|_2^2 + \sum_{j\neq j'}\int|\pi_n^{j'}(\pi_n^j)^*g_j\overline{g_{j'}}|\le\|\mathbf{g}\|_2^2+\sum_{j\neq j'}\|\pi_n^{j'}(\pi_n^j)^*g_j\|_2\|g_{j'}\|_2.\end{aligned}$$

最后，令 $h_j := e^{i(t_n^j,x_n^j)\cdot(|\xi|,\,\xi)}g_j$。由于 φ 和 ψ 均为光滑且紧支撑的函数，并且 $\xi\mapsto(t_0,x_0)\cdot(|\xi|,\xi)$ 在 $\frac12R^{-1}<|\xi|<R$ 上没有临界点，驻相法和结论 1 告诉我们

$$\begin{aligned}\|\pi_n^{j'}(\pi_n^j)^*g_j\|_2 &\lesssim \|\psi*(e^{i(t_n^{j'}-t_n^j,x_n^{j'}-x_n^j)\cdot(|\xi|,\xi)}|\varphi|^2(h_j*\psi))\|_\infty\\ &\lesssim (1+|(t_n^{j'}-t_n^j,x_n^{j'}-x_n^j)|)^{-d/2}\to 0,\end{aligned}$$

这就证明了结论 3。 □

引理 3.10（一个大气泡）。对于每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得以下结论成立。对于所有满足 $\operatorname{supp} f_n\subset\{R^{-1}<|\xi|<R\}$、$|f_n|<R$、$\|f_n\|_p=1$ 对所有 n 均成立，且 $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{E}f_n\|_q>(1-\delta)\mathsf{A}_{p,\,q}$ 的序列 $\{f_n\}$，存在 n 中的一个子序列、一个支撑于 $\{|\xi|<R\}$ 上的有界函数 ϕ，以及一个序列 $(t_n,x_n)\in\mathbb{R}^{1+d}$，使得

$$\limsup_{n\to\infty}\|f_n - e^{-i(t_n,x_n)\cdot(|\xi|,\xi)}\phi\|_p<\varepsilon.$$

证明。假设我们已选定 $\delta > 0$，其取值稍后确定。由命题 3.9 的陈述 2 和 4，

$$(1-\delta)^q \mathbf{A}_{p,q}^q \le \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{E} f_n\|_q^q \le \lim_{J\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{J} \|\mathcal{E}\phi^j\|_q^q + \limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{E} w_n^J\|_q^q \right)$$
$$\le \lim_{J\to\infty} \mathbf{A}_{p,q}^q \sum_{j=1}^{J} \|\phi^j\|_p^q \le \mathbf{A}_{p,q}^q \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\phi^j\|_p^{q-\tilde{p}} \lim_{J\to\infty} \sum_{j} \|\phi^j\|_p^{\tilde{p}}$$
$$\le \mathbf{A}_{p,q}^q \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\phi^j\|_p^{q-\tilde{p}}.$$

因此，存在 $j_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|\phi^{(j_0)}\|_p \ge (1-\delta)^{\frac{q}{q-\tilde{p}}}.$$

由于 $e^{i(t_n^{(j_0)}, x_n^{(j_0)})\cdot(|\xi|,\ \xi)} f_n \rightharpoonup \phi^{(j_0)}$，当 $n \to \infty$ 时，根据命题 3.9 的陈述 5 以及定义 $q > \tilde{p}$， L^p 的一致凸性意味着我们可以取足够小的 δ 来满足该结论。□

定理 1.1 的证明。令 $\{f_n\} \subset L^p(\frac{\xi}{|\xi|})$ 为一个非零序列，使得 $\|\mathcal{E} f_n\|_q \to \mathbf{A}_{p,\ q}$，且对所有 n 均有 $\|f_n\|_p = 1$。根据命题 3.7，取一个子序列并对 f_n 应用一列对称变换后，

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{E} f_n^m\|_q / \|f_n^m\|_p = \mathbf{A}_{p,q},$$

其中 $f_n^m := f_n \chi_{\{m^{-1}<|\xi|<m\}} \chi_{\{|f_n|<m\}}$ 对所有 $m \in \mathbb{N}$ 均成立。

引理 3.10 给出了一个有界函数 ϕ^m，经过对 f_n进行调制并取另一个子序列后，

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|f_n^m - \phi^m\|_p = 0.$$

由三角不等式和命题 3.7，我们可以去掉 f_n 的截断，从而得到

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|f_n - \phi^m\|_p = 0.$$

因此，对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 $M \in \mathbb{N}$，使得对每个 m、$m' > M$、$\|\phi^m - \phi^{m'}\|_p < \varepsilon$ 均成立。于是，序列 $\{\phi^m\}$ 是柯西列，因此收敛到某个$\phi \in L^p$。由于 $f_n \to \phi$ 属于 L^p， ϕ 是一个极大化函数。□

Acknowledgements

GN 和 DOS 获得了英国工程与自然科学研究委员会新研究者奖“尖锐傅里叶限制理论”（资助编号 EP/T001364/1）的支持，并通过项目 UIDB/04459/2020（DOI 标识符 10-54499/UIDP/04459/2020）获得葡萄牙科学技术基金会的支持。DOS 感谢德国科学基金会通过德国卓越战略项目 EXC-2047/1 – 390685813 提供部分支持，并感谢 Ren´e Quilodr´an 在本文准备过程中进行的宝贵讨论。BS 和 JT 获得了美国国家科学基金会 DMS-1653264、美国国家科学基金会 DMS-2246906 以及威斯康星校友研究基金会的支持。JT 还获得了美国国家科学基金会 DMS-2037851 的额外支持。作者感谢匿名审稿人提出的宝贵建议。

Appendix A. The Penrose transform

彭罗斯映射是闵可夫斯基时空 [29] 上的经典共形映射。相关的彭罗斯变换此前曾出现在尖锐限制理论 [16, 24, 25] 中；另请参阅近期的综述 [26, §5]。本附录旨在以自成一体的形式介绍处理欧拉–拉格朗日方程 (1.10) 所需的全部彭罗斯变换背景知识。这些内容大多属于经典理论，且此前的论文已借助共形几何工具加以阐述。此处我们将采用一条不同的途径，避开这类工具，以方便更偏重分析的读者。

给定 $d \geq 2$，通过令 $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)$，用球坐标将 $\mathbb{S}^d = \{X = (X_0, X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \colon \sum_{i=0}^d X_i^2 = 1\}$ 参数化，并且

$$X = (X_0, \vec{X}) = (\cos R, \omega \sin R), \quad R \in [0, \pi], \, \omega \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

在 $\mathbb{R}^d$ 上，引入极坐标 $r \geq 0$ 和 $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$。然后我们定义彭罗斯映射 $\mathcal{P}$：$\mathbb{R}^{1+d} \to [-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^d$，其形式为 $\mathcal{P}(t, r\omega) = (T, \cos R, \omega \sin R)$，其中

$$\begin{aligned} T &= \arctan(t + r) + \arctan(t - r), \\ R &= \arctan(t + r) - \arctan(t - r), \\ \omega &= \omega. \end{aligned} \tag{A.1}$$

逆映射可以简洁地描述如下：

$$t \pm r = \tan\left(\frac{T \pm R}{2}\right). \tag{A.2}$$

$\mathcal{P}$ 的值域通常称为彭罗斯菱形，其定义为

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d}) = \{(T, \cos R, \omega \sin R) \ : \ 0 \leq R < \pi - |T|\}.$$

我们定义共形因子[2]

$$\Omega := \frac{2}{(1 + (t + r)^2)^{\frac{1}{2}} (1 + (t - r)^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos T + \cos R. \tag{A.3}$$

通过 $\mathcal{P}$ 将 $\mathbb{R}^{1+d}$ 的体积元 $\mathrm{d}t\mathrm{d}x$ 推前后，可方便地表示为

$$\Omega^{d+1} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \, \mathrm{d}T \, \mathrm{d}\sigma, \tag{A.4}$$

其中，$\mathrm{d}\sigma$ 表示 $\mathbb{S}^d$ 上的通常曲面测度。为验证 (A.4)，注意到测度 $\mathrm{d}T\mathrm{d}\sigma$ 满足递推关系

$$\mathrm{d}T \, \mathrm{d}\sigma_{\mathbb{S}^d}(\cos R, \omega \sin R) = (\sin R)^{d-1} \, \mathrm{d}T \, \mathrm{d}R \, \mathrm{d}\sigma_{\mathbb{S}^{d-1}}(\omega),$$

由此可直接得到 (A.4)。

下面的结果描述了彭罗斯映射对达朗贝尔算子的作用。

引理 A.1. 给定 $U \in C^\infty(\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d}))$，定义

$$u(t, x) := \Omega^{\frac{d-1}{2}} U(T, X), \quad \text{where } (T, X) = \mathcal{P}(t, x). \tag{A.5}$$

那么 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+d})$ 和

$$\left(\partial_t^2 - \Delta\right) u(t, x) = \Omega^{\frac{d+3}{2}} \cdot \left(\partial_T^2 - \Delta_{\mathbb{S}^d} + \frac{(d-1)^2}{4}\right) U(T, X). \tag{A.6}$$

[2]有关与共形几何的联系，请参见 [18, 附录 A.4]。

证明。我们需要证明以下恒等式：

$$(\partial_t^2-\Delta)\left[(\Omega^{\frac{d-1}{2}}U)|_{(T,X)=\mathcal{P}(t,x)}\right]=\Omega^{\frac{d+3}{2}}\cdot\left(\partial_T^2-\Delta_{\mathbb{S}^d}+\frac{(d-1)^2}{4}\right)U. \tag{A.7}$$

由于 $\mathcal{P}$ 在 ω 下保持不变，不失一般性，可假设 $U=U(T,R)$，或等价地假设 $u=u(t,r)$。为证明 (A.7)，我们先计算算子 $\partial_t^2-\Delta=\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{d-1}{r}\partial_r$ 在坐标 (T,R) 下的表达式，并声称

$$\partial_t^2-\partial_r^2-\frac{d-1}{r}\partial_r=\Omega^2\cdot(\partial_T^2-\partial_R^2)-(d-1)\Omega\cdot\left(\frac{1+\cos R\cos T}{\sin R}\partial_R-\sin T\partial_T\right). \tag{A.8}$$

最容易的验证方法是先注意到 $\partial_t^2-\partial_r^2=4\partial_{t+r}\partial_{t-r}$，因此由 (A.2) 以及 $\Omega=\cos T+\cos R=2\cos\left(\frac{T+R}{2}\right)\cos\left(\frac{T-R}{2}\right)$ 这一事实可得，

$$4\partial_{t+r}\partial_{t-r}=16\cos^2\left(\frac{T+R}{2}\right)\cos^2\left(\frac{T-R}{2}\right)\partial_{T+R}\partial_{T-R}=\Omega^2\cdot(\partial_T^2-\partial_R^2).$$

为处理剩余项 $\frac{d-1}{r}\partial_r$，我们用 (A.2) 计算

$$\frac{d-1}{r}=\frac{2(d-1)}{\tan\left(\frac{T+R}{2}\right)-\tan\left(\frac{T-R}{2}\right)}=\frac{(d-1)\Omega}{\sin R};$$

另一方面，由 (A.1)，

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial}{\partial T}+\frac{\partial R}{\partial r}\frac{\partial}{\partial R}=-\sin R\sin T\frac{\partial}{\partial T}+(1+\cos R\cos T)\frac{\partial}{\partial R},$$

由此立即可得 (A.8)。

为完成 (A.7) 的证明，我们将 (A.8) 右侧的算子作用于函数 $\Omega^{\frac{d-1}{2}}U=(\Omega^{\frac{d-1}{2}}U)(T,R)$。经过冗长但常规的计算可得

$$\begin{aligned}&\Omega^2\cdot(\partial_T^2-\partial_R^2)(\Omega^{\frac{d-1}{2}}U)-(d-1)\Omega\cdot\left(\tfrac{1+\cos R\cos T}{\sin R}\partial_R-\sin T\,\partial_T\right)(\Omega^{\frac{d-1}{2}}U)\\&=\Omega^{\frac{d+3}{2}}\cdot\left(\partial_T^2-\partial_R^2-(d-1)\cot R\,\partial_R+\tfrac{(d-1)^2}{4}\right)U,\end{aligned} \tag{A.9}$$

其中 cot 表示余切函数。根据假设 $U=U(T,R)$，球面拉普拉斯算子为

$$\Delta_{\mathbb{S}^d}U=(\sin R)^{1-d}\partial_R((\sin R)^{d-1}\partial_R U)=\partial_R^2U+(d-1)\cot R\,\partial_R U,$$

因此我们看到，(A.9) 右侧与 (A.7) 左侧一致。引理得证。□

我们希望将引理 A.1 应用于半波传播子 $u=e^{itD}g$，其定义见 (1.5)。注意 $g=u|_{t=0}$。由 (A.1) 可立即得出，$t=0$ 当且仅当$T=0$，此时

$$\cos R=\cos(2\arctan r)=\frac{1-r^2}{1+r^2}\ \text{ and }\ \sin R=\frac{2r}{1+r^2}. \tag{A.10}$$

这些方程与将 $\mathbb{R}^d$ 立体投影到$\mathbb{S}^d\setminus\{(-1,\vec{0})\}$所得的方程一致，可改写为 $x=\vec{X}/(1+X_0)$。接下来我们定义

$$\Omega_0:=\Omega|_{t=0}=\frac{2}{1+r^2}=1+\cos R,$$

并引入球面分数阶算子

$$D_{\mathbb{S}^d} := \left(-\Delta_{\mathbb{S}^d} + \frac{(d-1)^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A.11}$$

我们认出，$D^2_{\mathbb{S}^d}$ 是 (A.6) 右侧球面达朗贝尔算子的空间部分。$D_{\mathbb{S}^d}$ 作用于 $\mathbb{S}^d$ 上次数为 ℓ 的球谐函数 Y_ℓ，结果为

$$D_{\mathbb{S}^d} Y_\ell = \left(\ell + \frac{d-1}{2}\right) Y_\ell, \tag{A.12}$$

这仅仅是因为 $-\Delta_{\mathbb{S}^d} Y_\ell = \ell(\ell+d-1)Y_\ell$。因此，我们通过下式定义传播子 $e^{iTD_{\mathbb{S}^d}}$：

$$e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} Y_\ell(X) = e^{iT(\ell+\frac{d-1}{2})} Y_\ell(X). \tag{A.13}$$

完成这些准备工作后，我们接下来定义彭罗斯变换。

定义 A.2. 给定 $G \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$，通过下式定义 $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$：

$$g(r\omega) = \Omega_0^{\frac{d-1}{2}} G(X), \tag{A.14}$$

其中 $X = (\cos R, \omega \sin R)$，且 $(\cos R, \sin R)$ 由 (A.10) 给出。我们称 g 为 G 的彭罗斯变换。

注 A.1. 若 G 是 $\mathbb{S}^d$ 上的常值函数 1，则其彭罗斯变换恰好是式 (1.9) 中定义的函数 $g_\star$。

注意，(A.14) 与在 $t = 0$ 处对 (A.5) 求值所得结果一致。以下结果在共形几何中称为交织定律 [17, eq. (1.1)]。

引理 A.3. 设 g 与 G 满足定义 A.2 中的关系。则

$$Dg(x) = \Omega_0^{\frac{d+1}{2}} D_{\mathbb{S}^d} G(X). \tag{A.15}$$

证明. 令 $h = Dg$，我们将证明以下与 (A.15) 等价的形式：

$$D^{-1}h(x) = \Omega_0^{\frac{d-1}{2}} D_{\mathbb{S}^d}^{-1} \tilde{H}(X),$$

其中 $\tilde{H}(X) = \Omega_0^{-\frac{d+1}{2}}(x) h(x)$，且 $X = (\cos R, \omega \sin R)$ 和 $(\cos R, \sin R)$ 由立体投影 (A.10) 给出。根据经典结果 [21, Def. 2.11]，

$$D^{-1}h(x) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{h(z)}{|x-z|^{d-1}}\, \mathrm{d}z, \text{ where } c_d = \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}. \tag{A.16}$$

令 X 和 Z 分别表示 x 和 z 在立体投影 (A.10) 下的像，注意到

$$\Omega_0^d\, \mathrm{d}z = \mathrm{d}\sigma(Z), \quad \Omega_0(x)\Omega_0(z)|x-z|^2 = |X-Z|^2;$$

参见 [22, §4.4]。(A.16) 的右端因此等于

$$c_d \Omega_0(X)^{\frac{d-1}{2}} \int_{\mathbb{S}^d} \frac{\tilde{H}(Z)}{|X-Z|^{d-1}}\, \mathrm{d}\sigma(Z),$$

因此，只需证明

$$c_d \int_{\mathbb{S}^d} \frac{\tilde{H}(Z)}{|X-Z|^{d-1}}\, \mathrm{d}\sigma(Z) = D_{\mathbb{S}^d}^{-1} \tilde{H}(X). \tag{A.17}$$

˜只需验证对于 $H = Y_\ell$（一个次数为 $\ell \geq 0$ 的球谐函数），式 (A.17) 成立。由 (A.12) 可得 $D_{\mathbb{S}^d}^{-1} Y_\ell = (\ell + \frac{d-1}{2})^{-1} Y_\ell$。令 $t = X \cdot Z$，则有$|X - Z|^{1-d} = 2^{\frac{1-d}{2}}(1-t)^{\frac{1-d}{2}}$。根据 Funk–Hecke 定理 [23, 第 1 章，第 §4],

$$c_d \int_{\mathbb{S}^d} \frac{Y_\ell(Z)}{|X-Z|^{d-1}} \, \mathrm{d}\sigma(Z) = \lambda_{\ell,d} Y_\ell(X), \text{ where}$$

$$\lambda_{\ell,d} := c_d 2^{\frac{1-d}{2}} |\mathbb{S}^{d-1}| \int_{-1}^{1} \frac{C_\ell^{\frac{d-1}{2}}(t)}{C_\ell^{\frac{d-1}{2}}(1)} (1-t)^{\frac{1-d}{2}} (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} \, \mathrm{d}t,$$

$\frac{d-1}{2}$和C_ℓ [2]表示式（2.15）中引入的 Gegenbauer 多项式。只要证明$\lambda_{\ell,\ d} = (\ell + \frac{d-1}{2})^{-1}$，证明便告完成。注意到 $c_d|\mathbb{S}^{d-1}| = \Gamma(\frac{d-1}{2})/(\Gamma(\frac{d}{2})\pi^{\frac{1}{2}})$，并应用引理 2.4，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\lambda_{\ell,d} &= \frac{2^{\frac{1-d}{2}-\ell}\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\ell+\frac{d}{2})} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\ell+\frac{d-2}{2}} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}t^\ell} (1-t)^{\frac{1-d}{2}} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2^{\frac{1-d}{2}-\ell}\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\ell+\frac{d}{2})} \left(\frac{d-1}{2}\right)^{(\ell)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\ell+\frac{d-2}{2}} (1-t)^{\frac{1-d}{2}-\ell} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\ell+\frac{d}{2})} \left(\frac{d-1}{2}\right)^{(\ell)} \mathrm{B}\left(\ell+\frac{d}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\ell+\frac{d+1}{2})} \left(\frac{d-1}{2}\right)^{(\ell)} = \left(\ell + \frac{d-1}{2}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

其中，我们用 $a^{(\ell)} = \prod_{k=1}^{\ell}(a+k-1)$表示上升阶乘，并使用了贝塔函数的著名公式 $\mathrm{B}(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$。至此，引理得证。□

最后，我们可以陈述并证明彭罗斯变换的关键性质。

命题 A.4. 对任意 $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}$,

$$e^{itD} g(x) = \Omega^{\frac{d-1}{2}} e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} G(X),$$

其中 $(T,X) = \mathcal{P}(t,x)$。

根据 (A.13)，对于每个 $(T,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^d$，$e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} G(X)$ 都有定义，但只有当 $(T,X) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})$ 时，它才与 $e^{itD} g(x)$ 相关。

命题 A.4 的证明。考虑初值问题

$$\partial_T^2 V = \Delta_{\mathbb{S}^d} V - \tfrac{(d-1)^2}{4} V \text{ on } \mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d}), \quad (V, \partial_T V)|_{T=0} = (F, iD_{\mathbb{S}^d} F), \tag{A.18}$$

对于任意初始数据 $F \in C^\infty(\mathbb{S}^d)$。具有相同初始数据 F的任意两个方程 (A.18) 的解，都必须在 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})$ 上重合。事实上，对能量 [3] 求导

$$E(T) := \int_0^{\pi-|T|} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left((\partial_T V)^2 + |\nabla_{\mathbb{S}^d} V|^2 + \frac{(d-1)^2}{4} V^2 \right) \mathrm{d}\sigma_{\mathbb{S}^{d-1}} (\sin R)^{d-1} \, \mathrm{d}R,$$

[3]回忆一下，彭罗斯菱形 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})$ 是通过 $0 \leq R < \pi - |T|$ 描述的。

通过分部积分，并使用 (A.18) 中的偏微分方程，我们得到 $T \in (-\pi, \pi)$

$$\dot{E}(T) = \begin{cases} (\sin R)^{d-1} \left(-(\partial_T V - \partial_R V)^2 - \dfrac{|\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} V|^2}{(\sin R)^2} - \dfrac{(d-1)^2}{4} V^2 \right) \Big|_{R=\pi-T}, T > 0, \\ (\sin R)^{d-1} \left((\partial_T V + \partial_R V)^2 + \dfrac{|\nabla_{\mathbb{S}^{d-1}} V|^2}{(\sin R)^2} + \dfrac{(d-1)^2}{4} V^2 \right) \Big|_{R=\pi+T}, T < 0. \end{cases}$$

如果 $F = 0$，那么 $E(0) = 0$，进而可由 $E(T)$ 的上述恒等式推出，对于每个 $T \in (-\pi, \pi)$，都有 $E(T) = 0$。所声称的唯一性便立即成立。现在令

$$u(t,x) := e^{itD} g(x), \quad U(T,X) := \Omega^{\frac{1-d}{2}} u(t,x), \quad \text{where } (T,X) = \mathcal{P}(t,x).$$

从 $D_{\mathbb{S}^d}$ 的定义 (A.11) 可知，$V(T,X) = e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} G(X)$ 满足初始数据为 $(G, iD_{\mathbb{S}^d} G)$ 的 (A.18)。我们声称 U 也满足 (A.18)，且初始数据与 V 相同。一旦证明这一点，上述唯一性便意味着 U 和 V 在 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})$ 上必定相等，从而完成命题 A.4 的证明。为验证这一点，我们先注意到 u 满足

$$\partial_t^2 u = \Delta u, \quad u|_{t=0} = g, \quad \partial_t u|_{t=0} = iDg,$$

因此，(A.18) 中的第一个恒等式直接由引理 A.1 得出。正如我们在定义 A.2 后立即指出的，$U|_{T=0} = G$ 也是显然的。为检验 $\partial_T U|_{T=0} = iD_{\mathbb{S}^d} G$，注意到 $\partial_T \Omega|_{T=0} = 0$ 和 $\partial_T|_{T=0} = \Omega_0^{-1} \partial_t|_{t=0}$；它们分别由 (A.3)，以及 (A.2) 连同链式法则得出。于是引理 A.3 推出

$$\partial_T U|_{T=0} = \Omega_0^{-\frac{d+1}{2}} \partial_t u|_{t=0} = i\Omega_0^{-\frac{d+1}{2}} Dg = iD_{\mathbb{S}^d} G,$$

由此完成了命题的证明。 □

A.1. 欧拉–拉格朗日方程的应用。本节中，我们确立$_{d-1}$公式 (2.13)，这是以下结果的推论。回忆一下，$g_\star = \Omega_{20}$。

引理 A.5. 设 g 为 G的彭罗斯变换。则

(A.19)
$$\int_{\mathbb{R}^{1+d}} |e^{itD} g_\star|^{p-2} (\overline{e^{itD} g_\star})(e^{itD} g) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{S}^d} e^{-iT\frac{d-1}{2}} (e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} G) |\Omega|^{\gamma_p} \, \mathrm{d}\sigma \, \mathrm{d}T.$$

证明。常值函数 $G_\star = \mathbf{1}$ 的彭罗斯变换为 $g_\star$，且 $e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} \mathbf{1} = e^{iT\frac{d-1}{2}}$。根据命题 A.4 并作变量代换（回忆 (A.4)），

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{1+d}} |e^{itD} g_\star|^{q-2} \overline{e^{itD} g_\star} e^{itD} g \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})} |\Omega^{\frac{d-1}{2}} e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} \mathbf{1}|^{q-2} (\overline{\Omega^{\frac{d-1}{2}} e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} \mathbf{1}}) (\Omega^{\frac{d-1}{2}} e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} G) \Omega^{-(d+1)} \, \mathrm{d}T \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})} e^{-iT\frac{d-1}{2}} (e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} G) |\Omega|^{\gamma_p} \, \mathrm{d}T \, \mathrm{d}\sigma, \end{aligned} \tag{A.20}$$

其中，$\gamma_p = \frac{d-1}{2} q - (d+1) = (d+1)(\frac{p'}{2} - 1)$ 定义于 (2.12)。这仍不是所需的 (A.19)，因为 (A.20) 中最后一个积分是在彭罗斯菱形$\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})$ 上，而不是在乘积空间 $[-\pi, \pi] \times \mathbb{S}^d$ 上。为此，注意到

$$e^{i(T+\pi)D_{\mathbb{S}^d}} G(-X) = e^{i\frac{d-1}{2}\pi} e^{iTD_{\mathbb{S}^d}} G(X),$$

对每个 $(T,X) \in [-\pi,\pi]\times\mathbb{S}^d$ 都成立。这由 (A.13) 以及如下事实推出：$Y_\ell(-X) = (-1)^\ell Y_\ell(X)$。回忆 $\Omega = \cos T + \cos R$，我们得出被积函数 $V(T,X) := e^{-iT\frac{d-1}{2}}(e^{iTD_{\mathbb{S}^d}}G)|\Omega|^{\gamma_p}$ 满足

$$V(T+\pi,-X) = V(T,X), \text{ for every } (T,X)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{S}^d. \tag{A.21}$$

正如在 [24, 引理 3.6], 中所注意到的，这一对称性意味着 $\int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})} V = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{S}^d} V$。事实上，令

$$W(T,R) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} V(T,\cos R,\omega\sin R)(\sin R)^{d-1}\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbb{S}^{d-1}}(\omega),$$

我们有 $W(T+\pi,\pi-R) = W(T,R)$，因此

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi+T}^{\pi} W(T,R)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}T = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi-T} W(T,R)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}T,$$
$$\int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{\pi+T} W(T,R)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}T = \int_{0}^{\pi}\int_{\pi-T}^{\pi} W(T,R)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}T,$$

通过变量替换 $T' = T+\pi$ 和 $R' = \pi - R$ 可见。结论立即得出：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{S}^d} V &= \left(\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi+T}^{\pi} + \int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{\pi+T} + \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi-T} + \int_{0}^{\pi}\int_{\pi-T}^{\pi}\right) W(T,R)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}T\\ &= 2\left(\int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{\pi+T} + \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi-T}\right) W(T,R)\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}T = 2\int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})} V.\end{aligned}$$

这证明了 (A.19)，并完成了该引理的证明。 □

A.2. 对称性。本最后一节将详细阐述公式 (1.11) 和备注 2.2 背后的对称性考量。

我们对公式 (1.11)作两点说明，先回顾如下：

$$\|e^{itD}g\|^q_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{S}^d}\left|e^{iTD_{\mathbb{S}^d}}G\right|^q |\Omega|^{(d+1)(\frac{p'}{2}-1)}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}T, \tag{1.11}$$

该公式可利用 §A.1 中的计算直接证明，而这些计算依赖于关键的对称性 (A.21)。首先，函数 $|\Omega|^{(d+1)(p'/2-1)}$ 在 $[-\pi,\pi]\times\mathbb{S}^d$ 上可积，当且仅当 p,q 属于猜想范围 (1.3)。事实上，回顾 (A.3)，(1.11) 右端的积分可写为

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}|\cos T+\cos R|^{(d+1)(\frac{p'}{2}-1)}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\left|e^{iTD_{\mathbb{S}^d}}G\right|^q\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbb{S}^{d-1}}\right)(\sin R)^{d-1}\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}T.$$

当且仅当 $(d+1)(\frac{p'}{2}-1) > -1$，或 $1<p<\frac{2d}{d-1}$时， $R=\pi-|T|$ 处的奇点可积，正如所声称的那样。其次，在 Strichartz 情形下， $p=2$ 恒等式 (1.11)意味着 (1.6) 的左端在[4]变换作用下保持不变

$$G \mapsto G\circ\rho, \tag{A.22}$$

其中 ρ 表示对 $\mathbb{S}^d$进行任意旋转。在这种情况下，(1.6) 的右侧在 (A.22) 下也保持不变。事实上，根据引理 A.3（以及 $\Omega_0^d\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\sigma$），

$$\|\widehat{g}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d,|\xi|\,\mathrm{d}\xi)} = \int_{\mathbb{R}^d}\overline{g(x)}Dg(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}^d}\overline{G(\omega)}D_{\mathbb{S}^d}G(\omega)\,\mathrm{d}\sigma,$$

[4]鉴于对称性破缺项 $|\Omega| = |\cos T + X_0|$， *not* 这对 $p\neq 2$成立。

显然它在旋转下保持不变。因此，对于 $p = 2$，(A.22) 确实是 Strichartz 估计 (1.7) 的一个隐藏对称性。

如引言中所述，圆锥的傅里叶延拓算子与半波传播子一致。另一方面，若在双叶圆锥 $\{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{1+d}\colon \tau^2 = |\xi|^2\}$ 上赋予洛伦兹不变测度$\boldsymbol{\delta}\big(\tau^2 - |\xi|^2\big)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\xi$，则傅里叶延拓算子与波动方程的传播子一致，$\partial_t^2 u = \Delta u$。给定后者的一个解 u，引理 A.1 给出以下公式，它与 (1.11) 类似：

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^{1+d})}^q = \int_{\mathcal{P}(\mathbb{R}^{1+d})} |U|^q |\Omega|^{(d+1)(\frac{p'}{2}-1)}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}T, \tag{A.23}$$

其中 $\partial_T^2 U = \Delta_{\mathbb{S}^d} U - \frac{(d-1)_4}{}^2 U$。事实证明，该方程的任意解满足关键对称性 (A.21) 当且仅当 d 是奇数。因此，只有当 d 为奇数时，(A.23) 右侧才能像 (1.11) 那样扩展为笛卡尔积 $[-\pi,\pi]\times\mathbb{S}^d$上的积分。特别是，只有当$d$ 为奇数时，(A.23) 右侧才在对 $\mathbb{S}^d$ 的任意旋转下保持不变（对于 $p = 2$）。这意味着，定义 1.2 中的 $\mathfrak{F}$-函数在 d 为偶数时，不是 Strichartz 情形 $p = 2$ 下双叶圆锥的傅里叶延拓不等式的临界点；这一事实由 [24], 发现，并在 [26, §5.1] 中进行了详细讨论。

我们最后讨论适用于一般指数p的备注 2.2。§3.1 中的对称群 $\mathcal{S}$ 由模为一的复常数乘法、锥形伸缩、洛伦兹变换及时空平移组成。后两者不能保持径向对称性；鉴于 (2.6)，我们只考虑径向函数，因此不予考虑。另一方面，我们加入正常数乘法。虽然按照 §3.1 的定义，这并非对称变换，但它确实保持 (2.1) 中的泛函 $\Phi_{p,q}$ 不变。利用这种不变性，将这些对称变换的无穷小生成元作用于 (1.9) 中的函数 $g_\star$，得到的测试函数构成一个向量空间，并且自动满足欧拉–拉格朗日方程 (1.10)，因而不适合用来否证该方程。现在我们证明，这个向量空间与零阶和一阶带状球谐函数空间的彭罗斯变换相同。将上述对称变换的生成元作用于 $g_\star$时，它们张成的向量空间

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(g_\star, ig_\star, x\cdot\nabla g_\star, iDg_\star), \tag{A.24}$$

对应于乘以正常数、模为 1 的复常数、锥形伸缩和时间平移。由于 $g_\star(x) \cong_d (1+|x|^2)^{\frac{1-d}{2}}$，我们有

$$x\cdot\nabla g_\star(x) \cong_d |x|^2\Omega_0^{\frac{d+1}{2}}(x),$$

而 (A.12) 和引理 A.3 一起推出

$$iDg_\star(x) = i\frac{d-1}{2}(1+X_0)^{\frac{d+1}{2}}.$$

$\frac{d-1}{}$ $\frac{d-1}{}$因此 $x\cdot\nabla g_\star(x) \cong_d \Omega_{20}(1-X_0)$ 和 $iDg_\star(x) \cong_d \Omega_{20}(i+iX_0)$。由此得出，(A.24) 是以下内容的彭罗斯变换：

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(1, i, 1-X_0, i+iX_0) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(1, i, X_0, iX_0),$$

这与次数为零和一的带状球谐函数构成的复向量空间相一致，正如所声称的那样。

References

[1] H. Bahouri, P. G
´ *High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave* erard, 美国数学 *equations.* **121** 1999 1, 131 175
杂志 ( )，第 – 期。[2] B. Barcelo, *On the restriction of the Fourier transform to a conical surface.* 美国数学会汇刊 292 (1985)，第 1 期，321–333。[3] N. Bez, C. Jeavons,
A sharp Sobolev–Strichartz estimate for the wave equation. Electron. Res. Announc. Math. Sci. 22 (2015)，46–54。[4] N. Bez, C. Jeavons, T. Ozawa,
Some sharp bilinear space-time estimates for the wave equation. **62**, 719 737 2016
Mathematika – ( )。[5] N. Bez, C. Jeavons, T. Ozawa, H. Saito,
A conjecture regarding optimal Strichartz estimates for the wave equation 293 299, 。分析与跨学科应用的新趋势，– Trends Math. Res. Perspect. (2017)。[6] N. Bez, K. Rogers,
A sharp Strichartz estimate for the wave equation with data in the energy space. **15** 2013 3, 805 823 J. Eur. Math. Soc. (JEMS) ( )，第 – 期。[7] A. Bulut, *Maximizers for the Strichartz inequalities for the wave equation.* Differential Inte- gral Equations 23 (2010)，第 11-12 期，1035–1072。[8] E. Carneiro,
A sharp inequality for the Strichartz norm. Int. Math. Res. Not. IMRN 2009，第 16 期，3127–3145。[9] E. Carneiro, G. Negro, D. Oliveira e Silva, *Stability of sharp Fourier restriction to spheres.* J. Fourier Anal. Appl. 30 (2024)，第 6 期，第 70 号论文，共 52 页。[10] E. Carneiro, L. Oliveira, M. Sousa,
Gaussians never extremize Strichartz inequalities for hyperbolic paraboloids. **150** 2022 8, 3395 3403 Proc. Amer. Math. Soc. ( )，第 – 期。[11] M. Christ, R. Quilodr
´ *Gaussians rarely extremize adjoint Fourier restriction inequalities* an, Proc. *for paraboloids.* **142** 2014 3, 887 896
Amer. Math. Soc. ( )，第 – 期。[12] L. Fanelli, L. Vega, N. Visciglia,
Existence of maximizers for Sobolev–Strichartz inequalities. Adv. Math. 229 (2012)，第 3 期，1912–1923。[13] T. Flock, B. Stovall, *On extremizing sequences for adjoint Fourier restriction to the sphere.* Adv. Math. 453 (2024)，第 109854 号论文，共 44 页。[14] D. Foschi, *Maximizers for the Strichartz inequality.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 9 (2007)，第 4 期，739–774。[15] D. Foschi, D. Oliveira e Silva,
Some recent progress on sharp Fourier restriction theory. Anal. Math. 43 (2017)，第 2 期，241–265。[16] F. Gon ¸ *Local maximizers of the adjoint Fourier restriction estimate for* calves, G. *cone paraboloid and sphere.* **15** 2022 4, 1097 1130
Negro, , Anal. PDE ( )，第 – 期。[17] M. Gonz´alez。
Recent progress on the fractional Laplacian in conformal geometry. 非局部理论近期进展，236–273，De Gruyter，柏林，2018。[18] L. H¨ormander,《非线性双曲型微分方程讲义》。Springer-Verlag，柏林，1997。[19] C. E. Kenig, F. Merle,
Global well-posedness scattering and blow-up for the energy-critical , Acta Math. ( ), *focusing non-linear wave equation.* **201** 2008 2, 147 212
第 – 期。[20] R. Killip, B. Stovall, M. Vi ¸ *Scattering for the cubic Klein–Gordon equation in two space* san, 美国数学会 *dimensions.* **364** 2012 3, 1571 1631
汇刊 ( )，第 – 期。[21] M. Kwa´snicki, *Ten equivalent definitions of the fractional Laplacian.* Fract. Calc. Appl. Anal. 20 (2017)，第 1 期，7–51。[22] E. Lieb, M. Loss。《分析》。AMS Graduate Studies in Mathematics，第 14 卷，第 2 版。[23] C. M¨uller,《欧几里得空间中的球对称性分析》。Applied Mathematical Sciences，第 129 卷。Springer-Verlag，纽约，1998。[24] G. Negro,
A sharpened Strichartz inequality for the wave equation. Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 56 (2023)，第 6 期，1685–1708。[25] G. Negro, *A sharpened energy-Strichartz inequality for the wave equation.* Bull. Lond. Math. Soc. 55 (2023)，第 6 期，3063–3076。

[26] G. Negro, D. Oliveira e Silva, C. Thiele, *When does $e^{-|\tau|}$ maximize Fourier extension for a conic section?* 391 426 调和分析与凸性，–。

Adv. Anal. Geom.，第 9 卷，De Gruyter，柏林，2023。[27] Y. Ou, Hong Wang,

A cone restriction estimate using polynomial partitioning. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 24 (2022)，第 10 期，3557–3595。[28] H. Pecher, *Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equation.* Math. Z. 185 (1984)，第 2 期，261–270。[29] R. Penrose，《再版：无穷远的共形处理》(1964)。Gen. Relativ. Gravit. (2011) 43:901-922。[30] R. Quilodr´an,

On extremizing sequences for the adjoint restriction inequality on the cone. J. Lond. Math. Soc. (2) 87 (2013)，第 1 期，223–246。[31] J. Ramos,

A refinement of the Strichartz inequality for the wave equation with applications. Adv. Math. 230 (2012)，第 2 期，649–698。[32] E. M. Stein，《调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1993。[33] B. Stovall, *Extremizability of Fourier restriction to the paraboloid.* Adv. Math. 360 (2020)，106898，共 18 页。[34] R. Strichartz, *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations.* **44** 1977 3, 705 714 Duke Math. J. ( )，第 – 期。[35] T. Tao,

Endpoint bilinear restriction theorems for the cone and some sharp null form esti- , Math. Z. ( ), *mates.* **238** 2001 268
第 2 期，215–。[36] T. Tao, A. Vargas, L. Vega,

A bilinear approach to the Restriction and Kakeya Conjectures. J. Amer. Math. Soc. 11 (1998)，第 4 期，967–1000。[37] P. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform*。Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975)，第 2 期，477–478。[38] Haiyong Wang, *On the optimal estimates and comparison of Gegenbauer expansion coefficients.* **54** 2016 3, 1557 1581 SIAM J. Numer. Anal. ( )，第 – 期。[39] G. N. Watson，《贝塞尔函数理论论述》。剑桥大学出版社，剑桥，英格兰；麦克米伦公司，纽约，1944。[40] J. G. Wendel, *Note on the Gamma function.* Amer. Math. Monthly 55 (1948)，第 9 期，563–564。[41] T. Wolff, *A sharp bilinear cone restriction estimate.* Ann. of Math. (2 3, 661 153 2001 698) ( )，第 – 期。

Center for Mathematical Analysis, Geometry and Dynamical Systems & Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal.*Email address*: giuseppe.negro@tecnico.ulisboa.pt*Email address*: diogo.oliveira.e.silva@tecnico.ulisboa.pt

University of Wisconsin–Madison, 480 Lincoln Drive, Madison, WI 53706, USA.
Email address: stovall@math.wisc.edu*Email address*: tautges2@math.wisc.edu