使用 ZX 演算切割多重控制量子门

Christian Ufrecht、Maniraman Periyasamy、Sebastian Rietsch、Daniel D. Scherer、Axel Plinge 和 Christopher Mutschler

弗劳 霍夫IIS，弗劳恩霍夫集成电路研究所IIS，定位与网络部，德国纽伦堡 ny

arXiv:2302.00387v2 [quant-ph] 9 Oct 2023

电路切割，即将量子电路分解为独立分区，已成为在含噪中等规模量子（NISQ）时代开展更大规模量子电路实验的一条有前景的途径。以往的研究主要关注切割量子比特线路或双量子比特门，而本文提出了一种切割多重控制Z门的方法。我们构造了一种分解，并证明其相关采样开销的上界为$\mathcal{O}(6^{2K})$，其中 K 是量子电路中的切割数。该上界与控制量子比特的数量无关；对于 CCZ 门这一特殊情况，还可进一步降低至$\mathcal{O}(4.5^{2K})$。此外，我们在 IBM 硬件上评估了所提出的方法，并通过实验表明，由于切割后量子电路中的 CNOT 门大幅减少，该方法具有抗噪性。

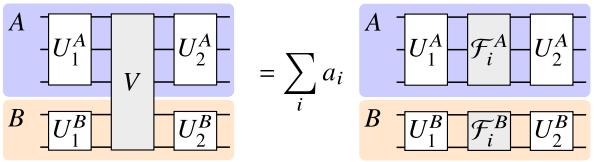


图1：考虑左侧所示的量子电路。该电路包含五个量子比特，以水平线表示，这些水平线也称为线路。初始态的时间演化由白色和灰色方框表示，时间从左向右流逝。它们代表量子门，即作用于部分量子比特子集上的酉变换。该电路包含一个门 V，它连接两个分区 A和 B，而这两个分区在其他方面彼此独立。对与 V对应的量子通道进行分解后，电路分解为一组加权和，其中每一项都是相互独立的电路对，包含量子门或测量，分别以$\mathcal{F}_i^A$和 $\mathcal{F}_i^B$表示。这里，我们采用通常用于超算子的花体记法，以表示这些门或投影算子由超算子分解确定。通过依次在可能规模较小的量子设备上执行各个电路，即可还原原始电路的结果。请注意，这里的等式应理解为超算子层面上的等式，而非门级等式。

1 引言

量子计算 [1]在含噪中等规模量子（NISQ）时代，受到噪声的强烈影响以及可用量子比特数量有限的制约[2]。因此，当前硬件远不足以运行能够带来可证明量子优势的量子算法，例如 Shor [3] 或 Grover[4]算法。为了在一定程度上克服这些硬件限制，近年来，量子电路切割技术受到了广泛关注。在量子机器学习任务或量子近似优化算法（QAOA）中，为探索经验性量子优势而扩大问题实例规模时 [5]，，预计这些方法将成为相关工具，并很可能成为近期量子软件框架中不可或缺的一部分 [6]。

考虑一个由两个分区组成的量子电路，它们仅通过少数线路或双量子比特门相连。通过分解恒等通道，Peng等人 [7] 提出了线路切割方法，即沿时间方向切割量子比特线。随后，这种方法又从以下方面得到了进一步研究： [8, 9, 10, 11] 电路切割与噪声之间的相互作用[12, 13, 14, 15]，经典与量子计算资源的自动分配 [16, 17] 以及编译 [18]。类似地，Mitarai和 Fujii [19, 20, 21]提出了门切割，即直接分解与双量子比特门对应的酉通道。与概率误差缓解类似， [22, 23, 24, 21]在切割电路的情况下，待测量量的估计量方差会增大 [25] 。因此，所有电路切割方法都伴随着一个常数因子 κ，用于表征采样开销；为使分解后的电路达到与原始电路相同的精度，所需样本数会增加$\mathcal{O}(\kappa^2)$倍。如果执行 K 次切割，采样开销将增至$\mathcal{O}(\kappa^{2K})$。当然，这种指数级开销符合我们的预期：一般量子电路的经典模拟在计算上是困难的。Piveteau 等人 [26]指出，若对多个贝尔态进行共同分解，再执行门隐形传态，就能显著降低这种开销。文献 [26] 还基于纠缠鲁棒性度量 [27]，为若干重要的双量子比特门类型提供了最优分解。正如Lowe 等人 [28]所示，对线路进行联合切割也能大幅降低采样开销。

在这项工作中，我们给出了

Christian Ufrecht: christian.ufrecht@iis.fraunhofer.de

已于 Quantum 2023-09-25 接收，点击标题进行验证。根据知识共享署名 4.0 协议发布。

表 1：关于受控 Z 门与线路切割的最新研究概述。我们对比了不同方法中与 K 切割相关的采样开销，并将其与本研究的主要结果进行比较。

	采样开销	联合切割
受控 Z 门	$\mathcal{O}(3^{2K})$ [20]	$\mathcal{O}(4^K)$ [26]
wire	$\mathcal{O}(4^{2K})$ [7]	$\mathcal{O}(4^K)$ [28]
CCZ 门	$\mathcal{O}(4.5^{2K})$ [本文工作]	–
MCZ 门	$\mathcal{O}(6^{2K})$ [本文工作]	–

多重受控 Z （MCZ）门的显式分解，并借助 ZX 演算——一种用于量子电路的张量网络描述。第2节将更详细地阐述门切割的基本思想，并比较不同方法的采样开销；随后在第3 节借助 ZX 演算证明本文的主要结果，即 MCZ 门的一般分解。第4节评估 MCZ 门分解所涉及的采样复杂度。我们证明了上界 $\kappa = 6$, 值得注意的是，该上界与控制量子比特的数量无关。对于 CCZ 门，我们发现其值更小，为 $\kappa = 4.5$。最后，我们在第5节介绍 IBM Q Ehningen 系统上的实验结果。我们观察到，切割电路中的 CNOT 门数量大幅减少，因此具有更强的抗噪声能力。作为 MCZ 门切割的一项具体应用，我们预计它可用于交替算子变分形式[29, 30], ，这是一种 QAOA [5] 算法的变体，用于约束优化。另一项很有前景的应用是模拟硬件图上相距较远的量子比特之间的 MCZ 门，这与参考文献 [20, 31]中对双量子比特门所做的工作类似。

2 切割一个量子门

考虑这样一个量子电路：量子比特分为两个分区 A 和 B，两者仅由一个可能涉及多个量子比特的门 V 连接，如图 1所示。此外，假设可因子分解的初态 $\rho = \rho^A \otimes \rho^B$ 和可观测量 $O = O^A \otimes O^B$ 满足以下条件，其中上标标记分区。例如，当所有量子比特都初始化为 $|0\rangle$ 并测量泡利串时，这些假设便成立。电路切割（也称为电路分解、电路片段化或电路编织）旨在寻找酉通道 $\mathcal{V}$ 的分解，其中该酉通道对应于门 V，使得

$$\mathcal{V} = \sum_i a_i \mathcal{F}_i \tag{1}$$

其中 $\mathcal{F}_i(\rho^A \otimes \rho^B) = \mathcal{F}_i^A(\rho^A) \otimes \mathcal{F}_i^B(\rho^B)$是分区 A 和 B 上的局部通道，如图 1 所示，且 a_i 是实数展开系数。对于对应于 $U_1^A \otimes U_1^B$ 的 $\mathcal{U}_1$ 和对应于 $U_2^A \otimes U_2^B$ 的 $\mathcal{U}_2$，该分解使我们能够确定可观测量的期望值，如下所示：

$$\begin{aligned}\langle O \rangle &= \mathrm{tr}(O\mathcal{U}_2 \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{U}_1(\rho)) &(2)\\ &= \sum_i a_i \mathrm{tr}(O^A \otimes O^B \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{F}_i \circ \mathcal{U}_1(\rho^A \otimes \rho^B)) &(3)\\ &= \sum_i a_i \langle O^A \rangle_i \langle O^B \rangle_i \,. &(4)\end{aligned}$$

在式（4）中，我们用 $\langle . \rangle_i$ 表示分区 A 上的量子态相对于 B的期望值；该量子态分别经由$\mathcal{F}_i^A$和 $\mathcal{F}_i^B$演化，即

$$\langle O^\alpha \rangle_i = \mathrm{tr}(O^\alpha \mathcal{U}_2^\alpha \circ \mathcal{F}_i^\alpha \circ \mathcal{U}_1^\alpha(\rho^\alpha)) \tag{5}$$

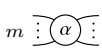
对于 $\alpha = A,\ B$。如果 $\mathcal{F}_i^\alpha$本身是酉通道或测量操作，那么式（4）求和中的每一项都可以在量子计算机上计算。对于更一般的量子电路，如果切割连接两个分区的所有门，这些分区便彼此独立，量子电路也就可以依次在较小的设备上计算。需要强调的是，本文所说的电路切割是指在超算子层面对量子电路进行分解，而非像参考文献 [32] 中那样在酉算子层面进行分解。在量子计算机上，单次实验测量的输出通常是一个比特串。随后，通过对多次运行得到的比特串进行经典后处理，获得可观测量的期望值。将每次实验运行的结果建模为独立同分布随机变量后，要达到给定加性误差所需的样本数由后处理函数的方差决定。切割电路后，通过式（$\langle O \rangle$ （4）估计的修正估计量方差会增大。因此，要以相同的给定加性误差估计原始电路的结果，就需要更多实验运行次数。更具体地说，这种采样开销随切割次数呈指数增长。参数

$$\kappa = \sum_i |a_i| \tag{6}$$

随后量化采样开销$\mathcal{O}(\kappa^2)$ [25]。为完整起见，附录中重新推导了这一渐近关系E。因此，如果选择1，使得包含系数的向量$\mathcal{F}_i$ 的 1-范数最小，则式（1）是最优的。 a_i 对于 K 次切割，采样开销为$\mathcal{O}(\kappa^{2K})$，然而，联合切割多个门或线路可使某些门类型的上界大幅降低 [26, 28]。表 1 总结了近期关于 CZ 门切割和线路切割的研究成果，并将其采样复杂度与本文的主要结果进行了比较。本文对多量子比特受控 Z 门进行切割，并给出κ的上界。正如下一节将要探讨的，ZX 演算尤其适用于这一任务。

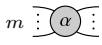
3 用于量子电路切割的 ZX 演算

ZX 演算 [33, 34] 是一种量子电路的张量网络表示，结合强大的变换规则，可用于进行图示推理。由于其他文献已对 ZX 演算进行了综述 [35]，本文仅介绍所需的图类型和变换规则。基本图示为 Z 蜘蛛，定义如下：



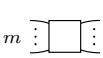
$$= \underbrace{|0\ldots0\rangle}_{n}\underbrace{\langle 0\ldots0|}_{m} + e^{i\alpha}|1\ldots1\rangle\langle 1\ldots1| \tag{7}$$

和 X-蜘蛛



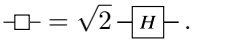
$$= \underbrace{|+\ldots+\rangle}_{n}\underbrace{\langle +\ldots+|}_{m} + e^{i\alpha}|-\ldots-\rangle\langle -\ldots-| \tag{8}$$

其中 $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$。对于 $\alpha = 0$，通常会忽略插图部分。第三种张量，即所谓的 H 盒，定义为



$$= \sum (-1)^{i_1\cdot\ldots\cdot i_m\cdot j_1\cdot\ldots\cdot j_n}|j_1\ldots j_n\rangle\langle i_1\ldots i_m| \tag{9}$$

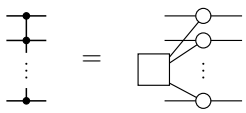
其中求和遍历所有 $i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\}$。因此，蜘蛛和 H 盒是从$m$-映射到（未归一化的）$n$-量子比特态的映射，其量子比特数由图中右侧和左侧的线路端点数表示。将 ZX 图表示为矩阵时，我们默认采用计算基。例如，H 盒对应一个矩阵，其中元素全为 1，唯有右下角为 −1。H 盒可视为广义的哈达玛门，因为



$$= \sqrt{2}\,H\,. \tag{10}$$

从定义可以看出，蜘蛛和 H 盒在所有指标上都对应对称张量。任何量子电路都可以表示为 ZX 图；然而，反过来并不成立，因为 ZX 图不一定对应酉矩阵。要得到 ZX 图的厄米共轭，我们将所有终止于左侧的线路移至右侧，将所有终止于右侧的线路移至左侧，并将所有角度替换为其相反数。接下来，我们将展示如何利用 ZX 演算，将与 MCZ 门对应的酉通道分解为酉通道和测量通道之和。此前已有研究使用 ZX 演算将电路分解为更简单的部分，参见文献 [36, 37]。

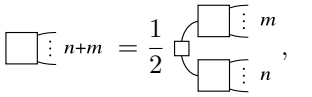
MCZ 门有一种简单的表示 [38]



(11)

可表示为左侧没有任何线路的 H 盒，如附录A所示。在矩阵表示中，

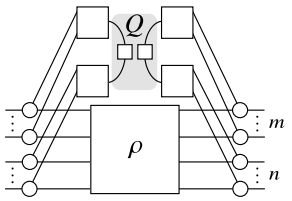
$MCZ = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$，我们将 MCZ 门涉及的量子比特数量称为该门的阶数。另请注意，MCZ 门中的控制量子比特和目标量子比特之间没有区别。本文构造的分解基于 H 盒融合规则 [38]



(12)

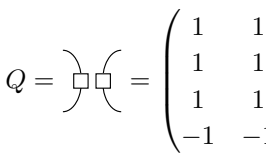
已在附录中证明B 以确保完整性。

因此，将式（12）应用于式（11），与作用于任意密度矩阵 $\mathcal{E}_{MCZ}(\rho) = MCZ\rho MCZ^\dagger$的 $n+m$ 阶 MCZ 门对应的酉通道作用 ρ可写为

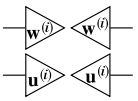


(13)

两个分区（上方 m 个量子比特、下方 n 个量子比特）仅通过张量 Q连接，该张量以灰色阴影标示，是 Hadamard 门的未归一化 Choi 算子。接下来，我们通过对 Q进行秩一分解，将两个分区之间剩余的两处连接消除；该分解由可分解到两个分区上的向量构成

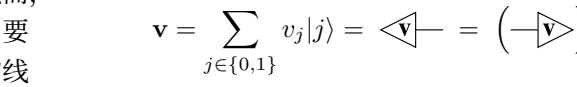


(14)



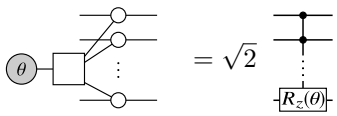
(15)

在式（15）中，我们引入了二维向量的图示表示法



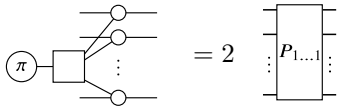
(16)

其中 v_j 是 j 的第 $\mathbf{v}$ 个分量。因此，式（13）中的 H 盒融合规则将 MCZ 门切割简化为一个四阶方阵的分解。然而，只有那些与 H 盒缩并后所得量子信道可在量子计算机上计算的向量才有用：$\mathbf{w}^{(i)}$ 和 $\mathbf{u}^{(i)}$。我们在附录 C 中证明以下恒等式



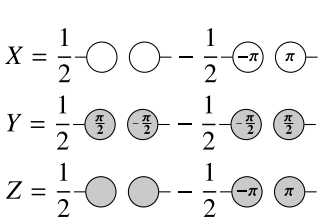
(17)

对于 $\theta \in [0, 2\pi)$ 和



(18)

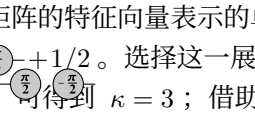
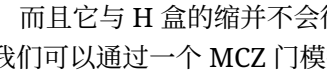
其中 $P_{1\ldots1}$ 表示作用于 $|1\ldots1\rangle$上的投影算符。恒等式 Eq. (17) 和 Eq. (18) 表明 $\mathbf{w}^{(i)}$、$\mathbf{u}^{(i)} \in \{\theta, \pi\}_\theta$ 可取不同的 θ。这种选择保证分解由酉受控 Z门旋转门和投影算子构成，可通过线路中途测量来计算。接下来，我们将 Q 按泡利矩阵张成的基展开，然后代入它们的谱表示



(19)

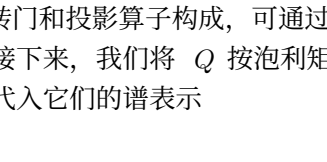
(20)

(21)

以及以 Pauli Y 矩阵的特征向量表示的单位矩阵，即 $\mathbb{I}$  。选择这一展开基后，对于归一化版本的Q，可得到 $\kappa = 3$；借助纠缠鲁棒性度量 [26, 27]，可以证明该结果是最优的。遗憾的是，公式（19）包含的量子态 未被公式（17）和公式（18）涵盖，而且它与 H 盒的缩并不会得到有效的量子电路。我们可以通过一个 MCZ 门模拟这一操作：将辅助量子比特初始化为 ，并后选择为$|+$ 态 [39], 。然而，这需要每个分区和每次切割都使用一个辅助量子比特。我们通过改用 $X = 1/2$  来规避这一问题。作此替换后， Q 的分解不再最优。但要注意，目前尚不清楚 Q 的最优分解是否会转化为 MCZ 门的最优分解。虽然我们只给出了上界，但在第 4 节中可以看到，将 MCZ 门的一般分解约化为 CZ 门时，可得到最优分解。考虑到这些因素，并定义 $\Theta = \{-\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$，

我们得到

$$Q = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + Y\otimes Y + Z\otimes X + X\otimes Z \tag{22}$$



(23)

其中 $\alpha_\theta = -1$ 对于 $\theta = \pi$ 且 $\alpha_\theta = 1$ 否则。通过将式（23）代入式（13），再借助式（17）和式（18）将向量与 H 盒收缩，即可得到 MCZ 门的一般分解。在明确写出所得分解之前，我们先根据附录 D中的结果，重写与投影算符 $P_{1\ldots1}$ 对应的超算子 $\mathcal{P}_{1\ldots1}$

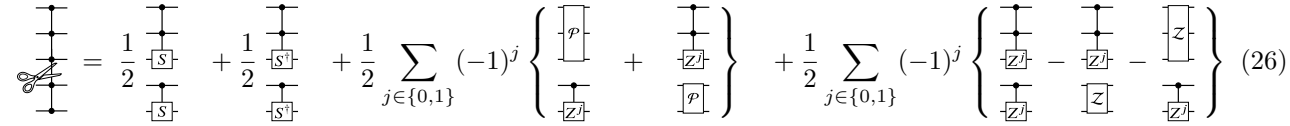
$$2\mathcal{P}_{1\ldots1} = \mathcal{Z} - \mathcal{P}\,. \tag{24}$$

这里，操作 Z 门 表示对所有由单量子比特恒等算子和 Z 门构成的组合所对应的酉通道求和，即对于一个 n 量子比特量子态 ρ

$$\mathcal{Z}(\rho) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\{0,1\}^n} Z^{k_1}\otimes\ldots\otimes Z^{k_n}\rho Z^{k_1}\otimes\ldots\otimes Z^{k_n}\,. \tag{25}$$

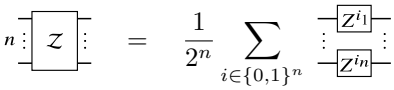
第二个操作是 $\mathcal{P}(\rho) = \sum_l \xi_l P_l \rho P_l$ 其中 P_l是计算基中所有元素对应的投影算子，而 $\xi_l = -1$对于 $l = (1, \ldots\ldots, 1)$时成立；此外$\xi_l = 1$ 在其他情况下成立。我们在附录E 中展示如何将$\mathcal{P}$ 与含有中间测量的电路联系起来。此外，我们证明，包含$\mathcal{P}$ 或 $\mathcal{P}_{1\ldots1}$ 的电路具有相同的采样复杂度，但引入 $\mathcal{Z}$ 会在最终分解中产生门抵消。因此，最终结果中的 κ会减少。

现在给出本文的主要结果：MCZ 门的分解：



(26)

这里，S $= R_z(\pi/2)$ 表示一个 S门，而



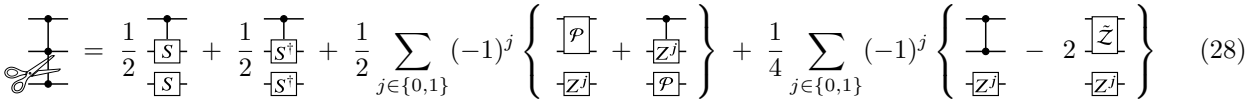
(27)

表示电路形式中的Z门操作。这里展示的分解针对的是一个五阶 MCZ 门，并在从上往下数的第三条量子比特线之后进行切割。我们强调，由于推导过程与 MCZ 门的阶数及切割位置无关，因此该分解的结构

在公式（26）中，无论在任意位置切割，也无论 MCZ 门的阶数如何，结果都保持不变。公式（26）必须按量子信道来理解。要计算包含 MCZ 门的量子电路，我们必须依次将该门替换为公式（26）中所示的门和操作。

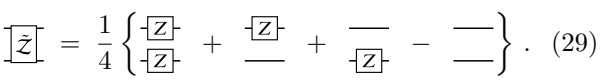
4 采样开销

本节考察不同阶数的 MCZ 门对应公式（26）时的采样开销。采样开销 $\mathcal{O}(\kappa^2)$由 $\kappa = \sum_i |a_i|$ 表征，详见公式（6）。我们在附录 E中详细重新推导了这一结论。我们还考虑了 $\mathcal{P}$ 等操作，并表明，就采样开销而言，该操作可以像酉通道一样处理。有了这一认识，我们现在可以确定公式（ κ 26）对应的 $1/2^n$ 。回顾公式（ 2^n 27）中用 Z门总结的酉电路的前因子，对于一般的 MCZ 门，我们得到 。值得注意的是，



(28)

缩写为



(29)

上述采样复杂度汇总于表 2 中，并列出了有关分解最优性的已知结果。

表 2：MCZ 门在不同阶数和切割位置下的采样开销。此外，我们列出了关于该分解最优性的已知结果。

门类型	κ	最优性
受控 Z 门	3	最优 [26]
CCZ 门	4.5	未知
移除一个量子比特	5	未知
一般	6	未知

在 IBM Q 上进行的 5 项实验

本节展示在 ibmq_ehningen 系统上获得的实验结果。我们将看到，所提切割方案能显著降低噪声影响。

我们首先进行数值模拟，以验证所提 MCZ 切割方案。为此，我们生成一组随机的 3、4 和 5 量子比特电路，其中一个 MCZ 门位于电路中央，另外两个分区彼此独立。示例电路及电路生成的详细说明见补充材料。在所有实验中，我们测量 $Z \otimes ... \otimes Z$ 泡利串。对于切割

量子电路中，我们为每个标记为 i 的电路对分配 $N_i = N|a_i|/(2\kappa)$个样本，其中 $N = 4\kappa^2/\epsilon^2$ 限制了

此界与门的顺序无关。对于式（26）右侧括号中的 MCZ^j 门，当 $j = 0$ 时为恒等门，而 $\mathcal{Z}$ 门也包含恒等门，但前因子的符号不同。因此，对这些门求和会略微降低 κ。MCZ 门的阶数越小，这种降低越明显；但随着阶数增大，该值会迅速趋近于$\kappa = 6$ 。事实上，对于受控 Z 门，右侧括号为零，因此我们得到 $\kappa = 3$ ，已知这是最优的 [26]。类似地，将一条量子比特线与一般 MCZ 门分离的切割得到 $\kappa = 5$。对于 CCZ 门，我们得到 $\kappa = 4.5$。鉴于 CCZ 门在量子计算理论中的重要性，其分解明确写为：

标准差的上界为 ϵ，参见附录E.2中的公式（68）。对于未切割的量子电路，我们分配全部 N 个样本用于评估。我们首先通过公式（ $N = 1.44 \times 10^6$ 和 $N = 1.44 \times 10^8$ 计算68），以确定将切割电路期望值的标准差限制在 $\epsilon = 0.01$ 和$\epsilon = 0.001$范围内所需的重复次数。对于固定数量的量子比特，我们生成 5 个随机电路，并使用理想模拟器对每个量子电路采样 N 次。重复此过程 20 次后，每个 ϵ值对应 100 个数据点。

现在，我们比较不同 ϵ 值下，完整（即未切割）电路与切割电路之间期望值差的分布。我们

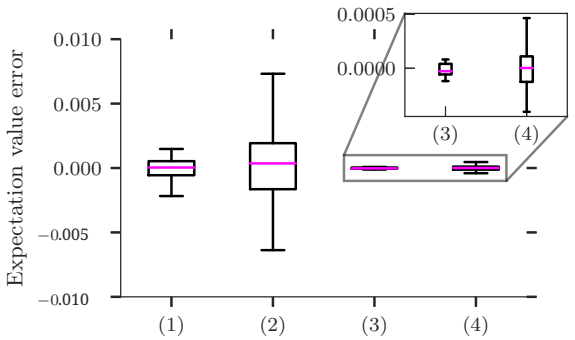


图 2：含有中心 5 阶 MCZ 门的随机 5 量子比特电路的期望值估计误差：(1) 完整电路采样 1.44×10^6 次，(2) 所提方法采样 1.44×10^6 次。正如预期，切割电路的结果分布更宽。(3) 完整电路采样 1.44×10^8 次，(4) 所提方法采样 1.44×10^8 次。与公式 (68) 一致，样本数增加百倍，精度约提高十倍。图中标准差的数值为：(1)：8.3×10^{-4}，(2)：2.7×10^{-3}，(3) 8.4×10^{-5}，(4)： 2.4×10^{-4}。

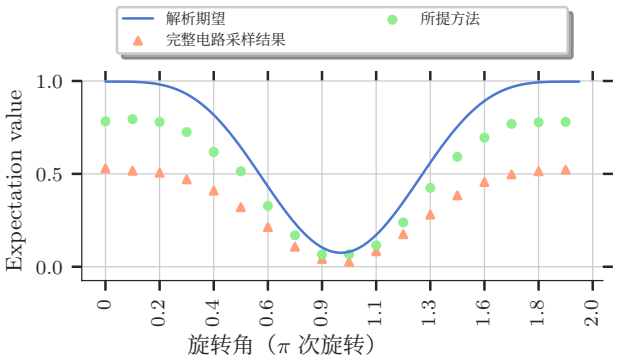


图3：在含有 5 量子比特多重控制 Z 门的参数化电路中进行期望值估计，所用设备为含噪模拟器。与图 5 对比可见，含噪模拟严重低估了噪声对未切分电路采样的影响（橙色三角形）。噪声模拟采用了 Qiskit 基于 ibmq_ehningen 的噪声模型。该噪声模型会根据云端当前的校准和错误数据进行更新。

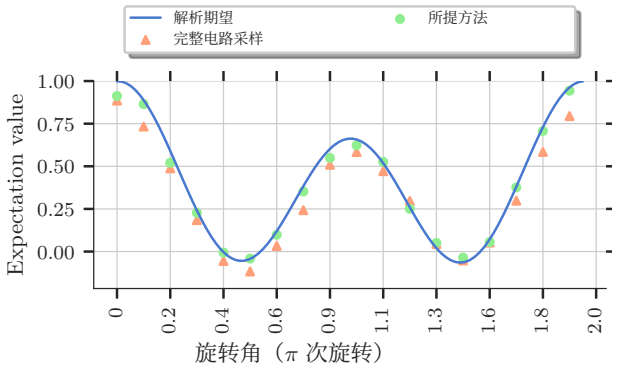


图 4：在 ibmq_ehningen 设备上，对包含 CCZ 门的参数化量子电路进行期望值估计。由切割电路采样得到的绿色圆点似乎比采样自精确结果（蓝线）的结果更接近未切割电路（橙色三角形）。不过，还需要进行更多模拟，才能验证切割 CCZ 门是否能降低所考虑电路中的噪声。x 轴表示电路中自由参数的取值，详见补充材料。

对 3、4 和 5 个量子比特运行模拟，发现这些分布的标准差几乎没有差异。出现这种情况是意料之中的，因为 κ 与 MCZ 门的顺序无关。例如，图 2 展示了随机 5 量子比特电路的分布。

图中，白色方框表示四分位距，横线表示 5% 和 95% 分位数。图 2(1) 显示了原始未切分电路的期望值分布。正如预期的那样，与图 2(2) 中切割电路的评估结果相比，分布范围更宽。其标准差为 0。0027，小于所选值$\epsilon = 0.01$。图 $\epsilon = 0.0012$2(3) 和图 2(4) 所示的结果也呈现相同的趋势。因此，或许存在比式（68）更紧的方差界。为进一步验证所提方法在真实量子硬件上的表现并分析噪声的影响，我们在 ibmq_ehningen [40]设备上进行了 MCZ 门切割实验。ibmq_ehningen 设备是一种超导量子比特量子硬件，搭载 27 量子比特的 ibmq_falcon 处理器。该硬件的原生门集包括旋转 Z 门、泡利 X 门、$\sqrt{X}$、恒等门和 CNOT 门。实验中，我们再次生成了一个含有一个自由参数的随机电路，并在实验中对该参数进行扫描。ibmq_ehningen 设备每个作业的最大测量次数为 10^5，每个数据点均采用相同的测量次数；具体电路及实验设置的详细讨论见补充材料。图 4 展示了含 CCZ 门的三量子比特电路的结果。图中，通过切分 CCZ 门获得的结果（绿色圆圈）比未切分电路的结果（橙色三角形）略微更接近精确曲线（蓝线）。

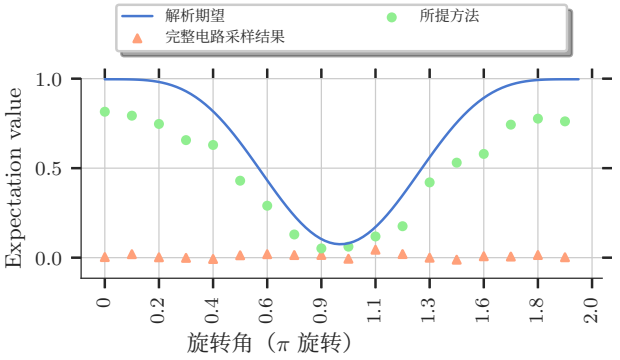


图 5：在 ibmq_ehningen 设备上，对包含 5 量子比特 MCZ 门的参数化量子电路进行期望值估计。从切割电路中采样得到的绿色圆点，在定性上仍与精确结果（蓝色曲线）吻合。由于噪声影响强烈，从未切割电路中采样得到的信号（橙色三角形）完全失真。

接下来，我们使用包含一个五阶 MCZ 门的五量子比特电路重复了实验。结果如图所示。5。从图中可以清楚地看出，执行包含五阶 MCZ 门的完整电路的转译版本时，噪声影响极其严重。得到的期望值只是在零附近随机波动的输出。然而，使用所提方法估算的期望值则更接近理想模拟得到的期望值。这种抗噪能力可归因于切割电路中 CNOT 门数量的大幅减少。虽然渐近而言，阶数为 n 的 MCZ 门可以使用 $\mathcal{O}(n)$ 个 CNOT 门和一个辅助量子比特 [41],合成，但当 n 较小时，所需的 CNOT 门数量会迅速增加。因此，例如，切割

个量子比特，可将五阶 MCZ 门的电路中 CNOT 门的最大数量减少到合成一个双重控制 S 门所需的数量。转译到拓扑受限硬件后，这种减少更加显著。因此，我们观察到噪声影响大幅降低。不同电路中 CNOT 门的最大数量如表3所示。CNOT 门的数量可能因所用的转译方法而异。不过，为了验证我们的结果，我们选择使用硬件制造商提供的最佳转译器。由于大多数

表 3：补充材料所示量子电路（第一列）的转译版本中 CNOT 门的数量。经过电路切割后，其中一个切割电路所包含的 CNOT 门的最大数量显著减少（第二列）。

门类型	CNOT	CNOT 切割
CCZ 门	13	3
五量子比特多重控制 Z 门	114	32

文献中的研究通常通过模拟器进行，因此我们将上文所示的五量子比特多重控制 Z 门实验扩展到了含噪模拟器。结果如图 3 所示。尽管制造商提供的噪声模型无法准确反映真实设备所呈现的噪声水平，所提方法的表现仍优于完整量子电路执行。

6 结论

在本研究中，我们提出了一种基于 H 盒融合规则、借助 ZX 演算切割多重控制 Z门的方法。我们推导出采样开销的上界 $\kappa = 6$，该上界与门的阶数无关。我们在 IBM 硬件上验证了这些结果，并发现，由于切割电路中的 CNOT 门数量减少，噪声明显降低。我们预计该方法可推广至多重控制旋转门，并可扩展至多量子比特旋转。本研究构造的分解是否具有最优性，目前仍是一个尚待解决的问题。

致谢

我们感谢 L. Burgholzer 和 R. Wille 与我们进行了富有成效的交流和讨论。

我们感谢 IBM Quantum 服务对本研究的支持。文中观点仅代表作者，不反映 IBM 或 IBM Quantum 团队的官方政策或立场。

本研究获得巴伐利亚经济事务、区域发展与能源部的资助，资金来自巴伐利亚高科技议程同时获得巴伐利亚经济事务、基础设施、交通与技术部通过分析-数据-应用中心（ADA 中心）提供的资助，该中心隶属于“巴伐利亚数字化 II”框架。

本研究还得到了 QuaST 项目的资助。该项目由德国联邦经济事务与气候行动部依据德国联邦议院的一项决议提供支持。

MCZ 门的表示

在本附录中，我们证明了式（11）中所述的 MCZ 门表示。我们首先介绍一般 n量子比特列向量$\mathbf{v}$ 的图示表示法

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{2^n-1} v_i |i\rangle = \quad = \left(\right)^{\dagger} . \tag{30}$$

根据此定义和 Z-蜘蛛

$$= \sum_{j\in\{0,1\}} |j\rangle\langle jj| , \tag{31}$$

见式（7），我们得到

$$= \Big(\sum_{j\in\{0,1\}} |j\rangle\langle jj| \Big)^{\otimes n} \sum_{i\in\{0,1\}^n} v_i \bigotimes_{k=1}^{n} (\mathbb{I}\otimes|i_k\rangle) \tag{32}$$

$$= \sum_i v_i |i\rangle\langle i| = \mathrm{diag}(\mathbf{v}) . \tag{33}$$

为确保正确的指标发生缩并，我们插入了单量子比特单位算子 $\mathbb{I}$。因此，如果 $\mathbf{v}$ 的所有元素具有相同的绝对值，则式（33）与酉矩阵成比例；如果除 $\mathbf{v}$ 的一个元素外其余元素均为零，则它与某个计算基态上的投影算符成比例。现在，我们可以通过令 11）来证明式（

$$\quad = \quad = (1,\ldots,1,-1)^T \tag{34}$$

其中，我们回顾了式（9）中 H 盒的定义。因此，根据式（33），我们得到diag(1, ...,1, −1），这就是式（11）所对应的 MCZ 门的矩阵表示。

B H 盒融合规则的证明

我们从右向左证明式（12）。首先定义联合指标 $i = (i_1, \ldots i_m)$ 和 $j = (j_1, \ldots, j_n)$ 以及 $\pi_i = \Pi_{k=1}^{m} i_k$ 和 $\pi_j = \Pi_{k=1}^{n} j_k$。然后用狄拉克符号，结合指标 a, b, a'

且 b' 遍历 $\{0,1\}$，$j \in \{0,1\}^n$ 和 $i \in \{0,1\}^m$

$$\sum_{i,j,a,b} (-1)^{\pi_i a} |i\rangle\langle a| \otimes (-1)^{\pi_j b} |j\rangle\langle b| \sum_{a',b'} (-1)^{a'b'} |a'b'\rangle \tag{35}$$

$$= \sum_{i,j} \sum_{a,b} (-1)^{ab+\pi_i a+\pi_j b} |ij\rangle \tag{36}$$

$$= 2 \sum_{i,j} (-1)^{\pi_i \pi_j} |ij\rangle \tag{37}$$

这等价于式（12）的左侧。在最后一步中，我们回顾了 π_i，$\pi_j \in \{0, 1\}$ 因此

$$\sum_{a,b} (-1)^{ab+\pi_i a+\pi_j b} \tag{38}$$

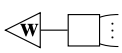
$$= (-1)^{-\pi_i \pi_j} \sum_{a,b} (-1)^{(a+\pi_j)(b+\pi_i)} \tag{39}$$

$$= 2(-1)^{\pi_i \pi_j} . \tag{40}$$

或者，也可以通过对向量 $(1, ..., -1)^T$进行施密特分解来推导 H盒融合规则。该向量表示对应于 MCZ 门的酉算子的对角元素。

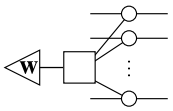
C H盒恒等式

在本附录中，我们证明式（17）和式（18）。单量子比特向量与 H 盒的缩并可轻松计算如下



$$= (w_0 + w_1, ..., w_0 + w_1, w_0 - w_1)^T \tag{41}$$

通过矩阵向量乘法。于是，利用式（33），可得



$$= \mathrm{diag}(w_0 + w_1, ..., w_0 + w_1, w_0 - w_1) . \tag{42}$$

因此，对于 $|w_0 + w_1| = |w_0 - w_1|$，式（42）正比于一个酉算子；而对于 $|1...1\rangle$，它正比于量子态上的投影算符，其中 $w_0 = -w_1$。用蜘蛛表示，这两个条件满足其一：要么 $\mathbf{w} = \quad = \sqrt{2}e^{i\theta/2}(\cos[\theta/2], -i\sin[\theta/2])^T$，要么 $\mathbf{w} = \quad = (1, -1)^T$。前者得到式（17），后者得到式（18）。

D 重写投影算符

为证明式（24），我们先重述式（25）中Z门的定义

$$\mathcal{Z}(\rho) = \frac{1}{2^n} \sum_{k \in \{0,1\}^n} Z^{k_1} \otimes ... \otimes Z^{k_n} \rho Z^{k_1} \otimes ... \otimes Z^{k_n} \tag{43}$$

对于一个 n 量子比特态 ρ。对于单量子比特态 ρ_1，我们注意到

$$\sum_{k \in \{0,1\}} Z^k \rho_1 Z^k = 2 \sum_{j \in \{0,1\}} |j\rangle\langle j|\rho_1|j\rangle\langle j| \tag{44}$$

通过将 $Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ 以及 $\mathbb{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ 代入式（44）的左侧。因此，通过反复应用式（44），式（43）变为

$$\mathcal{Z}(\rho) = \sum_{j \in \{0,1\}^n} |j\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle j| . \tag{45}$$

最后，我们将式（45）重写为

$$\mathcal{Z}(\rho) = 2|1...1\rangle\langle 1...1|\rho|1..1\rangle\langle 1..1| \tag{46}$$

$$+ \sum_{j \in \{0,1\}^n} \beta_j |j\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle j| \tag{47}$$

$$= 2\mathcal{P}_{1...1}(\rho) + \mathcal{P}(\rho) \tag{48}$$

其中 $\beta_j = -1$ 当 $j = (1, ..., 1)$ 时，且 $\beta_j = 1$ 否则，由此证明了式（24）。

E 样本复杂度开销的推导

本附录将更详细地考察评估切割量子电路所涉及的采样开销，并紧密遵循参考文献 [24, 7]。在附录 E.1中，我们证明了正文中关于采样开销的论述，适用于每次实验运行都从一个概率分布中抽取分解所得电路的情形。随后，在附录 E.2中，我们通过预先估计分区电路的期望值来界定方差。

E.1 电路采样的样本复杂度

考虑一个 n 量子比特量子电路。假设初始态为 $|0\rangle^{\otimes n}$，并考虑作用于测量所得比特串 s 的后处理函数 $f : \{0,1\}^n \to [-1, 1]$。此外，假设 $f(s)$ 可以通过经典方法高效计算。这些定义描述了参考文献 [42, 7] 中的计算模型。后处理函数会导出一个可观测量 O，其形式为

$$O = \sum_s f(s) P_s \tag{49}$$

其中，P_s 是与比特串 s对应的计算基态的投影算符。反过来，例如，若可观测量是泡利串，则可通过局域对角化将其写成上述形式，并将酉对角化矩阵视为量子电路的一部分。量子计算的目标是以高概率将$\langle O\rangle$ 近似到加性误差 ϵ 以内；为此，我们将在下文定义统计估计量。

切割一个门相当于用如下分解替换其超算符，如式（1）所示。我们首先考虑分解中的所有$\mathcal{F}_i$均对应幺正门的情况。进行这一替换后，我们得到

$$\langle O\rangle = \sum_i a_i \langle O\rangle_i = \sum_{i,s} p(s|i) a_i f(s) \tag{50}$$

其中，$\langle . \rangle_i$表示相对于由包含$\mathcal{F}_i$的量子电路 i演化得到的量子态的期望值。此外， $p(s|i)$表示在给定量子电路 i的情况下测得比特串 s的概率。为了在量子设备上评估结果，我们在每次实验运行中根据概率分布对 i 进行采样

$$p(i) = |a_i|/\kappa\,. \tag{51}$$

因此，我们定义一个随机变量 I ，其以概率 $p(i)$取值 i ，并定义估计量 [25]

$$\hat{f} = \kappa\,\mathrm{sign}(a_I) f(S_I) \tag{52}$$

其中，随机变量 $S_{I=i}$ 对量子电路 i的比特串测量结果进行建模。该估计量是无偏的，因为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{f}) &= \sum_{i,s} p(s,i)\kappa\,\mathrm{sign}(a_i) f(s) && (53)\\
&= \sum_{i,s} \kappa\,\mathrm{sign}(a_i) p(i) p(s|i) f(s) && (54)\\
&= \sum_{i,s} a_i p(s|i) f(s) && (55)\\
&= \langle O\rangle\,. && (56)
\end{aligned}$$

这里，我们将式（51）代入式（54）。通过将式（55）与式（50）进行比较，可得到最终结果。对于 N 次测量，估计量由式（52）的样本均值得到。因此，为了以加性误差 ϵ在概率 $1-\delta$下估计$\langle O\rangle$，*Hoeffding* 不等式给出了所需的实验重复次数：

$$N \geq 2\frac{\kappa^2}{\epsilon^2}\ln\left(\frac{2}{\delta}\right) \tag{57}$$

其中，我们利用了 $|\hat{f}| \leq \kappa$。原始量子电路所需的样本数由式（ $\kappa = 1$ 中的57）得到，据此可推得采样开销$\mathcal{O}(\kappa^2)$。

将这一推导推广到K 个切割非常直接。在这种情况下，可观测量的期望值为

$$\langle O\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_K} \sum_s p(s|i_1,\ldots,i_K) a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_K} f(s) \tag{58}$$

K 个切割对应的估计量为

$$\hat{f} = \kappa^K \mathrm{sign}(a_{I_1})\cdot\ldots\cdot\mathrm{sign}(a_{I_K}) f(S_{I_1,\ldots,I_K}) \tag{59}$$

其中我们定义了独立随机变量$I_1,\ldots,I_K$ ，它们决定了要运行的具体量子电路。

为证明式 (59) 的期望值与式 (58) 相等，我们遵循从式 (53) 到式 (56) 的推导，并利用 $I_1,\ldots,I_K$的独立性。由于$|\hat{f}| \leq \kappa^K$，将 Hoeffding 不等式应用于式 (59) 的样本均值，可得采样开销的上界 $O(\kappa^{2K})$。如果可观测量在原始量子电路的分区 A和 B 上可分解，那么后处理函数也可分解，即$f(s) = f^A(s^A) f^B(s^B)$，其中 s^A和 s^B分别是分区 A 和 B上的比特串测量结果。如果初始态可分解，且连接两个分区的所有门都被切割，那么分区电路便可在独立的量子计算机上运行，也可在同一台设备上依次运行。

现在我们转而考虑包含投影算子的量子电路。考虑由一组完备的投影算子 P_l 和 $\xi_l \in [-1,1]$ 构成的映射$\mathcal{M}$ ，其中

$$\mathcal{M}(\rho) = \sum_l \xi_l P_l \rho P_l \tag{60}$$

对于量子态 ρ。该映射既不具有正性，因为 ξ_l 可能小于零；也不保迹，因为式（60）中的量子态在投影后再乘以 ξ_l，并未归一化。注意，$\mathrm{P}_{1\ldots1}$ 和式（24）中的P都是M的实例。对于$\mathrm{P}_{1\ldots1}$ ，我们仅在 $l = (1,\ldots,1)$时令 $\xi_l = 1$，其他情况下令其为零。另一方面，对于P，当 $l = (1,\ldots,1)$时有 $\xi_l = -1$，其他情况下则为 $\xi_l = 1$。尽管M不对应于物理时间演化，我们仍然可以估计

$$\chi = \mathrm{tr}(O\mathcal{U}\circ\mathcal{M}(\rho)) \tag{61}$$

通过反复使用量子计算机。在式（61）中，密度矩阵 ρ 是投影算子作用前的量子态，而$\mathcal{U}$ 是对应于幺正演化的酉通道 U ，表示从此时起直至最终测量的演化。为了在量子计算机上估计 χ ，我们执行中间测量，并按照以下估计量进行采样

$$\hat{f} = \xi_L f(S) \tag{62}$$

其中，随机变量 S 与之前一样，描述最终测量的比特串输出，而随机变量 L 则对中间测量的结果进行建模。根据式（62），如果我们在中间测量中得到全一态，就需要在 $-f(S)$ 的样本均值中加上 $\hat{f}$； $f(S)$ 否则加上后者。该估计量是无偏的，因为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\hat{f}) &= \sum_{s,l} p(s,l)\xi_l f(s) && (63)\\
&= \sum_{s,l} \xi_l\,\mathrm{tr}(P_s U P_l \rho P_l U^\dagger) f(s) && (64)\\
&= \sum_s \mathrm{tr}(P_s \mathcal{U}\circ\mathcal{M}(\rho)) f(s) && (65)\\
&= \chi\,. && (66)
\end{aligned}$$

第一行，即式（63），是期望值的定义；在式（64）中，我们代入了 $p(s,l) = \mathrm{tr}(P_s U P_l \rho P_l U^\dagger)$ [1]。在最后一步，我们认出$O = \sum_s f(s) P_s$。要以给定的加性误差确定 χ 所需的样本数，同样由 Hoeffding 不等式决定，该不等式应用于式（62）的样本均值。由于 $|\xi_l| \leq 1$ 按定义成立，当部分电路包含投影算子时，式（57）保持不变。

E.2 通过预估计量子电路计算采样复杂度

在第 5 节中，我们展示了一个分解为两个独立分区的量子电路的实验结果 A和 B。切割连接两个分区的单个门后，我们需要计算

$$\langle O \rangle = \sum_i a_i \langle O^A \rangle_i \langle O^B \rangle_i \,. \tag{67}$$

我们不再像附录 E.1 中所述，在每次实验运行时对电路对 i 进行采样，而是首先预估计所有量子电路的期望值 $\langle O^A \rangle_i$ 和$\langle O^B \rangle_i$，随后借助式（67）恢复原始量子电路的结果。下面将说明，对于总实验运行次数 ϵ，式（67）的标准差可以界定为

$$N \geq 4 \frac{\kappa^2}{\epsilon^2} \tag{68}$$

其中我们分配

$$N_i = \frac{1}{2} \frac{|a_i|}{\kappa} N \tag{69}$$

个样本给电路对 i 中的每个量子电路，以确定期望值 $\langle O^A \rangle_i$ 和$\langle O^B \rangle_i$。注意，$2\sum_i N_i = N$。接下来，我们定义估计量

$$\hat{f} = \sum_i a_i \hat{f}_i^A \hat{f}_i^B \tag{70}$$

其中 $\mathbb{E}(\hat{f}_i^A) = \langle O^A \rangle$ 且 $\mathbb{E}(\hat{f}_i^B) = \langle O^B \rangle$。由于 $\hat{f}_i^A$和 $\hat{f}_i^B$ 相互独立，该估计量是无偏的。$\hat{f}$ 的方差计算如下

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(\hat{f}_i^A \hat{f}_i^B) && (71)\\
&\quad = \mathrm{Var}(\hat{f}_i^A)\mathbb{E}[(\hat{f}_i^B)^2] + \mathrm{Var}(\hat{f}_i^B)[\mathbb{E}(\hat{f}_i^A)]^2 && (72)\\
&\quad \leq \mathrm{Var}(\hat{f}_i^A) + \mathrm{Var}(\hat{f}_i^B) && (73)\\
&\quad \leq \frac{2}{N_i} && (74)
\end{aligned}$$

在式（71）中，我们首先将方差因式分解，该操作适用于独立随机变量。式（73）利用了以下界 $\mathbb{E}[(\hat{f}_i^B)^2] \leq 1$ 和 $|\mathbb{E}(\hat{f}_i^A)| \leq 1$，因为$|f_i^A| \leq 1$ 且 $|f_i^B| \leq 1$。最后，$\mathrm{Var}(\hat{f}_i) \leq 1/N_i$ 对于 N_i 个独立样本。因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{f}) &= \sum_i a_i^2 \mathrm{Var}(\hat{f}_i^A \hat{f}_i^B) && (75)\\
&\leq 2 \sum_i a_i^2 / N_i && (76)\\
&\leq \epsilon^2 && (77)
\end{aligned}$$

使用公式 (70)、公式 (74) 和公式 (69)。

参考文献

[1]M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang。《量子计算与量子信息：第十周年纪念版》。剑桥大学出版社。（2010）。[2] J. Preskill。《NISQ 时代及之后的量子计算》。Quantum 2, 79（2018）。[3]P.W. Shor。《量子计算算法：离散对数与因式分解》。载于《第 35 届计算机科学基础年度研讨会论文集》。第 124 页。IEEE 计算机学会出版社（1994）。[4] L. K. Grover。《用于数据库搜索的快速量子力学算法》。载于《第二十八届 ACM 计算理论年度研讨会论文集》。第 212 页。美国纽约州纽约市（1996）。计算机协会。[5]E. Farhi、J. Goldstone 和 S. Gutmann。《量子近似优化算法》（2014）。arXiv:1411.4028。[6]《IBM 2022 年发展路线图》。https://www.ibm.com/quantum/roadmap。访问日期：2023-01-02。[7] T. Peng、A. W. Harrow、M. Ozols 和 X. Wu。《在小型量子计算机上模拟大型量子电路》。物理评论快报 125, 150504（2020）。[8] M. A. Perlin、Z. H. Saleem、M. Suchara 和 J. C. Osborn。《基于最大似然层析的量子电路切割》。NPJ Quantum Inf. 7, 64（2021）。[9] G. Uchehara、T. M. Aamodt 和 O. Di Matteo。《受旋转启发的电路切割优化》。载于《2022 年 IEEE/ACM 第三届量子计算软件国际研讨会（QCS）》。第 50 页。美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯（2022）。IEEE 计算机学会。[10] D. Chen、B. Baheri、V. Chaudhary、Q. Guan、N. Xie 和 S. Xu。《近似量子电路重构》。载于《2022 年 IEEE 量子计算与工程国际会议（QCE）》。第 509 页。（2022）。[11] C. Ying、B. Cheng、Y. Zhao、H.-L. Huang、Y.-N. Zhang、M. Gong、Y. Wu、S. Wang、F. Liang、J. Lin、Y. Xu、H. Deng、H. Rong、C.-Z. Peng、M.-H. Yung、X. Zhu 和 J.-W. Pan。《实验

使用更少超导量子比特模拟更大型量子电路》。物理评论快报 130, 110601（2023）。[12] T. Ayral、F.-M. Le Régent、Z. Saleem、Y. Alexeev 和 M. Suchara。《量子分而治之：硬件演示与噪声模拟》。载于《2020 年 IEEE 计算机学会 VLSI 年度研讨会（ISVLSI）》。第 138 页。（2020）。[13] T. Ayral、F.-M. Le Régent、Z. Saleem、Y. Alexeev 和 M. Suchara。《量子分而治之：探索不同噪声源的影响》。SN comput. sci. 2, 132（2021）。[14] J. Liu、A. Gonzales 和 Z. H. Saleem。《通过电路切割实现经典模拟器的量子误差缓解》（2022）。arXiv:2212.07335。[15]R. Majumdar 和 C. J. Wood。《误差缓解量子电路切割》（2022）。arXiv:2211.13431。[16]W. Tang、T. Tomesh、M. Suchara、J. Larson 和 M. Martonosi。《CutQC：使用小型量子计算机评估大型量子电路》。载于《第 26 届 ACM 编程语言与操作系统架构支持国际会议论文集》。第 473 页。ASPLOS 2021美国纽约州纽约市（2021）。计算机协会。[17]W. Tang 和 M. Martonosi。《ScaleQC：面向量子处理器与经典处理器混合计算的可扩展框架》（2022）。arXiv:2207.00933。[18] T. Chatterjee、A. Das、S. I. Mohtashim、A. Saha 和 A. Chakrabarti。《Qurzon：面向分布式量子系统的分而治之型量子编译器原型》。SN Computer Science 3, 323（2022）。[19] K. Mitarai 和 K. Fujii。《用直接测量取代间接测量的方法》。Phys. Rev. Research 1, 013006（2019）。[20] K. Mitarai 和 K. Fujii。《通过抽样单量子比特操作构造虚拟双量子比特门》。New J. Phys. 23, 023021（2021）。[21]K. Mitarai 和 K. Fujii。《通过准概率抽样，使用局域信道模拟非局域信道的开销》。Quantum 5, 388（2021）。[22] K. Temme、S. Bravyi 和 J. M. Gambetta。《短深度量子电路的误差缓解》。物理评论快报 119, 180509（2017）。[23]C. Piveteau、D. Sutter 和 S. Woerner。《降低采样开销的准概率分解》。NPJ Quantum Inf. 8, 12（2022）。[24]C. Piveteau。《准概率量子误差缓解的高级方法》。硕士论文。苏黎世联邦理工学院。（2021）。

网址：https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/504508.[25] H. Pashayan、J. J. Wallman 和 S. D. Bartlett。《使用准概率估算量子电路的输出概率》。物理评论快报 115, 070501 (2015).[26]C. Piveteau 和 D. Sutter。《通过经典通信进行电路编织》(2022)。arXiv:2205.00016.[27] G. Vidal 和 R. Tarrach。《纠缠的鲁棒性》。Phys. Rev. A 59, 141 (1999).[28]A. Lowe、M. Medvidović、A. Hayes、L. J. O’Riordan、T. R. Bromley、J. M. Arrazola 和 N. Killoran。《利用随机测量快速切割量子电路》。Quantum 7, 934 (2023).[29]Z. H. Saleem、T. Tomesh、M. A. Perlin、P. Gokhale 和 M. Suchara。《组合优化与分布式计算的分而治之》(2021)。arXiv:2107.07532.[30]S. Hadfield。《科学计算与近似优化的量子算法》(2018)。arXiv:1805.03265.[31] T. Yamamoto 和 R. Ohira。《通过虚拟双量子比特门实现误差抑制》。J. Appl. Phys. 133, 174401 (2023).[32]S. C. Marshall、C. Gyurik 和 V. Dunjko。《小型量子计算机上的高维量子机器学习》。Quantum 7, 1078 (2023).[33] B. Coecke 和 R. Duncan。《相互作用的量子可观测量：范畴代数与图示法》。New J. Phys. 13, 043016 (2011).[34] B. Coecke 和 R. Duncan。《相互作用的量子可观测量》。载于 L. Aceto、I. Damgård、L. A. Goldberg、M. M. Halldórsson、A. Ingólfsdóttir 和 I. Walukiewicz 编，《自动机、语言与编程》，第 298 页。柏林、海德堡 (2008)。施普林格·柏林·海德堡。[35]J. van de Wetering。《面向量子计算机科学家的 ZX 演算》(2020)。arXiv:2012.13966.[36] A. Kissinger 和 J. van de Wetering。《使用 ZX 演算简化稳定子分解来模拟量子电路》。Quantum Sci. Technol. 7, 044001 (2022).[37] A. Kissinger、J. van de Wetering 和 R. Vilmart。《通过部分稳定子分解和图形稳定子分解对量子电路进行经典模拟》。载于 F.s Le Gall 和 T. Morimae 编，《第 17 届量子计算、通信与密码学理论会议》(TQC 2022)。Leibniz 国际信息学论文集第 232 卷，第 5:1 页。达格施图尔，德国 (2022).[38] M. Backens 和 A. Kissinger。《ZH：一种用于量子计算的完备图形演算，包含经典非线性》

含经典非线性”。 电子理论与计算机科学论文集 287, 23(2019)。[39] “van de Wetering, J.”。私人通信。[40]“IBM Quantum”。 https://quantum-computing.ibm.com/。访问日期：2023-01-23。[41] A. Barenco、C. H. Bennett、R. Cleve、D. P. Di-Vincenzo、N. Margolus、P. Shor、T. Sleator、J. A. Smolin 和 H. Weinfurter。《量子计算的基本门》。 物理评论快报 52, 3457 (1995).[42] S. Bravyi、G. Smith 和 J. A. Smolin。《经典与量子计算资源的交换》。《Phys. Rev. X》6，021043(2016).[43]《MCZ 门切割 GitHub 仓库》。 https://github.com/ChristianUfrecht/MCZgate_cutting。[44] E. van den Berg、Z. K. Minev 和 K. Temme。《无模型读出误差缓解在量子期望值中的应用》。《Phys. Rev. A》105, 032620 (2022).

补充材料

在本补充材料中，我们将详细介绍在 ibmq_ehningen 系统上进行的模拟和实验。

随机电路

在主文第 V 节的数值模拟中，我们生成了一组随机电路，平均包含约 30 个单量子比特 R_X、R_Y 和 R_Z 旋转以及 10 个 CNOT 门。我们生成了含 3、4 或 5 个量子比特的电路，并在电路中心放置一个阶数相应为 3、4 或 5 的 MCZ 门。这些电路的两个实例见图 6 和图 7。在三量子比特电路中，一个单量子比特分区和一个双量子比特分区仅通过 MCZ 门相连；在五量子比特电路中，一个双量子比特分区和一个三量子比特分区仅通过 MCZ 门相连。数值评估中，我们选择 Pauli $Z \otimes \ldots \otimes Z$ 字符串作为可观测量。为生成随机电路，我们施加了如下限制：电路中的 MCZ 门应对可观测量的期望值产生显著影响，以便利用现有实验运行次数分辨其对结果的影响。具体而言，选择有 MCZ 门和无 MCZ 门的电路之间的期望值差异大于 0.2。GitHub 上提供了一个适用于任意阶数门的 MCZ 门切割概念验证实现 [43]。

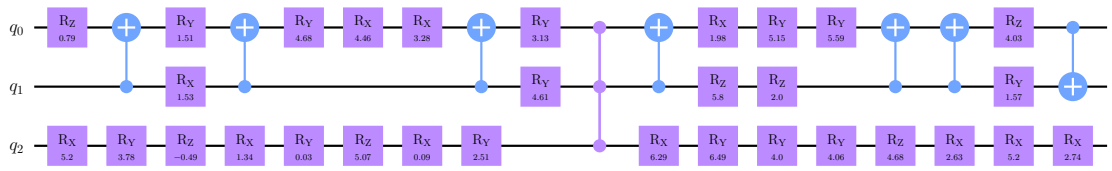


图 6：中心含有 CCZ 门的随机三量子比特电路。

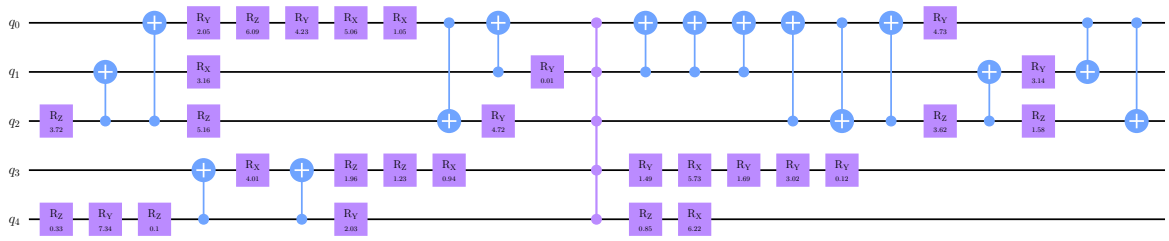


图 7：中心含有五阶 MCZ 门的随机五量子比特电路。

在 ibmq_ehningen 上的实验

在补充材料的这一部分中，我们将进一步介绍实验设置的细节。在实验中，我们（1）再次生成了一个随机三量子比特电路和一个包含两个分区的五量子比特电路，这两个分区仅由一个

CCZ 门和一个五阶 MCZ 门连接。电路如图8和图9所示。随后，我们优化了单量子比特旋转角，直至有无 MCZ 门的电路对泡利Z串$Z \otimes ... \otimes Z$的期望值之差达到最大。最后，我们在三个单量子比特旋转门的旋转角中各加入一个自由参数，并在实验中扫描这些参数。该参数在图8和图9所示的电路中记为 psi。（2）将电路转换为 ibmq_ehningen 设备的原生门集和硬件图后，我们使用 Qiskit API 所提供的最高级别优化。最高级别的优化首先搜索一种布局，使所有双量子比特门连接性均符合硬件图，同时考虑量子比特读出错误和门保真度。随后，将电路展开为原生门集。最后，执行可交换门抵消和双量子比特酉块重新综合等优化。（3）选取了 $[0, 2\pi]$ 之间等间隔的 18 个数据点来扫描自由参数。（4）每个数据点使用 10^5 次测量，这是 ibmq_ehningen 设备允许的每个作业的最大测量次数。（5）在可能的情况下，所有实验均采用 ibmq 所提供的最大程度误差缓解。我们使用 Qiskit 提供的 TREX 选项进行读出错误缓解 [44]。（6）ibmq_ehningen 设备可由以下参数 [40]表征：它是一款 27 量子比特的 ibmq_falcon 处理器，其连接图如图10所示。实验期间的噪声参数如下：退相干时间：平均值为 $T_1 = 160$ µs 和 $T_2 = 150$ µs，各量子比特之间存在较大波动。单量子比特错误约为 10^{-4}，CNOT门错误约为 0.009。

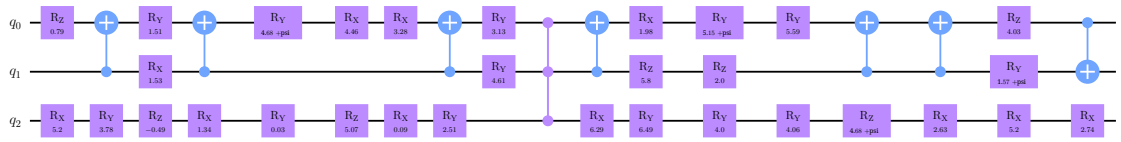


图8：CCZ门切割的量子电路。

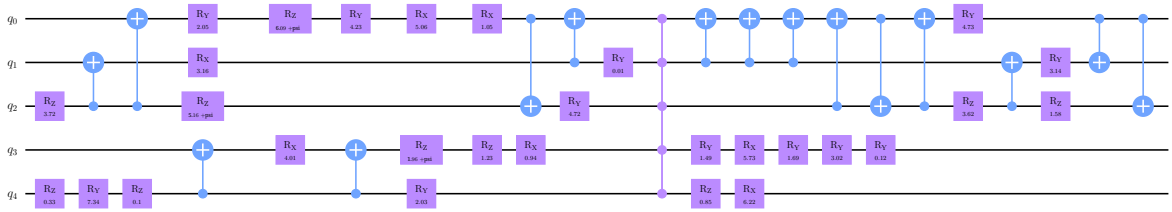


图9：5 阶 MCZ 门切割的量子电路。

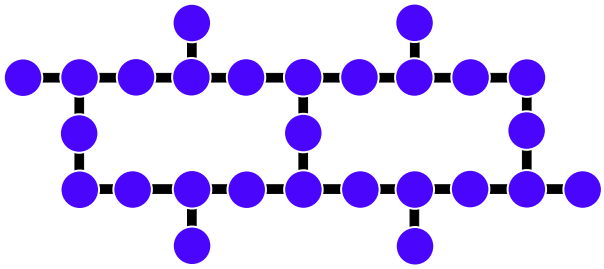


图10：ibmq_ehningen 的连接图。