arXiv:2302.00393v1 [math.AP] 1 Feb 2023

耦合抛物型系统中的自相似图案作为非平衡稳态

Alexander Mielke*和 Stefanie Schindler†

2023年1月31日

摘要

我们研究无界区域上的反应扩散系统及其他相关耗散系统。这些系统若定义在有限区域上，则具有李雅普诺夫函数（以及梯度结构）。在这种情况下，系统可能在相当短的时间尺度内达到局部平衡，但无限量的质量或能量会导致质量或能量持续不断地流动。在经过适当重标度的变量下，系统会收敛到一个稳态；该稳态对应于原系统中的渐近自相似行为。

1 引言

自相似行为是扩展系统中一种经过深入研究的现象。然而，研究视角往往局限于简单的标量问题，例如多孔介质方程。此外，所考虑的解在无穷远处通常表现平凡，尤其是在有限质量或能量的情形下。

本文旨在表明，类似的行为也会出现在方程组中，而方程组具有更丰富的结构，因为模式可以施加在无穷远处。我们不考察具有行波脉冲或前沿的系统，而是聚焦于这样一种情形：局部行为由迅速趋向唯一局部平衡的趋势主导。由此便产生了一个问题：整体解如何沿着局部平衡族演化？ [CoE90、CoE92、vSH92、EcS02] 曾研究过金兹堡–朗道方程和斯威夫特–霍恩伯格方程中的这类现象。这项工作与“扩散混合”的思想密切相关；该思想由 [GaM98] 提出，用于描述混合不同稳定角色模式的解，针对 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$。

由于所研究的系统具有“局部梯度结构”，我们也可以将自相似图案解释为非平衡稳态，并确定相应的质量或能量通量。特别是，我们讨论尺度变换导致代数型局部平衡化的情形，这种平衡化会在扩散系统中强制引入某些拉格朗日乘子。在这种情况下，可以将这些拉格朗日乘子视为理解质量平衡所必需的通量。

*德国柏林应用分析与随机研究所及德国柏林洪堡大学。

†德国柏林应用分析与随机研究所。

2 多孔介质方程

作为一个 引言中，我们考虑实数轴上的多孔介质方程（PME） e:

$$u_t = (u^m)_{xx}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^1. \tag{2.1}$$

众所周知，多孔介质方程有许多不同形式的自相似解： $u(t,\ x)\ =(1+t)^{-\alpha}\Phi\big(x/(1+t)^{\beta}\big)$。

2.1 有限质量情形

最著名的自相似解是 Barenblatt 解 [Bar79]，其形式为

$$\alpha = \beta = \frac{1}{m+1}, \quad W(y) = \max\{0, N - c_m y^2\}^{1/(m-1)},$$

对于 $m > 1$，且 $W(y) = N\mathrm{e}^{-y^2/2}$ 对于 $m = 1$，其中 $N \geq 0$ 可以任意选取，例如使总质量达到所需值 $M = \int_{\mathbb{R}} W(y)\,\mathrm{d}y$。将式 (2.1) 变换到相似坐标后，这个解可以描述为一个（非平衡）稳态。事实上，令 $\tau = \log(1+t)$， $y = x/(1+t)^{\beta}$，以及 $w = (1+t)^{\alpha}u$ ，我们得到方程

$$w_\tau = (w^m)_{yy} + \beta y w_y + \alpha w = \Big((w^m)_y + \frac{1}{m+1} y w\Big)_y. \tag{2.2}$$

显然， $W(y)\ =\max\{N-c_m y^2, 0\}^{1/(m-1)}$ 是一个稳态，并且在 [Váz07] 中有一项关于其全局稳定性的详尽研究。

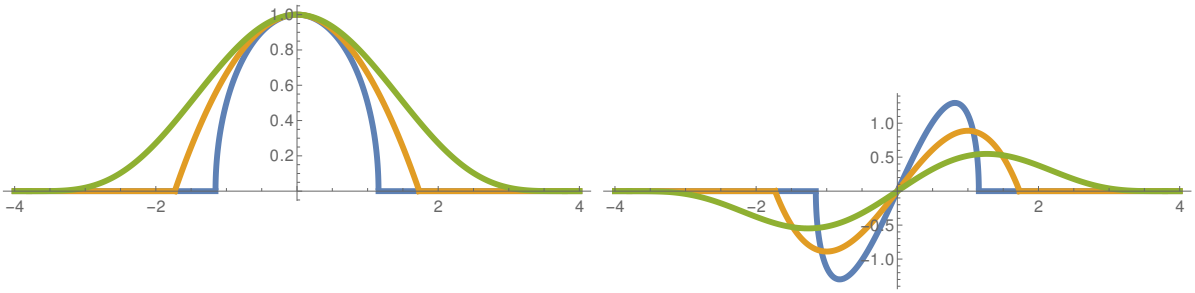

图 2.1：左图展示了 W 对于 $m = 1.25$ （绿色）、 $m = 2$和 $m = 3$ （蓝色）的 Barenblatt剖面。右图展示了相应的自相似通量模式 Q。

为强调 W 是一个非平衡稳态（NESS），我们考察质量通量。在（2.1）中，扩散通量为 $q(t,x)\ =\ -(u^m)_x$ ，而总质量 $M\ =\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathrm{d}x$ 对于解 u保持不变。事实上，通量 $q\ =\ -(u^m)_x$ 具有如下形式：$q(t,x)\ =(1+t)^{-m\alpha-\beta}Q(x/(1+t)^{\beta})$，其相似剖面为

$$Q(y) = -\big(W^m\big)_y(y) = -m\,W(y)^{m-1}W'(y).$$

2.2 扩散混合与渗流

我们还可以考虑具有边界条件 $u(t,\ \pm\infty)\ =\ U_{\pm}$ 且浓度不同 U_- 的多孔介质方程 U_+。同样会形成自相似剖面，但此时尺度变换为

不同，因为受边界条件限制，u 无法通过乘以前置因子进行尺度变换。边界条件提供了储库，在 $x = +\infty$ 和$x = -\infty$处含有无限量的质量。扩散混合描述了质量如何从一个储库流向另一个储库。

特别地，我们必须选择 $\alpha = 0$，因此只能取 $\beta = 1/2$，这就是抛物标度。相应的方程在抛物相似坐标下写作

$$w_\tau = (w^m)_{yy} + \frac{y}{2} w_y, \quad w(\tau, \pm\infty) = U_\pm. \tag{2.3}$$

当然，稳态 W 再次是方程 (2.3) 的精确自相似解。具有 $W(\pm\infty) = U_\pm$ 的定常剖面 W 的存在性和唯一性已在 [MiS23] 中研究。剖面是单调的，并且以快于指数的速度收敛到其极限 $U_\pm$。对于 $U_- > U_+$，通量非负，且在 $y = 0$ 处达到最大值，见图 2.2。扩散通量 $q = -(u^m)_x$ 的尺度变换与之前不同，但自相似剖面 Q 的表达式与之前相同：

$$q(t,x) = -(1+t)^{-1/2} Q\big(x/(1+t)^{1/2}\big) \quad \text{with}$$
$$Q(y) = -\big(W^m\big)'(y) = -mW(y)^{m-1}W'(y).$$

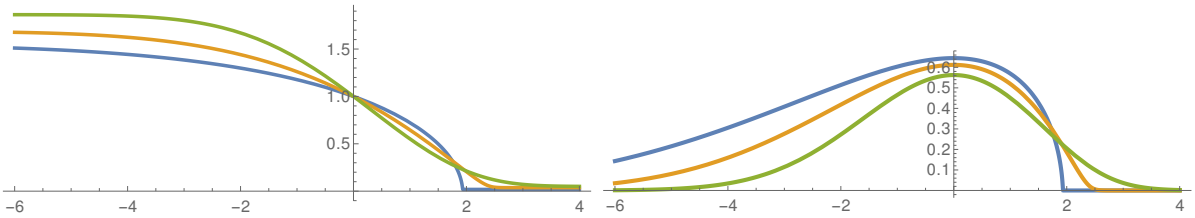

图 2.2：左图显示了满足 $U_+ = 0$且$W(0) = 1$ 的自相似入渗剖面，分别对应 $m = 1.25$ （绿色）、 $m = 2$ 和 $m = 3$ （蓝色）。右图显示了相应的通量 Q。

这种情形 $U_+ = 0$ 称为滤渗情形，此时质量流入区域$x \gg 1$，而该区域的初始浓度为 0。对于所有 $m > 1$，前沿的传播形式为$t^{1/2}$，由 $M_\geq(t) = \int_0^\infty u(t,x)\mathrm{d}x$ s 给出的入渗质量满足 $\dot{M}_\geq(t) = q(t,0) = (1+t)^{-1/2}Q(0)$，即有 $M_\geq(t) = M_\geq(0)(1+t)^{1/2}$。

3 一个受湍流启发的模型

Kolmogorov 的双方程模型 [Kol42, Spa91, BuM19] 在整个 $\mathbb{R}^d$ 上考察时，具有丰富的尺度变换结构，因此允许存在自相似解，参见 [MiN22] 第 3 节。在[Mie22] 中，研究了一个简化模型，其中 $\widetilde{v}(t,x)$ 是标量剪切速度，而 $k(t,x)$ 是平均湍动能：

$$\widetilde{v}_t = \operatorname{div}\big(\eta\, \widetilde{k}^\beta \nabla v\big),$$
$$\widetilde{k}_t = \operatorname{div}\big(\kappa\, \widetilde{k}^\beta \nabla \widetilde{k}\big) + \eta \widetilde{k}^\alpha |\nabla \widetilde{v}|^2,$$

其中 η, κ, β为正参数。请注意，当我们考察 $\widetilde{v} \equiv 0$的情形时，该系统包含满足$m = \beta + 1$的多孔介质方程。

该系统的总线性动量 $\mathcal{P}(\widetilde{v}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{v}(x)\,\mathrm{d}x$ 和总能量$\mathcal{E}(\widetilde{v},k) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}\widetilde{v}^2 + \widetilde{k}\right)\mathrm{d}x$是守恒量。经剪切黏度（取决于 k）耗散的动能全部转化为湍动能，从而实现能量守恒。

事实上，该系统可以写成关于熵 $\mathcal{S}(k) = \int_{\mathbb{R}^d} k^\theta\,\mathrm{d}x$ 的梯度流方程，对任意 $\theta \in (0,\ 1)$ 均成立，因此预期 k 会趋于常数。对于具有无通量边界条件的有界区域，可以证明，解会指数收敛到唯一的平衡态，其中 $\widetilde{v}$ 为常数，且 k 使守恒量相匹配，参见 [Mie22]中的第2节。

在无界区域 $\mathbb{R}^d$上，具有有限动量 $\mathcal{P}$ 和有限能量$\mathcal{E}$ 的解预期会弥散并一致收敛到0。 [Mie22] 的第6节指出， $\widetilde{v}$ 和 k 呈渐近自相似行为，但指数不同，这是因为能量中的$\frac{1}{2}\widetilde{v}^2$ 以及动量中的 $\widetilde{v}$ 所致。猜想认为，当t较大时， k 会形成巴伦布拉特型的自相似图案，即

$$K(y) = \max\{0, N - c_{\beta+1}|y|^2\}^{1/\beta} \tag{3.1}$$

总质量为 $E = \mathcal{E}(v(0)\ k(0))$，这意味着所有宏观动能都转化为湍动能。此外，对于较大的 t， $\widetilde{v}$ 会形成一个自相似图案，即 Barenblatt解的 κ/η次幂，也就是

$$V(y) = \widetilde{v}\left(K(y)\right)^{\kappa/\eta}$$

其中 $\widetilde{v}$ 满足 $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(v(0))$。

更准确地说，令 $\gamma = 1/(2+\beta d)$，我们通过以下方式对变量进行缩放：

$$\tau = \log(1+t),\ y = x/(1+t)^\gamma,\ k = (1+t)^{\gamma d}\widetilde{k},\ v = (1+t)^{\gamma d}\widetilde{v}$$

并得到一个非自治耦合系统

$$\begin{aligned} v_\tau &= \operatorname{div}\left(\gamma v y + \eta\, k^\beta \nabla v\right), \\ k_\tau &= \operatorname{div}\left(\gamma k y + \kappa\, k^\beta \nabla k\right) + \mathrm{e}^{-\gamma d\tau}\,\eta k^\beta |\nabla v|^2, \end{aligned}$$

其中 div 和 ∇ 现在是相对于 y 而取的。因此我们看到，对于 $\tau \gg 1$， k 的方程表现得像多孔介质方程，其渐近稳态为 (3.1) 中的 Barenblatt剖面。代入这样的 Barenblatt解 K，可以证明 V 的线性方程具有稳态 $\widetilde{v}K^{\kappa/\eta}$。对于 $\eta \gg \kappa$，这意味着 V 在 K 的支撑集边界附近会有很大的梯度。

对于 PME 方程，也存在动量或能量为无穷大的解，因为在 $x \to \pm\infty$ 处存在非平凡极限。在其中一种情况下，可以写出精确自相似解，即对于 $\alpha = \beta = 1$ 和 $\kappa = \eta$，为简单起见，我们令$\eta = 1$。取 $y = x/\sqrt{1+t}$ 和任意的 $A > 0$ ，可以验证$v(t,\ x) = V(y)$ 和 $k(t,\ x) = K(y)$ 是显式解，若我们选择

$$\big(V(y), K(y)\big) = \begin{cases} \big(A/\sqrt{2}, 0\big) & \text{for } y \ge A, \\ \big(y/\sqrt{2}, (A^2 - y^2)/4\big) & \text{for } |y| \le A, \\ \big(-A/\sqrt{2}, 0\big) & \text{for } y \le -A. \end{cases}$$

对于这个解，能量密度 $e(t,\ x) = \frac{1}{2}v(t,\ x)^2 + k(t,\ x)$ 确实等于常数 $A^2/4$，这意味着这些解的总能量是无穷大的。尽管如此

仍存在非平凡通量，具体而言，是线性动量和湍动能的通量：

$$
\begin{aligned}
&Q^{\mathrm{lin.mom}}(y) = -K(y)V'(y) = -K(y)/\sqrt{2},\\
&Q^{\mathrm{tur.kin}}(y) = -K(y)K'(y), \text{ and}\\
&S^{\mathrm{tur.kin}}(y) = K(y)V'(y)^2 = K(y)/2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

其中，最后一项是动量方程中耗散所产生的湍流动能的来源。

4 反应扩散系统中的扩散混合

这里我们考虑一组方程，用以描述物种X_j 的浓度 c_j 。这些物种以扩散系数 d_j 进行扩散，并按照质量作用定律发生反应。我们的主要假设是，反应方程 $\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c})$存在一族连续的平衡态，其中 $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots\ldots, c_{i_*}) \in \mathfrak{C} := [0,\infty[^{i_*}$是浓度向量。我们考虑实数轴 $\mathbb{R}^1$上的反应扩散系统（RDS），并在无穷远处施加边界条件，以表示具有无限质量的储库。假设给定的极限状态 C_- 和 C_+ 在 $x = \pm\infty$ 处处于平衡态，即$\boldsymbol{R}(C_\pm) = 0$。因此，我们的 RDS 具有如下形式

$$
\widetilde{\boldsymbol{c}}_t = \boldsymbol{D}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_{xx} + \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{c}}), \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}(t,\pm\infty) = C_\pm, \tag{4.1}
$$

其中， $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵 $\mathrm{diag}(d_1, \ldots\ldots, d_{i_*})$。

为研究自相似行为，我们使用抛物标度变量 $\tau = \log(1+t)$ 和 $y = x/\sqrt{1+t}$ again，并针对 $\boldsymbol{c}(\tau, y) = \widetilde{\boldsymbol{c}}(t, x)$ 得到缩放方程

$$
\boldsymbol{c}_\tau = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{c}_{yy} + \frac{y}{2}\,\boldsymbol{c} + \mathrm{e}^{\tau}\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}), \quad \boldsymbol{c}(\tau,\pm\infty) = C_\pm, \tag{4.2}
$$

其中，前因子 e^{τ} 出现的原因是，反应与导数 ∂_τ 和 ∂_y^2 的尺度变化方式不同。

因此，当 τ 较大时，反应会越来越强，并将导致反应发生局部平衡化。当然，这只是尺度变换造成的效应，但它表明，在长时间尺度上，我们首先会看到反应按照其自然时间尺度起作用，而扩散混合可能需要更长时间，且由于 $\pm\infty$ 处的边界条件，实际上永远不会停止。

4.1 扩散的大时间极限与约化系统

我们可以形式上如下令 (4.2) 中的 $\tau \gg 1$ 趋于极限。显然，反应必须达到平衡，即对于所有 τ 和 y， $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}(\tau, y)) = \boldsymbol{0}$。然而，乘积 $\mathrm{e}^{\tau}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c})$ 应视为“$\infty \cdot \boldsymbol{0}$”型极限，其取值为 $\boldsymbol{\lambda}(\tau, y) \in \mathbb{R}^{i_*}$。这一项可以理解为小反应通量的缩放版本，因为反应 $\boldsymbol{c}$ 只能达到 $\mathrm{e}^{-\tau}$ 阶的平衡，因此 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c})$ 仍可能包含一项 $\mathrm{e}^{-\tau}\boldsymbol{\lambda}$。

由 (4.1) 和 (4.2) 得到的模型是以下受约束的反应扩散系统 S

$$
\widetilde{\boldsymbol{c}}_\tau = \boldsymbol{D}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_{xx} + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{c}}) = 0, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}}(t,\pm\infty) = C_\pm, \tag{4.3a}
$$

$$
\boldsymbol{c}_\tau = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{c}_{yy} + \frac{y}{2}\,\boldsymbol{c}_y + \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) = 0, \quad \boldsymbol{c}(\tau,\pm\infty) = C_\pm. \tag{4.3b}
$$

重要的是，$\boldsymbol{\lambda}$ 被限制在由$\{\mathrm{D}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) \quad \boldsymbol{c} = 0 \quad \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}),\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{i_*}\}$张成的线性子空间中，因此 plays the role of a Lagrange multiplier to the constraint$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) = 0$.

我们将讨论范围限定在质量作用动力学的情形，此时反应满足细致平衡。于是，存在一个满射线性化学计量映射 $\boldsymbol{Q}\colon \mathbb{R}^{i_*} \to \mathbb{R}^{j_*}$，它给出守恒分子质量；还存在一个非线性映射 $\Psi\colon \mathfrak{U} := \boldsymbol{Q}\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$，使得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) = 0 \text{ for all } \boldsymbol{c} \in \mathfrak{C}, \quad \boldsymbol{Q}\Psi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \text{ for all } \boldsymbol{u} \in \mathfrak{U},\\ &\text{and } \big\{\, \boldsymbol{c} \in \mathfrak{C} \,\big|\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) = 0 \,\big\} = \big\{\, \psi(\boldsymbol{u}) \in \mathfrak{C} \,\big|\, \boldsymbol{u} \in \mathfrak{U} \,\big\},\end{aligned}$$

即 Ψ 参数化了 $\boldsymbol{R}$的平衡态集合。更多详情请参阅 [MPS21、MiS22] 。

令 $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t,x) = \boldsymbol{Q}\widetilde{\boldsymbol{c}}(t,x)$，$\boldsymbol{u}(\tau,y) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c}(\tau,y)$，并令 $U_\pm = \boldsymbol{Q}C_\pm$，则未缩放和缩放形式的受约束反应扩散系统 (4.3) 化简为简单的扩散系统

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_t = \big(\boldsymbol{A}(\widetilde{\boldsymbol{u}})\big)_{xx}, \quad \boldsymbol{u}(t,\pm\infty) = U_\pm \quad \text{and} \tag{4.4a}$$

$$\boldsymbol{u}_\tau = \big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})\big)_{yy} + \frac{y}{2}\,\boldsymbol{u}_y, \quad \boldsymbol{u}(\tau,\pm\infty) = U_\pm \tag{4.4b}$$

其中 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{D}\,\Psi(\boldsymbol{u})$。注意，$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda} \equiv 0$ 由构造可知。

4.2 向量值剖面方程

在假设 $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^{j_*} \to \mathbb{R}^{j_*}$ （强）单调的条件下，向量值剖面方程

$$\mathbf{0} = \big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\big)_{yy} + \frac{y}{2}\,\boldsymbol{U}_y, \quad \boldsymbol{U}(\pm\infty) = U_\pm \tag{4.5}$$

有一个唯一的相似剖面 $\boldsymbol{U}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{j_*}$。标量情形参见 [GaM98] ，更一般的向量情形参见 [MiS23] 。

满足 (4.5) 的剖面 $\boldsymbol{U}$ 是缩放扩散系统 (4.4b) 的经典稳态解。因此，令 $\widetilde{u}(t,\ x) = \boldsymbol{U}\big(x/\sqrt{1+t}\big)$，即可得到 (4.4a) 的一个精确自相似解。

显然，定义 $\boldsymbol{C}(y) = \Psi(\boldsymbol{U}(y))$ 后，我们得到受约束剖面方程的一个解 $\boldsymbol{C}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{i_*}$

$$\begin{aligned}&\mathbf{0} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}_{yy} + \frac{y}{2}\,\boldsymbol{C}_y + \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{C}) = \mathbf{0},\\ &\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda} = 0, \quad \boldsymbol{C}(\pm\infty) = \Psi(U_\pm).\end{aligned} \tag{4.6}$$

相似剖面 $\boldsymbol{C}$ 是缩放受约束反应扩散系统 (4.3b) 的稳态，而 $\widetilde{\boldsymbol{c}}(t,\ x) = \boldsymbol{C}\big(x/\sqrt{1+t}\big)$ 是 (4.3a) 的一个精确自相似解。

在接下来的三个小节中，我们将讨论几个特殊情况，尤其强调反应通量的作用 $\boldsymbol{\lambda}$ 。

4.3 两个物种的一种反应

在 [GaS22 中，MiS22] 详细研究了以下由两个方程组成的系统 :

$$\begin{pmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d_1\,\partial_x^2 c_1\\ d_2\,\partial_x^2 c_2\end{pmatrix} + \kappa\big(c_2^\beta - c_1^\gamma\big)\begin{pmatrix}\gamma\\ -\beta\end{pmatrix} \qquad \text{for } t > 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}.$$

这两种物种的浓度 $c_1,\ c_2 \geq 0$ $X_1,\ X_2$ 以扩散系数d_j 扩散，并发生可逆的质量作用反应对 $\gamma X_1 \rightleftharpoons \beta X_2$。

缩放后的约束系统 (4.3b) 具有如下形式

$$\partial_\tau \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1\,\partial_y^2 c_1 \\ d_2\,\partial_y^2 c_2 \end{pmatrix} + \frac{y}{2}\partial_y \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad \Lambda \in \mathbb{R}, \quad c_1^\gamma = c_2^\beta.$$

这里 $\boldsymbol{\lambda} = \Lambda(\gamma, -\beta)^\top \in \mathbb{R}^2$ 仅包含一个标量反应通量 $\Lambda \in \mathbb{R}$，因为只有一对反应。

$\boldsymbol{R}$ 的平衡态集合是一个单参数族

$$\big\{\, \boldsymbol{c} \in \mathfrak{C} \,\big|\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) = 0 \,\big\} = \big\{\, (A^\beta, A^\gamma) \,\big|\, A \geq 0 \,\big\}.$$

线性化学计量映射是 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$，用于定义 $u = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} = \beta c_1 + \gamma c_2 \geq 0$，而 $\Psi : [0,\infty[= \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ 则通过以下方式定义

$$\boldsymbol{c} = \Psi(u) = \begin{pmatrix} \psi_1(u) \\ \psi_2(u) \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} = \beta c_1 + \gamma c_2 \\ \text{and } c_1^\gamma = c_2^\beta \end{cases}$$

情形 $\gamma = \beta$ 导出简单关系 $\Psi(u) = \frac{1}{\beta+\gamma}\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}$。若 $\beta \neq \gamma$，不失一般性，我们可以假设 $\beta < \gamma$；非平凡例子见 (4.8)。

对于 $A_\Psi(u) := \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\Psi(u) = \begin{pmatrix} \beta d_1 \\ \gamma d_2 \end{pmatrix} \cdot \Psi(u)$，可得 $0 < \psi_1'(u) \leq \psi_1'(0) = 1/\beta$ 以及 $0 < \psi_2'(u) \leq \psi_2'(\infty) = 1/\gamma$。由此得到

$$D_* = \min\{d_1, d_2\} \leq A_\Psi'(u) \leq D^* = \max\{d_1, d_2\}$$

以及 $A_\Psi'(u) \to d_1$ 对 $u \to 0^+$ 和 $A_\Psi'(u) \to d_2$ 对 $u \to \infty$。

因此，[GaM98、MiS23] 中关于相似剖面的存在性理论给出了剖面方程的唯一光滑解 U

$$\big(A_\Psi(U)\big)'' + \frac{y}{2}U' = 0 \ \text{ on } \mathbb{R}, \quad U(\pm\infty) = U_\pm.$$

假设 $U_- < U_+$，该解严格递增，并以误差函数的方式收敛到其两个极限。除 $U_- < U(y) < U_+$ 外，估计式

$$0 < U'(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/(4D^*)} \sqrt{\frac{D^*}{8D_*^2}}\,\big(U_+ - U_-\big) \quad \text{for all } y \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

即使在 $U_- = 0$ 的情况下，该估计仍成立；在这种情况下，浓度渐近趋于零，即 $C_- = \Psi(U_-) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，因为有效扩散仍有下界 $D_* > 0$。

这样的剖面 U：对于约化方程的 $\mathbb{R} \to [U_-, U_+]$ 给出了光滑的浓度剖面 $\boldsymbol{C}$：$\mathbb{R} \to \mathfrak{C} \subset \mathbb{R}^2$，其定义为 $\boldsymbol{C}(y) = \Psi(U(y))$，并满足剖面方程

$$\begin{aligned} &0 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{C}'' + \frac{y}{2}\,\boldsymbol{C}' + \Lambda \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad C_1^\gamma = C_2^\beta, \\ &\boldsymbol{C}(y) \to \Psi(U_\pm) \text{ for } y \to \pm\infty. \end{aligned}$$

因此，反应通量 Λ 可写为

$$\Lambda(y) := -\frac{1}{\gamma}\big(d_1 C_1''(y) + \frac{y}{2}C_1'(y)\big) = \frac{1}{\beta}\big(d_2 C_2''(y) + \frac{y}{2}C_2'(y)\big).$$

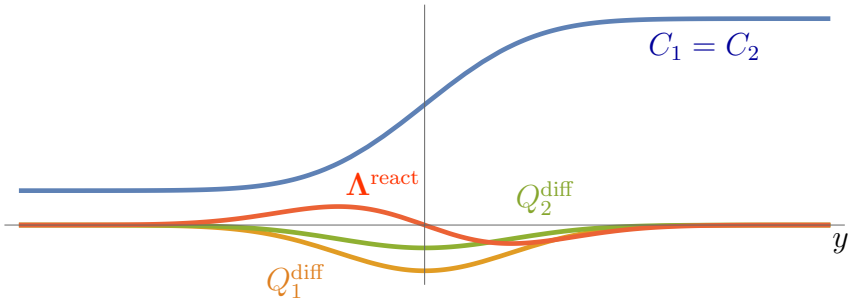

图 4.1：对于情形 $\beta = \gamma = 1$，图中展示了相似剖面 $C_1 = C_2$ 以及扩散通量 Q_j^{react}和反应通量 Λ^{react}。

一般而言， Λ 并非平凡情况；从简单情形 $\beta = \gamma$即可看出这一点，这意味着 $C_1 \equiv C_2$, $\psi_j(u) = u/(\beta+\gamma)$, 因此 $A_\Psi(u) = \frac{d_1+d_2}{2}u$。记$\mathbb{E}: \mathbb{R} \to]0,1[$为 $\mathbb{E}'' + y\mathbb{E}' = 0$, $\mathbb{E}(-\infty) = 0$ 和 $\mathbb{E}(\infty) = 1$ 的唯一解，并回顾 $U_\pm = 2\gamma C_\pm$，我们得到唯一的剖面

$$U(y) = 2\gamma C_- + 2\gamma(C_+ - C_-)\mathbb{E}\big(y/(d_1+d_2)\big),$$
$$C_1(y) = C_2(y) = \frac{1}{2\gamma}U(y).$$

这给出了显式公式（仅适用于 $\beta = \gamma$），即

$$\Lambda(y) = \frac{2(d_1-d_2)}{(d_1+d_2)^2}\left(C_+ - C_-\right)\mathbb{E}''\big(y/(d_1+d_2)\big),$$

也就是说，只有对于 $d_1 = d_2$，我们才有 $\Lambda \equiv 0$。

图 4.1 中展示了对于 $C_- = 0.2 < C_+ = 1.2$、 $\beta = \gamma = 1$和 $d_1 = 1 > d_2 = 0.5$，剖面 $C_1 = C_2$、相应的扩散通量 $Q_j^{\text{diff}} = -d_j C_j'(y)$，适用于 $j = 1, 2$，以及反应通量 Λ^{react}。由于 $d_1 > d_2$，扩散通量满足 $|Q_1^{\text{diff}}| > |Q_2^{\text{diff}}|$，因此人们会预期剖面 C_1 比 C_2更平坦。然而，反应 $X_1 \rightleftharpoons X_2$ 实现了 $C_1 = C_2$，它将缺失或过剩的质量从 X_1 推入 X_2。

我们还考虑 $\beta = 1$ 和 $\gamma = 2$的情形，这对应于非线性反应对 $X_1 \rightleftharpoons 2X_2$。此时，各剖面不再相同，也不再具有对称性$y \leftrightarrow -y$。我们发现

$$\Psi(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+8u} - 1\right) \\ \frac{1}{8}\left(1 + 4u - \sqrt{1+8u}\right) \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

并可计算 $C_- = \Psi(1) = \binom{1/2}{1/4}$ 和 $C_- = \Psi(6) = \binom{3/2}{9/4}$的所有通量；现在选择$d_1 = 1$ 和 $d_2 = 1$，得到 $A_\Psi(u) = u$，从而简化计算。相应的剖面、扩散通量和反应通量见图 4.2。

4.4 三种物质的单一反应

对于 th 对于典型的二元反应 $X_3 \rightleftharpoons X_1 + X_2$，我们得到缩放受约束反应扩散系统

$$\partial_\tau \boldsymbol{c} = \boldsymbol{D}\partial_y^2 \boldsymbol{c} + \frac{y}{2}\partial_y \boldsymbol{c} + \Lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1 c_2 = c_3$$

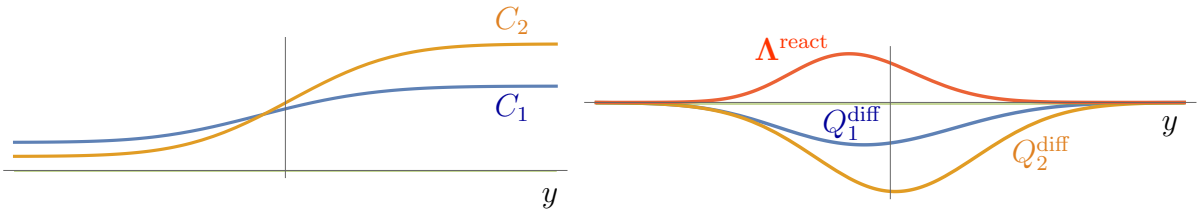

图 4.2：对于 $\beta = 1 < \gamma = 2$ 和 $d_1 = d_2 = 1$ 的情形，展示了相似剖面 C_1 和C_2（左图），以及相应的扩散通量和反应通量（右图）。

其中 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$。剖面方程为

$$0 = \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}'' + \frac{y}{2}\boldsymbol{C}' + \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 C_2 = C_3 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{C}(\pm\infty) = \Psi(\boldsymbol{U}_\pm). \tag{4.9}$$

$\boldsymbol{R}$ 的平衡态集合是一个二参数族：

$$\{\, \boldsymbol{c} \in \mathfrak{C} \,\big|\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) = 0 \,\} = \{\, (A, B, AB) \,\big|\, A, B \geq 0 \,\}.$$

我们可以选取化学计量矩阵

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

并得到 $\boldsymbol{u} = \binom{u_1}{u_2} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} \in \mathfrak{U} := [0, \infty[^2$。约化函数 $\Psi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ 可以显式地计算为

$$\Psi(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 - u_2 - 1 + s(\boldsymbol{u}) \\ u_2 - u_1 - 1 + s(\boldsymbol{u}) \\ u_1 + u_2 + 1 - s(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} \quad \text{with} s(\boldsymbol{u}) = \sqrt{(1+u_1+u_2)^2 - 4u_1u_2}.$$

要将 s 扩展为函数 $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，只需在 $u_1 \leq 0$ 或 $u_2 \leq 0$ 时令 $s(u_1, u_2) = 1 + u_1 + u_2$，并注意到 s 是全局利普希茨连续的。此外，对于所有 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$，$s_j(\boldsymbol{u}) = \partial_{u_j} s(\boldsymbol{u})$ 满足 $s_1(\boldsymbol{u}) \leq 1$, $s_2(\boldsymbol{u}) \leq 1$ 以及 $s_1(\boldsymbol{u}) + s_2(\boldsymbol{u}) \geq 0$。

由此我们可以计算函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{D}\,\Psi(\boldsymbol{u})$：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (d_1+d_3)u_1 + (d_3-d_1)(1+u_2-s(\boldsymbol{u})) \\ (d_2+d_3)u_2 + (d_3-d_2)(1+u_1-s(\boldsymbol{u})) \end{pmatrix}.$$

为了证明 $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的单调性，我们注意到，对于一般的 C^1 函数 $\boldsymbol{A}$，有如下等价关系

$$\begin{aligned} &\forall\, \boldsymbol{u}, \widetilde{\boldsymbol{u}} : \ \langle \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{A}(\widetilde{\boldsymbol{u}}), \boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}} \rangle \geq \mathrm{a_{lo}} |\boldsymbol{u} - \widetilde{\boldsymbol{u}}|^2 \\ \iff \quad &\forall\, \boldsymbol{u} : \ \frac{1}{2}\big(\mathrm{D}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}) + \mathrm{D}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})^\top\big) \geq \mathrm{a_{lo}} I_{m\times m}. \end{aligned}$$

利用这一点， [MiS23] 中证明了，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 单调时，

$$(3 - \sqrt{8})d_3 < d_j < (3 + \sqrt{8})d_3 \quad \text{for } j = 1,\ 2.$$

因此，可以应用相似剖面存在性定理的向量值版本。对于所有极限 $\boldsymbol{U}_-$ 和 $\boldsymbol{U}_+$，都存在唯一的相似剖面 $\boldsymbol{U}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，连接 $\boldsymbol{U}_-$ 和 $\boldsymbol{U}_+$。当且仅当对所有 $y\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{U}(y)\in\mathfrak{U}=[0,\infty[^2$，这些解才会产生连接 $\Psi(\boldsymbol{U}_-)$ 和 $\Psi(\boldsymbol{U}_+)$ 的相似剖面 $\boldsymbol{C}=\Psi\circ\boldsymbol{U}$，从而得到 $\boldsymbol{C}(y)=\Psi(\boldsymbol{U}(y))\in\mathfrak{C}=[0,\infty[^3$。一般而言，要保证这一条件似乎很困难，但定义 $\boldsymbol{u}_{(\pm)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 为

$$\overline{\boldsymbol{u}}_{(\pm)}(y)=\boldsymbol{U}_\pm \text{ for } \pm y>0 \text{ and } \overline{\boldsymbol{u}}_{(\pm)}(0)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_-+\boldsymbol{U}_+),$$

可以证明一致估计

$$\left|\boldsymbol{U}(y)-\overline{\boldsymbol{u}}_{(\pm)}(y)\right|\le C_*|\boldsymbol{U}_+-\boldsymbol{U}_-|,$$

其中 C_* 仅取决于 d_1、d_2 和 d_3，而与 $\boldsymbol{U}_\pm$ 无关。因此，只要 $|\boldsymbol{U}_+-\boldsymbol{U}_-|$ 相对于 $\boldsymbol{U}_+$ 和 $\boldsymbol{U}_-$ 到 $\mathfrak{U}$ 边界的距离足够小，就能得到有效的相似剖面。在这种情况下，满足以下条件的相似剖面 $\boldsymbol{C}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$，即方程 (4.9) 的解存在且唯一。

在当前例子中，我们得到非单调剖面 $\boldsymbol{C}:\ \mathbb{R}\to\mathfrak{C}\subset\mathbb{R}^3$。为此，考虑情形 $d_1=d_2$ 以及以下极限

$$C_-=(A,B,AB)^\top \quad\text{and}\quad C_+=(B,A,AB)^\top \quad\text{with } A\neq B.$$

唯一性结果以及反射对称性 $x\to -x$ 和 $(c_1,c_2)\to(c_2,c_1)$ 意味着定常剖面 $\boldsymbol{C}$ 满足 $C_1(y)=C_2(-y)$ 和 $C_3(y)=C_3(-y)$。利用对所有 $y\in\mathbb{R}$ 都成立的 $C_1(y)C_2(y)=C_3(y)$，我们看到 C_3 不可能是常数，因此必定是非单调的。图 4.3 展示了一个相应的例子。

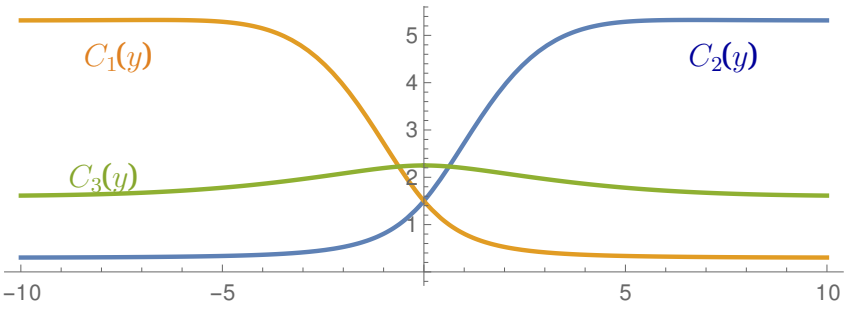

图 4.3：(4.9) 的解 $\boldsymbol{C}=(C_1(y)\ C_2(y)\ C_3(y))$，其中 $d_1=d_2=2$ 和 $d_3=10$ 的极限值分别为 $C_-\approx(5.3,0.3,1.6)$ 和 $C_+\approx(0.3,5.3,1.6)$。该对称解通过取 $\boldsymbol{C}(0)=(1.5,1.5,2.25)$ 和 $\boldsymbol{C}'(y)=(-1,1,0)$ 作为初值获得。

一个有趣的问题是，是否存在一个定常剖面 $\boldsymbol{C}$ 连接这两个极限情形

$$C_-=\Psi(1,0)=(1,0,0)^\top \quad\text{and}\quad C_-=\Psi(0,1)=(0,1,0)^\top.$$

该分布在 $\pm\infty$ 处的储库中只会看到物种 X_1 或 X_2，但在中间区域，三种物质必须全部存在，才能生成其他物种。

4.5 三种物质的两个反应

考虑两个反应 $2X_1 \leftrightharpoons X_2$ 和 $X_2 \leftrightharpoons X_3$，得到

$$\partial_\tau \boldsymbol{c} = \boldsymbol{D}\partial_y^2 \boldsymbol{c} - k_1\big(c_1^2 - c_2\big)\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} - k_2\big(c_2 - c_3\big)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

平衡态集合是由下式给出的一参数族

$$\big\{\, \boldsymbol{c} \in \mathfrak{C} \,\big|\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{c}) = 0 \,\big\} = \big\{\, (A, A^2, A^2) \,\big|\, A \geq 0 \,\big\}.$$

请注意，反应扩散系统具有如下形式的不变区域 $\Sigma := [b, B] \times [b^2, B^2] \times [b^2, B^2]$，其中 $0 \leq b < B < \infty$ 任意。这意味着，任何满足 $\boldsymbol{c}(0, x) \in \Sigma$ 的解，对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都满足 $\boldsymbol{c}(t, x) \in \Sigma$，对所有 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}$ 均成立；关于反应扩散系统不变区域的理论，参见 [Smo94]。因此，连接 $C_- = (b, b^2, b^2)$ 和 $C_+ = (B, B^2, B^2)$ 的相似剖面预期位于不变区域 Σ 中。

化学计量矩阵为 $\boldsymbol{Q} = (1\ 2\ 2) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$，并且

$$u = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c} = c_1 + 2c_2 + 2c_3 \ \text{ yields } \ \Psi(u) = \begin{pmatrix}\sigma(u)\\(u - \sigma(u))/4\\(u - \sigma(u))/4\end{pmatrix}$$

其中 $\sigma(u) = (\sqrt{1 + 16\,u} - 1)/8$。由 $\sigma'(u) = 1/\sqrt{1 + 16\,u} \in [0, 1]$ 可知，所有映射 $u \mapsto \Psi_j(u)$ 都严格递增，因此 $A(u) = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{D}\,\Psi(u)$ 满足

$$\begin{aligned} &A(u) = \tfrac{d_2+d_3}{2}\,u + \big(d_1 - \tfrac{d_2+d_3}{2}\big)\,\sigma(u) \quad \text{and} \\ &\min\big\{d_1, \tfrac{d_2+d_3}{2}\big\} \leq A'(u) \leq \max\big\{d_1, \tfrac{d_2+d_3}{2}\big\}. \end{aligned}$$

因此，标量存在性理论保证存在唯一的、严格递增的相似剖面 $0 \leq U_- \leq U_+ < \infty$ a $U \in C^\infty(\mathbb{R}; [U_-, U_+])$。

因此，剖面方程

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{C}'' + \frac{y}{2}\boldsymbol{C}' + \Lambda_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + \Lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0, \\ &C_1^2 = C_2 = C_3 \ \text{ and } \ \boldsymbol{C}(\pm\infty) = \begin{pmatrix}B_\pm\\B_\pm^2\\B_\pm^2\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.11}$$

对所有 $B_- \leq B_+$ a 都有唯一解 $\boldsymbol{C}$，且每个分量 C_j 都严格递增，因此位于不变区域 $\Sigma = [B_-, B_+] \times [B_-^2, B_+^2] \times [B_-^2, B_+^2]$ 内。

在这个例子中，三种物质 X_j 有三个扩散通量 $Q_j^{\text{diff}}(y) = -d_j C_j'(y)$，对于反应 $2X_1 \leftrightharpoons X_2$ 和 $X_2 \leftrightharpoons X_3$，则分别有两个反应通量 Λ_1^{react} 和 Λ_2^{react}。

5 卷状图案的扩散混合

对于复值振幅 $A(t, x) \in \mathbb{C}$，实 Ginzburg-Landau 方程（即系数为实数）

$$\dot{A} = A_{xx} + A - |A|^2 A \tag{5.1}$$

是分岔理论和模式形成中的重要模型。该方程常作为许多偏微分方程[KSM92, Eck93, Sch94, Mie02, Mie15] 以及大时滞延迟方程[WY*10, YL*15]中的振幅方程或包络方程出现。

它具有一个显式的双参数稳态模式族，其形式为角色解 $A(x) = U_{\eta,\varphi}(x) := \sqrt{1-\eta^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta x+\varphi)}$，其中波数为 $\eta \in [-1,1]$，相位为$\varphi \in [0,2\pi]$。

从 [BrK92, CoE92]，出发，[GaM98] 表明，存在渐近自相似剖面，它们连接两个不同的角色解 U_{η_-,φ_-}，分别位于 $x \to -\infty$ 和 U_{η_+,φ_+}，位于 $x \to \infty$。事实上，那里开创了用于证明自相似剖面存在性的单调算子方法；参见 [GaM98] 中的定理 3.1，并在 [MiS23] 中进一步发展。

令 $A = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$，并假设 $r(t,x) > 0$，则实 Ginzburg-Landau 方程可改写为耦合系统 $\dot r = r_{xx} + r\big(1-r^2-u_x^2\big)$ 和 $\dot u = u_{xx} + 2r_x u_x/r$。

按照 [GaM98] 第2节中的方法，我们通过 $t = \mathrm{e}^\tau$、$x = \mathrm{e}^{\tau/2}y$ 将系统变换为缩放变量，

$$\psi(\tau,y) = \mathrm{e}^{-\tau/2}u(\mathrm{e}^\tau, \mathrm{e}^{\tau/2}y), \quad \text{and} \quad \rho(\tau,y) = r(\mathrm{e}^\tau, \mathrm{e}^{\tau/2}y).$$

注意，u 与 ψ 之间还相差一个因子 $\mathrm{e}^{\tau/2}$，这是为了匹配 $u(t,x) \approx c_\pm + \eta_\pm x$ 在 $x \to \pm\infty$ 时的线性行为。采用此定义后，对于 $y \to \pm\infty$，我们仍有$\psi(\tau,y) \approx c_\pm \mathrm{e}^{-\tau/2} + \eta_\pm y$。

变换后的系统为

$$\begin{aligned}
\psi_\tau &= \psi_{yy} + \frac{y}{2}\,\psi_y - \frac{1}{2}\,\psi + 2\frac{\rho_y}{\rho}\,\psi_y,\\
\rho_\tau &= \rho_{yy} + \frac{y}{2}\,\rho_y + \mathrm{e}^\tau\,\rho\,(1-\rho^2-\psi_y^2).
\end{aligned}$$

因此，我们看到，对于 $\tau \gg 1$，有关系式 $\rho^2 + \psi_y^2 \approx 1$。代入约束$\rho = \big(1-\psi_y^2\big)^{1/2}$，得到尺度变换后的相位扩散方程

$$\psi_\tau = \big(\Phi(\psi_y)\big)_y + \frac{y}{2}\,\psi_y - \frac{1}{2}\,\psi \quad \text{with } \Phi'(\eta) = \frac{1-3\eta^2}{1-\eta^2}. \tag{5.2}$$

此外，ρ 的极限方程为

$$\rho_\tau = \rho_{yy} + \frac{y}{2}\,\rho_y + \Lambda, \quad \rho^2 + \psi_y^2 = 1,$$

原则上，可以通过约束$\rho^2 + \psi_y^2 = 1$ 和式（5.2）确定拉格朗日乘子 Λ。

利用 $\eta(\tau,\ y)$ 并进行一次微分，我们得到一个类似于多孔介质方程的缩放扩散方程：

$$\eta_\tau = \big(\Phi(\eta)\big)_{yy} + \frac{y}{2}\,\eta_y = \big(\Phi'(\eta)\eta_y\big)_y + \frac{y}{2}\,\eta_y, \tag{5.3}$$

这表明该方程只有在 $\Phi'(\eta) > 0$，即 $|\eta| < 1/\sqrt{3}$ 时才是适定的，而$|\eta| > 1/\sqrt{3}$ 会导致著名的 Eckhaus 不稳定性 [Eck65, EGW95, Mie97]。

对于所有 $\eta_-,\ \eta_+ \in\,]-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}[$，存在唯一的稳态剖面 η，其满足（5.3），并通过

$$\overline{\psi}(y) = \eta_- y + \int_{-\infty}^{y} \overline{\eta}(s) - \eta_-\,\mathrm{d}s = \eta_+ y - \int_{y}^{\infty} \overline{\eta}(s) - \eta_+\,\mathrm{d}s$$

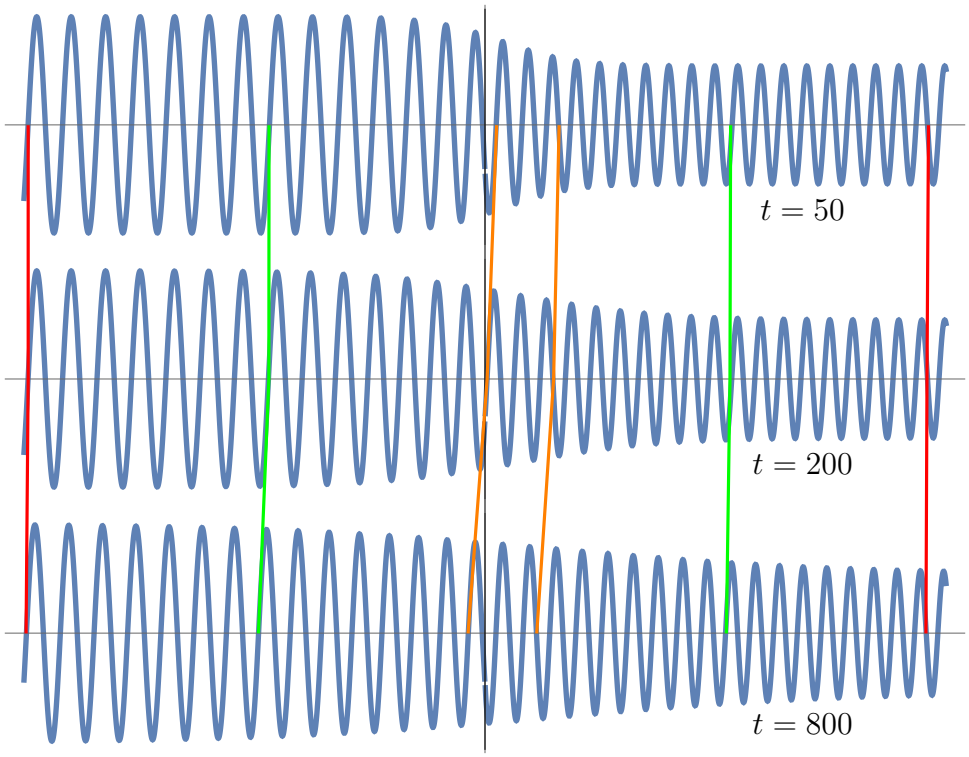

图 5.1：这三幅图展示了在 $t = 50, 200, 800$ 时，$\eta_- = 0.45$和 $\eta_+ = 0.3$ 情形下的 Re $A(t, x)$。图之间的垂直连线表示零点的运动。对于较大的 $|x|$ （红线），运动非常缓慢；而 $|x|$ 越小，运动越快（橙线）。

we 获得满足（5.2）的稳态剖面 ψ，并具有 $x \to \pm\infty$ 的正确渐近行为 .

图 5.1 示意了解 $A(t, x)$ 在三个不同时间、$0 < \eta_0 = 0.3 < \eta_+ = 0.45$ 情形下的自相似行为。扩散混合使 Re $A(t, x)$ 的零点向左移动。时刻 t 位于 x 的零点，其速度 $v(t, x)$ 遵循自相似剖面，即

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\, V\big(x/\sqrt{1+t}\big) \quad \text{with } V(y) = \frac{y}{2} - \frac{\overline{\psi}(y)}{2\overline{\psi}'(y)}.$$

这里的 V 可通过以下方式计算：观察到在时刻 $t = 0$ 位于 x_0 的零点对应于相位 $u_0 = \psi(x_0)$。由于相位按 $u(t, x) = \sqrt{1+t}\ \psi\big(x/\sqrt{1+t}\big)$ 演化，所选零点的位置具有形式 $x(t) = \sqrt{1+t}\ H\big(\psi(x_0)/\sqrt{1+t}\big)$，其中 H 是 ψ 的逆映射。对时间求导并进行反变换，即可得到结果。

6 结论

在前面的章节中，我们已经证明，$\mathbb{R}^d$ 上的演化方程存在三种不同类型的自相似行为：

(1) 经典的 自相似解 $\boldsymbol{u}(t,\ x) = (1+t)^{-\alpha}\boldsymbol{U}\big(x/(1+t)^{\beta}\big)$ 精确地求解了底层系统。例如，我们考察了多孔介质方程 (2.1) 的巴伦布拉特解，以及第4.3节中特殊情形 $\mathsf{d}_1 = d_2$ 和 $\beta = \gamma$ 下通过 $\mathbb{E}$ 为反应扩散系统构造的精确解。

(2) 第3节中出现了一种稍微更一般的渐近自相似行为：缩放方程是非自治的，并含有一项 $\mathrm{e}^{-\gamma d\tau}$，该项在 $\tau \to \infty$ 时趋于零。在这种情况下，可以忽略含有衰减因子 $\mathrm{e}^{-\gamma d\tau}$ 的项来建立剖面的存在性，确定由此产生的稳态（希望它们是稳定的），最后应用扰动论证，得到解收敛到所需稳态。这表明解呈现渐近自相似行为。

然而，我们强调，即使在第3节讨论的情形中，守恒量之间也存在微妙的相互作用。只有借助包含 $\mathrm{e}^{-\gamma d\tau}$ 的项，才能证明所有初始能量 $\mathcal{E}(v(0)\ k(0))$ 最终都转化为湍动能。

(3) 最具挑战性的情况出现在这样一些情形中：渐近行为由一个约束所决定，而该约束源自指数增长因子 e^{τ}，它迫使系统进入局部平衡态。在这种情况下，自然的极限问题是一个受约束系统，如第4节中的 RDS 情形和第5节中的金兹堡–朗道情形。项 $\mathrm{e}^{\tau}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c})$ 属于“$\infty \cdot 0$”型极限，需要用拉格朗日乘子（可能是向量值的，见第4.5节）替代。

在情形 (2) 和 (3) 中，仍有一个重要问题有待研究：形式上得到的自相似剖面是否确实稳定。本文不讨论这一问题，但 [vaP77、GaM98、Váz07、GaS22、MiS22] 已取得初步成果。

通过缩放变量中的相应相似剖面来描述渐近自相似行为，自然会将这种行为解释为非平衡稳态意义上的稳态，因为系统的定常性仅由对随时间变化的缩放变量进行重整化所产生。因此，存在非平凡的通量，以适当的方式平衡质量或能量。一个重要的观察是，出现的拉格朗日乘子恰好就是缺失的通量；尽管系统处于局部平衡状态，这些通量仍然发挥作用。

致谢。A.M. 的研究部分得到了德国研究联合会通过柏林数学研究中心 MATH+ (EXC-2046/1, project ID: 390685689) 子项目“DistFell”的资助。S.S. 的研究得到了德国研究联合会通过协同研究中心910“自组织非线性系统的控制”（项目编号 163436311）子项目 A5“耦合抛物系统中的图案形成”的资助。

参考文献

[Bar79] G. I. Barenblatt，《相似性、自相似性与中间渐近》，Consultants Bureau [Plenum], 纽约—伦敦，1979年，由 Norman Stein 从俄文翻译。[BrK92] J. Bricmont 和 A. Kupiainen：《重整化群与金兹堡–朗道方程》。数学物理通讯 150:1 (1992) 193–208。[BuM19] M. Bulíček 和 J. Málek：《Kolmogorov湍流两方程模型的大数据分析》。Nonlinear Analysis: Real World Appl. 50 (2019) 104–143。[CoE90] P. Collet 和 J.-P. Eckmann，《扩展系统中的不稳定性与前沿》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1990年。

[*CoE*92] *P. Collet* 和 *J.-P. Eckmann*：无相位滑移的金兹堡–朗道方程解。数学物理通讯 *145:2 (1992) 345–356*。[*Eck*65] *W. Eckhaus*，《非线性稳定性理论研究》，*Springer-Verlag New York, New York, Inc.*，*1965*年。[*Eck*93] ：金斯堡-朗道流形是一个吸引子。《非线性科学杂志》*3:3 (1993) 329–348*。[*EcS*02] *J.-P. Eckmann* 和 *G. Schneider*：斯威夫特-霍恩伯格方程调制前沿的非线性稳定性。数学物理通讯 *225 (2002) 361–397*。[*EGW*95] *J.-P. Eckmann*、*T. Gallay* 和 *C. E. Wayne*：相位滑移与 *Eckhaus* 不稳定性。《非线性》*8:6 (1995) 943–961*。[*GaM*98] *T. Gallay* 和 *A. Mielke*：金兹堡–朗道方程中稳定态的扩散混合。数学物理通讯 *199:1 (1998) 71–97*。[*GaS*22] *T. Gallay* 和 *S. Slijepčević*：实数轴上扩展反应扩散系统向平衡态的扩散弛豫。*J. Evol. Eqns. 22:47 (2022) 1–33*。[*Kol*42] *A. N. Kolmogorov*：不可压缩流体湍流运动方程。苏联科学院通报：物理辑 *6:1-2 (1942) 56–58*。[*KSM*92] *P. Kirrmann*、*G. Schneider* 和 *A. Mielke*：具有三次非线性项的扩展系统中调制方程的有效性。爱丁堡皇家学会会刊*A*辑 *122 (1992) 85–91*。[*Mie*97]*A. Mielke*：斯威夫特–霍恩伯格方程中卷状结构的不稳定性与稳定性。数学物理通讯 *189 (1997) 829–853*。[*Mie*02] ，金兹堡–朗道方程作为调制方程的作用，《动力系统手册*II*》（*B. Fiedler* 编），*Elsevier Science B.V.*，*2002*年，第*759–834*页。[*Mie*15] *A. Mielke*：通过演化 Γ收敛推导振幅方程。《离散与连续动力系统》*A*辑 *35:6 (2015) 2679–2700*。[*Mie*22] ：关于由热力学启发的两个耦合退化抛物方程。《非线性科学杂志》（*2022*），已接收。*WIAS* 预印本 *2937*，*arXiv:2112.08049*。[*MiN*22] *A. Mielke* 和 *J. Naumann*：*Kolmogorov*湍流两方程模型全局弱解的存在性与标度律。应用数学与力学杂志（*ZAMM*）*102:9 (2022) e202000019/1–31*。[*MiS*22] *A. Mielke* 和 *S. Schindler*：反应扩散系统中解向自相似剖面的收敛。编写中（*2022*）。[*MiS*23] ：扩散方程组相似剖面的存在性。预印本 *arXiv2301.10360 (2023)*。[*MPS*21] *A. Mielke*、*M. A. Peletier* 和 *A. Stephan*：具有细致平衡的非线性快慢反应系统的*EDP*收敛。《非线性》*34:8 (2021) 5762–5798*。[*Sch*94] *G. Schneider*：实轴上金斯堡-朗道近似的新估计。《非线性科学杂志》*4:1 (1994) 23–34*。[*Smo*94] *J. Smoller*，《激波与反应扩散方程》，*Springer*，*1994*年。

[Spa91] D. B. Spalding：《style id='3'>Kolmogorov湍流两方程模型。《伦敦皇家学会会刊 A 辑》**434**:1890 (1991) 211–216，《湍流与随机过程：柯尔莫哥洛夫思想五十年后》。[vaP77] C. J. van Duyn 和 L. A. Peletier：《style id='9'>非线性扩散方程解的渐近行为。《数学分析与力学文献》**65** (1977) 363–377。[Váz07]J. L. Vázquez，《style id='15'>多孔介质方程：数学理论》，牛津：克拉伦登出版社，2007。[vSH92] W. van Saarloos 和 P. C. Hohenberg：《style id='19'>广义复金兹堡-朗道方程中的前沿、脉冲、源和汇。《物理学 D》**56**:4 (1992) 303–367。[WY*10] M. Wolfrum、S. Yanchuk、P. Hövel 和 E. Schöll：《style id='25'>大时滞时滞微分方程中的复动力学。《欧洲物理学杂志专题》**191** (2010) 91–103。[YL*15] S. Yanchuk、L. Lücken、M. Wolfrum 和 A. Mielke：《style id='31'>大时滞标量时滞微分方程的谱与振幅方程。Discr. Cont.Dynam. Systems Ser. A**35**:1 (2015) 537–553。