arXiv:2302.00395v1 [hep-th] 1 Feb 2023

乘积流形上存在通量时狄拉克方程的可积性

Joás Venâncio 和 Azadeh Mohammadi

物理系　　伯南布哥联邦大学，累西腓，伯南布哥 *50740-560*，巴西

本文旨在证明，与任意非齐次通量场耦合的狄拉克方程，在由二维空间直积构成的流形上可以分离。作为这些结果的直接应用，我们研究一个自旋-1/2 带电粒子在背景中传播的情形；该背景与一个新颖而复杂的弦启发模型共形相关，其时空维数为 $D = 10$，基流形是由四个二维单位球面构成的乘积，并且存在 1-形式和 3-形式通量。 S^2

关键词：狄拉克方程。通量场。分离。直积。弦启发模型

1 引言

在任何引力理论中，探测给定空间（$M, \boldsymbol{g}$）中弥漫的引力场的一种高效且准确的方法，是让其他场与之相互作用，其中该空间具有度规 $\boldsymbol{g}$。因此，研究物质场（标量场、旋量场，或阿贝尔与非阿贝尔规范场）在（$M, \boldsymbol{g}$）上的行为，是广义相对论研究的核心内容。要解出在给定空间中传播的某种物质场的场方程，第一步是仔细选择合适的基底，将该场的自由度分离出来，从而使相关场方程中的变量解耦。然而，在（$M, \boldsymbol{g}$）上积分并分离物质场方程并非易事。一般而言，如果空间不具有任何对称性，那么在任意空间中传播的场所满足的物质场方程，其变量无法解耦。事实上，合适基底的选择直接取决于空间的对称性。因此，要使积分过程成为可能，空间必须具有足够的对称性。物质场方程的可分离性可以与某些对称张量的存在相协调，例如 Killing 张量、Killing-Yano 张量及其共形版本 [1, 2, 3, 4]。此外，在给定时空上写出物质场方程时，唯一描述该物质场的参数，例如质量、电荷和磁荷（若存在）以及角动量，都会成为场方程的参数。本文聚焦于旋量场。

旋量由来已久。它们于一个世纪前由 Élie Cartan 首次发现 [5]，在粒子与场理论中发挥着核心作用；粒子与场由旋量场或其张量积表示。旋量是为群 $Spin(D)$ 提供最低维忠实表示的对象；该群是群 $SO(D)$ 的万有覆盖群，也就是 D 维空间中的旋转群 [5, 6]。此外，洛伦兹群可视为具有洛伦兹号差度规的空间中的旋转群，因此旋量可以作为该群所有其他表示的构件。从这个意义上说，

旋量是赋有度规的空间中最基本的对象。除此之外，一类特定的旋量场在研究超对称理论时发挥着重要作用，这类旋量场称为 Killing旋量场。通过由单个 Killing旋量场构造的双线性量，可以生成一整系列 Killing-Yano 张量。这种几何结构能够在相空间中产生额外的超对称性，超对称自旋粒子理论便是一个例证 [7, 8]。Killing 旋量也可用于探究给定解是否具有超对称性，并确定超对称性的数目 [9]。为了更好地理解旋量方法，研究在四维以上维度的更一般弯曲时空中传播的旋量场颇有意义。在关于弯曲时空中物质场传播的浩瀚文献中，涉及旋量场的研究却寥寥无几。其原因并非概念上的困难，而是描述旋量场时涉及更大的技术复杂性，因为旋量形式体系通常会充分考虑维度的特殊性 [10, 11, 12, 13]。本文也旨在弥补这一不足。

满足标准狄拉克方程的旋量场代表自旋1/2粒子，例如质子、电子和中子。自1928年推导出狄拉克方程以来，受广义相对论和量子场论发展的推动，人们已在日益复杂的弯曲时空中研究狄拉克方程及其可分离性质。Brill 和 Wheeler [14], 首先讨论了施瓦西时空中无质量狄拉克方程的可分离性，随后 Unruh 研究了克尔时空中的情形 [15], ；之后，Chandrasekhar 运用纽曼-彭罗斯形式体系 [17]，在一项杰出工作中将研究扩展至有质量情形 [16]。Page [18]将 Chandrasekhar 的结果推广到克尔-纽曼黑洞情形。Teukolsky 将其中许多结果归纳为一个主方程，由此得出克尔时空中任意自旋场的运动方程具有可分离性 [1, 19]。Wu [20]研究了狄拉克方程在著名的四维克尔-纽曼解的一种推广情形中的可分离性；该解是 Cveti˘c 和 Youm 在弦理论中构造的五维带电旋转黑洞。有些类别的黑洞还可能带有磁荷，这种情形称为双荷情形。例如，Semiz [21], 研究了双荷克尔-纽曼黑洞中狄拉克方程的可分离性，而 Dudley 和 Finley [22] 则研究了一类双荷 Petrov D型解中任意自旋无质量场方程的可分离性。我们在 [23, 24], 中也对此作出了一些贡献，具体而言，我们求出了在带电施瓦西时空和纳里艾时空的高维推广背景下、与背景规范场最小耦合的有质量狄拉克方程的分离；这两种时空都带有磁荷。

一般而言，狄拉克方程的变量分离是一项颇具挑战的任务。主要原因在于，尽管测地线哈密顿-雅可比方程和克莱因-戈尔登标量场方程已有一套完善的可分离性理论， [1, 25, 26, 27], 但狄拉克方程至今仍缺乏这样一套完整的可分离性理论。由于目前没有实现狄拉克方程可分离性的一般方法，这一数学问题必须针对每种情况分别处理。然而，狄拉克方程一旦完成变量分离并求解，便可研究许多有趣的现象，包括费米子真空极化、卡西米尔效应、非平凡背景时空中的感生电流以及拓扑缺陷等 [28, 29, 30]。在某些情况下，狄拉克方程的可分离性质与某些对称算子的存在密切相关；这些算子由 Killing-Yano 张量生成，与狄拉克算子对易，并刻画问题中涉及的分离常数 [31, 32]。在克尔几何中，Carter 和 McLenaghan [1, 32] 发现，Chandrasekhar [16] 所得到的狄拉克方程可分离性，源于克尔几何具有一种称为 Killing-Yano 张量的几何结构，该结构使这一场方程得以积分。Cariglia[33] 刻画了任意维数下 Kerr-NUT-(A)dS 时空背景中的狄拉克方程可分离性

并将其与 Oota 和 Yasui [34]找到的狄拉克方程一般解联系起来。然而，在高维情形下，人们甚至尚未全面理解这些对称算子的存在与狄拉克方程所定义空间中的几何结构有何关联，也就是说，尚不清楚可分离性的充要条件。

若干理论试图通过高维理论拓展我们对宇宙的认识，尤其是在观测到宇宙膨胀之后。最受欢迎的是（超）弦理论，这是一种优雅的量子场论，以将超对称性实现为规范对称性为基础 [35]。在我们先前的工作 [23]，中，我们研究了在由二维空间直积构成的一类高维空间上，与 1-形式场（规范场）耦合的狄拉克方程的可分离性。特别是，直积空间也与弦理论紧化中的基空间模型相关 [36, 37]。在这些高维理论中，除了曲率的高阶项之外，度规通常还会辅以其他与旋量场耦合、并会修正标准狄拉克方程的场。这些其他场通常称为通量 [38, 39, 40]。因此，研究允许存在这些通量的空间上的狄拉克方程是否可分离，是很自然的 [41, 42]。

受弦理论启发的一些模型中的思想启发，本文将重点研究在先前工作所研究的同一类空间中，存在任意通量时狄拉克方程的可分离性 [43], 。这类空间由二维空间的直积构成 [23, 24], 。作为这些结果的直接应用，我们将考察一个有质量、带电的自旋-$1/2$ 粒子在某个背景上传播时的狄拉克方程；该背景与时空维数为 $D = 10$ 的复弦启发模型共形相关，是一个同时带有 1-形式场和 3-形式场荷的黑洞解。其基流形是二维单位球面的直积，详见参考文献 [43]。这类黑洞有一点颇为特别：当作用量中包含曲率二次项和 4-形式通量四次项时，在广义相对论极限下，可以写出一个闭式的磁电黑洞解。这提供了一个易于处理且物理内涵丰富的模型。此外，这种黑洞除电荷外还带有磁荷，因此其物理内涵更加丰富。

本文结构安排如下。第 2 节介绍全文所需的工具，以求在由二维空间直积构成的空间背景上实现带通量的狄拉克方程的可分离性。第 3 节中，我们重点讨论通量由 p-形式构成、其中 $p \leq 3$ 的情况下，该背景下狄拉克方程的可分离性。随后，第 4 节将前述结果推广到任意非齐次形式通量。第 5 节利用前几节所得结果，实现 $D = 10$ 时空维数下与磁电黑洞共形相关的背景上的狄拉克方程分离。最后，第 6 节简要总结本文，并探讨这项研究未来的应用。

2 乘积流形与带通量的狄拉克方程

本节旨在构建相应场景，以说明含通量的狄拉克方程在由二维空间直积而成的空间中是可分离的。这类空间是流形（M，$\hat{\boldsymbol{g}}$），其上可以赋予度量张量$\hat{\boldsymbol{g}}$；相对于标准正交基$\hat{\{\boldsymbol{X}}_{\alpha}\}$，其分量在 TM 上的表示为

$$\hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{X}}_{\alpha}, \hat{\boldsymbol{X}}_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{X}}_{a}, \hat{\boldsymbol{X}}_{b}) &= \delta_{ab}, \\ \hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{X}}_{a}, \hat{\boldsymbol{X}}_{\tilde{b}}) &= 0, \\ \hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{X}}_{\tilde{a}}, \hat{\boldsymbol{X}}_{\tilde{b}}) &= \delta_{\tilde{a}\tilde{b}}, \end{cases} \tag{1}$$

ˆ ˜其中，指标 a 和 b 标记 $\{\boldsymbol{X}_{\alpha}\}$的前 n 个向量场，而 $\widetilde{a}$ 和 b 标记 $\{\boldsymbol{X}_{\alpha}\}$的其余 n ˆ 个向量场。流形（M，ˆ$\boldsymbol{g}$）是 n 个二维空间的直积，这些空间可以用坐标 $\{x^1, y^1, x^2, y^2, \ldots, x^n, y^n\}$ 覆盖，使得线元可写为

$$d\hat{s}^2 \;=\; \sum_{a=1}^{n} d\hat{s}_a^2 \;=\; \sum_{a=1}^{n} \left(\hat{\boldsymbol{e}}^{a}\,\hat{\boldsymbol{e}}^{a} \;+\; \hat{\boldsymbol{e}}^{\widetilde{a}}\,\hat{\boldsymbol{e}}^{\widetilde{a}}\right), \tag{2}$$

其中，dˆs_a^2 是仅依赖于两个坐标 $\{x^a, y^a\}$ 的二维线元，分别对应其二维空间；1-形式 $\{$ˆ$\boldsymbol{e}^{\alpha}\}$ 为 T^*M 提供了一组基，而 T^*M 是切空间TM的对偶空间。向量场的导数按照以下关系确定自旋联络

$$\hat{\nabla}_{\alpha}\hat{\boldsymbol{X}}_{\beta} \;=\; \hat{\omega}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\,\hat{\boldsymbol{X}}_{\gamma}\,. \tag{3}$$

由于度规 ˆ$\boldsymbol{g}$ 是协变常张量，因此自旋联络的全下标系数 ˆ$\omega_{\alpha\beta\gamma} =$ ˆ$\omega_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}\,\delta_{\varepsilon\gamma}$ 关于其最后两个下标 ˆ$\omega_{\alpha\beta\gamma} = -$ˆ$\omega_{\alpha\gamma\beta}$ 反对称。不过，由于自旋联络的指标分别通过 $\delta_{\alpha\beta}$ 和 $\delta^{\alpha\beta}$ 降低和升高，标架指标可以自由升降。特别地，相对于（1）中的向量标准正交基，自旋联络的所有非零分量如下

$$\hat{\omega}_{a a\widetilde{a}} \;=\; -\,\hat{\omega}_{a\widetilde{a}a}, \qquad \hat{\omega}_{\widetilde{a}a\widetilde{a}} \;=\; -\,\hat{\omega}_{\widetilde{a}\widetilde{a}a}. \tag{4}$$

ˆ 向量场 $\boldsymbol{X}_{\alpha}$ 可由狄拉克矩阵 γ_{α} 表示；在 $2n$ 维空间中，这些矩阵通过满足以下反对易关系的 $2^n \times 2^n$ 个矩阵忠实地表示克利福德代数

$$\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha} = 2\,\hat{\boldsymbol{g}}\,(\hat{\boldsymbol{X}}_{\alpha}, \hat{\boldsymbol{X}}_{\beta})\,\mathbb{I}_n\,, \tag{5}$$

其中 $\mathbb{I}_n$ 表示 $2^n \times 2^n$ 单位矩阵。

为了实现狄拉克方程的可分离性，我们引入一种便于使用的狄拉克矩阵表示。用泡利矩阵表示为

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \;\; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \;\; \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

这种表示在 $2n$维空间中可写为

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{(a-1)\text{ times}} \otimes \sigma_1 \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I}}_{(n-a)\text{ times}}, \\ \gamma_{\widetilde{a}} &= \underbrace{\sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3}_{(a-1)\text{ times}} \otimes \sigma_2 \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I}}_{(n-a)\text{ times}}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中指标 a 从 1 到 n 取值，$\mathbb{I}$ 为 2×2 单位矩阵。事实上，我们很容易验证，上述矩阵确实满足方程 (5) 给出的克利福德代数。在这种情况下，旋量空间 SM 可视为由 n 个元素组成的列向量空间，这些矩阵作用于该空间，其中的元素称为旋量场，记作 $\boldsymbol{\Psi}$。

t 的一组基　旋量空间 SM 可由以下旋量的直积张成，这些旋量位于 tw　　o 维度

$$\boldsymbol{\xi}^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\xi}^{-} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

在泡利矩阵的作用下，上述旋量简洁地满足以下关系 ons

$$\sigma_1\boldsymbol{\xi}^{s_a} = \boldsymbol{\xi}^{-s_a}, \qquad \sigma_2\boldsymbol{\xi}^{s_a} = i\,s_a\,\boldsymbol{\xi}^{-s_a}, \qquad \sigma_3\boldsymbol{\xi}^{s_a} = s_a\,\boldsymbol{\xi}^{s_a} \quad (\text{no sum over } a), \tag{9}$$

其中旋量指标 s_a 可取值“$+1$”和“-1”。用这些列向量表示， $2n$ 维中的任意旋量场都可以写成

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \sum_{\{s\}} \hat{\Psi}^{s_1 s_2 \ldots s_n} \boldsymbol{\xi}^{s_1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_n}. \tag{10}$$

事实上，由于每个指标 s_a 都只能取两个值，因此对 $\{s\} \equiv \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$求和包含 2^n 项，这恰好是 $2n$ 维旋量空间的维数。

根据构造， γ_α 对 SM 的作用会产生属于 SM的元素。事实上，利用方程 (7)、(9) 和 (10)，最终可得以下恒等式

$$\begin{aligned}
\gamma_a\hat{\boldsymbol{\Psi}} &= \sum_{\{s\}} \left(\prod_{b=1}^{a-1} s_b\right) \hat{\Psi}^{s_1 s_2 \cdots s_{a-1} s_a s_{a+1} \cdots s_n}\, \boldsymbol{\xi}^{s_1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a-1}} \otimes \boldsymbol{\xi}^{-s_a} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_n} \\
&= \sum_{\{s\}} \left(\prod_{b=1}^{a-1} s_b\right) \hat{\Psi}^{s_1 s_2 \cdots s_{a-1} (-s_a) s_{a+1} \cdots s_n}\, \boldsymbol{\xi}^{s_1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a-1}} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_a} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_n}.
\end{aligned} \tag{11}$$

从第一行到第二行，我们将指标 s_a 改为 $-s_a$。最终结果保持不变，因为我们对 s_a的所有取值求和，而这些取值与 $-s_a$的取值列表相同。类似地，我们有

$$\begin{aligned}
\gamma_{\tilde{a}}\hat{\boldsymbol{\Psi}} &= \sum_{\{s\}} \left(\prod_{b=1}^{a-1} s_b\right) (i s_a) \hat{\Psi}^{s_1 s_2 \cdots s_{a-1} s_a s_{a+1} \cdots s_n}\, \boldsymbol{\xi}^{s_1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a-1}} \otimes \boldsymbol{\xi}^{-s_a} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_n} \\
&= \sum_{\{s\}} \left(\prod_{b=1}^{a-1} s_b\right) (-i s_a) \hat{\Psi}^{s_1 s_2 \cdots s_{a-1} (-s_a) s_{a+1} \cdots s_n}\, \boldsymbol{\xi}^{s_1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a-1}} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_a} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_n},
\end{aligned} \tag{12}$$

也就是说，狄拉克矩阵作用于旋量场后，得到的仍是旋量场。旋量场 $\boldsymbol{\Psi}$ 的协变导数以自旋联络定义如下

$$\hat{\nabla}_\alpha \hat{\boldsymbol{\Psi}} = \hat{\partial}_\alpha \hat{\boldsymbol{\Psi}} - \frac{1}{4}\,\hat{\omega}_\alpha{}^{\beta\varepsilon}\,\gamma_\beta\,\gamma_\varepsilon\,\hat{\boldsymbol{\Psi}}\,, \tag{13}$$

ˆ ˆ 其中 ∂_α 表示沿向量场 $\boldsymbol{X}_\alpha$的偏导数

ˆ 我们关注满足以下条件的旋量场 $\boldsymbol{\Psi}$： 它属于修正狄拉克算子 ˆ$D^{\mathcal{F}}$的核，即

$$D^{\hat{\mathcal{F}}}\,\hat{\boldsymbol{\Psi}} = 0\,, \tag{14}$$

ˆ其中 $D^{\mathcal{F}}$ 是算子

$$D^{\hat{\mathcal{F}}} = \hat{D} - \hat{\mathcal{F}} \quad \text{with} \quad \hat{D} = \gamma^\alpha \hat{\nabla}_\alpha. \tag{15}$$

ˆ ˆD 是标准狄拉克算子， $\mathcal{F}$ 是任意非齐次形式，即

$$\hat{\mathcal{F}} = \sum_p \hat{\mathcal{F}}_p \quad \text{with} \quad \hat{\mathcal{F}}_p = \frac{1}{p!}\,\hat{F}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\ldots\gamma^{\alpha_p}, \tag{16}$$

ˆ ˆ 其中 $F_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = F_{[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p]}$ 是一个 p-形式的分量。这包括标准的有质量狄拉克方程、与电磁场最小耦合的狄拉克方程、存在挠率时的狄拉克方程，以及更一般的情形。

我们的目标是将方程 (14) 分离为二维块。为实现这一目标，我们将为旋量分量构造一种合适的试探形式，使其符合背景的对称性。假设旋量场 (10) 的分量具有可分离形式

$$\hat{\Psi}^{s_1 s_2 \cdots s_a \cdots s_n} = \hat{\Psi}_1^{s_1}(x^1, y^1)\, \hat{\Psi}_2^{s_2}(x^2, y^2) \cdots \hat{\Psi}_a^{s_a}(x^a, y^a) \cdots \hat{\Psi}_n^{s_n}(x^n, y^n)\,. \tag{17}$$

ˆ 采用这种形式，我们可以研究在其线元为 ds^2 的 $\mathbf{\Psi}$ 维乘积流形 $2n$ 上，针对一般旋量场 $\mathbf{\Psi}$ 的修正狄拉克方程 (14)，能否约化为旋量场的修正狄拉克方程

$$\hat{\mathbf{\Psi}}_a = \sum_{s_a} \hat{\Psi}_a^{s_a}(x^a, y^a)\, \boldsymbol{\xi}^{s_a}, \tag{18}$$

该方程定义在每个线元为 ds_a^2 的二维子流形上。这使我们能够将 $d\hat{}s^2$ 上的旋量场构造为定义在二维空间 $d\hat{}s_a^2$ 上的旋量场的张量积。事实上，假设 ˆ (17)，旋量场 $\mathbf{\Psi}$ 可写为以下二分量旋量的直积

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{\mathbf{\Psi}}_1 \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{\Psi}}_{a-1} \otimes \hat{\mathbf{\Psi}}_a \otimes \hat{\mathbf{\Psi}}_{a+1} \otimes \cdots \otimes \hat{\mathbf{\Psi}}_n. \tag{19}$$

为求解修正狄拉克方程，我们需要分离场的自由度，而这通常颇具挑战。因此，为求简便，我们先考虑通量由一个 p -形式场构成且满足 $p \leq 3$ 的情形，对狄拉克方程进行分离。随后，我们将其推广到任意 p-形式通量场。

3 秩为 $p \leq 3$ 的通量

为简洁起见，我们先从与一般非齐次通量场耦合的狄拉克方程入手，该通量场最高为 3-形式，方程为

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{F} + \hat{F}_\alpha \gamma^\alpha + \frac{1}{2!}\hat{F}_{\alpha_1\alpha_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2} + \frac{1}{3!}\hat{F}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_3}, \tag{20}$$

ˆ 其中，上述方程中以 F 表示的求和项指的是 0-形式。在存在上述通量的情况下，我们需要将一般方程分解为

$$\left(\hat{D} - \hat{F}_{\alpha_1}\gamma^{\alpha_1} - \frac{1}{2!}\hat{F}_{\alpha_1\alpha_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2} - \frac{1}{3!}\hat{F}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_3}\right)\hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{F}\,\hat{\mathbf{\Psi}} \tag{21}$$

在其二维分块中。一般而言，通量的存在会破坏方程的可分离性，因为通量项以不同狄拉克矩阵的乘积作用于旋量场 $\mathbf{\Psi}$ ，而每个矩阵分别按照方程 (11) 和 (12) 作用于 ˆ$\mathbf{\Psi}$ 。例如，项 ˆ $F_{abc}\gamma^a\gamma^b\gamma^c$ 会改变旋量分量中不同指标的符号。另一方面，协变导数 (13) 本身的定义中也包含狄拉克矩阵的乘积。那么，为什么它不会破坏可分离性呢？原因在于，根据空间几何，协变导数中的狄拉克矩阵以一种非常特殊的方式作用于旋量

场。事实上，在矢量正交归一标架 (1) 中，自旋联络仅有的非零分量是 $\hat{}\omega_{a\tilde{a}a}$ e $\hat{}\omega_{\tilde{a}\tilde{a}a}$，因此

$$\begin{cases} \hat{\nabla}_a \hat{\mathbf{\Psi}} &= \hat{\partial}_a \hat{\mathbf{\Psi}} - \frac{1}{2}\hat{\omega}_{a\tilde{a}a}\,\gamma_{\tilde{a}}\gamma_a\,\hat{\mathbf{\Psi}}, \\ \hat{\nabla}_{\tilde{a}} \hat{\mathbf{\Psi}} &= \hat{\partial}_{\tilde{a}} \hat{\mathbf{\Psi}} - \frac{1}{2}\hat{\omega}_{\tilde{a}\tilde{a}a}\,\gamma_{\tilde{a}}\gamma_a\,\hat{\mathbf{\Psi}}, \end{cases} \tag{22}$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 其中，∂_a 和 $\partial_{\tilde{a}}$ 表示沿向量场 $\boldsymbol{X}_a$ 和 $\boldsymbol{X}_{\tilde{a}}$方向的导数。注意，$\gamma_{\tilde{a}}$ 将指标 s_a 变为 $-s_a$，而 $\gamma_{\tilde{a}}$ 则将其恢复。因此，在由以下形式表示的标准狄拉克算子中，

$$\hat{D} = \gamma^a \hat{\nabla}_a + \gamma^{\tilde{a}} \hat{\nabla}_{\tilde{a}}, \tag{23}$$

对于可分离性而言，旋量指标中实际相关的唯一变化，是狄拉克矩阵 γ_a 和 $\gamma_{\tilde{a}}$ 作用于同一个旋量指标 s_a所产生的变化。

尽管在带有通量的背景中，狄拉克方程的可分离性会带来问题，但我们可以通过规定，唯一可能非零的2-形式和3-形式通量项仅以以下分量出现，来规避这些问题

$$\hat{F}_{\tilde{a}a}, \quad \hat{F}_{a\tilde{b}b}, \quad \text{and} \quad \hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b}, \tag{24}$$

所有这些分量都涉及对旋量场施加以下作用

$$\gamma_a\gamma_{\tilde{a}}\hat{\mathbf{\Psi}} = -\gamma_{\tilde{a}}\gamma_a\hat{\mathbf{\Psi}} = i\sum_{\{s\}} s_a\, \hat{\Psi}^{s_1 s_2 \cdots s_{a-1} s_a s_{a+1} \cdots s_n}\, \boldsymbol{\xi}^{s_1} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a-1}} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_a} \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_{a+1}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\xi}^{s_n}. \tag{25}$$

上述规定可以解释为：在本文所考虑的空间类别中，为使存在通量时的狄拉克方程能够得到令人满意的分离，对通量项分量所作的自然选择。事实上，自旋联络的非零分量本身也具有非常相似的形式。

现在，狄拉克方程具有如下形式

$$\left[\hat{D} - \left(\hat{F}_a\,\gamma^a + \hat{F}_{a\tilde{b}b}\,\gamma^a\gamma^{\tilde{b}}\gamma^b\right) - \left(\hat{F}_{\tilde{a}}\,\gamma^{\tilde{a}} + \hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b}\,\gamma^{\tilde{a}}\gamma^{\tilde{b}}\gamma^b\right)\right]\hat{\mathbf{\Psi}} = \left(\hat{F} + \hat{F}_{\tilde{a}a}\,\gamma^{\tilde{a}}\gamma^a\right)\,\hat{\mathbf{\Psi}}, \tag{26}$$

利用方程 (17) 中的旋量分解——这对修正狄拉克方程的可积性至关重要——以及方程 (11) 和 (12)，并结合恒等式 (25)，可以证明

$$\begin{aligned} &\sum_{\{s\}}\sum_{a=1}^{n}\left(\prod_{c=1}^{a-1} s_c\right)\hat{\Psi}_1^{s_1}\,\hat{\Psi}_2^{s_2}\,\cdots\,\hat{\Psi}_{a-1}^{s_{a-1}}\hat{\Psi}_{a+1}^{s_{a+1}}\cdots\hat{\Psi}_n^{s_n}\left[\left(\hat{\partial}_a + \frac{1}{2}\hat{\omega}_{\tilde{a}a\tilde{a}} - \hat{F}_a + \sum_{\substack{b=1\\b\neq a}}^{n} i s_b\,\hat{F}_{a\tilde{b}b}\right)\right. \\ &\left. -is_a\left(\hat{\partial}_{\tilde{a}} + \frac{1}{2}\hat{\omega}_{a\tilde{a}a} - \hat{F}_{\tilde{a}} + \sum_{\substack{b=1\\b\neq a}}^{n} i s_b\,\hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b}\right)\right]\hat{\Psi}_a^{(-s_a)}\,\boldsymbol{\xi}^{s_1}\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_2}\otimes\cdots\otimes\,\boldsymbol{\xi}^{s_a}\otimes\cdots\otimes\,\boldsymbol{\xi}^{s_b}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_n} \\ &= \sum_{\{s\}}\left(\hat{F} - \sum_{a=1}^{n} i s_a\,\hat{F}_{\tilde{a}a}\right)\,\hat{\Psi}_1^{s_1}\,\hat{\Psi}_2^{s_2}\,\cdots\,\hat{\Psi}_a^{s_a}\cdots\hat{\Psi}_n^{s_n}\,\boldsymbol{\xi}^{s_1}\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_2}\otimes\cdots\otimes\,\boldsymbol{\xi}^{s_a}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_n}. \end{aligned} \tag{27}$$

对修正狄拉克方程的通量分量施加限制，是为了探究如何使旋量场方程中的变量分离。在先前的工作中

ˆ ˆ[23], 我们实现了本文所考虑的空间类中与规范场耦合的狄拉克方程的可分离性，在我们的记号中，该规范场由 F_a 和 $F_{\tilde{a}}$表示。对于这一特定情形，若要使方程可分离为仅依赖于坐标 $\{x^1,\, y^1\}$、$\{x^2,\, y^2\}$ 等的分块，则函数ˆ ˆF_a 和 $F_{\tilde{a}}$ 必须在每个 a的取值下仅依赖于两个坐标 $\{x^a,\, y^a\}$

$$\begin{cases} \hat{F}_a = \hat{F}_a(x^a, y^a), \\ \hat{F}_{\tilde{a}} = \hat{F}_{\tilde{a}}(x^a, y^a). \end{cases} \tag{28}$$

ˆ 此外，0-形式 F 必须是关于这些坐标对$\{x^a,\, y^a\}$的函数之和，其中求和遍历 a ，每一种 a的取值对应一项

$$\hat{F} = \sum_{a=1}^{n} \hat{m}_a \quad \text{with} \quad \hat{m}_a = \hat{m}_a(x^a, y^a). \tag{29}$$

ˆ ˆ ˆ 这里的新意在于 2-形式和 3-形式通量中的项 $F_{\tilde{a}a}$、$F_{a\tilde{b}b}$和 $F_{\tilde{a}\tilde{b}b}$。按照相同的步骤，这些场应具有如下函数依赖

$$\begin{cases} \hat{F}_{\tilde{a}a} = \hat{F}_{\tilde{a}a}(x^a, y^a), \\ \hat{F}_{a\tilde{b}b} = \hat{F}_{a\tilde{b}b}(x^a, y^a), \\ \hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b} = \hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b}(x^a, y^a). \end{cases} \tag{30}$$

这些假设导出以下方程

$$\sum_{a=1}^{n} \left\{ \left(\prod_{c=1}^{a-1} s_c \right) \frac{1}{\hat{\Psi}_a^{s_a}} \left[\not{D}_a^{s_a} + \sum_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{n} i s_b \left(\hat{F}_{a\tilde{b}b} - i s_a \, \hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b} \right) \right] \hat{\Psi}_a^{(-s_a)} - \left(\hat{m}_a - i s_a \, \hat{F}_{\tilde{a}a} \right) \right\} = 0 \,, \tag{31}$$

其中，上文使用的算子$\not{D}_a^{s_a}$ 定义如下

$$\not{D}_a^{s_a} = \left(\hat{\partial}_a + \frac{1}{2} \hat{\omega}_{\tilde{a}a\tilde{a}} - \hat{F}_a \right) - i s_a \left(\hat{\partial}_{\tilde{a}} + \frac{1}{2} \hat{\omega}_{a\tilde{a}a} - \hat{F}_{\tilde{a}} \right). \tag{32}$$

注意，方程 (31) 中对 a 求和的每一项都只依赖于两个坐标 $\{x^a, y^a\}$。要使这些项的和为零，每一项都必须是一个常数，记为 $\eta_a^{\{s\}}$，此处称为分离常数，且这些常数之和为零。于是，我们得到关于ˆ$\Psi_a^{s_a}$和ˆ $\Psi^{(-s_a)_a}$ 的如下耦合的一阶微分方程组

$$\left(\prod_{c=1}^{a-1} s_c \right) \left[\not{D}_a^{s_a} + \sum_{\substack{b=1 \\ b\neq a}}^{n} \frac{i s_b}{3} \left(\hat{F}_{a\tilde{b}b} - i s_a \, \hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b} \right) \right] \hat{\Psi}_a^{(-s_a)} = \left(\eta_a^{\{s\}} + \hat{m}_a - i s_a \, \hat{F}_{\tilde{a}a} \right) \hat{\Psi}_a^{s_a} \,, \tag{33}$$

分离常数满足以下约束

$$\sum_{a=1}^{n} \eta_a^{\{s\}} = 0. \tag{34}$$

在下一节中，我们将把这一过程推广到最一般的情形，即狄拉克方程与同一类时空中的任意通量耦合。

4 任意通量

本节中，我们将对通量具有任意非齐次形式（即零形式至 p 形式的组合）时的狄拉克方程进行分离。为此，按照上一节提出的思路，我们可以先将 $\mathcal{F}$ 分为偶部和奇部，即

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{F} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m)!} \hat{F}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}} \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\ldots\gamma^{\alpha_{2m}} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(2m+1)!} \hat{F}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m+1}} \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\ldots\gamma^{\alpha_{2m+1}}. \tag{35}$$

这一分解在下文中具有重要的实际意义。于是，修正狄拉克方程可写为

$$\left(\hat{D} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{(2m)!} \hat{F}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}} \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\ldots\gamma^{\alpha_{2m}} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(2m+1)!} \hat{F}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m+1}} \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\ldots\gamma^{\alpha_{2m+1}}\right) \hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{F}\,\hat{\mathbf{\Psi}}, \tag{36}$$

ˆ其中 F 表示 0-形式。对于这一一般情形，我们将证明，只要唯一可能非零的通量分量具有以下指标结构，耦合任意通量的狄拉克方程便可分离

$$\hat{F}_{\widetilde{b_1}b_1\widetilde{b_2}b_2\cdots\widetilde{b_m}b_m}, \quad \hat{F}_{a\,\widetilde{b_1}b_1\widetilde{b_2}b_2\cdots\widetilde{b_m}b_m}, \quad \text{and} \quad \hat{F}_{\widetilde{a}\,\widetilde{b_1}b_1\widetilde{b_2}b_2\cdots\widetilde{b_m}b_m} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n). \tag{37}$$

对于这些项，狄拉克矩阵对旋量场的作用如下

$$\begin{aligned}\gamma_{\widetilde{b_1}}\gamma_{b_1}\gamma_{\widetilde{b_2}}\gamma_{b_2}\cdots\gamma_{\widetilde{b_m}}\gamma_{b_m}\hat{\mathbf{\Psi}} &= (-i)^m \sum_{\{s\}} s_{b_1}s_{b_2}\cdots s_{b_m}\, \hat{\Psi}^{s_1s_2\cdots s_{b-1}s_bs_{b+1}\cdots s_n} \\ &\times \boldsymbol{\xi}^{s_1}\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_{b-1}}\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_b}\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_{b+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_n}.\end{aligned} \tag{38}$$

现在，假设采用方程 (17) 中定义的旋量分量分解，并将恒等式 (38) 代入方程 (36)，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\{s\}}\sum_{a=1}^{n}\left(\prod_{c=1}^{a-1}s_c\right)\hat{\Psi}_1^{s_1}\,\hat{\Psi}_2^{s_2}\,\cdots\,\hat{\Psi}_{a-1}^{s_{a-1}}\hat{\Psi}_{a+1}^{s_{a+1}}\cdots\hat{\Psi}_n^{s_n}\times \\ &\times\left[\not{D}_a^{s_a} - \sum_{\substack{\{b\}\\ b\neq a}}\sum_{m=1}^{n}(-i)^m\, s_{b_1}s_{b_2}\cdots s_{b_m}\left(\hat{F}_{a\,\widetilde{b_1}b_1\widetilde{b_2}b_2\cdots\widetilde{b_m}b_m} - is_a\,\hat{F}_{\widetilde{a}\,\widetilde{b_1}b_1\widetilde{b_2}b_2\cdots\widetilde{b_m}b_m}\right)\right]\hat{\Psi}_a^{(-s_a)} \\ &\times\boldsymbol{\xi}^{s_1}\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_a}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_n} \\ &=\sum_{\{s\}}\left(\hat{F} + \sum_{a=1}^{n}\sum_{\substack{\{b\}\\ b\neq a}}\sum_{m=1}^{n}(-i)^m s_a s_{b_1}\cdots s_{b_{m-1}}\,\hat{F}_{\widetilde{a}\,a\,\widetilde{b_1}b_1\cdots\widetilde{b_{m-1}}b_{m-1}}\right)\hat{\Psi}_a^{s_a} \\ &\times\hat{\Psi}_1^{s_1}\,\hat{\Psi}_2^{s_2}\,\cdots\,\hat{\Psi}_{a-1}^{s_{a-1}}\hat{\Psi}_{a+1}^{s_{a+1}}\cdots\hat{\Psi}_n^{s_n}\,\boldsymbol{\xi}^{s_1}\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_a}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\xi}^{s_n},\end{aligned} \tag{39}$$

其中微分算子 $\not{D}_a^{s_a}$ 的定义与方程 (32) 中相同。同样，为了保证可分离性，对于一般通量情形，需要假设所有非零通量分量都应

仅依赖于坐标 $\{x^a, y^a\}$，如下所述

$$\begin{cases} \hat{F}_{\widetilde{a}\,a\,\widetilde{a_1}a_1\cdots\widetilde{a_{m-1}}a_{m-1}} = \hat{F}_{\widetilde{a}\,a\,\widetilde{a_1}a_1\cdots\widetilde{a_{m-1}}a_{m-1}}(x^a, y^a), \\ \hat{F}_{a\,\widetilde{a_1}a_1\cdots\widetilde{a_m}a_m} = \hat{F}_{a\,\widetilde{a_1}a_1\cdots\widetilde{a_m}a_m}(x^a, y^a), \\ \hat{F}_{\widetilde{a}\,\widetilde{a_1}a_1\cdots\widetilde{a_m}a_m} = \hat{F}_{\widetilde{a}\,\widetilde{a_1}a_1\cdots\widetilde{a_m}a_m}(x^a, y^a), \\ \hat{F} = \sum_{a=1}^{n} \hat{m}_a(x^a, y^a). \end{cases} \tag{40}$$

ˆ ˆ ˆ 对旋量分量 $\Psi_1^{s_1}$、$\Psi_2^{s_2}$、$\cdots$、$\Psi_2^{s_n}$ 进行因式分解后，我们得出

$$\begin{aligned} \left(\prod_{c=1}^{a-1} s_c\right) \left[\not{D}_a^{s_a} - \sum_{\substack{\{b\} \\ b\neq a}}^{n} \sum_{m=1}^{n} (-i)^m \, s_{b_1} s_{b_2} \cdots s_{b_m} \left(\hat{F}_{a\,\widetilde{b_1}b_1\cdots\widetilde{b_m}b_m} - i s_a \, \hat{F}_{\widetilde{a}\,\widetilde{b_1}b_1\cdots\widetilde{b_m}b_m} \right) \right] \hat{\Psi}_a^{(-s_a)} \\ = \left(\eta_a^{\{s\}} + \hat{m}_a + \sum_{\substack{\{b\} \\ b\neq a}}^{n} \sum_{m=1}^{n} (-i)^m \, s_a s_{b_1} s_{b_2} \cdots s_{b_{m-1}} \, \hat{F}_{\widetilde{a}\,a\,\widetilde{b_1}b_1\cdots\widetilde{b_{m-1}}b_{m-1}} \right) \hat{\Psi}_a^{s_a} , \end{aligned} \tag{41}$$

其中，新的分离常数 $\eta_a^{\{s\}}$ 满足相同的约束条件 (34)。

这一结果是 [23]，中所得结果的推广；在该文中，我们展示了在偶数维流形上，最小耦合于规范场的狄拉克方程如何在由二维空间构成的直积形式下实现可分离。采用这种可分离形式后，我们应当能够将狄拉克方程化为成对耦合的一阶微分方程，也就是说，一个涉及分量 ˆ ˆ ˆ ˆ$\Psi_a^{-s_a}$ 的方程以 $\Psi_a^{s_a}$ 为源项，反之亦然。在这种情况下，我们可以消去 $\Psi_a^{s_a}$ 或 $\Psi_a^{-s_a}$，从而为每个分量 $\Psi_a^{s_a}$ 得到一个解耦的 ˆ 二阶微分方程；这正是广义狄拉克方程可分离所需的条件。

实际上，对于一些最著名的时空，线元取决于坐标 t和 r，例如， t 是度规的循环坐标。在这种情况下，狄拉克场方程 (41) 可以分离并解耦为一个纯径向方程。下一节将介绍一个应用。

5 弦启发模型： $D = 10$ 时空维数

本节将讨论质量为 $1/2$ 的带电自旋粒子在 $D = 10$ 时空维数中、由 [43]描述的复弦启发模型背景下传播时的狄拉克方程。这些模型包括带有 1-形式场和 3-形式场电荷的黑洞解，其基流形的视界是四个二维单位球面的乘积， S^2。

对于该模型，黑洞解可以用坐标 $\{x^\mu\} = \{t, r, z_j, \bar{z}_j\}$覆盖，其中$j \in \{2, 3, 4, 5\}$，线元可写为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r)\, dt^2 + \frac{1}{f(r)}\, dr^2 + r^2 \sum_{j=2}^{5} \frac{dz_j d\bar{z}_j}{(1 + \frac{1}{4}\kappa\, z_j \bar{z}_j)^2} \,. \tag{42}$$

在这个线元中， $f = f(r)$ 是由四次多项式方程确定的径向坐标 r 的函数

$$\alpha^3 r^8 \left(g_0 f^4 - g_1 \kappa f^3 + g_2 |\kappa| f^2 - g_3 \kappa f + g_4 |\kappa| \right) - g_5 r^{14} f = T, \tag{43}$$

其中物质内容为

$$T = -t_1(Q_1)^2 - t_2(Q_2)^2 r^4 + t_3 \ell_P^8 M r^7 + t_4 Q_m r^8 - t_5 \kappa r^{14}. \tag{44}$$

这里，参数（M, Q_1, Q_2, Q_m）分别对应黑洞的质量、两个电荷和一个磁荷，而 g_j, t_j 是特定的数值系数 [43]。坐标 $\{z_j, \bar{z}_j\}$所覆盖的区域是一个最大对称流形，其曲率参数 κ完全确定了该区域。当 $\kappa = 1$时，该区域为二维球面（S^2）；当$\kappa = -1$ 时，为二维双曲空间（$\mathbb{H}^2$）；当 $\kappa = 0$时，为二维欧几里得空间（$\mathbb{R}^2$）。解的详情可参阅文献 [43]。

考虑基流形的度量张量由四个单位二维球面（$\kappa = 1$）的乘积构成的情形。该情形局部对应于存在1-形式和3-形式通量时的静态黑洞解，其外微分分别为

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_2 = \frac{Q_1}{r^8}\, dt \wedge dr, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_4 = \frac{Q_2}{r^4}\, dt \wedge dr \wedge \sum_{j=2}^{5} \mathrm{vol}(S_j^2) + Q_m \sum_{j<i}^{5} \mathrm{vol}(S_j^2) \wedge \mathrm{vol}(S_i^2), \tag{45}$$

其中，vol(S_j^2) 是第 j 个二维球面上的体积形式。在将背景度量张量写成前几节所示的形式之前，我们先进行一个方便的坐标变换。我们不再使用复射影坐标 $\{z_j, \bar{z}_j\}$，而是用两个球坐标角 $\{\theta_j, \phi_j\}$ 来参数化二维球面，它们与复坐标 z_j 的关系如下

$$\theta_j(z_j) = 2 \arctan\left(\frac{|z_j|}{2}\right) \quad \text{and} \quad \phi_j(z_j) = \arg(z_j). \tag{46}$$

例如，该变换将复射影域中的点 $z_j = 0$ 和 $z_j = \infty$ 分别映射到 $\theta_j = 0$ 和 $\theta_j = \pi$，这两点正是球坐标系失效的位置。用这些坐标表示，线元 (42) 写为

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -f(r)\, dt^2 + \frac{1}{f(r)}\, dr^2 + r^2 \sum_{j=2}^{5} \left(d\theta_j^2 + \sin^2\theta_j\, d\phi_j^2\right), \tag{47}$$

此类解的 1-形式和 3-形式构型为

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_1 = \frac{Q_1}{7\, r^7}\, dt, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_3 = \frac{Q_2}{3\, r^3}\, dt \wedge \sum_{j=1}^{4} \sin\theta_j\, d\theta_j \wedge d\phi_j + Q_m \sum_{j<i}^{4} \cos\theta_j\, d\phi_j \wedge \sin\theta_i\, d\theta_i \wedge d\phi_i. \tag{48}$$

值得回顾的是，若存在由等距变换构成的 $SO(3)$ 作用，且其轨道为空间状的二维球面，则时空具有球对称性。显然，此处并非如此，因为线元的角向部分是四个二维球面的直积，因此背景具有$SO(3) \times SO(3) \times SO(3) \times SO(3)$ 对称性。对于这四个球面中的每一个，都存在三个相互独立、生成旋转的Killing矢量，即

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{1,j} = \sin\phi_j\, \partial_{\theta_j} + \cot\theta_j \cos\phi_j\, \partial_{\phi_j}, \\ \mathbf{K}_{2,j} = \cos\phi_j\, \partial_{\theta_j} - \cot\theta_j \sin\phi_j\, \partial_{\phi_j}, \\ \mathbf{K}_{3,j} = \partial_{\phi_j}. \end{cases} \tag{49}$$

除这些Killing矢量外，$\mathsf{K}_t = \partial_t$ 也生成一个等距变换。特别是，平凡Killing矢量场K_t 和$\mathsf{K}_{3,j}$ 的存在意味着度规系数与坐标 t 和 ϕ_j 无关，因此可以用傅里叶基分解旋量分量对这些坐标的依赖。这将非常有助于简化狄拉克方程的径向部分和角向部分。

在上一节中，我们证明了，在任意通量存在的情况下，狄拉克方程在一类度规为二维空间直积的空间中可以分离。显然，这里并非如此，因为线元的角向部分前面带有乘法因子 r^2 。为克服这一限制，我们可以从线元 (42) 中提出函数 r^2 ，并定义

$$d\hat{s}^2 = \Omega^2\, ds^2 \quad \text{with} \quad \Omega = r^{-1}\,, \tag{50}$$

它 与我们的初始线元共形相关。这样，新的线元变为 es

$$d\hat{s}^2 = -\frac{f(r)}{r^2}\, dt^2 + \frac{1}{r^2 f(r)}\, dr^2 + \sum_{j=2}^{5} \left(d\theta_j^2 + \sin_j^2\, d\phi_j^2\right) = \sum_{a=1}^{5} d\hat{s}_a^2\,, \tag{51}$$

其中

$$d\hat{s}_1^2 = -\frac{f(r)}{r^2}\, dt^2 + \frac{1}{r^2 f(r)}\, dr^2, \quad d\hat{s}_j^2 = d\theta_j^2 + \sin^2\theta_j\, d\phi_j^2. \tag{52}$$

这个线元为 $d\hat{}s^2$ 的共形变换后的空间是二维空间的直积。事实上， $d\hat{}s_1^2$ 仅取决于坐标 t 和 r，而 $d\hat{}s_j^2$ 则取决于角坐标 θ_j 和 ϕ_j。对于这一类特定时空，我们能够得到修正狄拉克方程（方程 (41)）的可分离性。为恰当地实现这种可分离性，我们需要引入一个合适的正交归一标架。共形空间 (51) 的这一标架为

$$\hat{\boldsymbol{e}}^1 = \frac{i\sqrt{f}}{r}\, dt, \quad \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{1}} = \frac{1}{r\sqrt{f}}\, dr, \quad \hat{\boldsymbol{e}}^j = \sin\theta_j\, d\phi_j \quad \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{j}} = d\theta_j. \tag{53}$$

线元可以用这个标架改写成如下的简单形式

$$d\hat{s}^2 = \sum_{a=1}^{5} \left(\hat{\boldsymbol{e}}^a\, \hat{\boldsymbol{e}}^a + \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{a}}\, \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{a}}\right), \tag{54}$$

而 1-形式和 3-形式通量可改写为

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_1 = F_a\, \hat{\boldsymbol{e}}^a + F_{\tilde{a}}\, \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{a}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_3 = F_{a\tilde{b}b}\, \hat{\boldsymbol{e}}^a \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{b}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b + F_{\tilde{a}\tilde{b}b}\, \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{a}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^{\tilde{b}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}^b, \tag{55}$$

其非零分量为

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{i\, Q_1}{7\, r^6\sqrt{f}}, \\ F_{1\tilde{j}\,j} = -\dfrac{i\, Q_2}{3\, r^2\sqrt{f}}, \quad F_{j\tilde{i}\,i} = Q_m\, \cot\theta_i\,. \end{cases} \tag{56}$$

例如，注意通量分量不会混合径向坐标和角坐标。这实际上反映了线元为 (51) 的空间是由二维空间的直积构成的这一事实。

注意，我们本可以直接在 ds^2 上考虑狄拉克方程，而该空间并非二维空间的直积；随后利用共形变换下的不变性，将线元为 ds^2 的时空中的相关量与定义在 $\hat{d}s^2$ 上的量联系起来，正如我们在先前的工作 [23] 中所做的类似处理。这样做时，尽管所得方程的形式与我们在上一节成功分离的方程相同，但分量 $F_{j\tilde{i}i}$ 会混合径向坐标和角坐标，因此我们不得不考虑背景中的磁场为零。

现在，考虑一个质量为 m 、电荷为 q的自旋 $1/2$粒子，它在由度规（51）描述的背景$\hat{}$上传播。这样的粒子由旋量场 $\mathbf{\Psi}$ 表示，并满足以下广义狄拉克方程

$$\left[\hat{D} - q\left(i\,\mathcal{F}_1 + \frac{1}{4}\,\mathcal{F}_3\right)\right]\hat{\mathbf{\Psi}} = m\,\hat{\mathbf{\Psi}}, \tag{57}$$

其中， $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_3$ 分别表示背景的1-形式通量和3-形式通量。上式中引入因子 $-1/4$ ，是为了使秩为 3 [44, 45]的通量存在时，狄拉克算子满足薛定谔–利希nerowicz型公式。利用 $F_{\tilde{a}} = 0$ 和 $F_{\tilde{a}\tilde{b}b} = 0$这一事实，可将其写成以下形式

$$\left[\hat{D} - q\left(i\,F_a\,\gamma^a + \frac{1}{4}\,F_{a\tilde{b}b}\,\gamma^a\,\gamma^{\tilde{b}}\,\gamma^b\right)\right]\hat{\mathbf{\Psi}} = m\,\hat{\mathbf{\Psi}}. \tag{58}$$

为了将上式写成修正狄拉克方程（26）的形式，我们应设

$$\hat{F}_a = i\,q\,F_a, \quad \hat{F}_{\tilde{a}} = 0, \quad \hat{F}_{a\tilde{a}} = 0, \quad \hat{F}_{a\tilde{b}b} = \frac{q}{4}\,F_{a\tilde{b}b}, \quad \hat{F}_{\tilde{a}\tilde{b}b} = 0\,, \tag{59}$$

以及

$$\hat{m}_1 = m \quad \text{and} \quad \hat{m}_j = 0. \tag{60}$$

利用这些关系，我们得到以下场方程

$$\left(\hat{D} - \hat{F}_a\,\gamma^a - \hat{F}_{a\tilde{b}b}\,\gamma^a\gamma^{\tilde{b}}\gamma^b\right)\hat{\mathbf{\Psi}} = \hat{m}_1\hat{\mathbf{\Psi}}, \tag{61}$$

这恰好就是我们在上一节成功分离出的方程形式。

根据线元 (51) 中采用的指标约定，对于 $a = 1$，我们有 $\hat{d}s_1^2$、 F_1，且 $F_{1\tilde{j}j}$ 仅依赖于坐标 t 和 r；而对于 $a = j$，我们有 $\hat{d}s_j^2$，且 $F_{j\tilde{i}i}$ 依赖于角坐标 θ_j 和 ϕ_j。因此，选择坐标时采用以下约定较为方便

$$x^1 = t \quad , \quad y^1 = r \quad , \quad x^j = \phi_j \quad , \quad y^j = \theta_j\,. \tag{62}$$

特别地， $F_{1\tilde{j}j}$和 $F_{j\tilde{i}i}$仅取决于与第一个指标相关的坐标。这对于验证背景度规中的场方程是否具有可分离性至关重要，正如第 3 节所讨论的，因为约束条件 (30) 自然满足。因此，由方程 (32) 和 (41) 可知，径向旋量分量 $\hat{}\,\hat{}\,\Psi_1^{s_1} = \Psi_1^{s_1}(t, r)$ 满足以下微分方程

$$\left[\left(\hat{\partial}_1 + \frac{1}{2}\,\hat{\omega}_{\tilde{1}1\tilde{1}} - \hat{F}_1\right) - is_1\left(\hat{\partial}_{\tilde{1}} + \frac{1}{2}\,\hat{\omega}_{1\tilde{1}1} - \hat{F}_{\tilde{1}}\right) + \sum_{j=2}^{5} is_j\left(\hat{F}_{1j\tilde{j}} - i\,s_1\hat{F}_{\tilde{1}\tilde{j}j}\right)\right]\hat{\Psi}_1^{(-s_1)} = \left(\eta_1^{\{s\}} + \hat{m}_1\right)\hat{\Psi}_1^{s_1}. \tag{63}$$

径向方程中出现的参数 $\eta_1^{\{s\}}$ 是依赖于角向方程的常数。每个带有 $j \geq 2$ 的角向旋量分量 $\hat{}\,\Psi_j^{s_j} = \hat{}\,\Psi_j^{s_j}(\theta_j, \phi_j)$ 都满足以下微分方程

$$\left[\left(\hat{\partial}_j + \frac{1}{2}\,\hat{\omega}_{\tilde{j}j\tilde{j}} - \hat{F}_j\right) - is_j\left(\hat{\partial}_{\tilde{j}} + \frac{1}{2}\,\hat{\omega}_{j\tilde{j}j} - \hat{F}_{\tilde{j}}\right) + \sum_{i\neq j}^{5} is_i\left(\hat{F}_{j\tilde{i}i} - is_j\,\hat{F}_{\tilde{j}\tilde{i}i}\right)\right]\hat{\Psi}_j^{(-s_j)} = \left(\prod_{a=1}^{j-1} s_a\right)\eta_j^{\{s\}}\,\hat{\Psi}_j^{s_j}, \tag{64}$$

~关于方程 (53) 中考虑的 1-形式标架 $\{\hat{}\boldsymbol{e}^a, \hat{}\boldsymbol{e}^a\}$，根据方程 (56) 和 (59)，自旋联络和通量场唯一非零的分量为

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{1\tilde{1}1} = -\,\hat{\omega}_{11\tilde{1}} = \dfrac{r\,f' - 2f}{2\sqrt{f}}, \quad \hat{F}_1 = -\dfrac{iq\,Q_1}{7\,r^6\sqrt{f}}, \quad \hat{F}_{1\tilde{j}j} = -\dfrac{i\,q\,Q_2}{12\,r^2\sqrt{f}}, \\ \hat{\omega}_{j\tilde{j}j} = -\,\hat{\omega}_{jj\tilde{j}} = \cot\theta_j, \quad \hat{F}_{j\tilde{i}i} = \dfrac{q\,Q_m}{4}\,\cot\theta_j \quad \text{for} \quad i \neq j \geq 2, \end{cases} \tag{65}$$

其中 f' 表示 f 对其变量 r 的导数。然后，将这些表达式代入方程 (63) 和 (64)，可得以下微分方程

$$\left[is_1\left(\frac{r}{i\sqrt{f}}\,\partial_t + \frac{iq\,Q_1}{7\,r^6\sqrt{f}} - \frac{iq\,Q_2}{12\,r^2\sqrt{f}}\sum_{j=2}^{5} s_j\right) + \left(r\sqrt{f}\,\partial_r + \frac{r\,f' - 2f}{4\sqrt{f}}\right)\right]\hat{\Psi}_1^{(-s_1)} = \left(\kappa_1^{\{s_1,s_j\}} + is_1 m\right)\hat{\Psi}_1^{s_1}, \tag{66}$$

$$\left[is_j\left(\frac{1}{\sin\theta_j}\,\partial_{\phi_j} + \frac{q\,Q_m}{4}\cot\theta_j\sum_{i\neq j}^{5} s_i\right) + \left(\partial_{\theta_j} + \frac{1}{2}\cot\theta_j\right)\right]\hat{\Psi}_j^{(-s_j)} = \kappa_j^{\{s_1,s_j\}}\hat{\Psi}_j^{s_j} \quad \text{if } j \geq 2, \tag{67}$$

其中参数 $\kappa_a^{\{s_1,s_j\}}$定义为

$$\kappa_a^{\{s_1,s_j\}} = i\left(\prod_{b=1}^{a} s_b\right)\eta_a^{\{s\}} \quad \forall\ a, \tag{68}$$

对于每个 a，这些常数取决于 $\{s\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$。我们需要在由二维空间直积构成的空间中求解上述方程，求出 $\hat{}\,\Psi_1^{s_1}(t, r)$ 和 $\hat{}\,\Psi_j^{s_j}(\phi_j, \theta_j)$。在接下来的小节中，我们将分析该模型中修正狄拉克方程的角向部分和径向部分。

5.1 角向部分

首先，我们来求解满足微分方程 (67) 的旋量场的角向部分。由于方程中关于 $\hat{}\,\Psi_j^{s_j}$ 的系数不依赖于坐标 ϕ_j，这是因为 ∂_{ϕ_j} 是我们度规的一个 Killing 矢量场，因此我们可以将 $\hat{}\,\Psi_j^{s_j}$ 对坐标 ϕ 的依赖展开为傅里叶基

$$\hat{\Psi}_j^{s_j}(\phi_j, \theta_j) = e^{-i\,\omega_j\phi_j}\,\hat{\psi}_j^{s_j}(\theta_j). \tag{69}$$

为简化记法，我们省略了对傅里叶频率 ω_j所有取值的积分；由于我们研究的是自旋-1/2 场，这些频率都是半整数。其依据是旋量场在旋转下众所周知的性质。当旋量

空间发生 -1角旋转时，自旋-1/2 场会乘以 -1。实现这一点的方法是令傅里叶频率 ω_j只取半整数值 [46, 47]:

$$\omega_j = \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{5}{2},\ \cdots\ . \tag{70}$$

因此，场方程 (67) 导出

$$\left[\frac{d}{d\theta_j} + \frac{1}{2}\cot\theta_j + s_j\left(\frac{\omega_j}{\sin\theta_j} + \frac{i\,q\,Q_m}{4}\cot\theta_j\sum_{i\neq j}^{5} s_i\right)\right]\hat{\psi}_j^{(-s_j)} = \kappa_j^{\{s_1,s_j\}}\hat{\psi}_j^{s_j} \quad \text{if } j\geq 2. \tag{71}$$

注意，这个一阶微分方程将旋量场的角分量 $\hat{}\,\psi_j^{+}$和 $\hat{}\,\psi_j^{-}$ 耦合在一起。为了分离这些分量，我们需要再对该方程求一次导数，经过一些代数运算后，得到方程

$$\frac{1}{\sin\theta_j}\frac{d}{d\theta_\ell}\left[\sin\theta_j\frac{d}{d\theta_j}\hat{\psi}_j^{(-s_j)}\right] + A(\{s\},\theta_j)\,\hat{\psi}_j^{(-s_j)} = 0, \tag{72}$$

其中， $A(\{s\},\theta_j)$ 是由下式给出的函数

$$\begin{aligned} A(\{s\},\theta_j) = {} & \frac{\left[4 + q^2Q_m^2\left(\sum_{i\neq j}^{5} s_i\right)^2\right]\cos^2\theta_j}{16\sin^2\theta_j} - \frac{\left(2 + i\,q\,Q_m s_j\sum_{i\neq j}^{5} s_i\right)s_j\omega_j\cos\theta_j}{2\sin^2\theta_j} \\ & - \frac{2 + i\,q\,Q_m s_j\sum_{i\neq j}^{5} s_i + 4\omega_j^2}{4\,\sin^2\theta_j} - \kappa_j^{\{s_1,s_j\}}\kappa_j^{\{s_1,-s_j\}}. \end{aligned} \tag{73}$$

该方程还必须满足场 $\psi_j^{s_j}$ 在点 $\theta_j = 0$ 和 $\theta_j = \pi$处的正则性条件，因为我们的坐标系在这些点处失效。这些正则性条件将求解上述方程的问题转化为一个斯图姆–刘维尔问题，因此分离常数 λ_j 可能取到的值构成一个离散集合。

一般而言，参数 $\kappa_j^{\{s_1,s_j\}}$取决于集体指标 $\{s\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$的每个 2^5 值。然而，当黑洞磁荷 Q_m 为零时，它们不能取决于 $\{s\}$的所有取值。相反， $\kappa_j^{\{s\}}$ 只取决于 s_j，因此我们可以令 $\kappa_j^{\{s_1,s_j\}} = s_j\lambda_j$，其中 λ_j 是不依赖于 $\{s\}$的常数。在这种情况下，令 $Q_m = 0$，我们得到以下方程

$$\left[\frac{d}{d\theta_j} + \frac{1}{2}\cot\theta_j + \frac{s_j\,\omega_j}{\sin\theta_j}\right]\hat{\psi}_j^{(-s_j)} = s_j\,\lambda_j\,\hat{\psi}_j^{s_j} \quad \text{if } j\geq 2, \tag{74}$$

这是二维单位球面上的狄拉克方程，其特征值 λ_j 已知 [46, 47]。事实上，只有当特征值 λ_j 为非零整数时，后一个方程才在球面上存在正则解析解

$$\lambda_j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots. \tag{75}$$

在这个特定情形下，径向方程中出现的参数 $\kappa_1^{\{s\}}$ 取决于这些特征值，其表达式如下： [23]

$$\kappa_1^{\{s\}} = -\lambda_2 - s_2\lambda_3 - s_2s_3\lambda_4 - s_2s_3s_4\lambda_5. \tag{76}$$

然而，一般而言，该参数的允许取值并不为人所知，因为对于情形 $Q_m \neq 0$ ，方程 (72) 的解尚不为人所知。要解这个方程，需要采用半解析或数值方法。对于情形 $Q_m \neq 0$ ，也可以利用微扰技术寻找近似解，其中 Q_m 为微扰参数，

5.2 径向部分

现在，我们将研究表达式（66）中的径向方程组。由于 ∂_t 是我们度规的一个 Killing矢量场^，我们可以在傅里叶基中展开 $\Psi_1^{s_1}$ 的时间依赖性

$$\hat{\Psi}_1^{s_1}(t,r) \,=\, e^{-i\omega t}\,\hat{\Psi}_1^{s_1}(r)\,, \tag{77}$$

为简洁起见，这里我们再次省略了对 ω 的积分。将上述表达式代入方程（66）后，我们得到以下微分方程

$$\left[r\sqrt{f}\,\frac{d}{dr} + \frac{r\,f' - 2f}{4\sqrt{f}} + \frac{is_1}{\sqrt{f}}\left(-\omega r + \frac{iq\,Q_1}{7\,r^6} - \frac{iq\,Q_2}{12\,r^2}\sum_{j=2}^{5} s_j\right)\right]\hat{\Psi}_1^{(-s_1)} = \left(\kappa_1^{\{s\}} + is_1 m\right)\hat{\Psi}_1^{s_1}. \tag{78}$$

方程（78）中的径向方程形式表明，我们可以不再使用常数 $\{\kappa_1^{\{s\}}, m\}$，而是引入由下式定义的参数 $\{\zeta^{\{s\}}, \mu^{\{s\}}\}$

$$\zeta^{\{s\}} = \arctan\left(\frac{m}{\kappa_1^{\{s\}}}\right) \quad \text{and} \quad \mu^{\{s\}} = \sqrt{\left(\kappa_1^{\{s\}}\right)^2 + m^2}. \tag{79}$$

反演这些表达式可证明，参数 $\{\kappa_1^{\{s\}}, m\}$ 与参数 $\{\zeta, \mu\}$ 之间由以下表达式相关

$$\kappa_1^{\{s\}} = \mu^{\{s\}}\,\cos\zeta^{\{s\}} \quad \text{and} \quad m = \mu^{\{s\}}\,\sin\zeta^{\{s\}}. \tag{80}$$

除参数变换外，如果我们进一步进行场重定义

$$\hat{\Psi}_1^{s_1}(r) = e^{-is_1\zeta^{\{s\}}/2}\,\Phi_1^{s_1}(r), \tag{81}$$

我们看到，方程（78）可化简为

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{r\,f' - 2f}{4rf} - \frac{is_1}{f}\left(\omega - \frac{iq\,Q_1}{7\,r^7} + \frac{iq\,Q_2}{12\,r^3}\sum_{j=2}^{5} s_j\right)\right]\Phi_1^{(-s_1)} = \frac{\mu^{\{s\}}}{r\sqrt{f}}\,\Phi_1^{s_1}. \tag{82}$$

为求解径向方程（82），首先需要将场 Φ_1^+ 和 Φ_1^- 解耦，从而将其化为关于场的二阶常微分方程。为了简化这个方程的一般形式，我们可以引入以下函数

$$\begin{cases} A(s_1, s_j, r) = \dfrac{r\,f' - 2f}{4rf} - \dfrac{is_1}{f}\left(\omega - \dfrac{iq\,Q_1}{7\,r^7} + \dfrac{iq\,Q_2}{12\,r^3}\sum_{j=2}^{5} s_j\right), \\ B(s_1, s_j, r) = \dfrac{\mu^{\{s\}}}{r\sqrt{f}}. \end{cases} \tag{83}$$

最终结果是，场 $\Phi_1^{s_1}$ 满足以下解耦方程

$$\frac{d^2\Phi_1^{s_1}}{dr^2} + P(\{s\}, r)\,\frac{d\Phi_1^{s_1}}{dr} + Q(\{s\}, r)\,\Phi_1^{s_1} = 0, \tag{84}$$

其中函数 $P(\{s\}, r)$ 和 $Q(\{s\}, r)$ 由下式给出

$$\begin{cases} P(\{s\}, r) = A(s_1, s_j, r) + A(-s_1, s_j, r) - \dfrac{1}{A(-s_1, s_j, r)}\dfrac{dA(-s_1, s_j, r)}{dr}, \\ Q(\{s\}, r) = \dfrac{dA(-s_1, s_j, r)}{dr} + A(s_1, s_j, r)A(-s_1, s_j, r) - B(s_1, s_j, r)B(-s_1, s_j, r) + \\ \qquad -\dfrac{A(-s_1, s_j, r)}{B(-s_1, s_j, r)}\,\dfrac{dB(-s_1, s_j, r)}{dr}, \end{cases} \tag{85}$$

从而实现了我们所寻求的修正狄拉克方程的可分离性。与最相关的背景一样，对于此处考虑的背景，无法获得径向方程的精确解析解。度规中出现的函数 $f(r)$ 本身在径向坐标 r 下没有闭式表达。相反，它由四次多项式方程确定。另一方面，这类黑洞有一个有趣之处：在作用量中包含曲率二次项和 4-形式通量四次项的情况下，可以写出一个具有闭式表达的磁电黑洞解，其中函数 $f(r)$ 由 [43] 给出

$$f(r) \simeq \frac{\sigma}{7} - \frac{\Lambda}{36}r^2 - \frac{9Q_m^2}{2r^6} - \frac{4\pi\ell_P M}{r^7} + \frac{Q_2^2}{r^{10}} + \frac{Q_1^2}{56r^{14}} + \dots . \tag{86}$$

这提供了一个易于处理的模型，其中涉及的物理现象可能十分丰富。

有了上述表达式，便可以尝试求解径向方程（84），但解析求解可能颇具挑战。一种可行的方法是在某些关注的区域内推断解的渐近形式，例如在无穷远附近，以及函数 f 在 r 处为零的附近，并考虑有无特定荷的情形。此外，也可以通过近似方法或数值方法，寻找在其他区域内有效的解。不过，所有这些方面都不是我们的主要关注点；我们的重点是说明，对于一类容许通量场的乘积流形，狄拉克方程具有可分离性。这些结果或可推动建立适用于高维情形的狄拉克方程可分离性通用方法。建立狄拉克方程可分离所需充要条件的一种更简洁的方式，是考察是否存在某些对称算子。因此，一个值得提出的问题是：在本文研究的通量背景下，狄拉克方程在什么条件下存在对称算子？关于这一点，请参见 [42]。

6 结论

本文研究了在一类高维空间中广义狄拉克方程的可分离性，该类空间由二维空间的直积构成，并包含任意通量场。我们证明，通量场的存在通常会破坏可分离性。方程（41）所展示的主要结果，仅在狄拉克方程中出现具有特定指标结构和函数依赖的非零通量分量时才得以获得，即方程（37）和（40）所述情形。这对于验证第 4 节中讨论的二维块分离过程至关重要。本文所考虑的空间类中，旋量场自由度分离的成功，部分得益于狄拉克矩阵的适当表示以及便捷的指标约定。

旋量场自由度分离的另一部分成功归功于狄拉克矩阵的适当表示，以及便捷的指标约定。本文的工作重现了此前获得的结果 [23] ，其中考虑的是与规范场的标准最小耦合。

利用本文所得结果，一个有趣的应用是研究自旋-$1/2$ 有质量带电粒子在 $D = 10$ 维时空背景中的传播，该时空与一个包含 1-形式场和 3-形式场耦合的复弦启发模型共形相关，见方程 (51)。我们证明，在这一背景下，修正狄拉克方程可以通过变量分离为纯角向部分和纯径向部分，见方程 (72) 和 (84)；施加正则性条件后，这些方程转化为关于分离常数的特征值问题。具体而言，我们指出，分离常数的允许取值尚待确定，因为通常情况下，方程 (72) 和 (84) 的解尚不为人所知。只有当背景的磁荷为零时，我们才知道这些解，因为此时角向部分化为二维球面上狄拉克算子的特征值问题，其解是已知的。该模型的一个引人之处在于，在广义相对论极限下，可以写出一个封闭形式的磁电黑洞解。这为研究提供了一个易于处理的模型，其涉及的物理内容可能相当丰富。我们尤其关注准正规模，它们是满足特定边界条件的场方程解；这些边界条件通常施加在事件视界处，以及场向外传播的无穷远处（例如参见 [24, 48] ）。我们计划在未来的工作中对此进行研究。

7 致谢

JV 感谢伯南布哥州科学技术支持基金会（FACEPE）提供部分经费支持。AM 感谢国家科学技术发展委员会（CNPq）提供的经费支持，资助编号为 309368/2020-0。AM 还感谢巴西机构 CAPES 和伯南布哥联邦大学 Qualis A 项目提供的经费支持。

参考文献

[1] B. Carter，引力场克尔族的全局结构，Phys. Rev. **174**，1559（1968）[2] L. Hughston 和 P. Sommers，具有 *Killing* 张量的时空，《数学物理通讯》**32**，147（1973）。[3] V. P. Frolov 和 D. Kubiznak，高维黑洞：隐藏对称性与变量分离，Class. Quant. Grav. **25**，154005（2008）。[4] C. Batista，阶数为 $n-1$的 Killing-Yano 张量，Class. Quant. Grav. **31**，165019（2014）。[5] E. Cartan，旋量理论，Dover（1966）。[6] E. Cartan，不保持任何平面多重性的射影群，Bull. Soc. Math. France **41** （1913），53。[7] G. W. Gibbons、R. H. Rietdijk 和 J. W. van Holten，天空中的超对称，Nucl. Phys. B **404** ，42（1993）。[8] M. Cariglia，*Yano* 张量的量子力学：弯曲时空中的狄拉克方程，Class. Quant. Grav. **21**，1051（2004）。

[9] *P. V. Nieuwenhuizen* 和 *N. P. Warne*，《杀自旋量的可积条件》，《数学物理通讯》*93*，*277*（*1984*）。[10] *Benn* 和 *R. Tucker*，《自旋量与几何导论及其在物理学中的应用》，*Adam Hilger*，布里斯托尔（*1987*）。[11] *J. Venâncio*，《自旋量形式体系》。*Lambert Academic Publishing*，德国（*2019*）[12]*J. Venâncio* 和 *C. Batista*，《用于六维时空的基于四元数的二分量自旋量形式体系》，《克利福德代数及其应用进展》*31*，*71*（*2021*）。[13] *C. Batista* 和 *B. C. Cunha*，《六维中的自旋量与韦尔张量分类》，《数学物理学杂志》*54*，*052502*（*2013*）。[14] *D. R. Brill* 和 *J. A. Wheeler*，《中微子与引力场的相互作用》，《现代物理学评论》*29*，*465*（*1957*）。[15] *W. Unruh*，《克尔背景下中微子方程的可分离性》，《物理评论快报》*31*，*1265*（*1973*）。[16] *S. Chandrasekhar*，克尔几何中狄拉克方程的解，《英国皇家学会会刊 *A* 辑》*349*，*571*（*1976*）。[17] *E. T. Newman* 和 *R. Penrose*，利用自旋系数方法研究引力辐射，《数学物理学杂志》（纽约）*3*，*566*（*1962*）。[18] *D. N. Page*，《带电旋转黑洞周围的狄拉克方程》，*Phys. Rev. D 14*，*1509*（*1976*）。[19] *M. Walker* 和 *R. Penrose*，*D* 型时空中测地线方程的二次第一积分，《数学物理通讯》*18*，*265*（*1970*）。[20] *S. Q. Wu*，弦理论中五维带电旋转黑洞的修正狄拉克方程的可分离性，*Phys. Rev. D 80*，*044037*（*2009*）。[21] *I. Semiz*，狄拉克方程在磁单极子黑洞度规中可分离，*Phys. Rev. D 46*，*5414*（*1992*）。[22] *A. L. Dudley* 和 *J. D. Finley*，任意 *D* 型背景中的协变扰动波动方程，《数学物理学杂志》*20*，*311*（*1979*）。[23] *J. Venâncio* 和 *C. Batista*，直积二维空间背景上的狄拉克方程的可分离性，《物理评论 *D* 辑》*95*，*084022*（*2017*）。[24] *J. Venâncio* 和 *C. Batista*，广义纳里艾时空中的准正规模，*Phys. Rev. D 97*，*105025*（*2018*）。[25] *S. Benenti*，哈密顿-雅可比方程中变量分离的内禀刻画，《数学物理学杂志》*38*，*6578*（*1997*）。[26] *M. Demianski* 和 *M. Francaviglia*，无加速度真空 *D* 型时空中的可分离结构与 *Killing-Yano* 张量，*Int. J. Theor. Phys. 19*，*675*（*1980*）。

[27] L. Fatibene、M. Ferraris、M. Francaviglia 和 R. G. McLenaghan，《力学和场论中的广义对称性》，《数学物理学杂志》43，3147（2002年）。[28] S. S. Gousheh、A. Mohammadi 和 L. Shahkarami，《耦合费米子-孤子系统的卡西米尔能及其稳定性》，Phys. Rev. D 87，045017（2013年）。[29] A. Mohammadi、E. R. Bezerra de Mello 和 A. A. Saharian，《紧化宇宙弦存在时德西特时空中诱导的费米子流》，《经典与量子引力》32，135002（2015年）。[30] E. A. F. Bragança、E. R. Bezerra de Mello 和 A. Mohammadi，《带有紧化宇宙弦的德西特时空中诱导的费米子真空极化》，Phys. Rev. D 101，045019（2020年）。[31] I. M. Benn 和 P. Charlton，《由共形 Killing-Yano 张量导出的狄拉克对称算子》，《经典与量子引力》 14，1037 （1997 年）。[32] B. Carter 和 R.G. McLenaghan，《弯曲时空中狄拉克方程的广义总角动量算子》，Phys. Rev. D 19，1093（1979年）。[33] M. Cariglia、P. Krtouˇs、D. Kubizˇnák，《Kerr-NUT-(A)dS 时空中的狄拉克方程：所有维度中可分离性的内禀刻画》，Phys. Rev. D 84，024008（2011年）。[34] T. Oota 和 Y. Yasui，《高维 Kerr-NUT-德西特时空中狄拉克方程的可分离性》，《物理快报B》659，688（2008年）。[35] D. Z. Freedman 和 A. van Proeyen，《超引力》，剑桥大学出版社（2012年）。[36] A. R.Brown、A. Dahlen、A. 和 A. Masoumi，《(S^2)上的通量紧化》。N《物理评论 D 辑》90，045016（2014年）。[37] A. R. Brown 和 A. Dahlen，《乘积流形上的紧化的谱与稳定性》，Phys. Rev. D 90，044047（2014年）。[38] L. Martucci、J. Rosseel、D. V. den Bleeken 和 A. V. Proeyen，《带通量背景上的 D膜狄拉克作用量》，《经典与量子引力》22，2745（2005年）。[39] P. K. Tripathy 和 S. P. Trivedi，《背景通量存在时的 D3膜作用量和费米子零模》，JHEP 0506，066（2005年）。[40] M. Graña，《超引力背景中的D3膜作用量：费米子部分》，Phys. Rev. D 66，045014（2002年）。[41] M. Cariglia，《Eisenhart-Duval提升度规的隐藏对称性与含通量的狄拉克方程》，Phys. Rev. D 86，084050（2012年）。[42] D. Kubizˇnák、C. M. Warnick 和 P. Krtouˇs，《通量存在时的隐藏对称性》，Nucl. Phys. B 844，185（2011年）。[43] G. Giribet、M. Lagos、J. Oliva 和 A. Vera，$D = 10$《弦启发模型中的磁电黑洞》，Phys. Rev. D 98，064022（2018年）。

[44] T. Houri、D. Kubizˇnák、C. M. Warnick 和 Y. Yasui，《带反对称挠率的狄拉克算子的对称性》，Class. Quant. Grav. **27**，185019（2010年）。[45] I. Agricola 和 T. Friedrich，《关于带反对称挠率的联络的整体性》，Math. Ann. **328**，711（2004年）。[46] A. A. Abrikosov, Jr.，《球面上的费米子态》 S^2，Int. J. Mod. Phys. A**17**，885（2002年）。[47] R. Camporesi 和 A. Higuchi，《球面和实双曲空间上的狄拉克算子本征函数》，J. Geom. Phys. **20** 1，（1996年）。[48] J. Venâncio 和 C. Batista，《广义纳里艾时空中的自旋二准正规模》，Phys. Rev. D **101**，084037（2020年）。