arXiv:2302.00400v2 [quant-ph] 4 Sep 2023

# 连续性 观测熵与测量相对熵的界 s

Joseph Schindler[1], * 和 Andreas Winter[1, 2, 3], †[1]理论物理：信息与量子现象，巴塞罗那自治大学物理系，08193 贝拉特拉，西班牙[2]加泰罗尼亚高级研究与研究机构，Pg. Lluís Companys, 23, 08010 巴塞罗那，西班牙[3]慕尼黑工业大学高等研究院，Lichtenbergstraße 2a, 85748 加兴，德国（日期：2023年8月5日）

我们推导出一个与测量无关的渐近连续性界，适用于一般正算子值测度测量下的观测熵，并充分利用其有界凹性这一性质。我们运用同一思路，为其他熵量推导连续性界，其中包括在一般测量集合下，到态的凸集的测量相对熵距离。作为一个特例，我们定义并研究条件观测熵：它是在一个（被测量的）子系统上的观测熵，以另一个（未被测量的）子系统中的量子态为条件。我们还研究相对熵在联合施加的量子信道下的连续性，发现观测熵作为测量的函数是一致连续的。但我们通过一个例子表明，这种关于测量的连续性无法具有具体渐近界的形式。

关键词：观测熵、测量相对熵、渐近连续性

## I. 引言

观测熵最近在非平衡统计力学研究中兴起（事实上是重新兴起，参见 [1–4]），成为一种有用的统一框架，用于描述经典与量子系统中的粗粒化熵 [5–7], ，并应用于热力学和量子信息论 [8–27]。

在量子情形下，对于任意由正算子值测度 $M = (M_i)_{i\in\mathcal{I}}$、$(M_i \geq 0, \sum_i M_i = \mathbb{1})$描述的测量，以及由密度矩阵 $\rho$描述的量子态，观测熵

$$S_M(\rho) = -\sum_i p_i \log \frac{p_i}{V_i}, \qquad p_i = \mathrm{tr}(M_i\rho), \qquad V_i = \mathrm{tr}(M_i), \tag{1}$$

描述了经测量 $M$“粗粒化”后的量子态 $\rho$ 的熵。 $p_i$ 描述了“宏观态”（即测量结果）上的概率分布，而 $V_i$ 描述了宏观态的“体积”，与定义玻尔兹曼熵的相空间体积相类似。

定义观测熵的公式（1）可以改写为相对熵形式，从而更能体现其信息论内涵。具体而言，对于定义在有限维希尔伯特空间 $\rho$上的 $\mathscr{H}$，其维数有限，为 $d$，

$$D(\Phi_M(\rho)\,\|\,\Phi_M(\mathbb{1}/d)) = D(p\,\|\,q) = \log d - S_M(\rho), \tag{2}$$

* JosephC.Schindler@uab.cat
† andreas.winter@uab.cat

其中， $D$ 根据其参数表示量子或经典相对熵。这里， $M$由量子-经典信道实现

$$\Phi_M(\sigma) = \sum_i \mathrm{tr}(\sigma M_i)|i\rangle\langle i|, \tag{3}$$

称为 $M$ 的测量信道，而 $p_i = \mathrm{tr}(M_i\rho)$、 $q_i = \mathrm{tr}(M_i \mathbb{1}/d)$ 分别是由 $M$ 作用于 $\rho$ 和最大混合态所诱导的观测概率分布。

从定义显然可知，观测熵是关于量子态 $\rho$ 的连续函数。然而，在实际应用中，最好能用具体的连续性界来阐明这一连续性结论，许多其他熵量也采用了这种做法 [28–32]。

这种界的一种简单形式可以由其他已知界迅速得到。展开定义（1），可将观测熵分解为观测香农熵$H(p) = -\sum_i p_i$ 对数 $p_i$ （关于测量结果），以及平均玻尔兹曼熵之和，

$$S_M(\rho) = H(p) + \sum_i p_i \log V_i. \tag{4}$$

分别界定香农项和玻尔兹曼项，可得：给定两个量子态 $\rho$、 $\sigma$，满足 $\frac{1}{2}||\rho - \sigma||_1 \leq \epsilon$,

$$\begin{aligned} \left|S_M(\rho) - S_M(\sigma)\right| &\leq \left|H(p^\rho) - H(p^\sigma)\right| + \left|\sum_i (p_i^\rho - p_i^\sigma)\log V_i\right| \\ &\leq h(\epsilon) + \epsilon \log|M| + \epsilon \left\|\log V_i\right\|_\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

这里， $|M|$ 是正算子值测度 $M$ 的结果数（指标集 $\mathcal{I}$ 的基数）；函数$h(x) = -x$ 对数 $x - (1-x)$ 对数 $(1-x)$ 是二元香农熵，而 $\|$ 对数 $V_i\|_\infty = \max_i|$ 对数 $V_i|$。底行的前两项来自香农熵的经典 Zhang-Audenaert 连续性界 [32–34], ，后一项则给出了玻尔兹曼项的一个宽松界。这两项都是利用量子迹范数与概率之间关系的基本性质推导得到的 [34]。

尽管它似乎有用，因为它意味着 $|\Delta S| \to 0$ 对于 $\epsilon \to 0$ 任意特定的 $M$，但界（5）并非普适，它取决于测量 $M$，既取决于结果数量 $|M|$，也取决于体积项 $V_i$。此外，该界松弛得不可接受，以下病态情形便说明了这一点。给定任意正算子值测度 $M$，可以通过将每个正算子值测度元素分成两半并将其计数两次（$M_i \to$两个副本 $M_i/2$），定义另一个正算子值测度 $M'$，其结果数量是原来的两倍。令 $M \to M'$观测熵 $S_M(\rho)$ 和 $S_M(\sigma)$ 均保持不变，但通过重复这一变换，界（5）可以变得任意松弛（注意，每经过 $V_i \leq 1$ 一次迭代，两个项都会分别变得更松弛）。这一病态情形凸显了改进并建立普适界的必要性。

人们预期，上述缺陷会普遍存在于任何试图将香农项与玻尔兹曼项分开处理的界中。另一方面，人们或许会寄望于定义（1）中归一化体积项的存在实际上能够改进这个界，而不是像（5）那样使其更加松弛。我们将证明事实确实如此：通过将这些项合并处理，可以改进这个界。

具体而言，本文旨在证明，对于任意测量 $M$ 以及满足 $\frac{1}{2}||\rho - \sigma||_1 \leq \epsilon$ 的任意量子态 $\rho$、 $\sigma$，观测熵满足如下形式的连续性界

$$\left|S_M(\rho) - S_M(\sigma)\right| \leq g(\epsilon) + \epsilon \log d. \tag{6}$$

该界具有普适性，因为它与 $M$ 无关，只取决于希尔伯特空间维数 $d$ 以及量子态之间的迹距离。

界中出现的函数 $g(\epsilon)$ 定义为 $g(x) = -x\log x+(1+x)\log(1+x)$，其中 $x > 0$，且 $g(0) \equiv 0$。这里，它源自二元香农熵 $h(x) = -x\log x-(1-x)\log(1-x)$，其出现形式为

$$g(\epsilon) = (1+\epsilon)\, h\Big(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\Big). \tag{7}$$

在其他地方，它作为玻色系统中的熵出现 [35]。这个 $g(x)$ 特别方便，因为在整个 $x \in [0,\infty)$ 中，它连续、单调递增、非负且为凹函数。

主要界（6）见定理 6。为了证明它，我们首先指出，观测熵具有其他熵量通常具备的有界凹性，即它是凹的，但凹性并不过强。随后，我们基于有界凹性建立一个一般的连续性界，并由此推导出主要结果。证明方法与 [32], 中引理2的证明十分相近；该引理给出了量子条件熵一个密切相关的紧界，而其方法又与 [36, 37], 中使用的方法密切相关；这种方法有时称为 Alicki-Fannes-Winter（AFW）技巧 [32, 36]。这里给出的一般界命题 5与 [32], 中的引理7密切相关，并对其作了略有不同的推广。由于在 $\epsilon\log d$ 的 $n$份副本情形下，每个量子比特对应的界按 [38, 39] 的尺度增长，因此这种形式的连续性界通常称为渐近连续性。

除了主要的观测熵结果外，我们还讨论了其他可能具有普遍意义的熵量的连续性结果。在命题 8 中，我们考察如下形式的相对熵距离

$$\inf_{\sigma\in\chi} D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\sigma)) \tag{8}$$

在量子信道 $\chi$ 作用下到态的凸集的 $\mathcal{M}$，$\mathcal{N}$。随后在定理 11 中，我们考察受限测量下的测量相对熵 [40]

$$\inf_{\sigma\in\chi} \sup_{M\in\mathscr{M}} D_M(\rho\|\sigma), \tag{9}$$

其中 $D_M(\rho\|\sigma)$ 是通过测量 $M$得到的经典相对熵。接着，在命题 12 中，我们将这些结果应用于观测条件熵 $S_{M_A}(A|B)_\rho$，其动机是它与熵不确定性原理的关系。所有这些界都通过援引如下形式的一般界导出

$$\big|Z(\rho) - Z(\sigma)\big| \le g(\epsilon) + \epsilon\,\kappa \tag{10}$$

如命题 5 所示，对于 $Z(\rho)$，任何满足有界凹性/凸性的函数均适用。最后，在推论 15中，我们证明 $S_M(\rho)$ 和 $D_M(\rho\|\sigma)$ 关于测量 $M$ 是连续函数（在 POVM 上适当的拓扑下）。该结果是定理 14的一个特例；在该定理中，我们证明了.....的一致连续性

$$D\big(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)\big) \tag{11}$$

作为量子信道的函数 $\Phi$。在例 13 中，我们展示了测量连续性所面临的限制，这些限制使得无法得到简单的渐近界。

除非另有说明，以下仍考虑一个有限维希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，其维数为 $d$。量子态 $\rho$ 是归一化为单位迹的半正定厄米算子。测量由 POVM（正算子值测度）描述，其定义为一组半正定厄米算子，且这些算子的和为单位算子；这里假设其结果数有限。冯·诺伊曼熵记为 $S(\rho) = -\operatorname{tr}(\rho$对数 $\rho)$，香农熵记为 $H(p) = -\sum_i p_i$ 对数 $p_i$。二元香农熵函数记为 $h(x)$，而 $g(x)$ 的定义同上。观测熵 $S_M(\rho)$ 定义见（1）。

## II. 有界凹性

香农熵的一个基本性质是有界凹性[41]（对于经典香农熵，这一性质可以直接通过简单的链式法则计算得出，但也可以视为更常强调的量子推广的一个特例），我们在此将其表述为一个引理，以供后续使用。

引理 1. 设 $\lambda_k$ 为一个概率分布，并且对每个 $k$， $p^k$ 都是一个概率分布。香农熵 $H$ 是凹的，但凹性并非没有上限，

$$0 \le \left[H\left(\sum_k \lambda_k\, p^k\right) - \sum_k \lambda_k\, H(p^k)\right] \le H(\lambda). \tag{12}$$

注意，$(p^k)_i = p_{i|k}$ 是一个条件概率分布，并且$\left(\sum_k \lambda_k\, p^k\right)_i = \sum_k \lambda_k\, p_{i|k}$。

观测熵的有界凹性源于香农熵的有界凹性。

引理2（观测熵有界凹性）。设 $\lambda_k$ 为一个概率分布，并且对每个 $k$， $\rho_k$ 都是一个量子态。观测熵 $S_M$ 是凹的，但凹性并非没有上限，

$$0 \le \left[S_M\left(\sum_k \lambda_k\, \rho_k\right) - \sum_k \lambda_k\, S_M(\rho_k)\right] \le H(\lambda). \tag{13}$$

证明。令 $\rho = \sum_k \lambda_k \rho_k$ 和 $p_i = \operatorname{tr}(M_i \rho)$。于是 $p_i = \sum_k \lambda_k\, p_{i|k}$，其中 $p_{i|k} = \operatorname{tr}(M_i \rho_k)$。注意，只有香农熵的差异会对 OE 的差异产生贡献，因为两个分布的平均玻尔兹曼熵相等。也就是说，我们有（为简便起见，在含义明确时滥用记号$H(p_i) \longleftrightarrow H(p)$）

$$\begin{aligned}
\Delta S &\equiv S_M(\rho) - \textstyle\sum_k \lambda_k\, S_M(\rho_k) && (14)\\
&= H(p_i) + \textstyle\sum_i p_i \log V_i - \sum_k \lambda_k \left[H(p_{i|k}) + \sum_i p_{i|k} \log V_i\right] && (15)\\
&= H(p_i) - \textstyle\sum_k \lambda_k\, H(p_{i|k}) && (16)\\
&\equiv \Delta H. && (17)
\end{aligned}$$

但引理1 恰好表明 $0 \le \Delta H \le H(\lambda)$，所求结果得证。 □

一般而言 凸集上实函数的有界凹性可定义如下 .

定义 3（一般有界凹性/凸性）。函数 $Z\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 定义在凸集 $\mathcal{S}$ 上；若对任意有限凸组合 $\rho = \sum_k \lambda_k \rho_k$，则称其为有界凹函数，

$$0 \le \left[Z\left(\rho\right) - \sum_k \lambda_k\, Z(\rho_k)\right] \le H(\lambda). \tag{18}$$

如果 $-Z$ 是有界凹函数，那么函数 $Z$ 就是有界凸函数。

在下一节中，我们将推导量子态函数的连续性界，该界适用于任何具有此类有界凹性或凸性的函数，观测熵的连续性则是其推论。

## III. 连续性

下面证明的连续性界是通过有界凹性推导出来的。文献中也曾采用类似方法推导其他熵量的连续性结果，例如[32, 36–39、42–46]。以下分解对于证明中主要技巧的运用至关重要，这一技巧有时称为 Alicki-Fannes-Winter 技巧（参见 [32, 36]）。前一节只涉及凸结构，而以下分解的推导还通过迹范数涉及拓扑。由此得到的连续性界同时取决于量子态空间的凸结构和拓扑结构。

引理 4（$\omega\Delta$ 分解）。设 $\rho$、$\sigma$ 为量子态，并定义 $\epsilon = \frac{1}{2}||\rho-\sigma||_1$。存在一个量子态 $\omega$ 和若干量子态 $\Delta_\pm$，使得

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{1+\epsilon}\,\rho + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\Delta_- \\ &= \frac{1}{1+\epsilon}\,\sigma + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\Delta_+.\end{aligned} \tag{19}$$

证明。设 $\rho$、$\sigma$ 为满足 $||\rho-\sigma||_1 = 2\epsilon$的量子态，并令

$$\epsilon\,\Delta_\pm = \pm(\rho-\sigma)_\pm. \tag{20}$$

正部和负部 $(\rho-\sigma)_\pm$ 按通常方式定义：[34], 对厄米矩阵 $\rho-\sigma$进行对角化，然后将其分解为一个非负对角矩阵和一个非正对角矩阵之和。即，$\rho-\sigma = U^\dagger D U = U^\dagger\,(D_+ + D_-)$ $U = \epsilon\Delta_+ - \epsilon\Delta_-$。根据定义，$\Delta_\pm \geq 0$ 因为它们是仅具有非负特征值的厄米矩阵。由于 $\rho-\sigma$ 是无迹的，我们有 $\mathrm{tr}(\Delta_+) = \mathrm{tr}(\Delta_-) = ||\Delta_\pm||_1$，最后一个等号由正半定性得出。此外，$||\rho-\sigma||_1 = ||D_+ + D_-||_1 = ||D_+||_1 + ||D_-||_1 = ||\epsilon\Delta_+||_1 + ||\epsilon\Delta_-||_1 = 2\epsilon||\Delta_\pm||_1 = 2\epsilon$ 利用迹范数的酉不变性以及 $D_\pm$ 为对角矩阵这一事实。因此 $\mathrm{tr}(\Delta_\pm) = 1$，且 $\Delta_\pm$ 是量子态。

现在定义

$$\omega = \frac{1}{1+\epsilon}\,\frac{(\rho+\sigma)}{2} + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\frac{(\Delta_+ + \Delta_-)}{2}. \tag{21}$$

这是量子态的凸组合，因此 $\mathrm{tr}(\omega) = 1$，而 $\omega$ 是一个量子态。上述关系与 $\omega$ 合起来，可以视为表示一种线性分解

$$\rho - \sigma = \epsilon\,(\Delta_+ - \Delta_-) \tag{22}$$

$$\rho + \sigma = 2(1+\epsilon)\,\omega - \epsilon(\Delta_+ + \Delta_-). \tag{23}$$

由（21）结合（22）不难验证

$$\omega = \frac{1}{1+\epsilon}\,\rho + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\Delta_- = \frac{1}{1+\epsilon}\,\sigma + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\Delta_+, \tag{24}$$

由此完成证明。 □

接下来给出适用于在量子态上满足有界凹性的任意函数 $Z(\rho)$ 的一般连续性界。由于（25）在 $Z \to -Z$ 下保持不变，因此满足有界凸性的函数也具有相同的界。

命题 5。设 $Z$（$\rho$）是满足量子态上有界凹性（参见 （18）的任意函数。我们有如下连续性界。

设 $\rho$、 $\sigma$ 是满足 $\frac{1}{2}||\rho-\sigma||_1 \leq \epsilon$的量子态。则

$$\left|Z(\rho)-Z(\sigma)\right| \leq g(\epsilon)+\epsilon\,\kappa, \tag{25}$$

其中 $g$（$\epsilon$） 如 （7） 中所述，且 $\kappa = \sup_{(\mu,\nu)} |Z$（$\mu$） $- Z$（$\nu$）| 是 $Z$在任意两个量子态之间的绝对差的上确界。

证明。假设 $\epsilon = \frac{1}{2}||\rho-\sigma||_1$，并假设存在一个量子态 $\omega$ 和量子态 $\Delta_\pm$ 使得

$$\omega = \frac{1}{1+\epsilon}\,\rho + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\Delta_- = \frac{1}{1+\epsilon}\,\sigma + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\,\Delta_+. \tag{26}$$

此类量子态的存在性已在引理4中证明。从（26）可得两个不同的凸分解 $\omega = \lambda\omega_1 +$ （$1-\lambda$） $\omega_2$，二者具有相同的系数 $\lambda = 1/$（$1+\epsilon$）。根据有界凹性的假设（18），

$$\left[\lambda\,Z(\omega_1)+(1-\lambda)\,Z(\omega_2)\right] \leq Z(\omega) \leq h(\lambda)+\left[\lambda\,Z(\omega_1)+(1-\lambda)\,Z(\omega_2)\right] \tag{27}$$

这两个凸分解均成立。诀窍只是对不等式的一侧使用 $\omega_1$、 $\omega_2 = \rho$、 $\Delta_-$，对另一侧使用 $\omega_1$、 $\omega_2 = \sigma$、 $\Delta_+$。这就得到

$$\lambda\,Z(\rho)+(1-\lambda)\,Z(\Delta_-) \leq h(\lambda)+\lambda\,Z(\sigma)+(1-\lambda)\,Z(\Delta_+). \tag{28}$$

重新整理可得

$$(Z(\rho)-Z(\sigma)) \leq \frac{h(\lambda)+(1-\lambda)\,(Z(\Delta_+)-Z(\Delta_-))}{\lambda}. \tag{29}$$

最后取模并应用三角不等式，

$$|Z(\rho)-Z(\sigma)| \leq \frac{h(\lambda)}{\lambda}+\frac{(1-\lambda)}{\lambda}\,|Z(\Delta_+)-Z(\Delta_-)| \tag{30}$$

$$\leq \frac{h(\lambda)}{\lambda}+\frac{(1-\lambda)}{\lambda}\,\kappa. \tag{31}$$

第二个不等式成立，是因为根据定义， $Z$ 中两个量子态的模之差小于或等于 $\kappa$。最后，利用 $\lambda = 1/(1+\epsilon)$ 和 $h(\lambda) = h(1-\lambda)$，我们得到

$$|Z(\rho)-Z(\sigma)| \leq g(\epsilon)+\epsilon\,\kappa. \tag{32}$$

可以确认该界关于 $\epsilon$是单调的。因此，既然它对 $\epsilon = \frac{1}{2}||\rho-\sigma||_1$成立（如上所示），那么对 $\epsilon' \geq \epsilon$ 也成立。证明至此完成。 □

在接下来的章节中，我们将针对观测熵评估这一一般界，并将其推广为包含若干相关量的形式。

## IV. 观测熵

一般性命题5 蕴含了观测熵的连续性界。

定理6（观测熵连续性）。设 $\rho, \sigma$ 为满足 $\frac{1}{2}||\rho-\sigma||_1 \leq \epsilon$ 的量子态。那么观测熵满足连续性界

$$\left|S_M(\rho) - S_M(\sigma)\right| \leq g(\epsilon) + \epsilon \log d, \tag{33}$$

其中 $g(\epsilon)$ 与 (7)中的相同，且 $d$ 是希尔伯特空间维数。

证明。 由引理 2， $S_M$ 具有有界凹性，因此该界可由命题 5推出。观测熵的一个基本性质是 $0 \leq S_M(\rho) \leq$对数 $d$ [10]。因此我们有$\kappa =$上确界$_{(\mu,\nu)} |S_M(\mu) - S_M(\nu)| =$上确界$_\mu S_M(\mu) =$对数 $d$。 □

因此，主要结果——观测熵的测量无关连续性界——已经得证。

顺便指出，如下述推论所示，可以从观测熵连续性推导出香农熵和冯·诺依曼熵的界。由此得到的界比已知的最优形式 [30] 更宽松。

推论7. Let $\rho, \sigma$ 是满足 $\frac{1}{2}||\rho-\sigma||_1 \leq \epsilon$的量子态。则冯·诺伊曼熵 $S$ 满足 $s$

$$\left|S(\rho) - S(\sigma)\right| \leq g(\epsilon) + \epsilon \log d. \tag{34}$$

设 $p_i, q_i$是满足$\frac{1}{2}||\vec{p}-\vec{q}||_1 \leq \epsilon$的 $N$结果概率分布。则香农熵 $H$满足

$$\left|H(p_i) - H(q_i)\right| \leq g(\epsilon) + \epsilon \log N. \tag{35}$$

这种形式下，它们都是定理6的特例；不过，也可以通过其他方法推导出更紧的界。

证明。我们将其推导为定理6的推论。对于量子情形，不妨设$S(\rho) \geq S(\sigma)$。令 $M_\sigma$在 $\sigma$特征基中测量。于是$|S_{M_\sigma}(\rho) - S_{M_\sigma}(\sigma)| = S_{M_\sigma}(\rho) - S(\sigma) \geq S(\rho) - S(\sigma) = |S(\rho) - S(\sigma)|$. 对于经典情形，令 $\rho = \sum_i p_i|i\rangle\langle i|$ 和 $\sigma = \sum_i q_i|i\rangle\langle i|$ 处于$N$维希尔伯特空间中，并令 $M_0$ 在 $|i\rangle\langle i|$ 基中测量。（至少需要 $N$ 维才能将 $p, q$经典地嵌入其中。）由于这些量子态是对角的，我们有 $||\rho-\sigma||_1 = ||\vec{p}-\vec{q}||_1 \leq 2\epsilon$。然后测量 $M_0$ 得到 $p_i, q_i$， 于是有 $|S_{M_0}(\rho) - S_{M_0}(\sigma)| = |H(p_i) - H(q_i)|$。 □

## V. 测量相对熵

一般性的命题 5 同样给出了与特定测量相关的测量相对熵以及量子相对熵的连续性界。

命题 8. 设 $\chi$ 是一个量子态的凸集（或者更一般地，是半正定厄米算子的凸集）。设 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$ 是任意量子信道。则

$$Z(\rho) = \inf_{\sigma\in\chi} D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\sigma)), \tag{36}$$

是有界凸函数。因此 $Z(\rho)$ 满足以下界限 (25)，即命题 5的界限。这保证了在最大变差 $\kappa$有限时的连续性。

证明。设 $\rho = \sum_k \lambda_k \rho_k$。首先注意，对于任意固定的 $\sigma \in \chi$，我们有

$$\sum_k \lambda_k D(\mathcal{M}(\rho_k)\|\mathcal{N}(\sigma)) - D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\sigma)) = S(\mathcal{M}(\rho)) - \sum_k \lambda_k S(\mathcal{M}(\rho_k)), \tag{37}$$

由于 $D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\sigma)) = -S(\mathcal{M}(\rho)) - \mathrm{tr}\ \mathcal{M}(\rho)$ 对数 $\mathcal{N}(\sigma)$，并利用量子信道的线性性。因此

$$0 \leq \sum_k \lambda_k D(\mathcal{M}(\rho_k)\|\mathcal{N}(\sigma)) - D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\sigma)) \leq H(\lambda) \tag{38}$$

由冯·诺伊曼熵的有界凹性。注意，$D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\sigma)) = \infty$ 当且仅当 $\sum_k \lambda_k D(\mathcal{M}(\rho_k)\|\mathcal{N}(\sigma)) = \infty$ 因为有限维情况下冯·诺伊曼项均为有限值，并且可以重新整理 (38)，使得无穷情形下 $\infty = \infty = \infty$ 定义良好。

现在我们对 $\sigma \in \chi$ 取下确界。显然，凸性的上界仍然成立，因为

$$\sum_k \lambda_k \inf_{\sigma_k \in \chi} D(\mathcal{M}(\rho_k)\|\mathcal{N}(\sigma_k)) \leq \inf_{\sigma \in \chi} \sum_k \lambda_k D(\mathcal{M}(\rho_k)\|\mathcal{N}(\sigma)) \leq H(\lambda) + Z(\rho), \tag{39}$$

利用下确界之和不大于和的下确界这一性质以及 (38)。

刚刚推导出的凸性上界适用于任意一族有界凸函数的下确界。在这里考虑的特定情形中，由于集合 $\chi$ 的凸性以及相对熵的联合凸性，凸性下界也成立。特别地，由于 $Z(\rho)$ 是一个下确界，因此对于任意 $\rho$ 和任意 $\delta > 0$，存在一个量子态 $\gamma \in \chi$，使得 $D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\gamma)) \leq Z(\rho) + \delta$。因此，固定 $\delta > 0$，并令 $D(\mathcal{M}(\rho_k)\|\mathcal{N}(\gamma_k)) \leq Z(\rho_k) + \delta$，其中 $\nu = \sum_k \lambda_k \gamma_k$。于是

$$\sum_k \lambda_k Z(\rho_k) + \delta \geq \sum_k \lambda_k D(\mathcal{M}(\rho_k)\|\mathcal{N}(\gamma_k)) \geq D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{N}(\nu)) \geq Z(\rho). \tag{40}$$

由于这对所有 $\delta > 0$ 都成立，因此可得 $\sum_k \lambda_k Z(\rho_k) \geq Z(\rho)$。第一个不等式表达了下确界的初始假设，第二个不等式来自相对熵的联合凸性和量子信道的线性，最后一个则是 $\nu \in \chi$ 利用集合的凸性。 □

备注9. 如果 $\mathcal{N}(\chi)$ 包含一个满秩元素，则最大变差 $\kappa$ 必然有限。如果 $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ 和 $\chi$ 是一个包含最大混合态的量子态集合，那么 $\kappa \leq \log d$。

证明. 如果 $\mathcal{N}(\chi)$ 包含一个满秩元素 $\mathcal{N}(\sigma)$，那么所有 $|Z(\rho)| \leq \log d + ||\log \mathcal{N}(\sigma)||_\infty$，因此 $\kappa$ 有限。同时，如果 $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ 且 $\chi \ni \sigma$ 是一个量子态集合，那么 $D(\rho\|\sigma) \geq D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{M}(\sigma)) \geq 0$，所以如果还有 $(\mathbb{1}/d) \in \chi$，那么 $\kappa \leq \sup_\rho S(\rho) \leq \log d$。 □

特别是，命题8 在 $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \Phi_M$ (参见(3)) 的情形下，给出了在给定单个测量 $M$时，相对于量子态凸集的测量相对熵距离界。一个自然的问题是，这是否能推广到包括与某个允许的测量类相关联的测量相对熵 $\mathscr{M}$ [40, 42]，

$$D_{\mathscr{M}}(\rho\|\sigma) = \sup_{M \in \mathscr{M}} D(\Phi_M(\rho)\|\Phi_M(\sigma)). \tag{41}$$

在完全一般的情况下，我们取 $\chi$ 一个量子态的凸集和 $\mathscr{M}$ 一个测量集合，并考虑以下量

$$Z(\rho) = \inf_{\sigma \in \chi} D_{\mathscr{M}}(\rho\|\sigma). \tag{42}$$

由于 $D_{\mathscr{M}}$ 该 $Z(\rho)$ 中的上确界不满足有界凸性，因此不能直接应用界限 (25)。尽管如此，我们将在下文证明，可以得到一个密切相关的连续性结果。这为此前见于 [42], 的相关结果提供了一个更一般且系统化的推广，同时也涵盖了上文已讨论的熵界。

以下极小极大引理是一个关键步骤。

引理 10. 设 $\chi$ 是一个量子态的紧凸集。设 $\mathscr{M}$ 是一个对带标记的有限凸组合封闭的量子信道集合，也就是说，若 $\mathcal{M}_k \in \mathscr{M}$ 且 $\lambda_k$ 是一个有限概率分布，则也有 $\sum_k \lambda_k \mathcal{M}_k \otimes |k\rangle\langle k| \in \mathscr{M}$。于是

$$\inf_{\sigma\in\chi} \sup_{\mathcal{M}\in\mathscr{M}} D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{M}(\sigma)) = \sup_{\mathcal{M}\in\mathscr{M}} \inf_{\sigma\in\chi} D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{M}(\sigma)). \tag{43}$$

由操作动机定义的变换类 $\mathscr{M}$ 通常自动具备所需性质，例如复合系统中的局域操作与经典通信、可分操作、PPT 信道。

证明. 此引理此前已在 [47] 中基于 Sion 的一般极小极大定理 [48]得到证明。为完整起见，我们在此给出证明。我们依据 Sion [49]形式的极小极大定理进行论证。具体而言，考虑关于两个自变量的函数 $\sum_i p_i D(\mathcal{M}_i(\rho)\|\mathcal{M}_i(\sigma)$：一个自变量是量子态 $\sigma \in \chi$，另一个是来自 $\mathscr{M}$的量子信道上的有限支撑概率分布。根据假设，第一个集合 ($\chi$) 是凸且紧的；第二个集合（记作$\mathbb{P}\mathscr{M}$）按构造是凸的，但除此之外不受限制。为简单起见，假设我们的目标函数 $f(\sigma, p)$ 是有限的；那么它是连续的，并且对第一个自变量是凸的，对第二个自变量是线性的——特别是凹的。因此，由 [49] 可得

$$\begin{aligned}\inf_{\sigma\in\chi} \sup_{\mathcal{M}\in\mathscr{M}} D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{M}(\sigma)) &= \inf_{\sigma\in\chi} \sup_{p\in\mathbb{P}\mathscr{M}} \sum_i p_i D(\mathcal{M}_i(\rho)\|\mathcal{M}_i(\sigma)) \\ &= \sup_{p\in\mathbb{P}\mathscr{M}} \inf_{\sigma\in\chi} \sum_i p_i D(\mathcal{M}_i(\rho)\|\mathcal{M}_i(\sigma)).\end{aligned}$$

请注意，一般情况下，我们需要对以 $p_i$ 加权的 $i$ 求和，否则最终的上确界会不够大。但如果量子信道集合在取带标记的凸组合下封闭，即对于 $\mathcal{M}_i$，它也包含 $\mathcal{M}' := \sum_i p_i \mathcal{M}_i \otimes |i\rangle\langle i|$，那么 $\sum_i p_i D(\mathcal{M}_i(\rho)\|\mathcal{M}_i(\sigma)) = D(\mathcal{M}'(\rho)\|\mathcal{M}'(\sigma))$，因此

$$\sup_{p\in\mathbb{P}\mathscr{M}} \inf_{\sigma\in\chi} \sum_i p_i D(\mathcal{M}_i(\rho)\|\mathcal{M}_i(\sigma)) = \sup_{\mathcal{M}\in\mathscr{M}} \inf_{\sigma\in\chi} D(\mathcal{M}(\rho)\|\mathcal{M}(\sigma)),$$

这就完成了 $f$ 始终有限时的证明。若要涵盖取值为 $+\infty$ 的情形，可以修改论证，从目标函数中去掉无穷值；或者使用 [48] 中的极小极大定理，正如 [47] 中所做的那样。

□

对于在不交凸组合下封闭的测量类 $\mathscr{M}$，以及量子态的紧凸集 $\chi$，借助极小极大引理，我们得到以下关于测量相对熵的连续性定理：$Z(\rho) = \inf_{\sigma\in\chi} D_{\mathscr{M}}(\rho\|\sigma)$。

我们注意到，许多通常采用的测量类（例如复合系统中的局域操作与经典通信、可分操作、PPT 测量）都自动满足所需的闭包性质。此外，给定某个尚未满足该性质的原始测量集 $\mathscr{M}_0$，从操作层面来看，凭借根据经典随机性选择要执行的测量的能力，将其补充为以这种方式闭合的 $\mathscr{M}$ 是完全可行的。

定理 11。 设 $\chi$ 是一个紧凸集。设 $\mathscr{M}$ 是一个测量的凸集，并且在不交凸组合下也是闭合的（即，在结果集的不交并集上取凸组合）。设 $\Phi_M$ 如 （3）所示，并定义

$$Z(\rho)=\inf_{\sigma\in\chi}\sup_{M\in\mathscr{M}} Z_{M,\sigma}(\rho), \qquad Z_{M,\sigma}(\rho)=D(\Phi_M(\rho)\|\Phi_M(\sigma)). \tag{44}$$

那么，对于任意两个满足 $\frac{1}{2}||\rho-\rho'||_1\le\epsilon$ 的量子态 $\rho$、 $\rho'$，

$$\left|Z(\rho)-Z(\rho')\right|\le g(\epsilon)+\epsilon\,\kappa. \tag{45}$$

*Here*

$$\kappa=\sup_{M\in\mathscr{M}}\left[\sup_{\mu,\nu}\left|Z_M(\mu)-Z_M(\nu)\right|\right], \qquad Z_M(\rho)=\inf_{\sigma\in\chi} Z_{M,\sigma}(\rho), \tag{46}$$

且 $g(\epsilon)$如 (7)所示。

证明。令 $\Phi_{\mathscr{M}}$ 表示与类 $\mathscr{M}$ 关联的测量信道集合，其定义见 (3)。显然， $Z(\rho)=\inf_{\sigma\in\chi}\sup_{M\in\mathscr{M}} D(\Phi_M(\rho)\|\Phi_M(\sigma))=\inf_{\sigma\in\chi}\sup_{\Phi\in\Phi_{\mathscr{M}}} D(\Phi_M(\rho)\|\Phi_M(\sigma))$。现在，测量信道关于固定结果集 $M$ 是凸线性的， $\Phi_{\sum_k\lambda_k M_k}=\sum_k\lambda_k\Phi_{M_k}$。要进行不交凸组合（记作 $\oplus_k\lambda_k M_k$），首先将每个结果集扩展为各结果集的不交并，并用零补齐，然后在固定集合上进行凸组合。假设 $\Phi_{M_k}\in\Phi_{\mathscr{M}}$。可以看出 $\Phi=\sum_k\lambda_k\Phi_{M_k}\otimes|k\rangle\langle k|=\Phi_{\oplus_k\lambda_k M_k}$，它也属于 $\Phi_{\mathscr{M}}$，因为 $\oplus_k\lambda_k M_k\in\mathscr{M}$。因此，引理 10 的假设均已满足，从而有

$$\inf_{\sigma\in\chi}\sup_{M\in\mathscr{M}} Z_{M,\sigma}(\rho)=\sup_{M\in\mathscr{M}}\inf_{\sigma\in\chi} Z_{M,\sigma}(\rho). \tag{47}$$

这提供了 将 $Z(\rho)$ 与可利用有界凸性的形式联系起来的关键步骤 .

接下来，先利用极小极大等式，再利用上确界之差不小于差的上确界这一性质，可得

$$\begin{aligned}
|Z(\rho)-Z(\rho')| &= \left|\inf_{\sigma\in\chi}\sup_{M\in\mathscr{M}} Z_{M,\sigma}(\rho)-\inf_{\sigma\in\chi}\sup_{M\in\mathscr{M}} Z_{M,\sigma}(\rho')\right| && (48)\\
&= \left|\sup_{M\in\mathscr{M}}\inf_{\sigma\in\chi} Z_{M,\sigma}(\rho)-\sup_{M\in\mathscr{M}}\inf_{\sigma\in\chi} Z_{M,\sigma}(\rho')\right| && (49)\\
&\le \sup_{M\in\mathscr{M}}\left|Z_M(\rho)-Z_M(\rho')\right|. && (50)
\end{aligned}$$

Bu根据命题 8 此 $Z_M(\rho)$ 有界凸且满足 (25)，因此进一步得到

$$\begin{aligned}
|Z(\rho)-Z(\rho')| &\le \sup_{M\in\mathscr{M}}\left[g(\epsilon)+\epsilon\,\kappa_M\right] && (51)\\
&= g(\epsilon)+\epsilon\sup_{M\in\mathscr{M}}\kappa_M, && (52)
\end{aligned}$$

从而证明该结果。 □

这为 Piani [40] 最初考察的受限测量熵提供了渐近连续性。近期，独立开展的研究也在局部测量类的背景下得到了类似结果，相关成果将另行发表 [50]。

该定理 11 的主要局限在于要求 $\chi$ 为凸集。人们也可能关注到非凸状态集合的测量相对熵距离，例如与相干态或经典相关态之间的距离。在这方面，该定理可与 [42], 的结果进行比较；他们得到了较宽松的界，但允许 $\chi$ 是以最大混合态为中心的任意星形集合。对于星形 $\chi$ ，如何在维数因子最优的条件下得到一个界，仍是值得探索的未来方向。

## VI. 观测条件熵

本节将上述结果应用于推导双体系中观测条件熵的连续性界，该熵定义为

$$S_{M_A}(A|B)_\rho = -D\Big((\Phi_{M_A}\otimes I_B)\,\rho\,\Big\|\,(\Phi_{M_A}\otimes I_B)(\mathbb{1}_A\otimes\rho_B)\Big), \tag{53}$$

这一量的提出源于其在带记忆的熵不确定性原理中的应用 [51]。这种条件形式描述了在系统 $A$中进行测量 $M_A$ 后，系统 $B$ 中的量子不确定性。

我们有以下界。请注意，由最大变差产生的对数 $d$ 维数因子，相较于量子条件熵 $S(A|B)_\rho = -D(\rho||\mathbb{1}_A\otimes\rho_B)$ [32]的相应界，缩小了一半。

命题 12. 设 $\rho$、 $\sigma$ 为满足 $\frac{1}{2}||\rho-\sigma||_1\le\epsilon$的量子态。则

$$\big|S_{M_A}(A|B)_\rho - S_{M_A}(A|B)_\sigma\big| \le g(\epsilon) + \epsilon\,\log d_A, \tag{54}$$

其中 $g(\epsilon)$ 如 (7)所示，并且 $d_A$ 是系统 $A$中的希尔伯特空间维数。

证明。 我们将证明该界是定理 8 的推论。为建立二者之间的联系，注意到由 ( $S_{M_A}(A|B)_\rho$ 定义的观测条件熵 (53) 具有如下变分公式

$$S_{M_A}(A|B)_\rho = \log d_A - \inf_{\omega_B} D\Big((\Phi_{M_A}\otimes I_B)\,\rho\,\Big\|\,(\Phi_{M_A}\otimes I_B)(\tfrac{\mathbb{1}_A}{d_A}\otimes\omega_B)\Big), \tag{55}$$

其中，下确界取遍系统 $\omega_B$ 中的所有量子态 $B$。（在完成证明的其余部分后，我们将再说明该变分公式的合理性。）鉴于这一等式，差值$S_{M_A}(A|B)_\rho - S_{M_A}(A|B)_\sigma$ 恰好等于定理 8 中形式的相对熵下确界之差，特别是其中 $\mathcal{M}=\mathcal{N}=\phi_{M_A}\otimes I_B$ 且 $\chi=\{\frac{\mathbb{1}_A}{d_A}\otimes\omega_B\,|\,\omega_B$ 是 $B\}$上的一个量子态。因此，定理 8 证明了界 (25) 成立，接下来只需计算最大变差 $\kappa$。

要确定 $\kappa$ ，只需对所有 $\rho$ 得到界 $0\le S_{M_A}(A|B)_\rho\le\log d_A$ 。根据相对熵的非负性，上界 $S_{M_A}(A|B)_\rho\le\log d_A$ 立即成立。为建立下界，我们将利用以下观察：

(i) 设 $\Phi_M$ 测量信道如式（3），（$\Phi_M\otimes I$）$\rho=\sum_j|j\rangle\langle j|\otimes p_j\,\rho_j$ 给出一个经典—量子态，其中 $p_j=\mathrm{tr}(M_j\rho_A)$ 是在 $M$ 上诱导的结果$\rho_j=$ 的概率分布，而 $_A\mathrm{tr}((M_j\otimes\mathbb{1})\rho)/p_j$ 是一些条件态。

(ii) 对于任意两个这样的经典-量子态， $D(\rho||\rho')=D(p_j||p'_j)+\sum_j p_j D(\rho_j||\rho'_j)$。

(iii) 对于 $p_j = \mathrm{tr}(M_j \rho_A)$ 和 $q_j = \mathrm{tr}(M_j)/d_A$，有 $S_M(\rho_A) =$对数 $d_A - D(p_j||q_j)$ 系统 $A$中的边缘观测熵。
(iv) 令 $p_j$, $\rho_j$ 如 (i) 中所述，则有 $\sum_j p_j \rho_j = \rho_B$，因为 $\sum_j M_j = \mathbb{1}_A$。

(v) $S_{M_A}(A|B)_\rho$ 关于 $\rho$ 是凹函数。

因此我们有

$$S_{M_A}(A|B)_\rho = \log d_A - D\Big((\Phi_{M_A} \otimes I_B)\,\rho \,\Big\|\, (\Phi_{M_A} \otimes I_B)(\tfrac{\mathbb{1}_A}{d_A} \otimes \rho_B)\Big) \tag{56}$$

$$= \log d_A - D(p_j||q_j) - \sum_j p_j D(\rho_j||\rho_B) \tag{57}$$

$$= S_{M_A}(\rho_A) - S(\rho_B) + \sum_j p_j S(\rho_j). \tag{58}$$

第一个等式根据定义得出，第二个用到了 (i) 和 (ii)，第三个用到了 (iii) 和 (iv)。最后注意，对于纯态 $|\psi_{AB}\rangle$，我们有 $S(\rho_A) = S(\rho_B)$，因此 $S_{M_A}(\rho_A) \geq S(\rho_B)$。所以对于纯态，我们有 $S_{M_A}(A|B)_{|\psi\rangle\langle\psi|} \geq 0$。但根据凹性，这个非负性可推广到凸组合，因此一般而言有 $S_{M_A}(A|B)_\rho \geq 0$。

为完成证明，注意到由于 $0 \leq S_{M_A}(A|B)_\rho \leq$ 对数 $d_A$，(55) 中取下确界后的相对熵也满足相同的界。因此，定理 8 中的最大变差 $\kappa$ 为$\kappa =$上确界$_{\mu,\,\nu}|Z(\mu) - Z(\nu)| \leq$上确界$_\mu Z(\mu) \leq$对数 $d_A$。

下面仍需证明变分公式（55）。采用此前用于得到（58）的相同方法，可将（55）写成 $S_{M_A}(\rho_A) + \sum_j p_j S(\rho_j) - \inf_{\omega_B} \mathrm{tr}(-\rho_B \log \omega_B)$。但由 $D(\rho_B \,\|\, \omega_B) \geq 0$ 可立即得到，对于任意 $\omega_B$，都有 $\mathrm{tr}(-\rho_B \log \omega_B) \geq \mathrm{tr}(-\rho_B \log \rho_B)$，从而证明 $\omega_B = \rho_B$ 取到了下确界。

□

## VII. 关于测量的连续性

前几节已经证明，在量子态 $\rho$ 发生变化时，观测熵 $S_M(\rho)$（以及相关量）满足具体的一致连续性界。测量 $M$ 发生变化时的连续性同样是一个重要问题。在测量空间中采用适当的范数（即测量信道之间的菱形范数）后，对于固定量子态，能否对 $|S_M(\rho) - S_{M'}(\rho)|$ 获得类似的界?

我们将证明，尽管观测熵 $S_M(\rho)$ 确实是关于 $M$ 的连续函数，但先前得到的那类简单具体界限并不成立。下面的例子展示了一个有力的限制。

˜例 13。设 $M = (\Pi, \mathbb{1} - \Pi)$ 是一个二元测量，$\tilde{M} = (\mathbb{1} - \Pi, \Pi)$ 是它的置换。考虑该二元测量 $M$ 与其置换的凸组合，

$$M_\lambda = (1-\lambda)M + \lambda \tilde{M}. \tag{59}$$

其 POVM 元素为 $M_\lambda = \Big(\big[(1-2\lambda)\Pi + 2\lambda(\mathbb{1}/2)\big], \big[(1-2\lambda)(\mathbb{1} - \Pi) + 2\lambda(\mathbb{1}/2)\big]\Big)$。由此还可得

$$M_\lambda = (1-2\lambda)\, M + 2\lambda \left[\tfrac{\mathbb{1}}{2}\right], \tag{60}$$

其中，$\left[\frac{\mathbb{1}}{2}\right]$ 表示元素为 $(\mathbb{1}/2, \mathbb{1}/2)$ 的平凡二元测量。这表明，将 $M$ 与其置换后的 $\lambda$ 混合，等价于将 $M$ 与 $2\lambda$ 纯噪声混合。

注意到，测量信道关于测量是凸线性的，即 $\Phi_{(1-\lambda)M+\lambda N} = (1-\lambda)\Phi_M + \lambda\Phi_N$。因此，实现 $M_\lambda$ 和$M$的量子信道之间的菱形范数距离不超过 $\frac{1}{2}\|\Phi_{M_\lambda} - \Phi_M\|_\diamond = \frac{1}{2}\|\lambda(\Phi_{\tilde{M}} - \Phi_M)\|_\diamond \leq \lambda$，这是由量子态之间迹距离的普适界[34]所致。这表明，就连续性而言，$M_\lambda$ 和 $M$ 彼此非常接近；特别是，这保证了由 $M_\lambda$，$M$ 在任意量子态上诱导的概率分布（测量结果统计）之间的总变差距离至多为 $\lambda$（即 $\ell_1$ 范数的一半）。

接下来，假设 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 是纯态，且 $M = (|\psi\rangle\langle\psi|, \mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|)$能完美测量 $\rho$。一般而言，$M$ 及其置换的观测熵相等；在当前情况下，可得 $S_M(\rho) = S_{\tilde{M}}(\rho) = 0$。另一方面，对于凸组合 $M_\lambda$，其概率和体积为

$$\begin{aligned} p_0 &= 1-\lambda, & V_0 &= 1+\lambda(d-2), \\ p_1 &= \lambda, & V_1 &= (d-1)-\lambda(d-2), \end{aligned} \tag{61}$$

从而得到观测熵

$$S_{M_\lambda}(\rho) = (1-\lambda)\log\left(\frac{1+\lambda(d-2)}{1-\lambda}\right) + \lambda\,\log\left(\frac{(d-1)-\lambda(d-2)}{\lambda}\right). \tag{62}$$

将对数展开后，可以将其视为玻尔兹曼项和香农项。

现在可以利用熵 $S_{M_\lambda}(\rho)$ 来分析观测熵作为测量函数时的有界凹性以及连续性。首先考虑有界凹性。在当前情况下，我们有一个熵凹性差

$$\left|S_{(1-\lambda)M+\lambda\tilde{M}}(\rho) - \left[(1-\lambda)S_M(\rho) + \lambda S_{\tilde{M}}(\rho)\right]\right| = S_{M_\lambda}(\rho) \tag{63}$$

因为 $M_\lambda = (1-\lambda)M + \lambda\tilde{M}$，其中 $M$、$\tilde{M}$ 分别给出零熵。其次，直接考虑连续性。在当前情况下，我们有满足 $\frac{1}{2}\|\Phi_{M_\lambda} - \Phi_M\|_\diamond \leq \lambda$ 的测量，并且其熵差为

$$\left|S_{M_\lambda}(\rho) - S_M(\rho)\right| = S_{M_\lambda}(\rho) \tag{64}$$

因为后一项为零。因此，关于连续性和凹性的一般界限不可能优于这一特例中的界限。

We 作如下观察（其中 $S_\lambda \equiv S_{M_\lambda}(\rho)$ 和 $d \geq 2$ 以及 $\lambda \in [0, 1/2$ ]):

- 任意 $\lambda > 0$ 都意味着 $S_\lambda > 0$。对于固定的 $d$，当 $\lambda \to 0$ 也 $S_\lambda \to 0$时，这与连续性一致。
- $S_{1/2} =$ 对数 $d$，因此（63）表明，适用于量子态的朴素凹性界 $H$（$\lambda$）（参见 （18））可能被违反，且违反幅度可达最大值。
- 对于固定的 $\lambda > 0$，只要令 $d$ 足够大，就能使 $S_\lambda$/对数 $d$ 任意接近 1。这表明不存在连续函数 $f(\lambda)$，使得 $f(0) = 0$ 且 $S_\lambda \leq f(\lambda)$ 对数 $d$。

最后这一观察对测量的渐近连续性界施加了强烈限制：不存在任何连续函数 $f(\lambda)$，满足 $f(0) = 0$，使得

$$\big|S_N(\rho) - S_M(\rho)\big| \leq f(\lambda) \log d \tag{65}$$

对所有 $\frac{1}{2}\|\Phi_N - \Phi_M\|_\diamond \leq \lambda$均成立。这种形式涵盖了前文针对各种熵相对于量子态的连续性所讨论的所有类型的界。

此外，人们或许会希望仿照处理量子态的方法来解决测量连续性问题，尝试基于有界凹性采用某种形式的 AFW 技巧（针对量子信道加以修改）。然而，这个例子表明，失败的不仅是由 $H(\lambda)$ 给出的朴素凹性界；而且（与上述连续性问题类似），也不存在形式为 $f(\lambda) \log d$ 的凹性界。

由于这些局限，目前我们只能给出关于测量连续性的以下较为抽象的陈述。这里给出一个一般性陈述，其中观测熵是一个特例。

定理14. 设 $\rho, \sigma$ 为量子态，且 $D(\rho\|\sigma) < \infty$。那么， $F(\Phi) = D\big(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)\big)$ 是量子信道 $\Phi$ 的一致连续函数。

证明. 我们处于有限维情形，因此量子信道构成一个有限维凸集，且所有范数都诱导相同的拓扑。为明确起见，我们使用菱形范数。要证明连续性，我们需要证明：对于任意 $\Phi$ 和任意 $\delta > 0$，存在一个 $\epsilon > 0$，使得$\|\Phi - \Phi'\|_\diamond < \epsilon$ 蕴含 $|F(\Phi) - F(\Phi')| < \delta$。

首先，对于任意量子信道 $\Phi$，定义 $\Phi_s = (1-s)\Phi + s\tau$，它将 $\Phi$ 与噪声混合，并令$\tau(X) = \mathrm{tr}(X)\mathbb{1}/d$制备最大混合态。注意， $F(\Phi)$ 关于 $\Phi$ 是凸的，且有限且非负，并且 $F(\tau) = 0$。由此可得， $F(\Phi) \geq (1-s)F(\Phi) \geq F(\Phi_s)$。因此，对于任意 $\Phi$，可得 $|F(\Phi) - F(\Phi_s)| \leq sF(\Phi)$。

此外，对于任意 $\Phi$，量子态 $\Phi_s(\rho)$ 和 $\Phi_s(\sigma)$ 均为正定矩阵。正定矩阵的集合 $\mathcal{P}$ 在矩阵 2-范数拓扑（矩阵元素上的通常欧几里得拓扑）中是开集。在定义域 $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ 上，函数 $D(\mu\|\nu)$ 是连续的；这是因为显然它是矩阵乘法、线性组合、迹和对数的复合，而它们都是定义在正定矩阵集合 $\mathcal{P}$上的连续函数。因此，对于任意 $\delta_s > 0$，存在一个 $\epsilon_s > 0$，使得若 $\|\Phi_s(\rho) - \Phi'_s(\rho)\|_2 < \epsilon_s$ 且 $\|\Phi_s(\sigma) - \Phi'_s(\sigma)\|_2 < \epsilon_s$，则 $|F(\Phi_s) - F(\Phi'_s)| < \delta_s$。必须将这个 $\epsilon_s$选得足够小，才能使两个 $\epsilon_s$-球完全包含在 $\mathcal{P}$中。

同时，对于量子信道 $\Phi, \Phi'$，有 $\|\Phi_s - \Phi'_s\|_\diamond = \|(1-s)(\Phi - \Phi')\|_\diamond \leq \|\Phi - \Phi'\|_\diamond$。因此，对于任意量子态 $\nu$，我们有 $\|\Phi_s(\nu) - \Phi'_s(\nu)\|_2 \leq \|\Phi_s(\nu) - \Phi'_s(\nu)\|_1 \leq \|\Phi_s - \Phi'_s\|_\diamond \leq \|\Phi - \Phi'\|_\diamond$。

现在我们将这些要素结合起来。对于任意 $1 > s > 0$, $\delta_s > 0$ ，令 $\epsilon_s$ 如上所述，并假设 $\|\Phi - \Phi'\|_\diamond < \epsilon_s$。注意到

$$|F(\Phi) - F(\Phi')| = |F(\Phi) - F(\Phi_s) + F(\Phi_s) - F(\Phi'_s) + F(\Phi'_s) - F(\Phi')| \tag{66}$$
$$\leq |F(\Phi) - F(\Phi_s)| + |F(\Phi_s) - F(\Phi'_s)| + |F(\Phi'_s) - F(\Phi')| \tag{67}$$
$$\leq sF(\Phi) + \delta_s + sF(\Phi') \tag{68}$$
$$\leq \delta_s + 2sD(\rho\|\sigma). \tag{69}$$

第一个不等式是三角不等式。第二个不等式由上述观察得出。最后一个不等式则来自相对熵单调性。

最后，取一个 $\delta > 0$。由于我们假设 $D(\rho\|\sigma) < \infty$，因此可以选择足够小的 $s > 0$ ，使得 $2sD(\rho\|\sigma) < \delta$。接下来，任取足够小的 $\delta_s > 0$，使得 $2sD(\rho\|\sigma) + \delta_s < \delta$ 也成立。存在一个如上所述的 $\epsilon_s > 0$，使得 $\|\Phi - \Phi'\|_\diamond < \epsilon_s$ 蕴含 $|F(\Phi_s) - F(\Phi'_s)| < \delta_s$，因此也蕴含 $|F(\Phi) - F(\Phi')| < \delta$。至此，连续性的证明完成。有限维量子信道构成一个紧集，因此 $F$ 的连续性意味着它也是一致连续的。也可以通过固定 $s = \delta/4D(\rho\|\sigma)$，并利用对数在定义域 $[s/d, \infty)$ 上的一致连续性，直接证明一致连续性（但技术上更为复杂）。

□

在 $\sigma = \mathbb{1}/d$ 且 $\Phi$ 为测量信道的情况下，观测熵由 $D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma))$ 确定。由于 $D(\rho\|\mathbb{1}/d) < \infty$ 总是成立，因此这意味着（在 $\Phi_M$上由菱形范数诱导的拓扑中）观测熵 $S_M(\rho)$ 是测量的连续函数。以这种形式，连续性仅适用于结果集相同的测量。

通过测量得到的连续性可以扩展到结果集任意的测量，只需定义一种适当的拓扑即可。这种拓扑可以由模拟距离诱导。对于 POVM $M$、$N$，该距离定义为

$$\gamma(M,N) = \frac{\vec{\gamma}(M,N)+\vec{\gamma}(N,M)}{2}, \qquad \vec{\gamma}(M,N) = \inf_\Lambda \tfrac{1}{2}\|\Phi_{\Lambda M} - \Phi_N\|_\diamond, \tag{70}$$

其中，定义“单向”模拟距离 $\vec{\gamma}(M,N)$ 时所取的下确界，是对从 $M$ 结果集到 $N$ 结果集的随机映射 $\Lambda$ 而言的，因此 $\Lambda M$ 和 $N$ 是结果集相同的测量。可以证明，函数 $\gamma(M,N)$ 满足（伪）度量的公理，因此在 POVM 空间上诱导出一种拓扑。该距离刻画了通过随机信道进行经典后处理时，两个 POVM 彼此逼近的程度——如果它们仅通过后处理就能完美地相互模拟，那么它们实际上就是同一个 POVM。在这一拓扑下，测量相对熵 $D_M$ 关于 $M$连续，因此观测熵 $S_M$ 也连续。

推论 15. 设 $\rho,\sigma$ 是满足 $D(\rho\|\sigma) < \infty$ 的量子态。则 $F(M) = D_M(\rho\|\sigma)$ 是关于测量 $M$ 的模拟距离拓扑的连续函数。这也意味着 $F_0(M) = S_M(\rho)$ 作为特例具有连续性。连续性是一致的（至少对于 $d < \infty$）。

证明. 固定 $\delta > 0$ ，并令 $\epsilon = \epsilon(\delta)$ 取自定理14。任取满足 $\epsilon > c > 0$ 的 $c$ ，并令 $\epsilon' = (\epsilon - c)/4 > 0$。假设 $\gamma(M,N) < \epsilon'$。根据 $\gamma$ 的定义，存在 $\Lambda, \Lambda'$ 使得$\|\Phi_{\Lambda M} - \Phi_N\|_\diamond < \epsilon$ 且 $\|\Phi_{\Lambda' N} - \Phi_M\|_\diamond < \epsilon$。因此 $|D_{\Lambda M} - D_N| < \delta$ 且 $|D_{\Lambda' N} - D_M| < \delta$。于是我们有 $D_M \geq D_{\Lambda M} > D_N - \delta$，并且还有 $D_M < D_{\Lambda' N} + \delta \leq D_N + \delta$; 这些结论均由相对熵单调性得到，从而 $|D_M - D_N| < \delta$。证明完毕。

更简单地说，我们指出，对于较小的 $\gamma(M,N)$，有 $D_N \geq D_{\Lambda' N} \approx D_M \geq D_{\Lambda M} \approx D_N$，这意味着 $D_M \approx D_N$，其中 $\geq$ 由单调性得出，而 $\approx$ 则由前述连续性得出。 □

## VIII. 总结

主要定理 6 给出了一个关于观测熵的连续性界（33），该界具有普适性，即与定义粗粒化的正算子值测度 $M$ 无关，且其维数因子为希尔伯特空间维数的对数 $d$ 。

与朴素界（5）相比，此界有所改进，因为它仅随 $\log d$ 变化，而与测量结果的数量 $|M|$无关。这体现了观测熵作为量子系统中经典熵的直观性质，例如可与可观测量的香农熵相比较。普适性的提升也伴随着些许取舍：当 $M$ 是完备正交归一基上的投影测量时，朴素界（5）会略强一些。我们注意到，（33）只有在 $\rho$与 $\sigma$ 具有重叠支撑时才可能适用。如果支撑相互正交，则迹距离 $\epsilon = 1$ 达到最大值，而（33）比平凡界 $|\Delta S_M| \leq \log\ d$更弱。这表明（33）一般不可能是紧的——对于固定的 $\epsilon$，通常不存在一组 $\rho$， $\sigma$， $M$使该不等式取等。

与此同时，对于关于测量的连续性，尽管观测熵是连续的，但要得到收敛的显式界却很困难（甚至可能不可能）。本研究结果的其他显著局限还包括：测量相对熵的连续性需要参考集为凸集（如前文所述），以及全文始终限于有限维空间。将我们的结果推广到无限维情形会遇到一些困难，这些困难与玻尔兹曼熵和冯·诺依曼熵可能为无穷大有关。谨慎地完成这一推广，将是后续研究的一项有益工作。

也可以考虑针对密度分布的观测熵发展的一种经典版本 $\rho$， $\sigma$ 其定义在相空间 $\Gamma$上。迹是在 $\Gamma$ 上的积分，范数是 $L^1$ 范数，而测量 $M$ 则是单位分解。维数因子 $d$ （在经典情形下，更合适的标记是 $V$ ）是按适当选取的测度计算的相空间总体积。所得界限（33）在经典情形下同样成立，前提是考虑范围可以限制在相空间的有限区域内。

与量子情形一样，经典界限（33）只有在 $|\Delta S_M| \leq$对数 $V$大于 $\rho$， $\sigma$ 在相空间中有重叠支撑时，才可能具有非平凡意义（强于 $\rho$ ）。若如此，界限所保证的熵接近性，仅源于处于完全相同量子态的概率。此外可以看到，对于动力学保持范数的孤立系统，这一界限与时间无关。对于粗粒化熵，可以从热力学第二定律的角度来理解这一点。假设 $\rho$ 集中在相空间中的某个特定“违反第二定律”的点上，该点演化后会达到一个熵更低的量子态。任何 $\sigma$ 在范数距离上足够接近 $\rho$ 的量子态，也必然违反第二定律；乍看之下，这似乎违背了此类量子态十分罕见的原则。所幸，根据上述考虑， $\sigma$ 可以集中在与 $\rho$不相交的任意相空间区域内，即便该区域近在咫尺也不受限制，而且其熵动力学也不受任何约束。由此，这一界限与以下原则相容：混沌系统中彼此邻近的相空间点，其动力学可能截然不同。

## 致谢

作者感谢 Ludovico Lami 就测量相对熵的连续性和极小极大引理提出意见，并感谢 Niklas Galke、Philipp Strasberg 和 Giulio Gasbarri

进行了有益的讨论。

作者感谢 MICIIN 提供资助，资金来自欧盟 NextGenerationEU（PRTR-C17.I1），并感谢加泰罗尼亚自治区政府。此外，AW 还获得了欧盟委员会 QuantERA 项目 ExTRaQT（西班牙科学与创新部项目 PCI2022-132965）的资助；西班牙经济与竞争力部项目 PID2019-107609GB-I00 在欧洲区域发展基金的支持下提供的资助；加泰罗尼亚自治区政府项目 2017-SGR-1127 的资助；亚历山大·冯·洪堡基金会的资助；以及慕尼黑工业大学高等研究院的支持。

---

[1] J. von Neumann, 《量子力学中遍历定理和H定理的证明》。译自：Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik，EPJ H 35，201（2010），arXiv:1003.2133 [physics.hist-ph].[2] N. G. Van Kampen, 《不可逆过程的量子统计》，Physica 20，603（1954）。[3] J. von Neumann, 《量子力学的数学基础》（普林斯顿大学出版社，1955）。[4] A. Wehrl, 《熵的一般性质》，Rev. Mod. Phys. 50，221（1978）。[5] D. ˇSafr´anek、J. M. Deutsch 和 A. Aguirre, 《量子粗粒化熵与热力学》，Phys. Rev. A 99，010101（2019），arXiv:1707.09722 [quant-ph].[6] D. ˇSafr´anek、A. Aguirre、J. Schindler 和 J. M. Deutsch, 《观测熵简明导论》，Found. Phys. 51，101（2021），arXiv:2008.04409 [quant-ph].[7]P. Strasberg 和 A. Winter, 《量子热力学第一定律和第二定律：基于熵微观定义的一致推导》，PRX Quantum 2，030202（2021），arXiv:2002.08817 [quant-ph].[8] D. ˇSafr´anek、J. M. Deutsch 和 A. Aguirre, 《封闭系统中的量子粗粒化熵与热化》，Phys. Rev. A 99，012103（2019），arXiv:1803.00665 [quant-ph].[9] D. ˇSafr´anek、A. Aguirre 和 J. M. Deutsch, 《经典动力学粗粒化熵及其与量子版本的比较》，Phys. Rev. E 102，032106（2020），arXiv:1905.03841 [cond-mat.stat-mech].[10] D. ˇSafr´anek 和 J. Thingna, 《使用广义量子测量量化信息提取》，arXiv:2007.07246 [quant-ph]（2020），预印本。[11]A. Wehrl, 《关于经典熵与量子力学熵之间的关系》，Rep. Math. Phys. 16，353（1979）。[12]A. Riera-Campeny、A. Sanpera 和 P. Strasberg, 《与有限热浴相关联的量子系统：非平衡动力学与热力学》，PRX Quantum 2，010340（2021），arXiv:2008.02184 [quant-ph].[13] P. Strasberg、M. Garc´ıa D´ıaz 和 A. Riera-Campeny, 《有限热浴中的克劳修斯不等式揭示普适效率提升》，Phys. Rev. E 104，L022103（2021），arXiv:2012.03262 [quant-ph].[14] F. Buscemi、J. Schindler 和 D. ˇSafr´anek, 《观测熵、粗粒化量子态与Petz恢复：信息论性质及界》，arXiv:2209.03803 [quant-ph]（2022），预印本。[15] L. Amadei、H. Liu 和 A. Perez, 《量子引力中的幺正性与信息：一个简单示例》，Front. Astron. Space Sci. 8，46（2021），arXiv:1912.09750 [gr-qc].[16] X. Zhou 和 Z.-J. Zheng, 《多体系统中X态的量子关联熵与量子 discord之间的关系》，EPJ Plus 137，625（2022）。[17] X. Zhou 和 Z.-J. Zheng, 《观测熵与Rényi信息度量之间的关系》，Quantum Inf. Processing 21，228（2022）。[18] R. Hamazaki, 《宏观跃迁的速度极限》，PRX Quantum 3，020319（2022），arXiv:2110.09716 [cond-mat.stat-mech].[19] D. Faiez、D. ˇSafr´anek、J. M. Deutsch 和 A. Aguirre, 《长寿命孤立量子系统的典型熵与极端熵》，Phys. Rev. A 101，052101（2020），arXiv:1908.07083 [quant-ph]。

[20]R. Modak 和 S. Aravinda，《安德森局域化的观测熵研究》，arXiv:2209.10273 [quant-ph] （2022），预印本。[21] A. Stokes，《非共轭量子子系统》，Phys. Rev. E 106，034111（2022），arXiv:2106.11017 [quant-ph].[22] P. Strasberg，《量子随机热力学：基础与精选应用》（牛津大学出版社，2022）。[23] P. Strasberg、A. Winter、J. Gemmer 和 J. Wang，《纯态动力学中的经典性、马尔可夫性与局域细致平衡》，arXiv:2209.07977 [quant-ph] （2022），预印本。[24]D. ˇSafr´anek、D. Rosa 和 F. Binder，《从未知量子源提取功》，arXiv:2209.11076 [quant-ph] （2022），预印本。[25]S. PG、R. Modak 和 S. Aravinda，《利用观测熵见证量子混沌》，arXiv:2212.01585 [quant-ph] （2022），预印本。[26] X. Zhou，《噪声量子信道下多量子比特系统量子关联熵的动力学行为》，Int. J. Theor. Phys. 62，23（2023）。[27]D. ˇSafr´anek 和 D. Rosa，《从任意量子测量获得期望值》，arXiv:2301.10428 [quant-ph] （2023），预印本。[28]M. Fannes，《自旋晶格系统熵密度的连续性性质》，Commun. Math. Phys. 31，291（1973）。[29]M. Grabowski 和 P. Staszewski，《关于可观测量熵的连续性性质》，Rep. Math. Phys. 11，233（1977）。[30]K. M. R. Audenaert，《冯·诺伊曼熵的一个精确连续性估计》，J. Phys. A: Math. Theor. 40，8127（2007），arXiv:quant-ph/0610146 [quant-ph].[31]K. M. R. Audenaert 和 J. Eisert，《量子相对熵的连续性界》，J. Math. Phys. 46，102104（2005），arXiv:quant-ph/0503218 [quant-ph].[32]A. Winter，《量子熵的紧致一致连续性界：条件熵、相对熵距离与能量约束》，Commun. Math. Phys. 347，291（2016），arXiv:1507.07775 [quant-ph].[33]Z. Zhang，《通过柯尔莫哥洛夫距离估算互信息》，IEEE Trans. Inf. Theor. 53，3280（2007）。[34] M. M. Wilde，《量子信息论》（剑桥大学出版社，2013），arXiv:1106.1445v8。[35]A. S. Holevo 和 R. F. Werner，《玻色高斯信道容量的评估》，Phys. Rev. A 63，032312（2001），arXiv:quant-ph/9912067 [quant-ph].[36]R. Alicki 和 M. Fannes，《量子条件信息的连续性》，J. Phys. A: Math. Theor. 37，L55（2004），arXiv:quant-ph/0312081 [quant-ph].[37] M. Mosonyi 和 F. Hiai，《关于量子Rényi相对熵及相关容量公式》，IEEE Trans. Inf. Theor. 57，2474（2011），arXiv:0912.1286 [quant-ph].[38]M. J. Donald 和 M. Horodecki，《纠缠相对熵的连续性》，Phys. Lett. A 264，257（2000），arXiv:quant-ph/9910002 [quant-ph].[39] B. Synak-Radtke 和 M. Horodecki，《关于量子态函数的渐近连续性》，J. Phys. A: Math. Gen. 39，L423（2006），arXiv:quant-ph/0507126 [quant-ph].[40]M. Piani，《纠缠相对熵与受限测量》，Phys. Rev. Lett. 103，160504（2009），arXiv:0904.2705 [quant-ph].[41] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息：十周年纪念版》（剑桥大学出版社，2010）。[42]K. Li 和 A. Winter，《相对熵与压缩纠缠》，Commun. Math. Phys. **326**，63（2014），arXiv:1210.3181 [quant-ph]。[43] M. E. Shirokov，《能量受限量子系统的高级 Alicki-Fannes-Winter 方法及其应用》，Quantum Inf. Process. **19**，164（2020），arXiv:1907.02458 [quant-ph]。[44] A. Bluhm，´A. Capel、P. Gondolf 和 A. Perez-Hern´andez，《通过近似凸性研究量子熵量的连续性》（2022），arXiv:2208.00922 [quant-ph]。

定

[45] A. Bluhm, ´A. Capel、P. Gondolf 和 A. P´erez-Hern´andez, 《量子相对熵的一般连续性界》（2023）, arXiv:2305.10140 [quant-ph].[46]M. E. Shirokov, 《复合量子系统特征连续性的量化》, Phys. Scr. 98, 042002（2023）, arXiv:2201.11477 [quant-ph].[47] F. G. S. L. Brand˜ao、A. W. Harrow、J. R. Lee 和 Y. Peres, 《受限测量下的对抗性假设检验与量子斯坦引理》, IEEE Trans. Inf. Theory 66, 5037（2020）, arXiv:1308.6702.[48]B. Farkas 和 S. G. R´ev´esz, 《相会数的位势理论方法》, Monatshefte f¨ur Mathematik 148, 309（2006）, arXiv:math/0503423 [math.CA].[49] M. Sion, 《论一般极小极大定理》, Pacific Journal of Mathematics 8, 171（1958）。[50] L. Lami, 私人通信（2022）。[51] P. J. Coles、M. Berta、M. Tomamichel 和 S. Wehner, 《熵不确定性关系及其应用》, Rev. Mod. Phys. 89, 015002（2017）, arXiv:1511.04857 [quant-ph]。