arXiv:2302.00403v1 [math.RA] 1 Feb 2023

广义 Witt 代数和 Block 李代数上的转置泊松结构*†

Ivan Kaygorodov‡ & Mykola Khrypchenko§

摘要：我们描述了特征零域 F 上的广义 Witt 代数 $W(A,V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 和 Block 李代数 $L(A,g,f)$ 上的转置泊松结构，其中 $\langle\cdot$、 $\cdot\rangle$ 和 f 均非退化。更具体地说，若 $\dim(V)>1$，则 $W(A,V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的所有转置泊松代数结构都是平凡的；若 $\dim(V)=1$，则这类结构在同构意义下都是 FA 上群代数结构的变异。 $L(A,g,f)$ 上的转置泊松代数结构与定义在 $L(A,g,f)$ 的平方补空间上、取值于 $L(A,g,f)$ 的中心的交换结合乘法一一对应。特别地，它们全都是 $L(A,g,f)$ 上的通常泊松结构。这推广了关于 Block 李代数 $\mathcal{B}(q)$ 上转置泊松结构的早期结果。

关键词：转置泊松代数，广义 Witt 代数，Block 李代数， δ-导子。MSC2020年：主要分类 17A30；次要分类 17B40、17B61、17B63。

引言

泊松代数源自 20 世纪 70 年代的泊松几何，已在数学和物理学的多个领域展现出重要性，例如泊松流形、代数几何、运算子、量子化理论、量子群以及经典力学和量子力学。泊松代数理论中的一个热门课题，是研究固定李代数部分或结合代数部分 [1, 9, 10, 17]时所有可能的泊松代数结构。近期，Bai、Bai、Guo 和 Wu [2] 通过交换定义泊松代数的 Leibniz 法则中两个二元运算的角色，引入了泊松代数的一种对偶概念，称为转置泊松代数。他们证明，以这种方式定义的转置泊松代数不仅具有泊松代数的共同性质，包括在张量积运算下封闭以及作为运算子的 Koszul 自对偶性，而且还满足一类丰富的恒等式。更重要的是，通过取 Novikov 代数的交换子李代数，可以自然地得到转置泊松代数。根据 [3], , 任何含幺转置泊松代数都是一种特殊的“接触括号”代数和拟泊松代数。

*本研究得到 FCT UIDB/MAT/00212/2020、UIDP/MAT/00212/2020、2022.02474.PTDC 以及 CMUP 的资助。CMUP 是 LASI 的成员，LASI 由国家经费通过 FCT——科学与技术基金会（Fundação para a Ciência e a Tecnologia，I.P.）资助，项目编号为 UIDB/00144/2020。

†通讯作者：kaygorodov.ivan@gmail.com

‡CMA-UBI，葡萄牙贝拉内陆大学，科维良；kaygorodov.ivan@gmail.com §数学系，巴西圣卡塔琳娜联邦大学；以及 CMUP，波尔图大学科学学院数学系，坎普阿莱格里街 s/n，4169–007 波尔图，葡萄牙 nskhripchenko@gmail.com

在 Ferreira、Kaygorodov 和 Lopatkin 最近发表的一篇论文中，建立了李代数的$_{1\ 2}$-导子与转置泊松代数之间的联系 [7]。这些思想被用于描述 Witt 代数和 Virasoro代数上的所有转置泊松结构 [7]；扭曲 Heisenberg-Virasoro 代数、Schr¨odinger-Virasoro 代数和扩张 Schr¨odinger-Virasoro 代数上的所有转置泊松结构 [19]；振子代数上的转置泊松结构 [3]；以及 Witt 型李代数上的转置泊松结构 [12]。已有证明表明，每个复有限维可解李代数都具有非平凡的转置泊松结构 [13]。转置泊松代数和转置泊松双代数的 Hom版本与 BiHom版本也已得到研究 [14, 15]。三维转置泊松代数的代数与几何分类见 [4]。关于转置泊松代数的具体开放问题列表，请参见 [3]。

首个非平凡的转置泊松代数例子是在 Witt 代数上构造的，其乘法为 $[e_i, e_j] = (i - j)e_{i+j}$，其中 $i, j \in \mathbb{Z}$（见 [7]）。这引起了人们对与 Witt 代数相关的李代数上的转置泊松结构的关注。因此，Virasoro 代数 [7], 、Block 型李代数和 Block 型李超代数 [11], 、Witt 型李代数 [12] 上的所有转置泊松结构均已得到描述。近年来，Witt 型和 Block 型李代数的概念经 Kawamoto、Osborn、Dokovi´c、Zhao、Xu、Passman、Jordan 等多位学者拓展和推广（例如，见 [11, 12]及其中的参考文献）。本文研究 Dokovi´c 和 Zhao 在 [6] 中定义的广义 Witt 代数类，以及 Block 在 [5] 中定义的 Block 代数上的转置泊松结构。我们采用在固定李代数 $\mathfrak{L}$ 上刻画转置泊松代数结构的标准方法，该方法基于对 $\mathfrak{L}$的$_{1\ 2}$-导子空间的描述。

我们的工作主要分为两部分。第 2 节旨在描述广义 Witt 代数 $W(A, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上的$_{1\ 2}$-导子和转置泊松结构，并由此得到以下定理。

定理A（定理 13）。设 $W(A, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个具有非退化$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 且 $\mathrm{char}(F) = 0.$ 的广义 Witt 代数。

(i) 若 $\dim(V) > 1$，则 $W(A, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上所有转置泊松代数结构都是平凡的。(ii) 若 $\dim(V) = 1$，例如 $V = \mathrm{span}_F\{v\}$，则 $W(A, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上的转置泊松代数结构恰为乘积 $(a \otimes v) \cdot (b \otimes v) = (a + b) \otimes v$ 的变异。

在第 3 节中，我们研究 Block 李代数 $L(A, g, f)$ 上的相同问题，并得到以下结果。

定理 B（定理 22 和 29）。设 $L(A, g, f)$ 是一个具有非退化 f 且 $\mathrm{char}(F) = 0.$ 的 Block 李代数

(i) 如果 $g = 0$，那么在 $L(A, 0, f)$ 上只有一种非平凡的转置泊松代数结构 $\cdot$。它由 $u_0 \cdot u_0 = u_0.$ 给出。(ii) 如果 $g \neq 0$，并且对于所有 $a \in A$，$(g(a)\ h(a)) \neq (0, -1)$，那么 $L(A, g, f)$ 上的所有转置泊松代数结构都是平凡的。

(iii) 如果 $g \neq 0$，且存在 $a \in A$，使得 $(g(a)\ h(a)) \neq (0,-1)$，那么 $L(A,g,f)$ 上的转置泊松代数结构是通常的泊松代数结构，它们是补空间 $V = \mathrm{span}_F\{u_a \mid g(a) = h(a) + 2 = 0\}$ 上交换结合乘积 $*$ 的零扩张，其取值于 $Z(L) = \mathrm{span}_F\{u_a \mid g(a) = h(a) + 1 = 0\}$ 的 $[L,L]$。

1. 定义与预备知识

除非另有说明，以下所有代数均定义在特征零域 F 上，且所有线性映射均为 F-线性的。

定义 1. 设 $\mathfrak{L}$ 是一个向量空间，配备了两个非零双线性运算 $\cdot$ 和 $[\cdot,\cdot]$。若三元组 $(\mathfrak{L}, \cdot, [\cdot,\cdot])$ 满足：$(\mathfrak{L},\cdot)$ 是交换结合代数，且 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是满足以下相容条件的李代数，则称其为转置泊松代数

$$2z\cdot[x,y] = [z\cdot x, y] + [x, z\cdot y]. \tag{1}$$

转置泊松代数最早由 Bai、Bai、Guo 和 Wu 在一篇论文中引入 [2]。

定义 2. 设 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。$(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 上的转置泊松代数结构是指 $\mathfrak{L}$ 上的交换结合乘法 $\cdot$，使得 $(\mathfrak{L},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 成为转置泊松代数。

定义 3. 设 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个代数，且 $\varphi\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{L}$ a 是一个线性映射。若 φ 满足下列条件，则称其为 $\frac{1}{2}$-导子

$$\varphi\big([x,y]\big) = \frac{1}{2}\big([\varphi(x),y] + [x,\varphi(y)]\big). \tag{2}$$

注意，$\frac{1}{2}$-导子是 Filippov 在 [8] 中引入的 δ-导子的特殊情形（另见 [20] 及其中的参考文献）。代数 $\mathfrak{L}$ 的所有 $\frac{1}{2}$-导子构成的空间记作$\Delta(\mathfrak{L})$。

定义 1 和定义 3 立即推出以下关键引理。

引理 4. 设 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 是一个李代数，且 $\cdot$ 是 $\mathfrak{L}$ 上的一个新二元（双线性）运算。那么，$(\mathfrak{L},\cdot,[\cdot,\cdot])$ 是一个转置泊松代数，当且仅当 $\cdot$ 是交换且结合的，并且对每个 $z\in\mathfrak{L}$，在 $(\mathfrak{L},\cdot)$ 中由 z 进行的乘法是 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$ 的一个 $\frac{1}{2}$-导子。

$\frac{1}{2}$-导子的基本例子是乘以域中的一个元素。这类$\frac{1}{2}$-导子称为平凡导子。

定理 5. 设 $\mathfrak{L}$ 是一个没有非平凡$\frac{1}{2}$-导子的李代数。那么，$\mathfrak{L}$ 上的所有转置泊松代数结构都是平凡的。

给定一个李代数 $(\mathfrak{L},[\cdot,\cdot])$，记其中心为 $Z(\mathfrak{L})$，即 $Z(\mathfrak{L}) = \{a\in\mathfrak{L} \mid [a,b]=0,\ \forall b\in\mathfrak{L}\}$；记其平方为 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$，即 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}] = \mathrm{span}_F\{[a,b] \mid a,b\in\mathfrak{L}\}$。取 $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ 在 $\mathfrak{L}$ 中的一个补空间 V。那么，任意交换结合乘积 $*\colon V\times V\to Z(\mathfrak{L})$ 都可通过下式在 $\mathfrak{L}$ 上定义一个转置泊松代数结构 $\cdot$

$$(a_1+a_2)\cdot(b_1+b_2) = a_1 * b_1, \tag{3}$$

其中 $a_1, b_1 \in V$ 和 $a_2, b_2 \in [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$。事实上，式 (1) 的右端为零，因为 $z \cdot x, z \cdot y \in Z(\mathfrak{L})$；式 (1) 的左端也由式 (3) 得为零，因为 $[x, y] \in [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}]$。我们称 $\cdot$ 为 $*$ 的零延拓。注意，$\cdot$ 同时也是 $(\mathfrak{L}, [\cdot, \cdot])$ 上通常的泊松结构。

2. 广义 Witt 代数上的转置泊松结构

2.1. 广义 Witt 代数。

Dokovi´c 和 Zhao [6] 介绍了经典 Witt 代数的以下推广。

定义 6. 设 F为一个域，$(A, +)$ 为一个非平凡阿贝尔群，$V \neq \{0\}$ 为一个向量空间，且 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times A \to F$是关于第一个变量线性、关于第二个变量可加的映射。记 $W := FA \otimes_F V$，并通过以下方式在 W 上定义乘积 $[\cdot, \cdot]$

$$[a \otimes v, b \otimes w] = (a + b) \otimes (\langle v, b \rangle w - \langle w, a \rangle v). \tag{4}$$

则 $(W, [\cdot, \cdot])$ 是一个李代数，称为广义 Witt 代数。

在需要明确指定 A, V和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$时，记作 $W = W(A, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$。我们假设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是非退化的，即

$$\langle V, a \rangle = \{0\} \Leftrightarrow a = 0. \tag{5}$$

We 还假设 $\mathrm{char}(F) = 0$。由 (5) 可知 A 是无挠的。

代数 $W(A, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是所谓 Witt 型李代数 $V(f)$ 的推广（对应于加法映射 f），由 Yu 于 [18] 引入[¶]。我们使用本文的记号回顾其定义。给定一个阿贝尔群 A、一个域 F 和一个函数 $f\colon A \to F$，定义 $V(f)$ 为以 $\{e_a\}_{a \in A}$ 为基、乘法为

$$[e_a, e_b] = (f(b) - f(a))e_{a+b}. \tag{6}$$

不失一般性，设 $f(0) = 0$。那么 $V(f)$ 是李代数，当且仅当 if

$$\big(f(a + b) - f(a) - f(b)\big)\big(f(a) - f(b)\big) = 0$$

对所有 $a, b \in A$ 均成立。请注意，一般而言，并不要求 f 是加法映射。然而，根据引理 4.6], 当 $|f(A)| \geq 4$ 时，事实证明它确实是加法映射。

引理 7. 设 $\dim(V) = 1$ 且 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 非退化。则 $W(A, V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 与某个 Witt 型李代数 $V(f)$ 同构，其中 $f\colon A \to F$是加性单射，且 $|f(A)| = \infty$。

证明. 取 $v \in V \setminus \{0\}$。则 $\{a \otimes v \mid a \in A\}$ 是 W的一组基。定义加法映射 $f\colon A \to F$，使得 $f(a) = \langle v, a \rangle$，并定义双射线性映射 $\varphi\colon W \to V(f)$，使得 $\varphi(a \otimes v) = e_a$。由 (4) 和 (6) 得

$$\begin{aligned}[\varphi(a \otimes v), \varphi(b \otimes v)] = [e_a, e_b] = (f(b) - f(a))e_{a+b} = (\langle v, b \rangle - \langle v, a \rangle)e_{a+b} \\ = (\langle v, b \rangle - \langle v, a \rangle)\varphi((a + b) \otimes v) = \varphi([a \otimes v, b \otimes v]).\end{aligned}$$

注意，由 (5) 可知 f 是单射，因为 $\langle v, a \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle V, a \rangle = \{0\}$。由于 A 无挠，因此$|A| = \infty$，从而 $|f(A)| = \infty$ 也成立。□

¶注意，$V(f)$ 中的“V”与定义 6 中的空间 V 并不相同。

由于 $V(f)$ 上的转置泊松结构已在 [12], 中描述，因此我们只需处理 $\dim(V) > 1$ 的情形。

引理 8. 设 $\dim(V) > 1$。若 $a \neq 0$，则存在两个线性无关的 $v', v'' \in V$，使得$\langle v', a\rangle \neq 0 \neq \langle v'', a\rangle$。

证明. 记 $V_0 = \{v \in V \mid \langle v, a\rangle = 0\}$。若 $V_0 = \{0\}$，则无需证明。否则，取$0 \neq v_0 \in V_0$。由于 $a \neq 0$，由 (5) 可知存在 $v' \in V$，使得 $\langle v', a\rangle \neq 0$。注意到 v' 和 v_0 线性无关，否则 $v' = kv_0$ 和 $\langle v', a\rangle = k\langle v_0, a\rangle = 0$。于是 v' 和 $v' + v_0$ 也线性无关，且 $\langle v' + v_0, a\rangle = \langle v', a\rangle \neq 0$。因此，我们可以取 $v'' = v' + v_0$。□

2.2. 广义 Witt 代数的$_{1\ 2}$-导子。注意， W 是一个 A-分次代数，即

$$W = \bigoplus_{a\in A} W_a, \text{ where } W_a = a \otimes V = \{a \otimes v \mid v \in V\}.$$

对所有 $a \in A$ 和 $v \in V$，为简便起见，记

$$v_a := a \otimes v. \tag{7}$$

任意线性映射 $\varphi\colon W \to W$ 可分解为

$$\varphi = \sum_{a\in A} \varphi_a,$$

其中 $\varphi_a\colon W \to W$ 是一个线性映射，满足对所有 $b \in A$， $\varphi_a(W_b) \subseteq W_{a+b}$。特别地，当且仅当对所有 $a \in A$， $\varphi \in \Delta(W)$ 当且仅当 $\varphi_a \in \Delta(W)$。记

$$\varphi_a(v_b) = d_a(v_b)_{a+b}, \tag{8}$$

其中 $d_a\colon W \to V$。

引理 9. 设 $\varphi_a\colon W \to W$ 是满足 (8) 的线性映射。则 $\varphi_a \in \Delta(W)$ 当且仅当对所有x、 $y \in A$ 和 v、 $w \in V$

$$\begin{aligned} &2d_a(\langle v, y\rangle w_{x+y} - \langle w, x\rangle v_{x+y}) = \\ &\quad \langle d_a(v_x), y\rangle w - \langle w, a + x\rangle d_a(v_x) + \langle v, a + y\rangle d_a(w_y) - \langle d_a(w_y), x\rangle v. \end{aligned} \tag{9}$$

证明。由 (4)、(7) 和 (8) 可得

$$2\varphi_a([\,v_x, w_y]) = 2\varphi_a(\langle v, y\rangle w_{x+y} - \langle w, x\rangle v_{x+y}) = 2d_a(\langle v, y\rangle w_{x+y} - \langle w, x\rangle v_{x+y})_{a+x+y}$$

and

$$\begin{aligned} [\varphi_a(v_x), w_y] + [v_x, \varphi_a(w_y)] &= [d_a(v_x)_{a+x}, w_y] + [v_x, d_a(w_y)_{a+y}] \\ &= \langle d_a(v_x), y\rangle w_{a+x+y} - \langle w, a + x\rangle d_a(v_x)_{a+x+y} \\ &\quad + \langle v, a + y\rangle d_a(w_y)_{a+x+y} - \langle d_a(w_y), x\rangle v_{a+x+y}. \end{aligned}$$

□

引理 10. 设 $\dim(V) > 1, a \neq 0$ 和 $\varphi_a \in \Delta(W)$ 满足 (8)。则 $\varphi_a = 0$。

证明。将 $y=0$ 代入 (9):

$$-2\langle w,x\rangle d_a(v_x) = -\langle w,a+x\rangle d_a(v_x) + \langle v,a\rangle d_a(w_0) - \langle d_a(w_0),x\rangle v,$$

即

$$\langle w,a-x\rangle d_a(v_x) = \langle v,a\rangle d_a(w_0) - \langle d_a(w_0),x\rangle v. \tag{10}$$

于是，将 $x=a$ 代入（10）可得

$$\langle v,a\rangle d_a(w_0) = \langle d_a(w_0),a\rangle v. \tag{11}$$

由引理 8，存在两个线性无关的 v'、$v''\in V$，使得 $\langle v'$、$a\rangle$、$\langle v''$、$a\rangle \neq 0$。依次在（11）中取 $v=v'$ 和 $v=v''$，可得

$$d_a(w_0) = \frac{\langle d_a(w_0),a\rangle}{\langle v',a\rangle}v' = \frac{\langle d_a(w_0),a\rangle}{\langle v'',a\rangle}v''.$$

由 v' 和 v''的线性无关性,

$$d_a(w_0) = 0 \tag{12}$$

对所有 $w\in V$均成立。由（10）可知

$$\langle w,a-x\rangle d_a(v_x) = 0.$$

若 $x\neq a$，则根据（5），对某个 $w\in V$有 $\langle w$、$a-x\rangle \neq 0$。因此,

$$d_a(v_x) = 0, \text{ if } x\neq a. \tag{13}$$

现在将 $x=a$ 和 $y=-a$ 代入 (9)，并使用 (12):

$$0 = \langle d_a(v_a),a\rangle w + 2\langle w,a\rangle d_a(v_a) + \langle d_a(w_{-a}),a\rangle v.$$

由于 A 是无挠的，因此 $a\neq -a$，故由 (13) 得 $d_a(w_{-a}) = 0$。依次取 $w=v'$ 和$w=v''$，得到

$$d_a(v_a) = -\frac{\langle d_a(v_a),a\rangle}{2\langle v',a\rangle}v' = -\frac{\langle d_a(v_a),a\rangle}{2\langle v'',a\rangle}v'',$$

由此可得

$$d_a(v_a) = 0 \tag{14}$$

由 v' 和 v''的线性无关性可知。结合 (13) 和 (14)，我们得出 $\varphi_a = 0$。 □

引理 11. 设 $\varphi_0\in\Delta(W)$ 满足 (8)，其中 $a=0$。则 $\varphi_0\in$张成$_F\{\mathrm{id}\}$。

证明. 对于 $a=0$，等式 (9) 的形式为

$$2d_0(\langle v,y\rangle w_{x+y} - \langle w,x\rangle v_{x+y}) = \langle d_0(v_x),y\rangle w - \langle w,x\rangle d_0(v_x) + \langle v,y\rangle d_0(w_y) - \langle d_0(w_y),x\rangle v. \tag{15}$$

那么，(15) 中的 $y=0$ 给出

$$\langle w,x\rangle d_0(v_x) = \langle d_0(w_0),x\rangle v.$$

若 $x \neq 0$，则取满足 $\langle w、\ x\rangle \neq 0$ 的 $w \in V$，我们得到

$$d_0(v_x) = \frac{\langle d_0(w_0), x\rangle}{\langle w, x\rangle} v =: k_x v, \text{ if } x \neq 0. \tag{16}$$

特别地，对所有 $x \neq 0$，$d_0(v_x) = d_0(v_{-x})$。另一方面，将 $y = -x \neq 0$ 代入 (15)，得到

$$2d_0(\langle v, x\rangle w_0 + \langle w, x\rangle v_0) = \langle d_0(v_x)\ x\rangle w + \langle w, x\rangle d_0(v_x) + \langle v, x\rangle d_0(w_x) + \langle d_0(w_x)\ x\rangle v, \tag{17}$$

当 $w = v$ 时，这给出

$$2\langle v, x\rangle d_0(v_0) = \langle d_0(v_x), x\rangle v + \langle v, x\rangle d_0(v_x).$$

取满足 $\langle v、\ x\rangle \neq 0$ 的 $v \in V$，并应用 (16)，可得

$$d_0(v_0) = k_x v = d_0(v_x), \text{ if } \langle v, x\rangle \neq 0. \tag{18}$$

若 $x \neq 0$ 且 $\langle v$，则由 (16)，等式 (17) 化为

$$2\langle w, x\rangle d_0(v_0) = \langle w, x\rangle d_0(v_x) + \langle d_0(w_x), x\rangle v = \langle w, x\rangle k_x v + \langle k_x w, x\rangle v = 2k_x\langle w, x\rangle v.$$

任取一个满足 $\langle w, x\rangle \neq 0$ 的 $w \in V$，我们得到

$$d_0(v_0) = k_x v = d_0(v_x), \text{ if } x \neq 0 \text{ and } \langle v, x\rangle = 0. \tag{19}$$

结合 (8)、(18) 和 (19)，我们最终证明了所需的结论。 □

命题 12. 若 $\dim(V) > 1$，则 $\Delta(W) = \mathrm{span}_F\{\mathrm{id}\}$。

证明. 包含关系 $\Delta(W) \subseteq \mathrm{span}_F\{\mathrm{id}\}$ 由引理 10 和 11 得出。反向包含关系显然 l. □

定理 13. 设 $\mathrm{char}(F) = 0$，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 非退化。

(i) 若 $\dim(V) > 1$，则 $W(A, V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上所有转置泊松代数结构都是平凡的。(ii) 若 $\dim(V) = 1$，设 $V = \mathrm{span}_F\{v\}$，则 $W(A, V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上的转置泊松代数结构恰好是乘积 $(a \otimes v) \cdot (b \otimes v) = (a + b) \otimes v$ 的变异。

证明。(i) 是命题 12 和 [7, 定理 8], 的直接推论，而 (ii) 则由引理 7 和 [12, 命题 26] 得出。□

3. Block 李代数上的转置泊松结构

3.1. Block 李代数。Witt 代数的另一个推广是 Block 在 [5] 中研究的李代数类。

定义 14. 设 F 为一个域，$(A, +)$ 为一个非平凡阿贝尔群，$g\colon A \to F$ 为一个加法映射，且 $f\colon A \times A \to F$ 为一个反对称双可加映射。Block 代数 $L(A, g, f)$ 是以 $\{u_a\}_{a\in A}$ 为基的 F-向量空间，其乘积为

$$[u_a, u_b] = (f(a, b) + g(a - b))u_{a+b}. \tag{20}$$

众所周知 [5]（事实上，很容易看出），$L(A,g,f)$ 是一个李代数，当且仅当 $g=0$，或者存在一个加法映射 $h\colon A\to F$，使得对于所有 $a,b\in A$:

$$f(a,b)=g(a)h(b)-g(b)h(a). \tag{21}$$

为简化记号，我们将写作 $L=L(A,g,f)$。我们还假设 $\mathrm{char}(F)=0$，并且 f 在如下意义下是非退化的:

$$f(a,A)=\{0\}\Leftrightarrow a=0. \tag{22}$$

那么，与第2.1节中一样，这意味着 A 是无挠的。

注意，$L(A,g,f)$ 是 [11] 中研究的 Block 李代数 $\mathcal{B}(q)$ 的推广（它最初是在 [16] 中引入的，当时对 q 和基的假设略有不同）。回顾一下，$\mathcal{B}(q)$（其中 $q\in\mathbb{C}$）是一个复李代数，其基为 $\{L_{m,i}\mid m,i\in\mathbb{Z}\}$，其中

$$[L_{m,i},L_{n,j}]=(n(i+q)-m(j+q))L_{m+n,i+j}$$

对所有 i、j、m、$n\in\mathbb{Z}$ 均成立。显然，$\mathcal{B}(q)=L(A,g,f)$，其中 $F=\mathbb{C}$、$A=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，

$$g(m,i)=-qm \text{ and } f((m,i),(n,j))=ni-mj \tag{23}$$

对 (m,i)、$(n,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$。若 $q\neq 0$，则可将式 (21) 中对应的映射 h 取为

$$h(m,i)=i/q. \tag{24}$$

注意到 f 是非退化的，因为 $f((m,i),(0,-1))=m$ 且 $f((m,i),(1,0))=i$。

一般情况下，我们需要对 $Z(L)$ 和 $[L,L]$ 进行描述。

引理15. 设 f 是非退化的。

(i) 若 $g=0$，则 $Z(L)=\mathrm{span}_F\{u_0\}$。否则，$Z(L)=\mathrm{span}_F\{u_a\mid g(a)=h(a)+1=0\}$。(ii) 若 $g=0$，则 $[L,L]=\mathrm{span}_F\{u_a\mid a\neq 0\}$。否则，$[L,L]=\mathrm{span}_F\{u_a\mid g(a)\neq 0 \text{ 或 } h(a)+2\neq 0\}$。

证明。(i). 设 $g=0$。包含关系 $\mathrm{span}_F\{u_0\}\subseteq Z(L)$ 显然成立。反过来，若 $x=\sum x_au_a\in Z(L)$ 且对某个 $a\neq 0$ 有 $x_a\neq 0$，则选取 $b\in A$ 使得 $f(a,b)\neq 0$（由于 f 非退化，该元素存在），并计算

$$[x,u_b]=\sum_{c\neq a}x_cf(c,b)u_{c+b}+x_af(a,b)u_{a+b}\neq 0.$$

设 $g\neq 0$。若 $g(a)=h(a)+1=0$，则对所有 $b\in A$

$$f(a,b)+g(a-b)=g(a)h(b)-g(b)h(a)+g(a)-g(b)=g(b)-g(b)=0,$$

因此 $[u_a,u_b]=0$。这证明了包含关系 $\mathrm{span}_F\{u_a\mid g(a)=h(a)+1=0\}\subseteq Z(L)$。反过来，假设 $x=\sum x_au_a\in Z(L)$。那么 $[x,u_0]=0$ 推出，对所有满足 $x_a\neq 0$ 的 a，均有 $g(a)=0$。因此，$[x,u_b]=-g(b)\sum x_a(h(a)+1)u_{a+b}$。取满足 $g(b)\neq 0$ 的 $b\in A$，我们便得到，只要 $x_a\neq 0$，就有 $h(a)+1=0$。于是，$Z(L)\subseteq\mathrm{span}_F\{u_a\mid g(a)=h(a)+1=0\}$。

(ii). 设 $g=0$。若 $[u_a,u_b]\neq 0$，则 $b\neq -a$，否则 $f(a,b)=f(a,-a)=0$。因此，$[u_a,u_b]=f(a,b)u_{a+b}\in$张成$_F\{u_a\mid a\neq 0\}$。这证明了 $[L,L]\subseteq$张成$_F\{u_a\mid a\neq 0\}$。反之，

对于任意 $a \neq 0$，存在 $b \in A$ 使得 $f(a,b) \neq 0$。于是 $[u_{a-b}, u_b] = f(a-b,b)u_a = f(a,b)u_a \neq 0$，从而 $u_a \in [L,L]$。

设 $g \neq 0$。若 $[u_a, u_b] \neq 0$，则要么 $g(a+b) \neq 0$，要么 $h(a+b)+2 \neq 0$，否则

$$\begin{aligned} f(a,b) + g(a-b) &= g(a)h(b) - g(b)h(a) + g(a) - g(b) \\ &= g(a)(-h(a)-2) + g(a)h(a) + g(a) + g(a) = 0. \end{aligned}$$

因此，$[L,L] \subseteq \mathrm{span}_F\{u_a \mid g(a) \neq 0$，或 $h(a)+2 \neq 0\}$。反过来，取满足 $g(a) \neq 0$ 或 $h(a)+2 \neq 0$ 的 $a \in A$。若 $g(a) \neq 0$，则 $[u_a, u_0] = g(a)u_a \neq 0$，因此 $u_a \in [L,L]$。否则，$h(a)+2 \neq 0$，并且

$$\begin{aligned} f(a-b,b) + g(a-b-b) &= f(a,b) + g(a-2b) = g(a)h(b) - g(b)h(a) + g(a) - 2g(b) \\ &= -g(b)h(a) - 2g(b) = -g(b)(h(a)+2), \end{aligned}$$

因此，选取满足 $g(b) \neq 0$ 的 $b \in A$，我们有 $[u_{a-b}, u_b] = -g(b)(h(a)+2)u_a \neq 0$，由此得到 $u_a \in [L,L]$。□

我们还需要以下技术引理。

引理 16. 设 $\alpha, \beta\colon A \to F$ 为两个非零加法函数。则存在 $a \in A$ 使得 $\alpha(a) \neq 0 \neq \beta(a)$。

证明. 假设对任意 $a \in A$，要么 $\alpha(a) = 0$，要么 $\beta(a) = 0$。则 $A = \ker\alpha \cup \ker\beta$。由于 $\ker\alpha$ 和 $\ker\beta$ 是 A 的子群，因此要么 $\ker\alpha \subseteq \ker\beta$，此时 $A = \ker\beta$；要么 $\ker\beta \subseteq \ker\alpha$，此时 $A = \ker\alpha$。因此，要么 $\alpha = 0$，要么 $\beta = 0$，矛盾。□

3.2. 1 2-Block 李代数的导子。由 (20) 可知，$L = \bigoplus_{a\in A} Fu_a$ 是一个 A-分次，因此任意线性映射 $\varphi\colon L \to L$ 都可分解为线性映射的直和

$$\varphi = \sum_{a\in A} \varphi_a,$$

其中，对所有 $b \in A$，$\varphi_a(u_b) \in Fu_{a+b}$。此外，当且仅当对所有 $a \in A$，$\varphi_a \in \Delta(L)$ 时，$\varphi \in \Delta(L)$。按惯例，我们记

$$\varphi_a(u_b) = d_a(u_b)u_{a+b}, \tag{25}$$

其中，$d_a\colon L \to F$。

引理 17. 设 $\varphi_a\colon L \to L$ 是满足 (25) 的线性映射。那么，当且仅当对所有 x，$y \in A$

$$\begin{aligned} &2(f(x,y) + g(x-y))d_a(x+y) = \\ &\quad (f(a+x,y) + g(a+x-y))d_a(x) + (f(x,a+y) + g(x-a-y))d_a(y). \end{aligned} \tag{26}$$

证明。由（20）和（25）可得

$$2\varphi_a([u_x, u_y]) = 2\varphi_a((f(x,y) + g(x-y))u_{x+y}) = 2(f(x,y) + g(x-y))d_a(x+y)u_{a+x+y}$$

and

$$\begin{aligned}[\varphi_a(u_x), u_y] + [u_x, \varphi_a(u_y)] &= [d_a(x)u_{a+x}, u_y] + [u_x, d_a(y)u_{a+y}] \\ &= (f(a+x,y) + g(a+x-y))d_a(x)u_{a+x+y} \\ &\quad + (f(x,a+y) + g(x-a-y))d_a(y)u_{a+x+y}.\end{aligned}$$

□

3.2.1. $g = 0$ 的情形。首先假设 $g = 0$。

引理 18. 设 $a \neq 0$ 和 $\varphi_a \in \Delta(L)$ 满足 (25)。则 $\varphi_a = 0$。

证明. 将 $y = -x$ 代入 (26)，并利用 f的反对称性，得到

$$0 = f(a+x,-x)d_a(x) + f(x,a-x)d_a(-x) = -f(a,x)(d_a(x) + d_a(-x)).$$

因此,

$$d_a(-x) = -d_a(x), \text{ if } f(a,x) \neq 0. \tag{27}$$

现在，将 $y = -a$ 代入 (26):

$$2f(x,-a)d_a(x-a) = f(a+x,-a)d_a(x) = f(x,-a)d_a(x),$$

由此可得

$$d_a(x) = 2d_a(x-a), \text{ if } f(a,x) \neq 0.$$

由于 $f(a, a+x) = f(a,x)$，后者等价于

$$d_a(a+x) = 2d_a(x), \text{ if } f(a,x) \neq 0. \tag{28}$$

另一方面， $y = a$ 在（26）中给出

$$2f(x,a)d_a(x+a) = f(a+x,a)d_a(x) + f(x,2a)d_a(a) = f(x,a)d_a(x) + 2f(x,a)d_a(a).$$

若 $f(a,x) \neq 0$，则利用（28），可得 $4d_a(x) = d_a(x) + 2d_a(a)$。因此 ，

$$3d_a(x) = 2d_a(a), \text{ if } f(a,x) \neq 0. \tag{29}$$

然而， $f(a,x) \neq 0 \Leftrightarrow f(a,-x) \neq 0$，因此在（29）中以 $-x$ 替换 x，并考虑到 $\mathrm{char}(F) = 0$, 可得

$$d_a(-x) = d_a(x), \text{ if } f(a,x) \neq 0. \tag{30}$$

结合（27）和（30），我们得出

$$d_a(x) = 0, \text{ if } f(a,x) \neq 0. \tag{31}$$

现在假设 $f(a,x) = 0$。由于 $a \neq 0$，由 (22) 可知存在 $y \in A$使得 $f(a,y) \neq 0$。注意到 $f(a, x+y) = f(a,y) \neq 0$。于是，根据 (31)， $d_a(y) = d_a(x+y) = 0$，因此 (26) 可写为

$$0 = f(a+x,y)d_a(x).$$

将引理 16 应用于 $f(a+x,-)$ 和 $f(a,-)$，可知只要 $x \neq -a$，就可以选取元素 y，使得 $f(a+x, y) \neq 0 \neq f(a,y)$。因此，我们证明了

$$d_a(x) = 0, \text{ if } f(a,x) = 0 \text{ and } x \neq -a. \tag{32}$$

最后，将 $y = -a - x$ 代入 (26)，可见右端为零，而左端等于 $2f(a,x)d_a(-a)$。取满足 $f(a,x) \neq 0$ 的 $x \in A$，可得 $d_a(-a) = 0$。结合 (31) 和 (32)，即可得到所需结论。□

引理 19. 设 $\varphi_0 \in \Delta(L)$ 满足 (25)，其中 $a = 0$。则对所有 $x, y \neq 0$，都有 $\varphi_0(x) = \varphi_0(y)$。

证明. 在 (26) 中令 $a = 0$:

$$2f(x,y)d_0(x+y) = f(x,y)d_0(x) + f(x,y)d_0(y).$$

因此,

$$2d_0(x+y) = d_0(x) + d_0(y), \text{ if } f(x,y) \neq 0. \tag{33}$$

注意到 $f(x,y) = f(x+y,-y)$，因此将 (33) 中的 (x,y) 替换为 $(x+y,-y)$，可得

$$2d_0(x) = d_0(x+y) + d_0(-y), \text{ if } f(x,y) \neq 0. \tag{34}$$

结合 (33) 和 (34)，可得

$$3d_0(x) = d_0(y) + 2d_0(-y), \text{ if } f(x,y) \neq 0. \tag{35}$$

然而，$f(x,-y) = -f(x,y)$，因此在（35）中用 $-y$替换 y，可得

$$3d_0(x) = d_0(-y) + 2d_0(y), \text{ if } f(x,y) \neq 0. \tag{36}$$

由（35）和（36）可知，$d_0(y) = d_0(-y)$，因此

$$d_0(x) = d_0(y), \text{ if } f(x,y) \neq 0, \tag{37}$$

因为 $\mathrm{char}(F) = 0$。

现在令 $x, y \neq 0$。将引理 16 应用于 $f(x,-)$ 和 $f(y,-)$，可得存在 $z \in A$，使得$f(x,z) \neq 0 \neq f(y,z)$。于是由（37）可得

$$d_0(x) = d_0(z) = d_0(y), \text{ if } x, y \neq 0,$$

如所需。 □

引理 20。线性映射 $\alpha: L \to L$ 由下式给出

$$\alpha(u_a) = \begin{cases} u_0, & a = 0, \\ 0, & a \neq 0, \end{cases}$$

是 L 的 $_{1\,2}$-导子。

证明。由引理15 (i) 可知 $\alpha(L) \subseteq Z(L)$，因此对于$\varphi = \alpha$，(2) 式右边恒为零。现在，根据引理15 (ii)，$\alpha([L,L]) = \{0\}$。因此，(2) 式左边也恒为零。□

命题21。我们有 $\Delta(L) = \mathrm{span}_F\{\mathrm{id}\ \alpha\}$。

证明。包含关系 $\Delta\quad(L) \subseteq \mathrm{span}_F\{\mathrm{id}\ \alpha\}$ 由引理 18 和 19 得出。反向包含关系由引理 20 得出 . □

定理 22. 设 $\mathrm{char}(F) = 0$ 且 f 非退化。则在 $L(A, 0, f)$ 上只有一种非平凡的转置泊松代数结构 $\cdot$。它由下式给出:

$$u_0 \cdot u_0 = u_0. \tag{38}$$

证明。设 $\cdot$ 是 $L(A, 0, f)$ 上的一种非平凡转置泊松代数结构。由命题 21 和引理 4，对于任意 $a \in A$，存在 k_a、$l_a \in F$ 使得

$$u_a \cdot u_b = k_a u_b + l_a \alpha(u_b) = \begin{cases} (k_a + l_a)u_0, & b = 0, \\ k_a u_b, & b \neq 0. \end{cases} \tag{39}$$

由于 $|A| > 2$ (A 无挠)，对于任意 $a \neq 0$，存在 $b \notin \{0, a\}$。于是由 (39) 及 $\cdot$ 的交换性可得 $k_a u_b = u_a \cdot u_b = u_b \cdot u_a = k_b u_a$。因此，对于 $a \neq 0$，有 $k_a = 0$。类似地，$(k_a + l_a)u_0 = u_a \cdot u_0 = u_0 \cdot u_a = k_0 u_a$ 给出对于 $a \neq 0$有 $k_0 = l_a = 0$。于是，唯一的非零乘积$u_a \cdot u_b$ 为 $u_0 \cdot u_0 = l_0 u_0$。因此，在同构意义下，$\cdot$ 具有 (38) 的形式。

反之，根据引理15，乘积（38）具有形式（3），因此（$L, \cdot, [\cdot, \cdot]$）是一个转置泊松代数（也是通常的泊松代数）。□

注记23. 将 $\mathcal{B}(0)$视为复 Block 代数 $L(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, f)$，其中 f 由（23）给出。于是，我们得到 $\mathcal{B}(0)$上的转置泊松代数结构的描述，它是 [11, 定理2.14]作为定理22的一个特例给出的。

3.2.2. 情形 $g \neq 0$。在此情形下，正如上文所述，存在一个加法映射 $h\colon A \to F$，使得（21）成立。

引理24. 设 $a \neq 0$ 和 $\varphi_a \in \Delta(L)$满足（25）。若 $g(x)f(a, x) \neq 0$，则 $\varphi_a(x) = 0$。

证明。首先考虑 (26) 中的 $y = 0$

$$2g(x)d_a(x) = g(a + x)d_a(x) + (f(x, a) + g(x - a))d_a(0).$$

Then

$$g(a - x)d_a(x) = (f(a, x) + g(a - x))d_a(0). \tag{40}$$

将 x 替换为 $-x$，我们得到

$$g(a + x)d_a(-x) = (-f(a, x) + g(a + x))d_a(0). \tag{41}$$

另一方面，$y = -x$ 由 (26) 可得

$$4g(x)d_a(0) = (-f(a, x) + g(a + 2x))d_a(x) + (-f(a, x) + g(2x - a))d_a(-x). \tag{42}$$

将两边相乘 将 (42) 中的 es 代入 $g(a-x)g(a+x) = g(a)^2 - g(x)^2$，并利用 (40) 和 (41)，我们得到 t

$$4g(x)(g(a)^2 - g(x)^2)d_a(0) = (-f(a,x) + g(a+2x))g(a+x)(f(a,x) + g(a-x))d_a(0) + (-f(a,x) + g(2x-a))g(a-x)(-f(a,x) + g(a+x))d_a(0). \tag{43}$$

我们有

$$(-f(a,x) + g(a+2x))(f(a,x) + g(a-x)) = (g(a) + g(x)/2)^2 - (f(a,x) - 3g(x)/2)^2,$$
$$(-f(a,x) + g(2x-a))(-f(a,x) + g(a+x)) = (f(a,x) - 3g(x)/2)^2 - (g(a) - g(x)/2)^2.$$

由于

$$(g(a) + g(x)/2)^2 - (g(a) - g(x)/2)^2 = 2g(a)g(x),$$
$$(g(a) + g(x)/2)^2 + (g(a) - g(x)/2)^2 = 2g(a)^2 + g(x)^2/2,$$

等式 (43) 右边 $d_a(0)$ 的系数等于

$$g(a) \cdot 2g(a)g(x) + g(x)(2g(a)^2 + g(x)^2/2) - 2g(x)(f(a,x) - 3g(x)/2)^2$$
$$= g(x)(4g(a)^2 + g(x)^2/2 - 2(f(a,x) - 3g(x)/2)^2).$$

减去等式 (43) 左边 $d_a(0)$ 的系数，我们得到

$$g(x)(9g(x)^2/2 - 2(f(a,x) - 3g(x)/2)^2) = 2g(x)f(a,x)(3g(x) - f(a,x)).$$

因此，在假设 $g(x)f(a,x) \neq 0$ 的条件下，(43) 等价于

$$(3g(x) - f(a,x))d_a(0) = 0. \tag{44}$$

情形 1. $f(a,x) \neq 3g(x)$。于是 (44) 给出

$$d_a(0) = 0. \tag{45}$$

情形 1.1. $g(a) \neq g(x)$。由 (40) 和 (45) 可得 $d_a(x) = 0$。

情形 1.2. $g(a) = g(x)$。于是 $g(a+x) = 2g(x) \neq 0$，因此由 (41) 得 $d_g(-x) = 0$。此外，$-f(a,x) + g(a+2x) = -f(a,x) + 3g(x) \neq 0$，因此由 (42) 和 (45) 可得 $d_a(x) = 0$。

情形 2. $f(a,x) = 3g(x) \neq 0$。于是 (40) 化为

$$g(a-x)d_a(x) = (3g(x) + g(a-x))d_a(0) = (2g(x) + g(a))d_a(0). \tag{46}$$

由于 $f(a,x) = 3g(x)$ 在将 x 替换为 kx 后保持不变，因此 (46) 蕴含

$$g(a-kx)d_a(kx) = (2kg(x) + g(a))d_a(0). \tag{47}$$

另一方面， $y = 2x$ 在（26）中给出

$$-2g(x)d_a(3x) = (5g(x) + g(a))d_a(x) - (4g(x) + g(a))d_a(2x). \tag{48}$$

将 b 相乘　等式两边乘以 $g(a-x)g(a-2x)g(a-3x)$，并利用（47），我们得到　et

$$\begin{aligned}&-2g(x)g(a-x)g(a-2x)(6g(x)+g(a))d_a(0)\\&=(5g(x)+g(a))g(a-2x)g(a-3x)(2g(x)+g(a))d_a(0)\\&\quad-(4g(x)+g(a))g(a-x)g(a-3x)(4g(x)+g(a))d_a(0).\end{aligned}\tag{49}$$

比较（49）中 $g(a)^ig(x)^jd_a(0)$、$0\le i+j\le 4$ 的系数，可知（49）等价于 $36g(x)^4d_a(0)=0$。因此，我们再次得到（45）。

情形 2.1. $g(a)\neq g(x)$。于是，由（40）和（45）可得 $d_a(x)=0$。

情形 2.2. $g(a)=g(x)$。于是，对于 $k\neq 1$，有 $g(a-kx)=(1-k)g(x)\neq 0$，故由（47）得 $d_a(2x)=d_a(3x)=0$。此外，$5g(x)+g(a)=6g(x)\neq 0$，因此由（45）和（48）可知 $d_a(x)=0$。□

引理 25. 设 $a\neq 0$ 和 $\varphi_a\in\Delta(L)$ 满足（25）。若 $g(x)f(a,x)=0$，则 $d_a(x)=0$，除非$g(a)=g(x)=0$、$h(a)=1$ 和 $h(x)=-2$。

证明。情形 1。$g(a+x)\neq 0$。由于 $a\neq 0$，将引理 16 应用于 $f(a,-)$ 和 g，存在 $y\in A$使得 $f(a,y)\neq 0\neq g(y)$。注意，对任意 $k\neq 0$，我们有

$$f(a,ky)\neq 0\neq g(ky),\tag{50}$$

因为 $\mathrm{char}(F)=0$。我们断言，可以恰当地选取 k，使得

$$f(a,x+ky)\neq 0\neq f(a+x,ky)+g(a+x-ky).\tag{51}$$

事实上，$f(a,y)\neq 0$，因此至多存在一个 k，使得 $f(a,x)+kf(a,y)=0$。若 $f(a+x,y)-g(y)=0$，则对所有 k，都有 $f(a+x,ky)+g(a+x-ky)=g(a+x)\neq 0$。否则，至多存在一个 k，使得 $k(f(a+x,y)-g(y))+g(a+x)=0$。因此，对于无穷多个整数 $k\neq 0$，(50) 和 (51) 成立（回忆一下，$\mathrm{char}(F)=0$）。于是，由引理 24，对于任意这样的 k，有 $d_a(ky)=d_a(x+ky)=0$。因此，将 (26) 中的 y 替换为 ky，并利用 (51)，即可证明 $d_a(x)=0$。

情形 2. $g(a+x)=0$. 那么

$$f(a+x,y)+g(a+x-y)=-g(y)(h(a+x)+1).$$

*Ca*情形 2.1. $h(a+x)+1\neq 0$. 那么，与情形 1 中相同的论证可得 $d_a(x)=0$.

情形 2.2. $h(a+x)+1=0$. 那么 $0=g(x)f(a,x)=g(a)^2=g(x)^2$,，因此 (26) 化简为

$$2g(y)h(a)d_a(x+y)=g(y)h(a)d_a(y).$$

注意到 $h(a)\neq 0$，因为否则 $f(a,y)=0$ 对所有 $y\in A$ 都成立，这与 (22) 矛盾。因此，

$$2d_a(x+y)=d_a(y),\ \text{if } g(y)\neq 0.\tag{52}$$

另一方面，由于 $g(a)=0$，将 $x=0$ 代入 (26) 可得

$$d_a(y)=(h(a)+1)d_a(0),\ \text{if } g(y)\neq 0.\tag{53}$$

注意到，当 $g(x)=0$ 时，$g(x+y)=g(y)$，因此由 (52) 和 (53) 得

$$2(h(a)+1)d_a(0)=(h(a)+1)d_a(0).$$

由此可知，除非 $h(a)+1=0$，否则 $d_a(0)=0$。无论如何，由 (53) 可得

$$d_a(y)=0,\ \text{if } g(y)\neq 0. \tag{54}$$

将 (26) 中的 x 替换为 $x-y$，其中 $g(y)\neq 0$。由于根据 (54)，$d_a(y)=d_a(x-y)=0$，我们得到

$$(h(x)+2)d_a(x)=0.$$

因此，$d_a(x)=0$，除非 $h(x)=-2$（此时 $h(a)=1$）。 □

引理 26. 设 $\varphi_0\in\Delta(L)$ 满足 (25)，且 $a=0$。则 $\varphi_0\in \mathrm{span}_F\{\mathrm{id}\}$。

证明。将 (26) 写为含 $a=0$ 的形式，得到

$$2(f(x,y)+g(x-y))d_0(x+y)=(f(x,y)+g(x-y))(d_0(x)+d_0(y)). \tag{55}$$

情形 1. $g(x)\neq 0$。于是将 $y=0$ 代入 (55)，得到：

$$d_0(x)=d_0(0),\ \text{if } g(x)\neq 0. \tag{56}$$

情形 2. $g(x)=0$ 且 $h(x)\neq -1$。于是 $f(x,y)=-g(y)h(x)$，且 (55) 等价于

$$2g(y)d_0(x+y)=g(y)(d_0(x)+d_0(y)). \tag{57}$$

取 $y\in A$ 使得 $g(y)\neq 0$。由 (56)，有 $d_0(y)=d_0(x+y)=d_0(0)$。因此，(57) 推出$d_0(x)=d_0(0)$。

情形 3. $g(x)=0$ 且 $h(x)=-1$。将 (55) 中的 (x,y) 替换为 $(x+y,-y)$。注意到 $f(x+y,-y)=-f(x,y)=-g(y)$，因此得到

$$6g(y)d_0(x)=3g(y)(d_0(x+y)+d_0(-y)). \tag{58}$$

取满足 $g(y)\neq 0$ 的 $y\in A$，由 (56) 可得 $d_0(x+y)=d_0(-y)=d_0(0)$。因此，由 (58) 可知 $d_0(x)=d_0(0)$。□

给定 λ、$\mu\in F$，我们引入以下记号：

$$A_{(\lambda,\mu)}:=\{a\in A\mid g(a)=\lambda \text{ and } h(a)=\mu\}.$$

引理 27 。令 $a\in A_{(0,-2)}$ 和 $b\in A_{(0,-1)}$。则由下式给出的线性映射 $\alpha_{(a,b)}$：$L\to L$

$$\alpha_{(a,b)}(u_c)=\begin{cases}u_b, & c=a,\\ 0, & \textit{otherwise},\end{cases}$$

是 L 的 $1\,2$-导子。

证明。由引理15 (i)可知，$\alpha_{(a,b)}(L)\subseteq Z(L)$，这表明对于 $\varphi=\alpha_{(a,b)}$，式 (2) 的右端总为零。此外，根据引理15 (ii)，$\alpha_{(a,b)}([L,L])=\{0\}$，且式 (2) 的左端也始终为零。□

命题 28。我们有 $\Delta(L)=\mathrm{span}_F(\{\mathrm{id}\}\cup\{\alpha_{(a,b)}\mid a\in A_{(0,-2)} \text{ 和 } b\in A_{(0,-1)}\})$。

证明。由引理 24– 26 可知，任意 $\varphi\in\Delta(L)$ 都是 id 和 $\alpha_{(a,b)}$ 的线性组合。反过来，包含关系 id $\in\Delta(L)$ 显然成立，而 $\alpha_{(a,b)}\in\Delta(L)$ 即为引理 27。□

定理 29。设 $\mathrm{char}(F) = 0$， $g \neq 0$ 和 f 均非退化。若对所有 $a \in A$ 都有 $(g(a)\ h(a)) \neq (0, -1)$，则 $L(A, g, f)$ 上的所有转置泊松代数结构都是平凡的。否则， $L(A, g, f)$ 上的转置泊松代数结构恰好是补空间 $V = \mathrm{span}_F\{u_a \mid g(a) = h(a) + 2 = 0\}$ 上取值于 $Z(L) = \mathrm{span}_F\{u_a \mid g(a) = h(a) + 1 = 0\}$ 的交换结合乘积 $*$ 的零延拓。

证明。设 $\cdot$ 是 $L(A, g, f)$ 上的一个转置泊松代数结构。如果对所有 $a \in A$，都有 $(g(a)\ h(a)) \neq (0, -1)$，那么 $A_{(0,-1)} = \emptyset$，因此由命题 28 可得 $\Delta(L) = \{\mathrm{id}\}$。由 [7, 定理 8]可知， $\cdot$ 是平凡的。

假设对某个 $a \in A$，有 $(g(a)\ h(a)) = (0, -1)$。那么 $(g(2a)\ h(2a)) = (0, -2)$，因此 $A_{(0,-1)}$ 和 $A_{(0,-2)}$ 都非空。由命题 28 和引理 4 可知，对任意 $a \in A$，存在 $k_a \in F$ 和 $\{l_a^{(x,y)}\}_{x \in A_{(0,-2)}, y \in A_{(0,-1)}} \subseteq F$，使得

$$u_a \cdot u_b = k_a u_b + \sum_{x \in A_{(0,-2)}, y \in A_{(0,-1)}} l_a^{(x,y)} \alpha_{(x,y)}(u_b) = \begin{cases} k_a u_b + \sum_{y \in A_{(0,-1)}} l_a^{(b,y)} u_y, & b \in A_{(0,-2)}, \\ k_a u_b, & b \notin A_{(0,-2)}. \end{cases} \tag{59}$$

由于 $\mathrm{char}(F) = 0$ 且 A 是无挠的，因此 $A \setminus A_{(0,-1)}$ 和 $A \setminus A_{(0,-2)}$ 是无限的（事实上，若 $a \in A_{(\lambda,\mu)}$ 且 $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$，则对所有 $k \neq 1$都有 $ka \notin A_{(\lambda,\mu)}$）。因此，对任意 $a \notin A_{(0,-2)}$，都存在$b \notin A_{(0,-2)}$, $b \neq a$。由 (59) 及 $\cdot$ 的交换性可得 $k_a u_b = u_a \cdot u_b = u_b \cdot u_a = k_b u_a$。因此，

$$k_a = 0 \text{ for } a \notin A_{(0,-2)}. \tag{60}$$

现在令 $a \in A_{(0,-2)}$ 和 $b \notin A_{(0,-1)} \cup A_{(0,-2)}$。则由
$k_b u_a + \sum_{y \in A_{(0,-1)}} l_b^{(a,y)} u_y = u_b \cdot u_a = u_a \cdot u_b = k_a u_b$可得

$$k_a = 0 \text{ for } a \in A_{(0,-2)}. \tag{61}$$

由 (60)、(61) 以及 $\cdot$ 的交换性可知

$$u_a \cdot u_b = \begin{cases} \sum_{y \in A_{(0,-1)}} l_a^{(b,y)} u_y, & a, b \in A_{(0,-2)}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此， $\cdot$ 具有形式 (3)，其中交换结合乘积 $u_a * u_b = \sum_{y \in A_{(0,-1)}} l_a^{(b,y)} u_y \in Z(L)$ 定义在 $V = \mathrm{span}_F\{u_a \mid a \in A_{(0,-2)}\}$ 上。

反过来，由引理15可知，乘积 (38) 具有形式 (3)，因此 $(L, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 是一个转置泊松代数（也是通常的泊松代数）。□

注 30. 考虑 $\mathcal{B}(q)$，其中 $q \neq 0$ 是复 Block 代数 $L(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, g, f)$， g、 f和 h 由 (23) 和 (24) 给出。则 $(g(m, i)\ h(m, i)) = (0, -2) \Leftrightarrow (m, i) = (0, -2q)$，且 $(g(m, i)\ h(m, i)) = (0, -1) \Leftrightarrow (m, i) = (0, -q)$，因此我们再次得到 [11, 定理 2.14] 中给出的 $\mathcal{B}(q)$ 上转置泊松代数结构的描述，这是定理 29 的一个特例。

参考文献

[1] Albuquerque H., Barreiro E., Benayadi S., Boucetta M., S´anchez J.M.，振子李代数上的泊松代数与对称莱布尼茨双代数结构，《几何与物理学杂志》，160 (2021)，103939。[2] Bai C., Bai R., Guo L., Wu Y.，转置泊松代数、诺维科夫-泊松代数与 3-李代数，arXiv:2005.01110。[3] Beites P., Ferreira B. L. M., Kaygorodov I.，转置泊松结构，arXiv:2207.00281。[4] Beites P., Fern´andez Ouaridi A., Kaygorodov I.，转置泊松代数的代数与几何分类，《Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, F´ısicas y Naturales. Serie A. Matem´aticas》，117 (2023)，2，55。[5] Block R.，关于无挠阿贝尔群与李代数，《美国数学会会刊》，9 (1958)，613–620。[6] Dokovi´c D., Zhao K.，广义 Witt 代数的导子、同构与第二上同调，《美国数学会汇刊》，350 (1998)，2，643–664。[7] Ferreira B. L. M., Kaygorodov I., Lopatkin V.，李代数的$_{1\ 2}$-导子与转置泊松代数，《Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, F´ısicas y Naturales. Serie A. Matem´aticas》115 (2021)，142。[8] Filippov V.，李代数的 δ-导子，《西伯利亚数学杂志》，39 (1998)，6，1218–1230。[9] J̄aworska-Pastuszak A., Pogorzaly Z.，典范代数上的泊松结构，《几何与物理学杂志》，148 (2020)，103564。[10] Kaygorodov I., Khrypchenko M.，有限关联代数上的泊松结构，《代数杂志》，578 (2021)，402–420。[11] Kaygorodov I., Khrypchenko M.，Block 李代数与超代数上的转置泊松结构，《线性代数及其应用》，656 (2023)，167–197。[12] Kaygorodov I., Khrypchenko M.，维特型代数上的转置泊松结构，《线性代数及其应用》，即将出版，arXiv:2210.00217。[13] Kaygorodov I., Lopatkin V., Zhang Z.，伽利略李代数与可解李代数上的转置泊松结构，《几何与物理学杂志》，即将出版，arXiv:2209.00264。[14]Laraiedh I., Silvestrov S.，转置 Hom-泊松代数、Hom-前李泊松代数与双代数，arXiv:2106.03277。[15] Ma T., Li B.，转置 BiHom-泊松代数，《代数通讯》，51 (2023)，2，528–551。[16] Xia C., You T., Zhou L.，一类布洛克型李代数的结构，《代数通讯》，40 (2012)，8，3113–3126。[17] Yao Y., Ye Y., Zhang P.，箭图泊松代数，《代数杂志》，312 (2007)，2，570–589。[18] Yu R. W. T.，Witt 型李代数，《代数通讯》，25 (1997)，5，1471–1484。[19] Yuan L., Hua Q.，李代数上的$_{1\ 2}$-（双）导子与转置泊松代数结构，《线性与多线性代数》，2021，DOI: 10.1080/03081087.2021.2003287。[20] Zusmanovich P.，李代数与超代数的 δ-导子，《代数杂志》，324 (2010)，12，3470–3486。