arXiv:2302.00416v1 [math.MG] 1 Feb 2023

凸体与函数上的赋值

MONIKA LUDWIG 和 FABIAN MUSSNIG

摘要。本文介绍几何赋值理论，重点介绍凸体和凸函数上的 SL(n) 不变赋值与刚体运动不变赋值的分类结果。

2020年美国数学学会学科分类：52B45（26B25，52A20，52A39，52A41，53A15）

1. 引言

在他的第三问题中，希尔伯特提出：给定 $\mathbb{R}^3$ 中任意两个体积相等的多胞体，是否总能将第一个剖分为有限个多胞体，再重新组合成第二个？1900 年，人们已知在 $\mathbb{R}^2$ 中相应问题的答案是肯定的，但高维情形下这一问题仍未解决。

令 $\mathcal{P}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$中的凸多胞体集合。若 $P \in \mathcal{P}^n$ 被剖分为 P_1、.....、 $P_m \in \mathcal{P}^n$，记作 $P = P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_m$，其中 $P = P_1 \cup \cdots \cup P_m$，且多胞体 P_1、.....、 P_m 的内部两两不相交。希尔伯特第三问题因此问：对于任意体积相等的 P、 $Q \in \mathcal{P}^n$，是否存在剖分

$$P = P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_m, \qquad Q = Q_1 \sqcup \cdots \sqcup Q_m,$$

以及刚体运动 ϕ_1、.....、 ϕ_m，使得

$$P_i = \phi_i Q_i$$

对 $1 \le i \le m$成立。在这种情况下，我们记作 $P \sim Q$。

若函数 Z : $\mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 满足

$$\mathrm{Z}(P) + \mathrm{Z}(Q) = \mathrm{Z}(P \cup Q) + \mathrm{Z}(P \cap Q)$$

对所有满足 $P \cup Q \in \mathcal{P}^n$ 的 P、 $Q \in \mathcal{P}^n$ 均成立（并令 Z($\varnothing$) := 0），则称 Z 为赋值。若对所有非满维多胞体，Z(P) $= 0$，则称 Z 为简单赋值。若

$$\mathrm{Z}(\phi P) = \mathrm{Z}(P)$$

对于所有刚体运动 ϕ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 以及 $P \in \mathcal{P}^n$。如果 Z : $\mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 是一个简单、刚体运动不变的赋值，那么不难看出， $P \sim Q$ 意味着 Z(P) $=$ Z(Q)。Dehn [35] 构造了一个简单、刚体运动不变的赋值，现在称为 Dehn不变量（见第 5 节），它不是体积的倍数。他证明了体积相同的正则单纯形和立方体的 Dehn不变量并不相同。由此，他解决了希尔伯特第三问题，并表明对于 $n \ge 3$，希尔伯特的问题答案是否定的。

Blaschke [14] 通过提出对 $\mathcal{P}^n$ 上的 G 不变赋值以及凸体空间上的赋值进行分类，迈出了关键的下一步；凸体空间记作 $\mathcal{K}^n$，即 $\mathbb{R}^n$中非空、紧致的凸集所组成的空间，其中G 是作用于 $\mathbb{R}^n$上的任意群。Blaschke 的问题受 Felix Klein 的埃尔朗根纲领启发。我们将讨论这一传统下取得的一些结果，尤其关注特殊线性群 SL(n) 和刚体运动群 SO(n) $\ltimes \mathbb{R}^n$，其中 SO(n) 是（保定向）旋转群。通常还需要额外的正则性假设；我们考虑连续赋值和上半连续赋值，并在 $\mathcal{K}^n$ 及其子空间上赋予由豪斯多夫度量诱导的拓扑。

近年来，除分类结果及其应用外，赋值空间的结构性结果也备受关注。相关书籍和综述可参见 [4, 6, 11]。人们还在各种其他空间上研究赋值，特别是在流形上（见 [3]）。取值于线性空间和阿贝尔半群（包括凸体空间）的赋值也得到了研究（见 [54]）。我们将把注意力限定于定义在 $\mathcal{K}^n$ 子空间上的实值赋值，以及关于实值函数空间上的赋值的近期结果。在由（扩展）实值函数构成的空间 X 上，泛函 $\mathrm{Z}: X \to \mathbb{R}$ 若满足以下条件，则称为赋值

$$\mathrm{Z}(f) + \mathrm{Z}(g) = \mathrm{Z}(f \vee g) + \mathrm{Z}(f \wedge g)$$

对于所有满足以下条件的 f、$g \in X$：它们的逐点最大值 $f \vee g$ 和逐点最小值 $f \wedge g$ 也属于 X。由于我们可以将凸体空间嵌入各种函数空间，使得凸体的并集和交集分别对应函数的逐点最小值和逐点最大值，因此这一概念推广了经典概念。我们将讨论关于凸函数的赋值结果。

2. Basic Properties

设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集类。若 $\mathrm{Z}: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 满足

$$\mathrm{Z}(P) + \mathrm{Z}(Q) = \mathrm{Z}(P \cup Q) + \mathrm{Z}(P \cap Q)$$

对于所有满足 $P \cap Q$、$P \cup Q \in \mathcal{S}$ 的 P、$Q \in \mathcal{S}$，且 $\mathrm{Z}(\varnothing) = 0$。给定 $\mathbb{R}^n$ 上的一个博雷尔测度，其在 $\mathcal{K}^n$ 上的限制显然是一个赋值。因此，特别地，n 维 Lebesgue 测度 V_n 在 $\mathcal{K}^n$ 上诱导出一个赋值。正如我们将要看到的，存在一些重要的赋值并非由测度诱导。

称 $\mathcal{S}$ 为交集封闭的，即若 P、$Q \in \mathcal{S}$，则 $P \cap Q \in \mathcal{S}$。我们称 $\mathrm{Z}: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ 在 $\mathcal{S}$ 上满足容斥原理，若

$$\mathrm{Z}(P_1 \cup \cdots \cup P_m) = \sum_{\varnothing \neq J \subset \{1,\dots,m\}} (-1)^{|J|-1} \mathrm{Z}(P_J) \tag{2.1}$$

对于 P_1、……、$P_m \in \mathcal{S}$ 以及 $m \geq 1$，只要 $P_1 \cup \cdots \cup P_m \in \mathcal{S}$。这里 $P_J := \bigcap_{j \in J} P_j$，且 $|J|$ 是集合 J 的基数。每个定义在 $\mathcal{P}^n$ 上的赋值以及每个定义在 $\mathcal{K}^n$ 上的连续赋值都满足容斥原理（见 [41, 72]）。若 $\mathrm{Z}: \mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 还满足简单性，则有

$$\mathrm{Z}(P_1 \sqcup \cdots \sqcup P_m) = \mathrm{Z}(P_1) + \cdots + \mathrm{Z}(P_m) \tag{2.2}$$

对于 P_1、……、$P_m \in \mathcal{P}^n$。

对于 K、$L \in \mathcal{K}^n$，定义闵可夫斯基和如下：

$$K + L := \{x + y : x \in K, y \in L\}.$$

Th以下引理描述了如何从给定的赋值构造新的赋值。

引理 2.1. 设 $\mathrm{Z}: \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是一个赋值。若 $C \in \mathcal{K}^n$ 是一个固定的凸体，并且

$$\mathrm{Z}_C(K) := \mathrm{Z}(K + C),$$

对于 $K \in \mathcal{K}^n$，则 Z_C 是 $\mathcal{K}^n$ 上的赋值。

证明。容易看出，以下命题对 C、K、$L \subset \mathbb{R}^n$ 成立 ，

$$K \cup L + C = (K + C) \cup (L + C). \tag{2.3}$$

现在，设 C、K、$L \in \mathcal{K}^n$ 满足 $K \cup L \in \mathcal{K}^n$。若 $x \in (K + C) \cap (L + C)$，则 $x = y + c = z + d$，其中 $y \in K$、$z \in L$ 且 c、$d \in C$。由于 $K \cup L$ 是凸的，存在 $t \in [0, 1]$ 使得 $(1 - t)y + tz \in K \cap L$，因此

$$x = (1 - t)(y + c) + t(z + d) = (1 - t)y + tz + (1 - t)c + td.$$

因此 $(K + C) \cap (L + C) \subset (K \cap L) + C$。

由于容易看出 $(K\cap L)+C\subset(K+C)\cap(L+C)$，因此

$$(K+C)\cap(L+C)=(K\cap L)+C. \tag{2.4}$$

将 Z 应用于凸体 C, K, L 的 (2.3) 和 (2.4)，并将结果相加，即得所述结论。 □

对于 $p\in\mathbb{R}$，若泛函 $\mathrm{Z}:\mathcal{K}^n\to\mathbb{R}$ 满足

$$\mathrm{Z}(t\,K)=t^p\,\mathrm{Z}(K)$$

对于 $t>0$ 和 $K\in\mathcal{K}^n$。若 $\mathrm{Z}:\mathcal{K}^n\to\mathbb{R}$ 是单调递增的，则 $K\subset L$ 蕴含 $\mathrm{Z}(K)\le\mathrm{Z}(L)$。我们也将对 $\mathcal{K}^n$ 的子集采用相应的定义。

n 维体积 $V_n:\mathcal{K}^n\to[0,\infty)$ 是一个赋值。引理 2.1 表明，$K\mapsto V_n(K+r\,B^n)$ 也是 $\mathcal{K}^n$ 上的赋值，其中 B^n 是 n 维单位球。因此，由 Steiner公式可得，

$$V_n(K+rB^n)=\sum_{j=0}^{n}r^{n-j}\kappa_{n-j}V_j(K), \tag{2.5}$$

其中 $r\ge0$ 和 κ_j 是 $\mathbb{R}^j$ 中单位球的 j 维体积（约定 $\kappa_0=1$），由此可知，所有内在体积 $V_0,\dots,V_n$ 都是 $\mathcal{K}^n$ 上的赋值。回顾一下，所有内在体积都是 $\mathcal{K}^n$ 上连续且单调递增的泛函，并且 V_0 是欧拉示性数，且对所有 $K\in\mathcal{K}^n$，$V_0(K)=1$。还要回顾的是，若 K 包含在一个 j 维平面内，则 $V_j(K)$ 是 K 的 j 维体积，并且 V_j 是 j 次齐次。

我们将使用以下记号。设 $e_1,\dots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基向量。对于 $x,y\in\mathbb{R}^n$，我们用 $\langle x,y\rangle$ 表示内积，用 $|x|$ 表示 x 的欧几里得范数。子集 $A_1,\dots,A_m\subset\mathbb{R}^n$ 的凸包记为 $[A_1,\dots,A_m]$，而 $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}^n$ 的凸包记为 $[x_1,\dots,x_m]$。若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个仿射平面，则 $\mathcal{K}(E)$ 和 $\mathcal{P}(E)$ 分别表示包含于 E 的凸体集和凸多胞体集。

3. $\mathrm{SL}(n)$ 不变赋值

Blaschke [14] 得到了关于 $\mathcal{K}^n$ 上不变赋值的第一个分类定理。

定理 3.1（Blaschke）。泛函 $\mathrm{Z}:\mathcal{K}^n\to\mathbb{R}$ 是一个连续、平移不变且在 $\mathrm{SL}(n)$ 下不变的赋值，当且仅当存在常数 $c_0,c_n\in\mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(K)=c_0V_0(K)+c_nV_n(K)$$

对每个 $K\in\mathcal{K}^n$。

在下一节中，我们将完整分类一维情形下的平移不变赋值；在再下一节中，我们将完整分类定义在凸多胞体上的平移与 $\mathrm{SL}(n)$ 不变赋值。这里不需要对赋值的连续性作任何假设。定理 3.1 将由此简单地得到。凸体上的赋值则情况不同：还存在一些额外的（非连续）赋值，它们在凸多胞体上为零。我们将在第3.3节描述其中的一些赋值。

3.1. 一维情形。

若函数 $\zeta:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是柯西函数方程的解，也就是说，

$$\zeta(x+y)=\zeta(x)+\zeta(y)$$

对每个 $x,y\in[0,\infty)$。柯西函数已有充分研究；如果假设选择公理，那么只需知道它们在哈梅尔基上的取值，就能对其作出完整描述。

命题 3.2. 泛函 $Z: \mathcal{P}^1 \to \mathbb{R}$ 是平移不变赋值，当且仅当存在一个常数 $c_0 \in \mathbb{R}$ 和一个柯西函数 $\zeta: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 使得

$$Z(P) = c_0 V_0(P) + \zeta\big(V_1(P)\big)$$

对每个 $P \in \mathcal{P}^1$。

证明。令 $c_0 := Z(\{0\})$，并定义 $\tilde{Z}: \mathcal{P}^1 \to \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{Z}(P) := Z(P) - c_0 V_0(P).$$

注意到 $\tilde{Z}$ 是一个 $\mathcal{P}^1$ 上的简单平移不变赋值。通过设定 $\zeta: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 来定义

$$\zeta(x) := \tilde{Z}([0,x]).$$

由于 $\tilde{Z}$ 是简单的平移不变赋值，

$$\zeta(x+y) = \tilde{Z}([0,x+y)) = \tilde{Z}([0,x]) + \tilde{Z}([x,x+y]) = \zeta(x) + \zeta(y)$$

对每个 $x, y \in [0,\infty)$。因此，ζ 是柯西函数。利用 Z 是平移不变的这一点，我们得到 $\tilde{Z}(P) = \zeta(V_1(P))$，其中 $P \in \mathcal{P}^1$，由此证明完毕。□

由于每个连续柯西函数都是线性的，我们得到以下结果。

推论 3.3. 泛函 $Z: \mathcal{P}^1 \to \mathbb{R}$ 是连续平移不变赋值，当且仅当存在常数 $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ 使得

$$Z(P) = c_0 V_0(P) + c_1 V_1(P)$$

对每个 $P \in \mathcal{P}^1$。

对于 $\mathcal{P}^1$ 上的上半连续平移不变赋值，也有相应的分类结果。对于 $\mathcal{P}^1$ 上的 Borel 可测平移不变赋值，同样有这样的结果，因为每个 Borel 可测柯西函数都是线性的。

3.2. 凸多胞体上的 $SL(n)$ 不变赋值。以下结果给出了多胞体上平移不变且 $SL(n)$ 不变赋值的完整分类。

定理 3.4. 泛函 $Z: \mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 是平移不变且 $SL(n)$ 不变的赋值，当且仅当存在常数 $c_0 \in \mathbb{R}$ 和柯西函数 $\zeta: [0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得

$$Z(P) = c_0 V_0(P) + \zeta\big(V_n(P)\big)$$

对每个 $P \in \mathcal{P}^n$，均有。

证明。令 $c_0 := Z(\{0\})$，并定义 $\tilde{Z}: \mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{Z}(P) := Z(P) - c_0 V_0(P).$$

注意，$\tilde{Z}$ 是 $\mathcal{P}^n$ 上的平移不变赋值，且在单点集上取零，即在形如 $\{x\}$ 且满足 $x \in \mathbb{R}^n$ 的集合上取零。我们证明存在柯西函数 $\zeta: [0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得

$$\tilde{Z}(P) = \zeta(V_n(P)) \tag{3.1}$$

对每个 $P \in \mathcal{P}^n$。

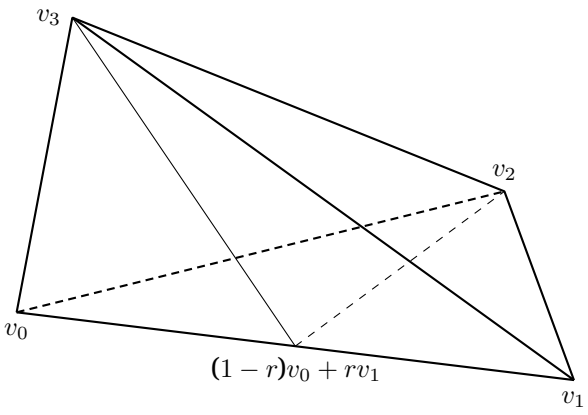

图1. 将 $[v_0, \dots, v_n]$ 分解为 T_1 和 T_2。

我们对维数 n使用归纳法。根据命题 3.2，命题（3.1）对 $n = 1$ 成立。设$n \geq 2$。假设该命题对定义在 $\mathcal{P}^{n-1}$ 上的赋值成立。因此，该命题对定义在 $\mathcal{P}(E)$ 上且满足 $E^{\sim}$ 的赋值也成立，其中任意超平面均取自 $\mathbb{R}^n$。归纳假设推出存在一个柯西函数 $\zeta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得

$$\tilde{\mathrm{Z}}(P) = \tilde{\zeta}(V_{n-1}(P))$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$对每个 $P \in \mathcal{P}(E)$ 都成立。注意，Z 的不变性意味着 ζ 不依赖于 E。

$\tilde{}$ $\tilde{}$由于 Z 在单点集上取值为零，因此有 $\zeta(0) = 0$。令 E 由前 $(n-1)$ 个基向量 e_1，…，e_{n-1} 张成，并通过令 $\phi e_1 = t\, e_1$ （其中 $t > 0$，且当 $1 < j < n$ 时 $\phi e_j = e_j$ ）来定义 $\phi \in \mathrm{SL}(n)\phi e_n = \frac{1}{t} e_n$。由于 $\phi E = E$，由 $\tilde{}$Z 的 SL(n) 不变性可得

$$\tilde{\zeta}(t) = \tilde{\mathrm{Z}}(\phi[0,1]^{n-1}) = \tilde{\mathrm{Z}}([0,1]^{n-1}) = \tilde{\zeta}(1)$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$对每个 $t > 0$ 都成立。这意味着 $\zeta \equiv 0$，并表明 Z 是简单的。因此，只需证明 (3.1)$\tilde{}$ 对每个简单的、平移不变且 SL(n) 不变的赋值 $\mathrm{Z}\colon \mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 都成立。

定义 $\zeta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$，令

$$\zeta(s) := \tilde{\mathrm{Z}}(\sqrt[n]{s\, n!}\,[0, e_1, \dots, e_n])$$

并注意到

$$\tilde{\mathrm{Z}}(S) = \zeta(V_n(S))$$

$\tilde{}$对每个单纯形 $S \in \mathcal{P}^n$都成立，因为赋值 Z 是简单的、平移不变且 SL(n) 不变的，并且每个n维单纯形都是单纯形 $\sqrt[n]{s\, n}$ 的某个 SL(n) 像的平移！ $[0, e_1, \dots, e_n]$ 对某个$s > 0$成立。对于 $0 < r < 1$，我们将顶点为 $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ 的 n维单纯形剖分为 n维单形 T_1，其顶点为 $v_0, r\, v_0 + (1-r)v_1, v_2, \dots, v_n$，以及 T_2，其顶点为$\tilde{}(1-r)v_0 + r\, v_1, v_1, v_2, \dots, v_n$。由于 Z 是一个简单赋值，

$$\tilde{\mathrm{Z}}(T_1 \cup T_2) = \tilde{\mathrm{Z}}(T_1) + \tilde{\mathrm{Z}}(T_2). \tag{3.2}$$

取 $v_0 := 0$和 $v_j := \sqrt[n]{(s+t)n!}\; e_j$对于 $j = 1, \dots, n$，以及 $r := s/(s+t)$，由 (3.2) 可得

$$\zeta(s+t) = \zeta(s) + \zeta(t)$$

对于每个 $s, t \in (0,\infty)$，因此，ζ是一个柯西函数。根据 (2.2)，并且由于我们可以将每个多胞体剖分为单形，我们得出 (3.1) 对每个 $P \in \mathcal{P}^n$都成立。□

柯西函数的性质立即给出以下结果，而该结果又蕴含定理 3.1。

推论 3.5。泛函 $\mathrm{Z}: \mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的、平移不变且 SL(n) 不变的赋值，当且仅当存在常数 c_0, $c_n \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(P) = c_0 V_0(P) + c_n V_n(P)$$

对每个 $P \in \mathcal{P}^n$ 均成立。

对于上半连续赋值和 Borel 可测赋值，也有相应的结论。

我们指出，即使不假设平移不变性，关于 SL(n) 不变赋值的分类结果也已为人所知（见 [57]）。特别地，有如下结果。设 $\mathcal{P}_o^n$ 为包含原点的凸多胞体空间。

定理 3.6。泛函 $\mathrm{Z}: \mathcal{P}_o^n \to \mathbb{R}$ 是连续的、SL(n) 不变的赋值，当且仅当存在常数 $c_0, c_n \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(P) = c_0 V_0(P) + c_n V_n(P)$$

对于每个 $P \in \mathcal{P}_o^n$。

在 $\mathcal{P}^n$ 上，还存在其他 SL(n) 不变赋值。特别地，$P \mapsto V_n([0, P])$ 就是这样一种赋值（完整分类见 [57]）。在 $\mathcal{P}^n{}_{(o)}$ 上，包含原点于其内部的凸多胞体空间 $P \mapsto V_n(P^\circ)$ 中，将 P 的极体体积与之对应的泛函是一种 SL(n) 变体赋值。Haberl 和帕拉帕蒂茨 [38] 建立了 $\mathcal{P}^n{}_{(o)}$ 上 SL(n) 不变赋值的完整分类。

3.3. 仿射表面积。尽管我们已经完成了 $\mathcal{P}^n$ 上平移不变和 SL(n) 不变赋值的完整分类，但在 $\mathcal{K}^n$ 上尚未知晓这样的结果，而且 $\mathcal{K}^n$上还存在其他在 $\mathcal{P}^n$ 上取零的赋值。经典的仿射表面积 $\Omega: \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 就是这样一种赋值。它定义为

$$\Omega(K) = \int_{\partial K} \kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x), \tag{3.3}$$

其中，$\kappa(K,x)$ 是 ∂K 在 x 处的广义高斯曲率，并且积分是相对于边界 ∂K 上的 $(n-1)$ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^{n-1}$ 进行的，其中 K。根据亚历山德罗夫的经典结果，凸体的边界几乎处处二阶可微，因此 $\kappa(K,x)$ 几乎处处有定义，并且可以证明 $x \mapsto \kappa(K,x)$ 是可测的。我们指出，广义高斯曲率是曲率测度的绝对连续部分的密度$C_0(K,\cdot)$，其中 $C_0(K,B) := \mathcal{H}^{n-1}(\nu_K(B))$ 对于博雷尔集 $B \subset \partial K$，而 ν_K 是球面像映射，它将 K 中包含x的支撑超平面的所有单位法向量的集合对应于 $x \in \partial K$（见 [72, 第 4] 章）。因此

$$\int_{\partial K} \kappa(K,x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x) \le \mathcal{H}^{n-1}(\partial B^n) = n\kappa_n$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$，并根据詹森不等式，

$$\int_{\partial K} \kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x) \le \big(n\kappa_n\big)^{\frac{1}{n+1}} \Big(\int_{\partial K} \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x) \Big)^{\frac{n}{n+1}}. \tag{3.4}$$

这意味着，对于每个 $K \in \mathcal{K}^n$，(3.3) 中的积分都是有限的。

具有光滑边界的凸体的仿射表面积定义是经典的，可追溯到 Blaschke 和 Pick [13]。他们证明了 Ω 是等仿射不变的，也就是说，Ω 在平移和 SL(n) 作用下保持不变。将其推广到一般凸体则是较近的成果，归功于 Leichtweiß [45],Lutwak [58] 以及 Sch¨utt 和 Werner [74]。Lutwak [58] 证明了 Ω 在 $\mathcal{K}^n$上是上半连续的，也就是说，对于任意一个收敛到凸体 K 的凸体序列 K_j，我们有

$$\Omega(K) \geq \limsup_{j\to\infty} \Omega(K_j).$$

由 (3.3) 可知，Ω 在多胞体上为零，因此并不连续。Ω 在 $\mathcal{K}^n$ 上的赋值性质可直接由 (3.3) 得出。

注意，Ω 是平移不变的，并且当 K 维数较低时，Ω(K) $= 0$ 。因此，以下不妨假设原点是 K 的内点。显然，(3.3) 可改写为

$$\Omega(K) = \int_{\partial K} \kappa_0(K,x)^{\frac{1}{n+1}} \, \mathrm{d}V_K(x), \tag{3.5}$$

其中

$$\kappa_0(K,x) := \frac{\kappa(K,x)}{\langle x, n_K(x)\rangle^{n+1}}$$

and

$$\mathrm{d}V_K(x) := \langle x, n_K(x)\rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

这里， n_K(x) 是 K 在 x 处的单位外法向量，几乎处处在 ∂K 上唯一确定；而 $\langle x, n_K(x)\rangle$ 是 K 在该 x 处的切超平面到原点的距离。在 (3.5) 中，容易看出 Ω 是 SL(n) 不变的。事实上，对于博雷尔集 $B \subset \partial K$，利用锥体体积等于其高除以 n 再乘以其底面的 ($n-1$) 维体积这一事实，可知 $\frac{1}{n}V_K(B)$ 恰好是集合 $\{t\,B\colon\ t \in [0,1]\}$ 的 n 维体积。因此，

$$V_{\phi K}(\phi B) = V_K(B)$$

对于每个 $\phi \in$ SL(n)以及每个博雷尔集 $B \subset \partial K$。此外，

$$\kappa_0(\phi K, \phi x) = \kappa_0(K,x)$$

对于每个 $\phi \in$ SL(n)以及每个 $x \in \partial K$ ，其中 $\kappa_0(K,x) > 0$。这是以下关于 $\kappa_0(K,x)$的几何解释的直接推论，

$$\kappa_0(K,x) = \frac{\kappa_n^2}{V_n(E_K(x))^2},$$

其中 E_K(x)是唯一一个在 x处与 K 相切的中心椭球。我们指出，

$$K \mapsto \int_{\partial K} \zeta(\kappa_0(K,x)) \, \mathrm{d}V_K(x) \tag{3.6}$$

是定义在 $\mathcal{K}^n{}_{(o)}$上的 SL(n) 不变赋值；该空间由内部包含原点的凸体构成，其中 $\zeta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$是一个合适的连续函数。(3.6)中定义的泛函称为 Orlicz 仿射表面积。若 $\zeta(t) := t^p$ 适用于满足 $p > -n$的 $t > 0$ ，则得到所谓的 L_p K仿射表面积，该概念由 Lutwak [59]引入。关于 $\mathcal{K}^n{}_{(o)}$ 上 SL(n) 不变赋值的分类结果见 [38,49,56] ，而 L_p 和 Orlicz 仿射表面积的刻画见 [56]。

[48,55] 中的以下结果加强了定理 3.1，并确立了仿射表面积的一种刻画。

定理 3.7. 泛函 $Z: \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是一个上半连续、平移不变且在 SL(n) 下不变的赋值，当且仅当存在常数 c_0、 $c_n \in \mathbb{R}$ 和 $c \geq 0$，使得

$$Z(K) = c_0 V_0(K) + c_n V_n(K) + c\,\Omega(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$。

我们给出 $n = 2$ 来自 [48]时定理 3.7 的证明。若闭三角形 $T = T(x, y)$ 由凸体 $K \in \mathcal{K}^2$ 在 x 和 y 处的支撑直线（即一维支撑超平面）以及连接 x 和 y的弦围成，则称其为凸体 $K \in \mathcal{K}^2$ 的支撑三角形，端点为 x 和 y。

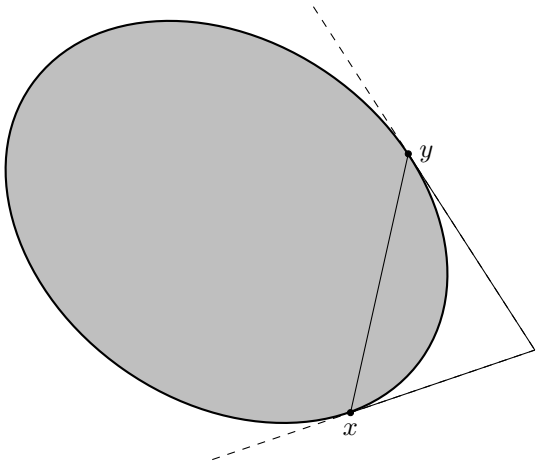

图 2. 凸体 $K \in \mathcal{K}^2$ 的支撑三角形，端点为 x、 $y \in \partial K$。

凸体 K 的帽是一个闭半空间与 K的交集。对于 $K, L \in \mathcal{K}^2$，我们定义 $\delta_s(K, L) := V_2(K \triangle L)$，其中 $K \triangle L := (K \cup L) \backslash (K \cap L)$是 K 与L的对称差。请注意，对称差度量 δ_s 在满维凸体上诱导的拓扑与豪斯多夫度量所诱导的拓扑相同。

我们需要以下引理，其证明略去，因为它与命题 3.2 的证明非常相似。

引理 3.8. 若 $Z: \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个上半连续、旋转不变且在多胞体上取值为零的赋值，则

$$Z(C) = c\,\Omega(C)$$

对于 B^2的每个帽集 C，都有 $c := Z(B^2)/\Omega(B^2)$。

令 $\mathcal{E}^2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中所有可剖分为有限个多胞体和单位椭圆帽集的凸体所构成的族。这里，二维单位球 B^2 的任意等仿射像都称为单位椭圆。由于平面多胞体属于 $\mathcal{E}^2$，集合 $\mathcal{E}^2$在 $\mathcal{K}^2$中稠密。

命题 3.9. 若 $Z: \mathcal{K}^2 \to [0, \infty)$是一个上半连续、平移不变且 SL(2) 不变，并在多胞体上取值为零的赋值，则

$$Z(K) = \sup\{\limsup_{k\to\infty} Z(E_k) : E_k \to K, E_k \in \mathcal{E}^2\}$$

对于每个 $K \in \mathcal{K}^2$。

证明。由于 Z 是上半连续的，我们有

$$Z(K) \geq \limsup_{k\to\infty} Z(E_k)$$

对于每个 $K \in \mathcal{K}^2$，以及每个满足 $E_k \to K$ 的序列 $E_k \in \mathcal{E}^2$。为证明命题中的陈述，反设存在 $K \in \mathcal{K}^2$ 使得

$$\mathrm{Z}(K) > \limsup_{k\to\infty} \mathrm{Z}(E_k) \tag{3.7}$$

对于所有满足 $E_k \in \mathcal{E}^2$ 和 $E_k \to K$ 的序列 E_k。由 (3.4)，对于所有满足 $\delta_{\mathrm{s}}(K,E) < 1$ 的凸体 E，E 的仿射表面积均一致有界。因此，由 (3.7)，对于每个足够小的 $\varepsilon > 0$，存在 $0 < \delta < 1$ 使得

$$\mathrm{Z}(K) \geq \mathrm{Z}(E) + \varepsilon\,\Omega(E) \tag{3.8}$$

对于每个满足 $\delta_{\mathrm{s}}(K,E) < \delta$ 的 $E \in \mathcal{E}^2$。

我们用一列由 K 的适当部分构造的凸体逼近 B^2，并证明 (3.8) 会导致矛盾。不失一般性，假设原点是 K 的内点。选取 k 条以原点为起点的射线，使得

$$\sum_{i=1}^{k} V_2(T_i^{(k)}) < \delta \tag{3.9}$$

其中 $T_{(k)\,i} = T(x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)})$ 是支撑三角形，而 $x_1^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}, x_{k+1}^{(k)} = x_1^{(k)}$ 是这些射线与 ∂K 相交处的连续点。对于每个内部非空的 $T_i^{(k)}$，都存在单位椭圆上的唯一一段弧，它与 $T_i^{(k)}$ 的两边相切，而这两边由 K 的支撑直线确定。我们将由这段椭圆弧以及连接 $x_i^{(k)}$ 和 $x_{i+1}^{(k)}$ 的弦所围成的凸体记为 $E_i^{(k)}$。若 $T_i^{(k)}$ 的内部为空，则令 $E_i^{(k)} := T_i^{(k)}$。

我们定义

$$E_k := \bigcup_{i=1}^{k} E_i^{(k)} \cup \Big(K \setminus \bigcup_{i=1}^{k} T_i^{(k)}\Big)$$

注意，$E_k \in \mathcal{E}^2$，并且 (3.9) 蕴含 $\delta_{\mathrm{s}}(K,E_k) < \delta$。

由于 Z 和 Ω 在多胞体上为零，(3.8) 蕴含

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Z}(K \cap T_i^{(k)}) = \mathrm{Z}(K) \geq \mathrm{Z}(E_k) + \varepsilon\,\Omega(E_k) = \sum_{i=1}^{k} \big(\mathrm{Z}(E_k \cap T_i^{(k)}) + \varepsilon\,\Omega(E_k \cap T_i^{(k)})\big).$$

因此，对于每个 k，都存在一个具有非空内部的支撑三角形 $T_{i_k}^{(k)}$，使得

$$\mathrm{Z}(K \cap T_{i_k}^{(k)}) \geq \mathrm{Z}(E_k \cap T_{i_k}^{(k)}) + \varepsilon\,\Omega(E_k \cap T_{i_k}^{(k)}). \tag{3.10}$$

我们取一个等仿射变换 $\phi^{(k)}$，将 $T_{i_k}^{(k)}$ 变换为 B^2的支撑三角形 $\tilde{T}_{(k)}$，并分别用 $\tilde{C}^{(k)}$ 和 $B^{(k)}$ 表示帽集 $K \cap T_{i_k}^{(k)}$ 和 $E_k \cap T_{i_k}^{(k)}$ 在 $\phi^{(k)}$ 下的像。由 (3.10) 以及 Z 的等仿射不变性可得

$$\mathrm{Z}(\tilde{C}^{(k)}) \geq \mathrm{Z}(B^{(k)}) + \varepsilon\,\Omega(B^{(k)}). \tag{3.11}$$

令 l_k 为满足以下条件的最大整数：存在旋转 $\psi_1, \ldots, \psi_{l_k}$，使得 $\psi_1(T^{(k)}), \ldots, \psi_{l_k}(\tilde{T}_{(k)})$ 是 B^2的互不重叠的支撑三角形。由于对于以原点为顶点、角度为 2α 的 B^2 扇形，B^2 的支撑三角形的面积为 $\sin^2\alpha \tan\alpha$，因此我们有

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{l_k+1}\right)\tan\left(\frac{\pi}{l_k+1}\right) \leq V_2(\tilde{T}^{(k)}) \leq \sin^2\left(\frac{\pi}{l_k}\right)\tan\left(\frac{\pi}{l_k}\right). \tag{3.12}$$

我们构造凸体

$$\tilde{K}_k := \bigcup_{i=1}^{l_k} \psi_i(\tilde{C}^{(k)}) \cup \Big(B^2 \backslash \bigcup_{i=1}^{l_k} \psi_i(\tilde{T}^{(k)})\Big).$$

注意到 (3.11) 意味着

$$\mathrm{Z}(\tilde{K}_k) \geq \mathrm{Z}(B^2) + \frac{\varepsilon}{2}\,\Omega(B^2) \tag{3.13}$$

当 k 足够大时。由于 $\delta_{\mathrm{s}}(\tilde{K}_k, B^2) \leq l_k\, V_2(\tilde{T}^{(k)})$，由 (3.12) 可得

$$\tilde{K}_k \to B^2 \tag{3.14}$$

当 $k \to \infty$ 时。因此，由 Z 的上半连续性以及 (3.14)、(3.13) 和 (3.16)，我们得到

$$\mathrm{Z}(B^2) \geq \limsup_{k\to\infty} \mathrm{Z}(\tilde{K}_k) \geq \mathrm{Z}(B^2) + \frac{\varepsilon}{2}\,\Omega(B^2).$$

这是一个矛盾　因为 $\varepsilon > 0$ 且 $\Omega(B^2) > 0$，从而命题的证明得以完成　. □

注意，我们可以对 $\mathrm{Z} = \Omega$ 应用命题 3.9，从而得到

$$\Omega(K) = \sup\{\limsup_{k\to\infty} \Omega(E_k) : E_k \to K, E_k \in \mathcal{E}^2\} \tag{3.15}$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^2$均成立。

当 $n = 2$ 时，定理 3.7 的证明。设 $\mathrm{Z}\colon \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ 是一个上半连续、平移不变且具有 SL(2) 不变性的赋值。由定理 3.4，并且由于上半连续的柯西函数是线性的，存在 $c_0, c_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Z}(P) = c_0 V_0(P) + c_2 V_2(P)$$

对每个 $P \in \mathcal{P}^2$均成立。定义 $\tilde{\mathrm{Z}}\colon \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K) := \mathrm{Z}(K) - c_0 V_0(K) - c_2 V_2(K)$$

$\tilde{}$，并注意到 Z 是一个上半连续、平移不变且具有 SL(2) 不变性的赋值，在多胞体上取值为零。对于每个 $K \in \mathcal{K}^2$，都存在一个多胞体序列 P_k，满足 $P_k \to K$。因此，Z 的上半$\tilde{}$连续性意味着

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K) \geq \limsup_{k\to\infty} \tilde{\mathrm{Z}}(P_k) = 0,$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$，这表明 Z 非负。利用引理 3.8 以及 Z 的平移不变性和 SL(2) 不变性，我们得到

$$\tilde{\mathrm{Z}}(C) = c\,\Omega(C)$$

对于单位椭圆的每个帽 C，其中 $c = \mathrm{Z}(B^2)/\Omega(B^2)$。由于 Z 在多胞体上取值为零，因此它是一个简单赋值，由此可由 (2.2) 得出

$$\tilde{\mathrm{Z}}(E) = c\,\Omega(E) \tag{3.16}$$

对于 $E \in \mathcal{E}^2$，命题 3.9 和 (3.15) 现已完成该定理的证明。 □

对于 $K \in \mathcal{K}^2$，Blaschke [13] 给出了仿射表面积的如下定义。在 ∂K 上选取分割点 $x_1^{(k)}$、...、$x_k^{(k)}$、$x_{k+1}^{(k)} = x_1^{(k)}$ 以及支撑三角形 $T_1^{(k)}$、...、$T_{(k)k}$，使得 $T_{(k)j} = T(x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)})$。定义

$$\tilde{\Omega}(K) := \lim \sum_{j=1}^{k} \sqrt[3]{8\, V_2(T_j^{(k)})} \tag{3.17}$$

其中，极限是沿着满足以下条件的细分序列取的

$$\max_{i=1,\dots,k} V_2(T_i^{(k)}) \to 0$$

作为 $k \to \infty$。对于 $\mathcal{K}^2$ 中的光滑凸体，Blaschke 证明了该极限总是存在，并且 $\tilde{\Omega}(K) = \Omega(K)$。

如果我们在 $K \in \mathcal{K}^2$ 的支撑三角形 $T(x, z)$ 中再选取一个细分点 $y \in \partial K$，便得到支撑三角形 $T(x, y)$ 和 $T(y, z)$，并且以下初等反三角不等式成立

$$\sqrt[3]{8\, V_2(T(x,z))} \geq \sqrt[3]{8\, V_2(T(x,y))} + \sqrt[3]{8\, V_2(T(y,z))}$$

（参见 [13, 第 38] 页或 [20]）。这意味着，随着细分不断细化，$\sum_{j=1}^{k} \sqrt[3]{8\, V_2(T_j^{(k)})}$ 单调递减。因此，式 (3.17) 中的极限存在，且与所选的细分序列无关，并且

$$\tilde{\Omega}(K) = \inf \sum_{j=1}^{k} \sqrt[3]{8\, V_2(T_j^{(k)})}$$

其中，下确界取遍 ∂K 的所有细分。因此，$\tilde{\Omega}$ 在 $\mathcal{K}^2$ 上定义良好，Leichtweiß[46] 证明了对于每个 $K \in \mathcal{K}^2$，都有 $\tilde{\Omega}(K) = \Omega(K)$。这也是定理 3.7 对于 $n = 2$ 的一个简单推论。事实上，$\tilde{\Omega} : \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ 是等仿射不变的，并且在低维集合上为零。作为连续泛函的下确界，Ω 是上半连续的。因此，我们只需证明 Ω 是一个赋值。由于 $\max_{i=1,\dots,k} V_2(T_i^{(k)}) \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时，对于每条直线 H，都有

$$\tilde{\Omega}(K) = \tilde{\Omega}(K \cap H^+) + \tilde{\Omega}(K \cap H^-)$$

其中 H^+ 和 H^- 是由 H 界定的闭半空间。不难看出，这意味着 $\tilde{\Omega}$ 是一个赋值。因此，定理 3.7 对于 $n = 2$ 表明

$$\tilde{\Omega}(K) = c\, \Omega(K)$$

取常数 $c \geq 0$，对 $K = B^2$ 进行简单计算可得 $c = 1$.

4. 平移不变赋值

对于定义在凸多胞体和凸体上的平移不变赋值，Hadwiger 建立了基础理论。许多结果甚至适用于 $\mathbb{Q}^n$ 中的有理多胞体以及具有整数坐标的多胞体（例如参见 [17]）。尽管如此，我们将只关注 $\mathbb{R}^n$中的凸多胞体和凸体。

4.1. 典范单纯形分解。对于 $0 \leq k \leq n$，k 维单纯形 S 在 $\mathbb{R}^n$ 中是由 $k+1$ 个仿射无关点 p_0、.....、$p_k \in \mathbb{R}^n$ 的凸包。我们对 $1 \leq i \leq k$ 定义 $x_i := p_i - p_{i-1}$，并对 x_0 定义 $= p_0$，记作 $S = \langle x_0;\ x_1$、.....、$x_k \rangle$。对于 $k = 0$，我们定义 $S := \{x_0\}$。

引理 4.1. 集合 S 是一个以 p_0、.....、 $p_n \in \mathbb{R}^n$ 为顶点的 n 维单纯形，当且仅当

$$S = \Big\{ x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i : 1 \geq r_1 \geq \ldots \geq r_n \geq 0 \Big\}. \tag{4.1}$$

反之，对于 x_0、...、 $x_n \in \mathbb{R}^n$，若 x_1、...、 x_n 线性无关，则 (4.1) 中定义的集合是一个 n 维单纯形。

证明。每个点 $x \in S$ 都是 p_0、...、 p_n 的凸组合，即

$$x = \sum_{i=0}^{n} t_i p_i$$

其中 $t_i \geq 0$ 和 $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$。令 $r_i = \sum_{j=i}^{n} t_j$，则有

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i x_i.$$

因此，(4.1) 右侧所含的每个点都属于 S。

反之，若 S 是 (4.1) 中定义的集合，则令 $p_k = \sum_{j=0}^{k} x_j$，可得 $S = [p_0, \ldots, p_n]$。 □

以下结果称为 Hadwiger 规范单纯形分解 [39, 第 1.2 节6]。

定理 4.2. 设 $S := \langle x_0; x_1, \ldots, x_n \rangle$ 是一个 n 维单纯形。定义 $\underline{S}_0 := \{x_0\}$, $\overline{S}_{n-k} := \{x_0 + \cdots + x_n\}$,

$$\underline{S}_k := \big\langle x_0; x_1, \ldots, x_k \big\rangle \quad \textit{and} \quad \overline{S}_{n-k} := \big\langle x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i; x_{k+1}, \ldots, x_n \big\rangle,$$

对于 $1 \leq k \leq n-1$，我们有

$$S = \bigsqcup_{k=0}^{n} \big((1-t)\, \underline{S}_k + t\, \overline{S}_{n-k} \big)$$

对于 $0 < t < 1$。

证明. 令

$$Q_k(t) := (1-t)\, \underline{S}_k + t\, \overline{S}_{n-k},$$

由引理 4.1 可得

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= \Big\{ (1-t)\big(x_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i\, x_i\big) + t\big(x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} s_i\, x_i\big) : \\ &\qquad\qquad 1 \geq r_1 \geq \cdots \geq r_k \geq 0, 1 \geq s_{k+1} \geq \cdots \geq s_n \geq 0 \Big\} \\ &= \Big\{ x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i\, x_i \, : 1 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_k \geq t \geq t_{k+1} \geq \cdots \geq t_n \geq 0 \Big\}. \end{aligned}$$

对于 $x \in S$，这意味着对于适当的 k， $x \in Q_k(t)$。我们必须证明，当$1 \leq k \leq n-1$时，集合 $Q_k(t)$ 的内部两两不相交。如果对于 $i < k$， $x \in Q_i(t) \cap Q_k(t)$，那么 $t_{i+1} = \cdots = t_k = t$，因此 $r_j = 0$ 且 $s_j = 1$，对于 $i+1 \leq j \leq k$。由此可得 $x \in \partial Q_i(t)$ 和 $x \in \partial Q_j(t)$。至此，该命题的证明完成。□

如果向量 $x_1, \ldots, x_n$ 两两正交，我们就称单纯形 $\langle x_0; x_1, \ldots, x_n \rangle$ 为正交单纯形。以下结果归功于 Hadwiger [39, 第 1.3 节4]。

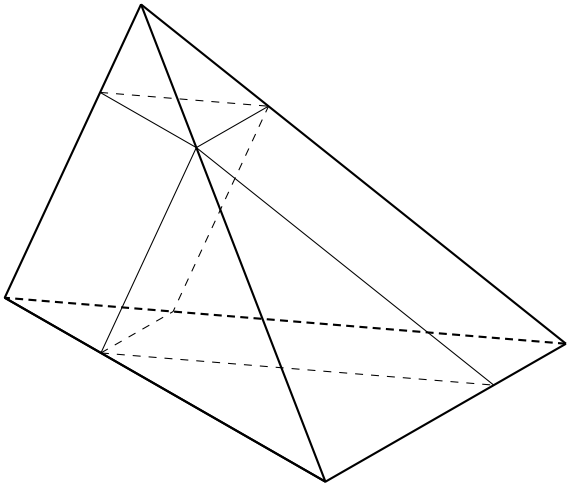

图3. 典范单纯形分解

引理 4.3. 设给定 $z \in \mathbb{R}^n$。如果 $P \in \mathcal{P}^n$ 是 n维的，那么存在正交单纯形$S_1, \dots, S_m, S'_1, \dots, S'_{m'}$，它们各有一个顶点位于 z，使得

$$P \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{m} S_i \sim \bigsqcup_{j=1}^{m'} S'_j.$$

证明。对于 $n = 1$，该命题很容易证明。假设对于每个 $(n-1)$ 维超平面 E 和每个 $z_E \in E$，该命题在 $\mathcal{P}(E)$ 中成立。

只需对一个 n 维单纯形 S 证明该命题。设 F 是它的一个面，其仿射包 E 不包含 z。设 z_E 是 z 在 E 中的最近点。我们对 E 中具有 z_E 的多胞体使用归纳假设，从而得到 $(n-1)$ 维单形 $F_1, \dots, F_k, F'_1, \dots, F'_{k'}$，每个单形都有一个顶点位于 z_E，使得

$$F \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{k} F_i \sim \bigsqcup_{j=1}^{k'} F'_j.$$

令 $S_i := [z, F_i]$ 对应于 $1 \le i \le k$，并令 $S'_j := [z, F'_j]$ 对应于 $1 \le j \le k'$，即可得到关于 S 的命题。 □

是否每个 $\mathcal{P}^n$ 中的多胞体都能剖分为有限个正交单纯形，这个问题尚未解决。Hadwiger 猜想这是可行的，而他的猜想已在 $n \le 5$ 的情形下得到证明（例如，参见 [19]）。

4.2. 在正交柱体上消失的赋值。我们称 $P \in \mathcal{P}^n$ 为凸正交柱体，如果存在正交的互补子空间 E 和 F，满足 $\dim E$、$\dim F \ge 1$，以及多胞体 $P_E \subset E$ 和 $P_F \subset F$，使得 $P = P_E + P_F$。注意，这一类包括所有非满维多胞体。

命题 4.4（Hadwiger）。若 $Z\colon \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的平移不变赋值，且在凸正交柱体上消失，则 Z 是 1 次齐次的。

证明。设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 和 $0 < t < 1$ 中的一个 n 维正交单形。在典范单纯形分解中，

$$S = \bigsqcup_{k=0}^{n} \big((1-t)\underline{S}_k + t\,\overline{S}_{n-k}\big), \tag{4.2}$$

对每个 $1 \le k \le n-1$，单形 $\underline{S}_k$ 和 $\overline{S}_{n-k}$ 相互正交，且分别位于正交子空间中。因此 $(1-t)\underline{S}_k + t\,\overline{S}_{n-k}$ 是 $1 \le k \le n-1$ 的一个正交圆柱体。由于 Z 在凸正交圆柱体上取值为零，我们得到

$$\mathrm{Z}((1-t)\underline{S}_k + t\,\overline{S}_{n-k}) = 0$$

对于 $1 \le k \le n-1$，我们还看到 Z 是简单的。由 (2.2)，现在可由 (4.2) 得出

$$\mathrm{Z}(S) = \mathrm{Z}((1-t)S) + \mathrm{Z}(t\,S).$$

令 r，$s > 0$。令 $\alpha(r) := \mathrm{Z}(rS)$，其中 $S = (r+s)S$ 且 $t = r/(r+s)$，我们得到

$$\alpha(r+s) = \alpha(r) + \alpha(s)$$

对所有 r、$s > 0$。由于 Z 连续，$\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 也连续。因此，α 是连续的柯西函数。于是 α 是线性的。因此，

$$\mathrm{Z}(t\,S) = t\,\mathrm{Z}(S) \tag{4.3}$$

对于每个 $t > 0$ 以及每个正交单形 S。

对于 $P \in \mathcal{P}^n$，由引理 4.3 可知，存在正交单纯形，使得

$$P \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{m} S_i \sim \bigsqcup_{j=1}^{m'} S'_j.$$

因此，对于每个 $t > 0$，利用 Z 是简单的这一点，我们得到

$$\mathrm{Z}(t\,P) + \mathrm{Z}\Big(\bigsqcup_{i=1}^{m} t\,S_i\Big) = \mathrm{Z}\Big(\bigsqcup_{j=1}^{m'} t\,S'_j\Big)$$

and

$$\mathrm{Z}(t\,P) = \sum_{j=1}^{m'} \mathrm{Z}\left(t\,S'_j\right) - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Z}\left(t\,S_i\right) = t\sum_{j=1}^{m'} \mathrm{Z}(S'_j) - t\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Z}(S_i) = t\,\mathrm{Z}(P),$$

这里用到了 (2.2) 和 (4.3)。因此，Z 在多胞体上是 1 次齐次的。由于 Z 连续，这就完成了证明。□

对于 $1 \le \ell \le n$，如果存在两两正交且维数至少为一的子空间 E_1、…、E_ℓ，以及凸多胞体 $P_1 \subset E_1$、…、$P_\ell \subset E_\ell$，使得 $P = P_1 + \cdots + P_\ell$，我们就称 $P \in \mathcal{P}^n$ 为凸 ℓ- 柱体。如果 $C \subset \mathbb{R}^n$ 可以剖分为有限个凸 ℓ-柱体，我们就称其为 ℓ-柱体。以下结果由 Hadwiger 在 [39, 第 1.3 节7]中证明。

Theo注 4.5. 对于 $P \in \mathcal{P}^n$ 以及每个 $1 \le \ell \le n$，存在一个 ℓ-圆柱体 C_ℓ，使得

$$mP = \bigsqcup_{\ell=1}^{n} \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{T}_{\ell,m}} \tau(C_\ell)$$

对每个整数 $m \ge 1$，其中 $\mathcal{T}_{\ell,\,m}$ 是至多由 $\binom{m}{\ell}$ 个平移组成的集合。

证明。只需证明该命题对 P一个 n维单纯形 S成立。令 $S = \langle x_0;\ x_1, \ldots, x_n\rangle$。对于 $i < j$，定义单形 $S_{ij} := \langle x_i;\ x_{i+1}, \ldots, x_j\rangle$。对于 $0 < t < 1$和 $1 \le k < n$，设

$$Q_k(t) := (1-t)\,S_{0k} + t\Big(\sum_{i=0}^{k-1} x_i + S_{kn}\Big).$$

由定理 4.2 给出的 $m\,S$ 和 $t=\frac{1}{m}$ 的规范单形剖分为

$$mS = m\,Q_0(\tfrac{1}{m}) \sqcup \cdots \sqcup m\,Q_n(\tfrac{1}{m}).$$

我们有 $m\,Q_0(\frac{1}{m}) \approx S$和 $m\,Q_n(\frac{1}{m}) \approx (m-1)\,S$而

$$m\,Q_\ell(\tfrac{1}{m}) \approx (m-1)\,S_{0\ell} + S_{\ell n}$$

对于 $1 \le \ell \le n-1$，其中 $\approx$ 表示在平移意义下相等。将定理 4.2 中的典范单纯形分解应用于 $(m-1)S_{0\ell}$，我们得到一个由以下形式的 ℓ-柱体组成的分解

$$T_\ell\,(j_1,\dots,j_\ell) := S_{0j_1} + S_{j_1 n} + \cdots + S_{j_{\ell-1}n}$$

对于 $1 \le j_1 < \cdots < j_\ell = n$。我们用归纳法证明，每个 $T_\ell(j_1,\dots,j_\ell)$ 在分解中出现 $\binom{m}{\ell}$ 次。对于 $m=1$，这一结论显然成立。因此，设 $m>1$。多胞体 $T_\ell(j_1,\dots,j_\ell)$ 在分解 $(m-1)S$ 时出现，也在分解 $(m-1)S_{0j_{\ell-1}} + S_{j_{\ell-1}n}$ 时出现。根据归纳假设，它在第一种情况下出现 $\binom{m-1}{\ell}$ 次，在第二种情况下出现 $\binom{m-1}{\ell-1}$ 次，这就证明了所述结论。凸 ℓ- 柱体 $T_\ell(j_1,\dots,j_\ell)$（其中 $1 \le j_1 < \cdots < j_\ell = n$）的平移副本（内部两两不相交）的并集构成 ℓ-柱体 C_ℓ。□

4.3. 齐次分解定理。以下结果是凸体上平移不变赋值理论中的基础。

定理 4.6（ McMullen）。若 $\mathrm{Z}:\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的平移不变赋值，则 n

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_0 + \cdots + \mathrm{Z}_n$$

其中 $\mathrm{Z}_j:\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的、平移不变的 j-齐次赋值。

我们将在 Z 为简单赋值这一附加假设下证明该结果。这个版本归功于 Hadwiger。一般情形由 Hadwiger 陈述但未给出证明，后由 McMullen [61]证明。我们需要以下命题。

命题 4.7。若 $\mathrm{Z}:\mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 是简单的平移不变赋值，则

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_0 + \cdots + \mathrm{Z}_n$$

其中 $\mathrm{Z}_j:\mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 对于 $0 \le j \le n$ 是一个简单的平移不变赋值，它相对于正整数乘法是 j 次齐次的。

证明。令 $P \in \mathcal{P}^n$。根据定理 4.5，对于 $1 \le j \le n$，存在 j-柱体 C_j，使得

$$\mathrm{Z}(m\,P) = \sum_{j=1}^{n} \binom{m}{j} \mathrm{Z}(C_j) \tag{4.4}$$

对每个 $m \ge 1$ 都成立。注意，$m \mapsto \mathrm{Z}(m\,P)$ 是关于 m 的一个次数至多为 n 的多项式。我们将 $\mathrm{Z}_j(P)$ 定义为该多项式中 m^j 的系数。

对于 k、$m \ge 1$，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_j(k\,P)\,m^j = \mathrm{Z}(k\,m\,P) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_j(P)\,(k\,m)^j.$$

因此，

$$\mathrm{Z}_j(k\,P) = k^j\ \mathrm{Z}_j(P),$$

也就是说，Z_j 关于正整数乘法是 j 次齐次的。要证明 Z_j 是一个赋值，只需证明

$$\mathrm{Z}_j(P \sqcup Q) = \mathrm{Z}_j(P) + \mathrm{Z}_j(Q).$$

这通过对 $P \sqcup Q$、 P 和 Q 使用 (4.4)，并比较 m^j 的系数即可得到 . □

证明 定理 4.6 关于简单赋值的证明。首先，我们证明对于非负的 $\lambda \in \mathbb{Q}$ ，

$$\mathrm{Z}(\lambda P) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_j(P)\, \lambda^j.$$

事实上，设 $\lambda = p/q$ 且 p、 $q \in \mathbb{N}$。我们有 $q^j \mathrm{Z}_j(\frac{1}{q} P) = \mathrm{Z}_j(P)$，并且

$$\mathrm{Z}(\tfrac{p}{q} P) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_j(\tfrac{1}{q} P)\, p^j = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_j(P) \big(\tfrac{p}{q}\big)^j.$$

So 目前，赋值 Z_j 仅定义在 $\mathcal{P}^n$ 上。注意，方程组 s,

$$\mathrm{Z}(m\, P) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Z}_j(P)\, m^j$$

对于 $m = 1, \dots, n$，关于未知量 $\mathrm{Z}_1(P) \dots, \mathrm{Z}_n(P)$ 的方程组有唯一解，因为该矩阵就是范德蒙德矩阵。这给出了显式表示，

$$\mathrm{Z}_j(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, \mathrm{Z}(i\, P)$$

其中 $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ 适当选取且与 P无关，我们据此定义 $\mathcal{K}^n$上的 Z_j 。容易看出，所得泛函是连续的平移不变赋值，且为 j次齐次。□

¯对于固定的 $K \in \mathcal{K}^n$ 和给定的连续平移不变赋值 Z，引理 2.1 表明， $_K \mapsto \mathrm{Z}_j(K + K)$ 定义了 $\mathcal{K}^n$上的一个连续、平移不变、 j次齐次赋值。我们可以¯反复使用这一论证，并得到以下定理；其中，我们称函数 $\mathrm{Z} : (\mathcal{K}^n)^m \to \mathbb{R}$为对称函数，如果其参数置换后函数值不变。

定理 4.8. 设 $1 \le m \le n$。若 Z: $\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是一个连续、平移不变、 m次齐次¯赋值，则存在一个对称函数 $\mathrm{Z} : (\mathcal{K}^n)^m \to \mathbb{R}$ ，使得

$$\mathrm{Z}(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_k K_k) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\} \\ i_1 + \dots + i_k = m}} \binom{m}{i_1 \cdots i_k} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_k^{i_k}\, \bar{\mathrm{Z}}(K_1[i_1], \dots, K_k[i_k])$$

¯对每个 $k \ge 1$、每个 K_1、.....、 $K_k \in \mathcal{K}^n$ 以及每个 λ_1、.....、 $\lambda_k \ge 0$都成立。此外，Z 关于每个变量都是闵可夫斯基可加的，并且映射

$$K \mapsto \bar{\mathrm{Z}}(K[j], K_1, \dots, K_{m-j})$$

是连续的、平移不变的、 j-齐次赋值，对每个 $1 \le j \le m$ 以及每个K_1、.....、 $K_{m-j} \in \mathcal{K}^n$都成立。

¯这里，我们记作 $K[j]$ ，若 K 在 Z 中作为自变量出现 j 次；而函数 Y： $\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 称为闵可夫斯基可加的，若

$$\mathrm{Y}(K + L) = \mathrm{Y}(K) + \mathrm{Y}(L)$$

对每个 K， $L \in \mathcal{K}^n$。定理 4.8 中的特殊情形 $m = 1$ 得出以下结果 t.

推论 4.9. 若 Z: $\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是一个连续、平移不变且 1 次齐次的赋值，则 Z 是闵可夫斯基可加的。

定理 4.6 允许将关于连续平移不变赋值的问题，归结为关于具有给定齐次次数 $j \in \{0, \dots, n\}$ 的此类赋值的问题。容易看出，每个连续、平移不变且 0 次齐次赋值都是欧拉示性数的倍数。对于齐次次数 $j = n$ 和 $j = n-1$，我们提及 Hadwiger [39] 和 McMullen [62] 的以下结果（不予证明）。

定理 4.10（Hadwiger）。泛函 Z: $\mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$ 是平移不变且 n 次齐次的赋值，当且仅当存在常数 $c \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Z}(P) = c\, V_n(P)$$

对每个 $P \in \mathcal{P}^n$ 都成立。

定理 4.11（McMullen）。泛函 Z: $\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是连续、平移不变且 $(n-1)$ 次齐次的赋值，当且仅当存在 $\zeta \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ 使得

$$\mathrm{Z}(K) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta(y)\, \mathrm{d}S_{n-1}(K, y)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 都成立。函数 ζ 在加上一个线性函数的限制后唯一确定。

这里，$S_{n-1}(K, \cdot)$ 是 K 的表面积测度。Goodey 和 Weil [37] 对连续、平移不变的 1-齐次赋值进行了分类。

虽然对 $\mathcal{K}^n$ 上连续的平移不变赋值进行完整分类尚不可及，但 Alesker [2] 证明了以下结果。

定理 4.12（Alesker）。对于 $0 \le j \le n$，由赋值的线性组合构成的空间

$$\left\{ K \mapsto V(K[j], K_1, \dots, K_{n-j}) : K_1, \dots, K_{n-j} \in \mathcal{K}^n \right\}$$

在连续、平移不变的 j-齐次赋值空间中稠密。

其中，$V(K[j], K_1, \dots, K_{n-j})$是将 $K \in \mathcal{K}^n$ 取 j 次以及 $K_1, \dots, K_{n-j} \in \mathcal{K}^n$时的混合体积，而连续平移不变赋值空间上的拓扑由范数诱导

$$\| \mathrm{Z} \| := \sup\{ |\mathrm{Z}(K)| : K \in \mathcal{K}^n,\, K \subseteq B^n \}.$$

Alesker 的结果证实了 McMullen 的一个猜想 [62]，并以 Alesker 所谓的不可约性定理 [2], 为基础；该定理还带来了深远的后续影响。

对于简单赋值，Klain [40] 和 Schneider [71]建立了如下完整分类。

定理 4.13（Klain 与 Schneider）。泛函 Z: $\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是连续平移不变简单赋值，当且仅当存在 $c \in \mathbb{R}$ 和一个奇函数 $\zeta \in C(\mathbb{S}^{n-1})$，使得

$$\mathrm{Z}(K) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta(y)\, \mathrm{d}S_{n-1}(K, y) + c\, V_n(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 都成立。函数 ζ 除加上一个线性函数的限制外，是唯一确定的。

Klain [40] 在证明 Hadwiger 定理时使用了他对简单赋值的分类。关于定理 4.13 的另一种证明，见 [44]。

McMullen [63] 对 $\mathcal{P}^n$ 上弱连续且平移不变的赋值进行了分类。这里，如果多胞体的面发生平行位移时赋值连续，则称该赋值为弱连续。

5. 刚体运动不变赋值

以下刚体运动不变的简单赋值称为 Dehn不变量。对于 $P \in \mathcal{P}^3$ 和 $\zeta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 设 柯西函数满足 $\zeta(\pi) = 0$，定义

$$\mathrm{D}_\zeta(P) := \sum V_1(E)\,\zeta(\alpha_P(E))$$

其中，求和遍及 P 的所有棱 E，而 $\alpha_P(E)$ 是 P 在 E 处的二面角。不难看出，D_ζ 是 $\mathcal{P}^3$ 上刚体运动不变的简单赋值，并且 D_ζ 在立方体上取值为零。$\mathbb{R}^3$ 中的正四面体 T 的每条棱处的二面角均为 $\alpha := \arccos(1/3)$，且比值 α/π 是无理数。因此，存在满足 $\zeta(\alpha) \neq 0$ 的柯西函数。于是，对于每个正则单纯形 T，$\mathrm{D}_\zeta(T) \neq 0$。由于 D_ζ 是刚体运动不变的简单赋值，根据 (2.2) 可知，T 不能与任何立方体等剖分。这表明希尔伯特第三问题的答案是否定的（关于希尔伯特第三问题及多胞体剖分理论的介绍，见 [16]）。一般而言，D_ζ 远非连续。

Hadwiger 在其著名的分类定理中，给出了 $\mathcal{K}^n$ 上刚体运动不变且连续的赋值的完整分类 [39, 第 6.1 节。10]

定理 5.1（Hadwiger）。泛函 $\mathrm{Z}\colon \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是连续、平移不变且旋转不变的赋值，当且仅当存在常数 c_0、.....、$c_n \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(K) = c_0 V_0(K) + \cdots + c_n V_n(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 都成立。

Hadwiger [39, 第 6.1 节。10] 还通过证明任何此类赋值都是内在体积的非负系数线性组合，得到了单调递增、平移不变且旋转不变赋值的完整分类。McMullen [64] 证明了每个单调递增、平移不变赋值都是连续的。因此，Hadwiger 定理的单调版本是定理 5.1 的一个简单推论。

我们介绍 Hadwiger 原始证明的一种变体，这是我们通过乌尔里希·贝特克的讲义了解到的。关键步骤是证明下面关于简单赋值的结果。

命题 5.2. 泛函 $\mathrm{Z}\colon \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 是连续的、平移不变且旋转不变的简单赋值，当且仅当存在一个常数 $c \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(K) = c\, V_n(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 都成立。

我们首先说明如何从这个命题推出 Hadwiger 定理，然后介绍其证明。Dan Klain [40] 给出了 Hadwiger 定理的另一种证明。 [41] 和 [72]中也可以找到该证明。Klain 还在下一个小节中使用了这个简单的论证。

利用命题 5.2 证明 Hadwiger 定理。我们对维数 n 使用归纳法，并注意到，根据命题 3.2，该结论在 $n = 1$ 时成立。假设该结论在维数 $(n-1)$ 时成立，并令 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个 $(n-1)$ 维线性子空间。Z 在 $\mathcal{K}(E)$ 上的限制是一个定义于 $\mathcal{K}(E)$ 上的连续、平移不变且旋转不变赋值。根据归纳假设，存在常数 c_0、……、$c_{n-1} \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j V_j$$

对每个 $K \in \mathcal{K}(E)$。定义 $\mathrm{Z} : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$\tilde{\mathrm{Z}} := \mathrm{Z} - \sum_{j=0}^{n-1} c_j V_j$$

并注意到，Z 是 $\mathcal{K}^n$ 上的连续、平移不变且旋转不变的赋值。此外，Z 是简单的，因为 Z 在 $\mathcal{K}(E)$ 上为零，因此，由于其平移不变性和旋转不变性，Z 在所有包含于某个仿射超平面的凸体上也为零。利用命题 5.2，我们得到存在常数 $c_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K) = c_n V_n(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 均成立。证明至此完成。 □

5.1. 平均宽度的刻画。对于 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，K 沿方向 u 的支撑函数为

$$h_K(u) = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle$$

K 沿方向 u 的宽度为 $h_K(u) + h_K(-u)$。对于式 (2.5) 中定义的内在体积 V_1，我们有

$$V_1(K) = \frac{1}{2\,\kappa_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (h_K(u) + h_K(-u))\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(u),$$

因此，$V_1(K)$ 与 K 的平均宽度成正比。

我们称凸体 M 为 $K \in \mathcal{K}^n$ 的旋转闵可夫斯基平均，若存在旋转 ϑ_1、……、$\vartheta_m \in \mathrm{SO}(n)$，使得

$$M = \frac{1}{m}\big(\vartheta_1 K + \cdots + \vartheta_m K\big).$$

我们需要以下由 Hadwiger [39, 第 4.5 节3]给出的结果。

定理 5.3. 对每个 $K \in \mathcal{K}^n$，都存在一个 K 的旋转闵可夫斯基平均序列，该序列收敛到一个中心球。

我们指出，

$$y \mapsto \int_{\mathrm{SO}(n)} h_{\vartheta K}(y)\, \mathrm{d}\vartheta$$

是与 K 相关联的中心球的支撑函数，其中积分是关于 $\mathrm{SO}(n)$ 上的 Haar 概率测度进行的。因此，可以通过适当的离散化得到定理 5.3 中的序列。完整证明可参见例如 [72, 定理 3.3.5]。

定理 5.4（Hadwiger）。泛函 $\mathrm{Z}: \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 连续、平移不变、旋转不变且闵可夫斯基可加，当且仅当存在一个常数 $c \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(K) = c\, V_1(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$。

证明。对于 $K \in \mathcal{K}^n$，定理 5.3 蕴含存在一个由 K 的旋转闵可夫斯基平均组成的序列 (K_j)，其中 $K_j \to rB^n$，rB^n 是半径为 r 的中心球，且 r 依赖于 K。由于每个 K_j 都具有如下形式

$$K_j = \frac{1}{m}\big(\vartheta_1 K + \cdots + \vartheta_m K\big)$$

对于适当的旋转 ϑ_1、……、ϑ_m，由于 Z 是旋转不变、闵可夫斯基可加且 1 次齐次的，我们有 $\mathrm{Z}(K_j) = \mathrm{Z}(K)$。Z 的连续性蕴含

$$\mathrm{Z}(K) = \lim_{j\to\infty} \mathrm{Z}(K_j) = \mathrm{Z}(rB^n) = r\,\mathrm{Z}(B^n).$$

第一内在体积 V_1 连续，且具有平移不变性、旋转不变性和闵可夫斯基可加性。因此，我们还有 $V_1(K) = r\, V_1(B^n)$。结合起来可得 $\mathrm{Z}(K) = c\, V_1(K)$，其中 $c = \mathrm{Z}(B^n)/V_1(B^n)$。□

5.2. 命题 5.2 的证明。我们对维数 n 使用归纳法。由命题 3.2 可知，该陈述在 $n = 1$ 时成立。

设 $n \geq 2$，并假设该结论对定义在 $\mathcal{K}^k$ 上、适用于 $1 \leq k \leq n-1$ 的赋值成立。设 E 和 F 为正交互补子空间，且 $\dim E = k$ 和 $\dim F = n-k$。若固定 F 中的一个凸体 K_F，则泛函

$$K_E \mapsto \mathrm{Z}(K_E + K_F)$$

根据引理 2.1，$\mathcal{K}(E)$ 是一个赋值，显然它是简单且连续的。此外，它在 E 中对平移和旋转不变。因此，根据归纳假设，存在 $c(K_F) \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(K_E + K_F) = c(K_F)\, V_k(K_E)$$

对每个 $K_E \in \mathcal{K}(E)$ 都成立。由引理 2.1 可知，$c: \mathcal{K}(F) \to \mathbb{R}$ 是一个赋值，显然它是简单、连续的，且具有平移不变性和旋转不变性。因此，根据归纳假设，存在 $c_k \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(K_E + K_F) = c_k V_{n-k}(K_F)\, V_k(K_E) \tag{5.1}$$

对每个 $K_E \in \mathcal{K}(E)$ 和 $K_F \in \mathcal{K}(F)$ 都成立。由于 Z 在平移和旋转下不变，式 (5.1) 对任意正交互补子空间 E 和 F 中的凸体 K_E 和 K_F 均成立，其中 $\dim E = k$。在单位立方体上求值可得，$c_1 = \cdots = c_{n-1} =: c$。

定义 $\tilde{\mathrm{Z}}: \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ 倍

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K) = \mathrm{Z}(K) - c\, V_n(K).$$

˜注意，Z 是一种简单、连续、平移不变且旋转不变的赋值，在正交圆柱上取值为零。根据命题 4.4，它是 1 次齐次的；根据推论 4.9，它是闵可夫斯基可加的。利用定理 5.4，我们得到存在常数 $d \in \mathbb{R}$，使得

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K) = d\, V_1(K)$$

˜对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 都成立。由于 Z 是简单的且 $n \geq 2$，我们得到 $d = 0$，由此完成定理的证明。□

5.3. 在 O(n) 的子群作用下不变的赋值。对于在正交群 O(n) 的子群作用下不变的赋值，Alesker [1,3] 得到了以下结果。

定理 5.5（Alesker）。对于 O(n) 的紧子群 G，如果且仅如果 G 在 $\mathbb{S}^{n-1}$上作用传递，则 $\mathcal{K}^n$ 上连续、平移且 G 不变赋值的线性空间是有限维的。

由于这类子群的分类 G 已知，因此，为所有这类子群寻找连续、平移且 G 不变赋值空间的基，是一项自然的任务（这一任务已在 [1]中提出）；有关部分成果参见 [2, 10, 12]。

5.4. Hadwiger 定理的一个应用。以下结果是主运动学公式的一个特殊情形，该公式归功于 Blaschke、Chern、Federer 和 Santal´o（参见 [41, 73]）。我们对 SO(n) $\ltimes \mathbb{R}^n$上的 Haar 测度进行积分，并选择归一化方式，使得在 SO(n) 上采用 Haar 概率测度，而平移则与配备标准 Lebesgue 测度的 $\mathbb{R}^n$ 相对应。

定理 5.6. 对于 $K, L \in \mathcal{K}^n$,

$$\int_{\phi\in \mathrm{SO}(n)\ltimes\mathbb{R}^n} V_0(K\cap \phi L)\,\mathrm{d}\phi = \sum_{i=0}^{n} \frac{\kappa_i\,\kappa_{n-i}}{\binom{n}{i}\,\kappa_n}\, V_i(K)\, V_{n-i}(L).$$

证明. 对于 $K, L \in \mathcal{K}^n$, 令

$$\mathrm{Z}(K,L) := \int_{\phi\in \mathrm{SO}(n)\ltimes\mathbb{R}^n} V_0(K\cap \phi L)\,\mathrm{d}\phi.$$

对于 $L \in \mathcal{K}^n$, 容易看出， $K \mapsto \mathrm{Z}(K, L)$ 是定义在 $\mathcal{K}^n$ 上的连续、平移不变且旋转不变的赋值。由定理 5.1，存在 $c_0(L)$ ..., $c_n(L) \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Z}(K,L) = \sum_{j=0}^{n} c_j(L) V_j(K)$$

对于每个 $K, L \in \mathcal{K}^n$。给定 $K \in \mathcal{K}^n$，泛函 $L \mapsto \mathrm{Z}(K, L)$ 也是定义在 $\mathcal{K}^n$ 上的连续、平移不变且旋转不变的赋值。结合内在体积的齐次性可知，对于 $0 \le j \le n$，每个映射 $L \mapsto c_j(L)$ 也都是连续、平移不变且旋转不变的赋值。由定理 5.1，存在 $c_{0j}, \ldots, c_{nj} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Z}(K,L) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} V_i(K)\, V_j(L)$$

对于每个 $K, L \in \mathcal{K}^n$。常数 c_{ij} 可通过对适当的凸体 K 和 L代入此公式来确定。□

6. 函数空间上的赋值

我们将把赋值从凸体空间（的子集）扩展并推广到函数空间。令 $F(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有实值函数构成的空间。

6.1. 定义。将凸体集合 $\mathcal{K}^n$ 表示在 $F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})$ 中的一种方法是，为每个体 $K\in\mathcal{K}^n$ 指定其特征函数 $\chi_K\in F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})$，其定义为

$$\chi_K(x)=\begin{cases}1 & \text{for } x\in K\\ 0 & \text{for } x\notin K.\end{cases}$$

利用这一嵌入，我们为每个泛函 $\mathrm{Z}:\,F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 指定泛函 $\mathrm{Z}:\,\mathcal{K}^n\to\mathbb{R}$，定义为

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K):=\mathrm{Z}(\chi_K)$$

对每个 $K\in\mathcal{K}^n$。

现在我们要问，Z 需要满足哪些条件才能成为赋值。根据 Z 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}(\chi_K)+\mathrm{Z}(\chi_L)&=\tilde{\mathrm{Z}}(K)+\tilde{\mathrm{Z}}(L)\\&=\tilde{\mathrm{Z}}(K\cap L)+\tilde{\mathrm{Z}}(K\cup L)\\&=\mathrm{Z}(\chi_{K\cap L})+\mathrm{Z}(\chi_{K\cup L})\\&=\mathrm{Z}(\chi_K\wedge\chi_L)+\mathrm{Z}(\chi_K\vee\chi_L)\end{aligned}$$

对每个 K、$L\in\mathcal{K}^n$，只要同时满足 $K\cup L\in\mathcal{K}^n$。这里，$f\vee g$ 和 $f\wedge g$ 分别表示 f、$g\in F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})$ 的逐点最大值和最小值。这引出了下面的定义。

定义6.1. 设 $X\subseteq F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})$。映射 $\mathrm{Z}:\,X\to\mathbb{R}$ 是一个赋值，如果

$$\mathrm{Z}(f)+\mathrm{Z}(g)=\mathrm{Z}(f\wedge g)+\mathrm{Z}(f\vee g)$$

对于每个 $f,g\in X$，还满足 $f\wedge g,f\vee g\in X$。

类似地，可以定义取值于任意阿贝尔半群的赋值。例如，向量值、矩阵值、测度值赋值，甚至闵可夫斯基赋值；后者是取值于配备闵可夫斯基加法的凸体空间中的赋值。

我们指出，在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数空间中表示凸体有多种方式。对于许多此类表示，函数的逐点最大值和最小值分别对应于凸体的并集和交集。将上述步骤重复应用于 $\mathcal{K}^n$ 到 $F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})$ 的其他嵌入，可得到在（$F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})$ 的子集上的）赋值的相同定义。

6.2. 首批例子。与凸体上的赋值一样，对于任意$X\subseteq F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R})$，最简单的赋值 $\mathrm{Z}:\,X\to\mathbb{R}$ 具有如下形式：$\mathrm{Z}(f)=c$，其中 $c\in\mathbb{R}$。不难验证这定义了一个赋值，尽管它可能不是最有趣的例子。

接下来，令 $X\subseteq\{f\in F(\mathbb{R}^n;\,\mathbb{R}):|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,\mathrm{d}x|<\infty\}$，其中我们考虑勒贝格积分。定义 $\mathrm{Z}:\,X\to\mathbb{R}$为

$$\mathrm{Z}(f):=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们断言 Z 是一个赋值。令 $f,g\in X$。由于 $\mathbb{R}^n$ 可以表示为不相交并集

$$\mathbb{R}^n=\{f\geq g\}\sqcup\{f<g\},$$

其中 $\{f \geq g\} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \geq g(x)\}$，且 $\{f < g\}$ 相应地定义，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}(f) + \mathrm{Z}(g) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\{f\geq g\}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{f<g\}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{f\geq g\}} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{f<g\}} g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\{f\geq g\}} (f\vee g)(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{f<g\}} (f\wedge g)(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\{f\geq g\}} (f\wedge g)(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\{f<g\}} (f\vee g)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f\vee g)(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} (f\wedge g)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Z}(f\vee g) + \mathrm{Z}(f\wedge g).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

注意，这种赋值通常起到体积的作用。例如，Pr´ekopa–Leindler 不等式是布伦–明可夫斯基不等式的函数版本，其中子集 $\mathbb{R}^n$ 上通常的 n 维体积被函数的积分所取代（例如，参见 [36]）。

适当函数空间上的其他赋值包括映射 $f \mapsto f(\bar{x})$（其中 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 固定）、 L_p 范数的 p 次幂、矩量矩阵、费舍尔信息矩阵或 LYZ 体。更多详情请参见 [9, 50, 52, 77, 78, 80]。

6.3. 结果简述。定义几何概念的解析类比当然不是新问题（例如，参见 [7, 第 9] 章和 [72, 第 9.5 节及第 10.15] 节）。本节聚焦于这样一些结果：在函数空间上找到了几何学中重要赋值的类比。

综述 [51] 介绍了函数空间上赋值的一些早期结果。其中包括 Tsang 对 L_p 空间和 L_p 星体上赋值的刻画 [77, 78], , 以及对矩量矩阵 [53], 费舍尔信息矩阵 [50], LYZ体及其投影体的刻画 [52]。接下来，我们将简要概述一些未收录于 [51]中的结果。

6.3.1. 拟凹函数。若一个实值函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负，且其超水平集

$$\{f \geq t\} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \geq t\},$$

对每个 $t > 0$而言，要么为空，要么是凸体，则称其为拟凹函数。将内在体积从凸体推广到拟凹函数的一种自然方法，是针对适当测度，对给定函数的水平集的内在体积进行积分。以下结果证明于 [22]。

定理 6.2. 映射 Z 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上拟凹函数空间上的刚体运动不变、连续且单调递增的赋值，当且仅当存在测度 $\nu_i \in \mathcal{N}_i$，对 $0 \leq i \leq n$ 满足

$$\mathrm{Z}(f) = \sum_{i=0}^{n} \int_{[0,\infty)} V_i(\{f \geq t\})\,\mathrm{d}\nu_i(t)$$

对每个准凹函数 $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。

这里，若满足以下条件，则称 Z 为刚体运动不变：

$$\mathrm{Z}(f \circ \phi^{-1}) = \mathrm{Z}(f)$$

对每个拟凹的 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 以及每个刚体运动 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。若 $f \le g$ 按点成立，则 $\mathrm{Z}(f) \le \mathrm{Z}(g)$，称其为单调递增。关于 $[0,\infty$ 上拉东测度的类 $\mathcal{N}_i$ 的精确定义，以及定理 6.2 中使用的拓扑，请参阅 [22]。

在 [23] 中证明了一个关于拟凹函数赋值的齐次分解定理，该定理对应于定理 4.6；此外，还证明了定理 4.10 的一个泛函类似物。在下一节中，我们将讨论通过上水平集定义的凸函数上的赋值。

6.3.2. 凸函数。最近，关于各种凸函数空间上的赋值的首批结果已经取得。 [21] 首先对强制凸函数空间 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上的赋值进行了分类（定义见第 7.1 节）。 [25]，建立了欧拉示性数和 n 维体积作为 $\mathrm{SL}(n)$ 不变赋值的刻画；我们将在下一节证明这一结果的一个特殊情形。另见 [66, 67]。

此外， [24] 还研究了闵可夫斯基赋值，并得到了差体和投影体的泛函类似物的刻画。前一项结果如下。

定理 6.3. 映射 Z : 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}^n$ 是连续、递减、平移不变且 $\mathrm{SL}(n)$ 协变的闵可夫斯基赋值，当且仅当存在一个连续、递减的 $\zeta\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$，满足$\int_0^\infty \zeta(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$，使得

$$\mathrm{Z}(u) = D[\zeta \circ u]$$

对每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$,

此处，若 $u \le v$ 逐点成立，则 $\mathrm{Z}(v) \subseteq \mathrm{Z}(u)$，称映射 Z : 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}^n$ 为递减映射。若对每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$和 $\phi \in \mathrm{SL}(n)$，都有 $\mathrm{Z}(u \circ \phi^{-1}) = \phi\mathrm{Z}(u)$，则称其为 $\mathrm{SL}(n)$ 协变。凸体 $[\zeta \circ u] \in \mathcal{K}^n$ 由其支撑函数给出，对于 $y \in \mathbb{S}^{n-1}$，该函数为

$$h([\zeta \circ u], y) := \int_0^\infty h(\{\zeta \circ u \ge t\}, y)\,\mathrm{d}t,$$

并且 $DK := K + (-K)$表示凸体 $K \in \mathcal{K}^n$的差体。关于凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$上算子的连续性定义，参见第 7.1 节。

6.3.3. 定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数。关于单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上实值函数空间上的赋值，已有各种结果。这类函数尤其值得关注，因为它们会作为星体或更一般的星形集的径向函数出现。在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的正连续函数集合 $C(\mathbb{S}^{n-1})^+$ 上的赋值结果，等价于关于星体上赋值的结果。以下结果最初在 [75, 79] 中作为关于星体上赋值的结果得到。

定理 6.4. 映射 $\mathrm{Z}\colon C(\mathbb{S}^{n-1})^+ \to \mathbb{R}$ 是连续且旋转不变的赋值，当且仅当存在连续函数 $\zeta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(f) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \zeta(f(x))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

对每个 $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})^+$ 均成立。

这里，如果 Z 具有旋转不变性，则有
yxəa

$$\mathrm{Z}(f \circ \phi^{-1}) = \mathrm{Z}(f)$$

对每个 $f \in C(\mathbb{S}^{n-1})^+$ 以及每个 $\phi \in \mathrm{SO}(n)$ 都成立时，Z 是旋转不变的；Z 的连续性是指函数关于一致收敛的连续性。

该领域的其他研究成果包括：对 $C(\mathbb{S}^{n-1})^+$ 上不具有额外不变性的连续赋值进行刻画，以及对 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的 Lipschitz 函数空间上的赋值进行刻画（见 [32,33, 76]）。

6.3.4. L_p 空间。 [47] 中将拉普拉斯变换刻画为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的子空间上的赋值。在 [69] 中，研究者对 $p \geq 1$ 的 L_p 空间上的闵可夫斯基赋值进行了分类。这推广了 Tsang [78] 的先前结果。[60] 中给出了索伯列夫空间上关于平移和 SL(n) 不变赋值的分类。

6.3.5. 可定义函数。 [9]中给出了可定义函数上的赋值的 Hadwiger 型分类。在这里，定义在 $\mathbb{R}^n$上的各种有界实值函数（其空间通常相当大）称为可定义函数。关于使用所谓 o-极小系统的精确定义，请参阅 [9]。

[9] 的作者运用积分几何和阶梯函数近似，找到了内在体积在可定义函数上的泛函扩展。虽然这些泛函的构造过于技术化，无法在此重现，但我们指出，体积的泛函类似物具有如下形式

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(f(x))\, \mathrm{d}x,$$

其中 $\zeta\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个适当的函数。

此外， [9], 中还为可定义函数引入了两种不同的拓扑，并证明这些内在体积的新函数版本是连续的。随后，这些泛函被刻画为函数空间上唯一的连续、刚体运动不变赋值。

例如，文献 [8] 描述了欧拉示性数的泛函类似物在传感器网络中的应用。

7. 凸函数上的赋值的初步分类

关于凸函数上的赋值 [25] 的首批结果之一，刻画了欧拉示性数和 n 维体积的函数类比。这是定理 3.1 的函数版本。我们将证明该结果的一个特例。

7.1. 函数设定。我们记

$$\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n) := \{u : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty] \colon u \text{ is l.s.c. and convex}, u \not\equiv +\infty\}$$

$\mathbb{R}^n$ 上取扩展实值的下半连续凸真函数所构成的空间。我们主要研究其中由强制函数构成的子空间,

$$\mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n) \colon\ \lim_{|x|\to+\infty} u(x) = +\infty\right\}.$$

注意，函数 $u \in \in$凸函数空间$(\mathbb{R}^n)$ 是强制的，当且仅当存在 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 使得

$$u(x) \geq a|x| + b$$

对每个 $x \in \mathbb{R}^n$。

若 $u \in \in$凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$，则其次水平集

$$\{u \leq t\} := \{x \in \mathbb{R}^n \colon u(x) \leq t\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的紧凸子集，对每个 $t \in \mathbb{R}$均如此。我们有 $\{u \leq t\} = \varnothing$ 对每个 $t < \min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$均成立，并且 $\{u \leq t\} \in \mathcal{K}^n$ 对每个 $t \geq \min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$均成立。注意， u 能取得其最小值，因为它是下半连续且强制的。我们将看到，许多算子都可以利用次水平集推广到凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$。

容易看出

$$\{u \vee v \leq t\} = \{u \leq t\} \cap \{v \leq t\} \quad \text{and} \quad \{u \wedge v \leq t\} = \{u \leq t\} \cup \{v \leq t\} \tag{7.1}$$

对于每个 $u, v \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$，满足 $u \wedge v \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $t \in \mathbb{R}$。另外，请注意，尽管 u 的定义域

$$\operatorname{dom} u := \{x \in \mathbb{R}^n \colon u(x) < +\infty\},$$

是凸的，但不一定有界或闭。

我们赋予凸函数空间$(\mathbb{R}^n)$及其子空间 epi-收敛（也称为Γ-收敛）所对应的拓扑。关于这一主题的标准参考文献，可参见著作 [18, 34, 70]。

在凸函数空间$_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$上，epi-收敛序列有如下简单描述。紧凸集的收敛是相对于豪斯多夫度量而言的；若对于任意 $j \geq j_0$，都有某个 $j_0 \in \mathbb{N}$使得 K_j，则集合序列收敛到空集。

定义 7.1。若对于每个 $t \neq \min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$， $u_k \in \mathrm{Conv}_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$都收敛到 $\{u \leq t\}$，则称序列 epi-收敛到 $u \in \mathrm{Conv}_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$。此时，我们简记为 $u_k \to u$。

请注意，一般而言，对于 $t_0 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)$， $\{u_k \leq t_0\}$ 并不收敛到 $\{u \leq t_0\}$。为说明这一点，任取$u \in \mathrm{Conv}_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$，并令 $u_k(x) := u(x) + \frac{1}{k}$，其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $k \in \mathbb{N}$。容易看出， u_k epi-收敛到 u，但是

$$\{u_k \leq t_0\} = \varnothing$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$，而 $\{u \leq t_0\} \neq \varnothing$。

虽然逐点收敛是许多函数空间上的一种良好选择，但在凸函数空间$_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$上会导致不理想的结果。为此，令

$$\mathbf{I}_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \in K \\ +\infty & \text{for } x \notin K, \end{cases}$$

表示 $K \in \mathcal{K}^n$ 的（凸）示性函数，其中 $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球。函数序列

$$u_k(x) := \mathbf{I}_{(1-\frac{1}{k})B^n}(x)$$

对 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{N}$，不在 $\{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| = 1\}$ 上逐点收敛到 $\mathbf{I}_{B^n}$，但它是 epi-收敛的。此外，epi-收敛几乎处处蕴含逐点收敛（例如，参见 [70, 定理 7.17]）。

定义 7.1 的一个简单推论是以下结果 [25, 引理 8]。

引理 7.2. 对于任意序列 $u_k \in$ 凸函数空间$_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$，若其 epi-收敛到某个 $u \in$ 凸函数空间$_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$，则存在 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$，使得

$$u_k(x) \geq a|x| + b \quad \textit{and} \quad u(x) \geq a|x| + b \tag{7.2}$$

对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $k \in \mathbb{N}$。

7.2. $\mathrm{Conv}_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上的赋值。我们按照定义 6.1 来定义 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$ 及其子空间上的赋值，此外还要求

$$t \vee +\infty = +\infty \quad \text{and} \quad t \wedge +\infty = t$$

对于任意 $t \in (-\infty, +\infty]$。

设 $\mathrm{Z} : \mathrm{Conv}_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个赋值。如果

$$\mathrm{Z}(u \circ \tau^{-1}) = \mathrm{Z}(u)$$

对于每个 $u \in \mathrm{Conv}_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 上的平移 τ 都成立，则称 Z 为平移不变。若

$$\mathrm{Z}(u \circ \vartheta^{-1}) = \mathrm{Z}(u)$$

对于每个 $u \in \mathrm{Conv}_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\vartheta \in \mathrm{SL}(n)$ 都成立。Z 的连续性是相对于 epi-收敛而言的。

请注意，在上述定义中，我们使用了作用于 $\mathbb{R}^n$ 上的变换的逆变换。这相当于将变换作用于次水平集，即，

$$\{u \circ \tau^{-1} \leq t\} = \tau\{u \leq t\} \quad \text{and} \quad \{u \circ \vartheta^{-1} \leq t\} = \vartheta\{u \leq t\} \tag{7.3}$$

对于每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\text{coe}}(\mathbb{R}^n)$， $t \in \mathbb{R}$，在 $\mathbb{R}^n$ 上的平移 τ 以及 $\vartheta \in \mathrm{SL}(n)$。

接下来，我们将介绍欧拉示性数和 n 维体积的泛函类似物。若 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 中的 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $u(x) = +\infty$，则令 $\mathrm{e}^{-u(x)} = 0$。

引理 7.3. 映射

$$u \mapsto \mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)} \tag{7.4}$$

and

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\,\mathrm{d}x \tag{7.5}$$

定义了连续的、SL(n) 不变且平移不变的赋值于 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上。

证明。我们首先考虑（7.5），并证明它是良定义且有限的。注意，由卡瓦列里原理（或结合富比尼–托内利定理的层蛋糕原理），有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} V_n(\{\mathrm{e}^{-u} \ge s\})\,\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} V_n(\{u \le t\})\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{7.6}$$

对于每个 $u \in \mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$。

首先考虑这样的情形：$u \in \mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $u(x) \ge a|x|$ 对 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $a > 0$。注意，这意味着

$$\{u \le t\} \subseteq \{x\colon a|x| \le t\} = \tfrac{t}{a}B^n$$

对每个 $t \ge 0$ 都成立。结合 (7.6)，可推出

$$\begin{aligned} 0 \le \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} V_n(\{u \le t\})\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^{+\infty} V_n\big(\tfrac{t}{a}B^n\big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\kappa_n}{a^n}\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\kappa_n n!}{a^n}. \end{aligned}$$

在一般情形下，存在 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 使得 $u(x) \ge a|x| + b$ 对 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立，因此，由于$u(x) - b \ge a|x|$ 对 $x \in \mathbb{R}^n$成立，我们有

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-b}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(u(x)-b)}\,\mathrm{d}x \le \kappa_n\mathrm{e}^{-b}\frac{n!}{a^n}. \tag{7.7}$$

(7.5) 定义了一个赋值这一事实，可由 (7.6) 和 (7.1) 以及 n- 维体积 V_n 是凸体上的赋值这一事实推出。类似地，利用 (7.3)，容易得到 SL(n) 不变性和平移不变性。赋值性质的证明与 (6.1) 类似。

剩下要证明连续性。设 u_k 是 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 中一个上图收敛到函数$u \in \mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 的序列。由引理 7.2，存在 $a > 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$ 使得 (7.2) 成立。因此，类似于 (7.7)，我们得到

$$0 \le \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u_k(x)}\,\mathrm{d}x \le \kappa_n\mathrm{e}^{-b}\frac{n!}{a^n}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。由于 n 维体积关于豪斯多夫收敛是连续的，我们有 $V_n(\{u_k \le t\}) \to V_n(\{u \le t\})$，当 $k \to \infty$ 对几乎每个 $t \in \mathbb{R}$ 都成立时。因此，根据控制收敛

收敛定理，我们得到

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u_k(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} V_n(\{u\le t\})\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\,\mathrm{d}x,$$

因此，(7.5) 是连续的。

为了确立 (7.4) 的性质，注意到

$$\mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)} = \int_{\min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0(\{u\le t\})\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

对于每个 $u\in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$。因此，很容易看出，可以应用与上述相同的论证。 □

上述证明展示了如何通过考虑映射，简单地找到算子 $\mathrm{Z}:\mathcal{K}^n\to\mathbb{R}$ 的函数类比

$$u\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Z}(\{u\le t\})\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

在凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上，其中我们令 $\mathrm{Z}(\varnothing):=0$。事实上，在许多情况下，这将定义一个作用于凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 的算子，并具有与原算子 Z 相似的性质。更一般地，通常可以用适当测度 $\mathrm{d}\mu(t)$ 替换 $\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$。一些例子见 [15, 65]。

7.3. Blaschke结果的一个泛函类比。与Blaschke对欧拉示性数和体积的刻画（定理 3.1）类似，我们可以刻画上一节中引入的它们的泛函类似物。

我们将证明以下结果。

定理 7.4. 对于 $n\ge 2$，映射 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是一个连续的、SL(n)不变且平移不变的赋值，并满足

$$\mathrm{Z}(u+t) = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{Z}(u) \tag{7.8}$$

对每个 $u\in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $t\in\mathbb{R}$，当且仅当存在常数 $c_0, c_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Z}(u) = c_0\,\mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)} + c_n\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\,\mathrm{d}x \tag{7.9}$$

对每个 $u\in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$。

我们指出，若省略条件 (7.8)，分类结果中会出现额外的赋值[25, 66, 67]。然而，所有已知的此类结果的证明都比定理 7.4 的证明复杂得多；我们将在此给出后者的证明。

注意，如果考虑对数凹函数空间上的相应结果，式 (7.8) 就显得更加自然，

$$\mathrm{LC}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) = \{\mathrm{e}^{-u}\colon u\in \mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)\}.$$

$\mathrm{LC}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上赋值的性质，类似地定义为 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上赋值的相应性质。以下结果等价于定理 7.4，是由 [68, 定理 4]得出的。

定理 7.5. 对于 $n \geq 2$，映射 $\mathrm{Z} : \mathrm{LC}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续、$\mathrm{SL}(n)$ 不变且平移不变的赋值，使得

$$\mathrm{Z}(sf) = s\,\mathrm{Z}(f)$$

对于每个 $f \in \mathrm{LC}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $s > 0$，当且仅当存在常数 $c_0, c_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Z}(f) = c_0 \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

对于每个 $f \in \mathrm{LC}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$。

为了证明定理 7.4，我们先从以下简单的观察开始。对于 $K \in \mathcal{K}_o^n$，其中$\mathcal{K}_o^n = \{K \in \mathcal{K}^n\colon 0 \in K\}$，且 $x \in \mathbb{R}^n$，令

$$g_K(x) := \min\{\lambda > 0\colon x \in \lambda K\}.$$

那么 g_K 是 K 的规范函数或闵可夫斯基泛函。由于我们有 $0 \in K$，因此$g_K \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$，其中

$$\{g_K \leq t\} = tK$$

对每个 $t \geq 0$ 和 $\{g_K \leq t\} = \varnothing$，对每个 $t < 0$。

引理 7.6. 设 $n \geq 2$。若 Z : 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续且关于 $\mathrm{SL}(n)$ 不变的赋值，并满足 (7.8)，则存在常数 c_0、$c_n \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(g_K + t) = c_0\,\mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n}(g_K(x)+t)} + c_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(g_K(x)+t)}\,\mathrm{d}x$$

对每个 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$。

证明。由于

$$g_K \vee g_L = g_{K\cap L} \quad \text{and} \quad g_K \wedge g_L = g_{K\cup L}$$

对每个 K、$L \in \mathcal{K}_o^n$，使得 $K \cup L \in \mathcal{K}_o^n$，且 K_j 在 $\mathcal{K}_o^n$ 上收敛到 K 意味着

$$g_{K_j} \to g_K,$$

容易看出

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K) := \mathrm{Z}(g_K)$$

˜在 $\mathcal{K}_o^n$ 上定义了一个连续赋值。此外，由于 Z 在 $\mathrm{SL}(n)$ 下不变，Z 也具有这一性质。因此，由定理 3.6 可知，存在 $\tilde{c}_0, \tilde{c}_n \in \mathbb{R}$，使得

$$\tilde{\mathrm{Z}}(K) = \tilde{c}_0 V_0(K) + \tilde{c}_n V_n(K)$$

˜对每个 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 均成立。注意，这还意味着 Z 是平移不变的，而这一点从其定义中并不明显。接下来，观察到

$$\mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n}(g_K(x)+t)} = \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} V_0(K)$$

and

$$\frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(g_K(x)+t)}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{n!}\int_0^\infty V_n(sK)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-t} V_n(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$均成立，其中我们使用了与（7.6）中类似的计算。现在令 $c_0 := \tilde{c}_0$ 和 $c_n := \tilde{c}_n/n!$ ，即可得到结果，因为

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}(g_K + t) &= \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{Z}(g_K) \\ &= \mathrm{e}^{-t}\,\tilde{\mathrm{Z}}(K) \\ &= \tilde{c}_0\,\mathrm{e}^{-t} V_0(K) + \tilde{c}_n \mathrm{e}^{-t} V_n(K) \\ &= c_0\,\mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n}(g_K(x)+t)} + c_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(g_K(x)+t)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

对每个 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$。 □

我们将使用以下约化原理，该原理最初是在 [52] 中针对索伯列夫空间上的赋值建立的。为简单起见，我们将在一维情形下给出证明，并指出将其推广到高维是显而易见的。例如，参见 [66, 引理 5.1]。

引理 7.7. Let $\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2 : 凸函数空间_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 为连续的平移不变赋值。若

$$\mathrm{Z}_1(g_P + t) = \mathrm{Z}_2(g_P + t) \tag{7.10}$$

对每个多胞体$P \in \mathcal{P}_o^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$，则

$$\mathrm{Z}_1(u) = \mathrm{Z}_2(u)$$

对于每个 $u \in 凸函数空间_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$。

证明 $n = 1$。由于赋值 Z_1 和 Z_2 连续，只需考虑满足以下条件的情形：$u \in 凸函数空间_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$

$$u = \bigwedge_{i=1}^{m} w_i$$

其中仿射函数为 $w_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。此外，我们还可以假设 u 的图像没有与坐标轴平行的棱。我们将对 u的图像的顶点数 k 使用归纳法。

若 $k = 1$，则 u 必为如下形式

$$u(x) = g_P(x - x_0) + t$$

对于某个多胞体 $P \in \mathcal{P}_o^n$, $t \in \mathbb{R}$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}$。因此，由平移不变性和 (7.10) 可得 $\mathrm{Z}_1(u) = \mathrm{Z}_2(u)$。

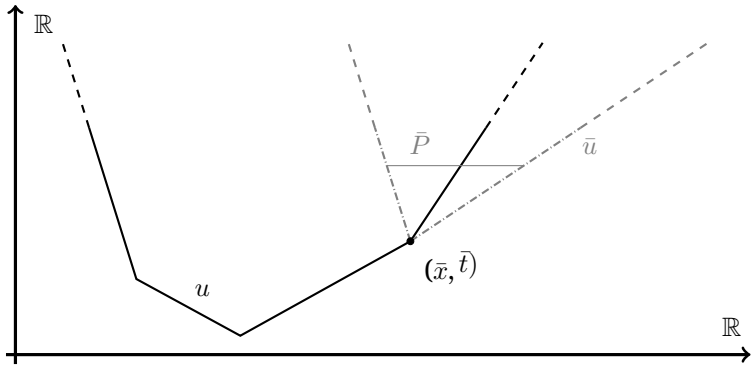

图4. $k = 3$情形下 u 和 $\bar{u}$ 的示意图。

现在假设该命题对 $k-1$ 成立，且 u 的图像有 k 个顶点。记 $(\bar{x},\bar{t}) \in \mathbb{R}^2$ 为其中一个最高顶点。容易看出，我们可以找到一个多胞体 $\bar{P} \in \mathcal{P}_o^n$，使得

$$\text{the graph of } u \wedge \bar{u} \text{ has } k-1 \text{ vertices},$$

where $\bar{u} \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$由 $\bar{u}(x) := g_{\bar{P}}(x-\bar{x}) + \bar{t}$ 给出，其中 $x \in \mathbb{R}^n$。见图4 .

由于 $u \vee \bar{u}$ 的图像只有一个顶点，由归纳假设和赋值性质可知

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_1(u) &= \mathrm{Z}_1(u \vee \bar{u}) + \mathrm{Z}_1(u \wedge \bar{u}) - \mathrm{Z}_1(\bar{u}) \\ &= \mathrm{Z}_2(u \vee \bar{u}) + \mathrm{Z}_2(u \wedge \bar{u}) - \mathrm{Z}_2(\bar{u}) \\ &= \mathrm{Z}_2(u), \end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

现在我们可以继续证明分类结果。

定理 7.4 的证明。如果 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 如 (7.9) 中所述，则由引理 7.3 可知，Z 是一个连续的、$\mathrm{SL}(n)$ 不变且平移不变的赋值。此外，容易看出它满足 (7.8)。

反之，设 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续、平移不变且在 $\mathrm{SL}(n)$ 下不变的赋值，并满足 (7.8)。根据引理 7.6，存在 $c_0, c_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathrm{Z}(g_K + t) = c_0\, \mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n}(g_K(x)+t)} + c_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(g_K(x)+t)}\, \mathrm{d}x$$

对每个 $K \in \mathcal{K}_o^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$都成立。现在定义 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 如下:

$$\bar{\mathrm{Z}}(u) := c_0\, \mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n} u(x)} + c_n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\, \mathrm{d}x.$$

根据证明的第一部分，这是一个连续且平移不变的赋值，并且对每个 $P \in \mathcal{P}_o^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$，都有 $\mathrm{Z}(g_P+t) = \mathrm{Z}(g_P + t)$。由引理 7.7 即得结论。□

7.4. 齐次性。对于 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\lambda > 0$，定义 $\lambda \odot u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 如下:

$$\lambda \odot u(x) := u\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

对 $x \in \mathbb{R}^n$。此定义的动机在于，对于 $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\lambda \odot u \le t\} = \lambda\{u \le t\}.$$

对于 $p \in \mathbb{R}$，若算子 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为水平 p-齐次:

$$\mathrm{Z}(\lambda \odot u) = \lambda^p\, \mathrm{Z}(u)$$

对每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$以及 $\lambda > 0$。

容易看出， $u \mapsto \mathrm{e}^{-\min_{x\in\mathbb{R}^n} u_{(x)}}$ 是水平方向 0 次齐次的，而 $u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-u(x)}\, \mathrm{d}x$ 是水平方向 n 次齐次的。人们或许会希望，类似于 McMullen 关于 $\mathcal{K}^n$ 上赋值的分解定理（定理 4.6 ），$\mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上每个连续平移不变赋值都可以写成若干水平方向齐次赋值之和。然而，这样的结论并不成立， [27, 定理 1.2], 中构造了反例，并研究了以下几类泛函。对于 $\zeta \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, 即 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$上具有紧支撑的连续函数空间，考虑

$$u \mapsto \int_{\mathrm{dom}\, u} \zeta(u(x), \nabla u(x))\, \mathrm{d}x,$$

由于凸函数在其定义域的内部几乎处处可微，因此该式定义良好。更一般的例子可以写成

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(u(x), \nabla u(x))\, [\mathrm{D}^2 u(x)]_i \, \mathrm{d}x, \tag{7.11}$$

此外，若 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$。这里，$\mathrm{D}^2 u(x)$表示 u 在 $x \in \mathbb{R}^n$ 处的海森矩阵，而 $[\mathrm{D}^2 u(x)]_i$表示其特征值的第 i个初等对称函数，其中 $0 \le i \le n$。我们指出，(7.11)可以推广到一般的 $u \in$ 凸函数空间 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$，其中本质上 $[\mathrm{D}^2 u(x)]_i \, \mathrm{d}x$ 由所谓的海森测度取代。上述例子都是连续且平移不变的。不过，由于它们依赖于凸函数的梯度，因此对于所有 $\zeta \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$，都无法将其分解为齐次项（详情参见 [27] ）。尽管如此，我们将在第 8.2 节建立定理 4.6 的一个函数类比。

8. 超强制凸函数上的赋值

为了得到齐次分解定理，我们将把范围限制在更小的超强制凸函数空间，并将注意力从次水平集转向上图集。

8.1. 定义与首批示例。我们考虑超强制凸函数空间，

$$\mathrm{Conv}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) := \Big\{ u \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n) \colon \lim_{|x| \to +\infty} \frac{u(x)}{|x|} = +\infty \Big\}.$$

显然，凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$是凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$的子空间。注意，对于可微的 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，性质

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{u(x)}{|x|} = +\infty$$

意味着同样有

$$\lim_{|x| \to +\infty} |\nabla u(x)| = +\infty. \tag{8.1}$$

超强制凸函数空间以下述方式与有限值凸函数空间密切相关，

$$\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) := \{ v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon v \text{ is convex} \}.$$

回忆一下，勒让德变换定义在 $u \in$ 凸函数空间$(\mathbb{R}^n)$上，其定义为

$$u^*(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \big(\langle x, y \rangle - u(y) \big)$$

对于 $x \in \mathbb{R}^n$。根据勒让德变换的标准性质，我们现在有

$$\{ u^* \colon u \in \mathrm{Conv}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \} = \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}). \tag{8.2}$$

这一关系使我们能够轻松地将关于 $\mathrm{Conv}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$ 上赋值的结果转换为关于 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ 上赋值的结果，反之亦然。

赋值 $\mathrm{Z}\colon \mathrm{Conv}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 若除了具有通常的平移不变性之外，还具有垂直方向上的平移不变性，即满足

$$\mathrm{Z}(u \circ \tau^{-1} + \alpha) = \mathrm{Z}(u)$$

对于每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，平移 τ 于 $\mathbb{R}^n$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$。注意，这意味着 Z 在 $\mathbb{R}^{n+1}$中对 u 上图的平移保持不变，其中 u 的上图定义为

$$\operatorname{epi} u := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon u(x) \le t\}$$

并且对于每个 $u \in$ 凸函数空间$(\mathbb{R}^n)$，它都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的闭凸子集。

对于 u、$v \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，令

$$(u \,\square\, v)(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \big(u(x-y) + v(y)\big)$$

表示它们在 $x \in \mathbb{R}^n$处的下确界卷积。注意，$u \,\square\, v \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\operatorname{epi}(u \,\square\, v) = \operatorname{epi} u + \operatorname{epi} v,$$

其中，右侧的加法是 $\mathbb{R}^{n+1}$中闭凸集的闵可夫斯基加法。下确界卷积也称为上图加法。它自然地引出以下运算。对于 $\lambda > 0$ 和$u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，定义 $\lambda \cdot u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$为

$$(\lambda \cdot u)(x) := \lambda \cdot u\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

对 $x \in \mathbb{R}^n$。此外，令 $0 \cdot u := \mathrm{I}_{\{0\}}$。容易看出

$$\operatorname{epi}(\lambda \cdot u) = \lambda \operatorname{epi} u$$

对每个 $\lambda > 0$ 和 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，并且

$$k \cdot u = \underbrace{u \,\square \cdots \square\, u}_{k \text{ times}}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$和 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$。

对于 $p \in \mathbb{R}$，赋值 $\mathrm{Z}\colon$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 若满足以下条件，则称为次数为 p 的上图齐次赋值:

$$\mathrm{Z}(\lambda \cdot u) = \lambda^p \mathrm{Z}(u)$$

对每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\lambda > 0$。我们将给出两个定义在凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$上的连续、上图齐次且上图平移不变赋值的例子。

首先，容易看出，对 $c \in \mathbb{R}$，常值映射 $u \mapsto c$ 定义了一个连续、上图平移不变且次数为 0 的上图齐次赋值。事实上，它是唯一具有这些性质的赋值（见 [28, 定理 25]）。

接下来，令 $\zeta \in C_c(\mathbb{R}^n)$，也就是说，$\zeta$ 是连续且具有紧支集的。考虑映射

$$\mathrm{Z}(u) = \int_{\operatorname{dom} u} \zeta(\nabla u(x))\, \mathrm{d}x \tag{8.3}$$

对于 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$。由 (8.1) 可知，至少可以合理地认为，对于每个$u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，Z($u$) 都是定义良好且有限的。另一方面，例子 $u(x) := |x|$ 表明，由 (8.3) 定义的 Z 在更大的空间 凸函数空间$_{\mathrm{coe}}(\mathbb{R}^n)$ 上并非定义良好（有限）的映射。

我们将不加证明地陈述以下 [28, 命题 20] 中的结果。

引理 8.1。对于 $\zeta \in C_c(\mathbb{R}^n)$，映射

$$u \mapsto \int_{\operatorname{dom} u} \zeta(\nabla u(x))\, \mathrm{d}x$$

在 $\mathrm{Conv}_{sc}(\mathbb{R}^n)$ 上定义了一个连续且在上图平移下不变的赋值，它是 n 次上图齐次的。

我们指出，在该引理的证明中，考虑了映射

$$v \mapsto \int_{\operatorname{dom} v^*} \zeta(\nabla v^*(x))\, \mathrm{d}x$$

它定义在 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ 上，并由 (8.2) 可知定义良好。该映射可写为

$$v \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x)\, \mathrm{dMA}(v;x)$$

对于 $v \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$。这里，$\mathrm{MA}(v;\cdot)$ 是 v 的 Monge–Amp`ere 测度，它是定义在$\mathbb{R}^n$上的拉东测度，可通过将测度 $\det(\mathrm{D}^2 v(x))\,\mathrm{d}x$ 从 $C^2(\mathbb{R}^n)$ 连续延拓至 $\mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ 来定义。

式（8.3）中定义的赋值 Z，可以看作是将凸体上的 n 维体积进一步推广到凸函数上的结果。事实上，我们有

$$\mathrm{Z}(\mathbf{I}_K) = \int_K \zeta(0)\, \mathrm{d}x = \zeta(0) V_n(K) \tag{8.4}$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$均成立。另见第 8.4 节。

8.2. 齐次分解定理。我们将证明定理 4.6 中齐次分解定理在 [28] 上的函数类比。

定理 8.2. 若 Z: 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续的上图平移不变赋值，则

$$\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_0 + \cdots + \mathrm{Z}_n$$

其中 Z_j: 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续的上图平移不变赋值，且其上图齐次次数为 j。

与定理 7.4 的证明类似，我们先证明该结论对一类受限函数成立，然后使用归约论证。对于 $y \in \mathbb{R}^n$，定义 $\ell_y \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得 $\ell_y(x) := \langle y, x\rangle$。

引理 8.3. 设 Z : 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续的、上图平移不变赋值。对每个$y \in \mathbb{R}^n$，映射 $\mathrm{Z}_y \colon \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$定义为

$$\tilde{\mathrm{Z}}_y(K) := \mathrm{Z}(\ell_y + \mathbf{I}_K),$$

是一个连续的平移不变赋值。

证明。连续性和赋值性质很容易得到。对于平移不变性，注意到

$$\begin{aligned} \ell_y(x) + \mathbf{I}_{K+x_0}(x) &= \langle y, x\rangle + \mathbf{I}_K(x - x_0) \\ &= \langle y, x - x_0\rangle + \mathbf{I}_K(x - x_0) + \langle y, x_0\rangle \\ &= \ell_y(x - x_0) + \mathbf{I}_K(x - x_0) + \langle y, x_0\rangle \end{aligned}$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 以及 $x, x_0, y \in \mathbb{R}^n$ 都成立。换句话说， $\ell_y + \mathbf{I}_{K+x_0}$ 的上图是 $\ell_y + \mathbf{I}_K$ 的上图的一个平移。因此，根据 Z 的上图平移不变性，我们现在得到

$$\tilde{\mathrm{Z}}_y(K + x_0) = \mathrm{Z}(\ell_y + \mathbf{I}_{K+x_0}) = \mathrm{Z}(\ell_y + \mathbf{I}_K) = \tilde{\mathrm{Z}}_y(K)$$

对于每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $x_0, y \in \mathbb{R}^n$。 □

接下来，我们利用定理 4.6 证明定理 8.2 对于形如 $\ell_y + \mathbf{I}_K$ with $y \in \mathbb{R}^n$ and $K \in \mathcal{K}^n$ 的函数成立。

引理 8.4. 若 $\mathrm{Z} : \text{凸函数空间}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续且上图平移不变的赋值，则对于每个 $u = \ell_y + \mathbf{I}_K$ with $y \in \mathbb{R}^n$ and $K \in \mathcal{K}^n$,

$$\mathrm{Z}(u) = \mathrm{Z}_0(u) + \cdots + \mathrm{Z}_n(u)$$

其中 $\mathrm{Z}_i : \mathrm{Co}\ \mathrm{nv}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是一个连续且上图平移不变的赋值，使得 *at*

$$\mathrm{Z}_i(\lambda \cdot u) = \lambda^i \, \mathrm{Z}(u)$$

对每个 $\lambda \geq 0$ 和 $u = \ell_y + \mathbf{I}_K$，其中 $y \in \mathbb{R}^n$ 且 $K \in \mathcal{K}^n$。

˜ ˜证明。对于 $y \in \mathbb{R}^n$，定义 $\mathrm{Z}_y : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$，使得 $\mathrm{Z}_y(K) := \mathrm{Z}(\ell_y + \mathbf{I}_K)$。由引理 8.3 和定理 4.6 可知，对于每个 $y \in \mathbb{R}^n$，存在连续、平移不变且 i-齐次的˜赋值 $\mathrm{Z}_{y,\,i} : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$，对于 $0 \leq i \leq n$，使得

$$\tilde{\mathrm{Z}}_y(K) = \sum_{i=0}^{n} \tilde{\mathrm{Z}}_{y,i}(K)$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$。因此，

$$\mathrm{Z}(\lambda \cdot (\ell_y + \mathbf{I}_K)) = \mathrm{Z}(\ell_y + \mathbf{I}_{\lambda K}) = \tilde{\mathrm{Z}}_y(\lambda K) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i \, \tilde{\mathrm{Z}}_{y,i}(K)$$

对于每个 $K \in \mathcal{K}^n$、$y \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda \geq 0$，其中 $0^0 := 1$。令 $\lambda := j$，对每个 $0 \leq j \leq n$，于是我们得到

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Z}(0 \cdot (\ell_y + \mathbf{I}_K)) \\ \vdots \\ \mathrm{Z}(n \cdot (\ell_y + \mathbf{I}_K)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0^0 & \cdots & 0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^0 & \cdots & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{Z}}_{y,0}(K) \\ \vdots \\ \tilde{\mathrm{Z}}_{y,n}(K) \end{pmatrix}$$

对每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$。方程中的矩阵可逆，因为它是范德蒙德矩阵。用 $(\alpha_{ij})_{0 \leq i,\ j \leq n}$ 表示其逆矩阵，现在我们有

$$\tilde{\mathrm{Z}}_{y,i}(K) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} \, \mathrm{Z}(j \cdot (\ell_y + \mathbf{I}_K))$$

对于 $0 \leq i \leq n$ 以及每个 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$。由于系数 α_{ij} 独立于 $K \in \mathcal{K}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$，现在我们可以定义 $\mathrm{Z}_i : \text{凸函数空间}_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 为

$$\mathrm{Z}_i(u) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} \, \mathrm{Z}(j \cdot u)$$

对于每个 $0 \leq i \leq n$。由 Z 的性质很容易得出，泛函 Z_i 对于 $0 \leq i \leq n$ 也都是连续且在上图平移下不变的赋值。

我们现在有

$$\mathrm{Z}_i(\ell_y + \mathbf{I}_K) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} \, \mathrm{Z}(j \cdot (\ell_y + \mathbf{I}_K)) = \tilde{\mathrm{Z}}_{y,i}(K)$$

因此

$$\mathrm{Z}_i(\lambda\cdot(\ell_y+\mathbf{I}_K))=\mathrm{Z}_i(\ell_y+\mathbf{I}_{\lambda K})=\tilde{\mathrm{Z}}_{y,i}(\lambda K)=\lambda^i\ \tilde{\mathrm{Z}}_{y,i}(K)=\lambda^i\,\mathrm{Z}_i(\ell_y+\mathbf{I}_K)$$

对每个 $0\le i\le n$、 $K\in\mathcal{K}^n$、 $y\in\mathbb{R}^n$ 和 $\lambda>0$均成立。此外,

$$\mathrm{Z}(\ell_y+\mathbf{I}_K)=\tilde{\mathrm{Z}}_y(K)=\sum_{i=0}^{n}\tilde{\mathrm{Z}}_{y,i}(K)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Z}_i(\ell_y+\mathbf{I}_K)$$

对每个 $K\in\mathcal{K}^n$ 和 $y\in\mathbb{R}^n$均成立，由此完成证明。 □

现在我们将证明，$\mathrm{Conv}_{sc}(\mathbb{R}^n)$ 上每个连续的、上图平移不变赋值，都由其在某个特定小函数集上的取值唯一确定。

引理 8.5. 令 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 为一个连续的、上图平移不变赋值。若

$$\mathrm{Z}(\ell_y+\mathbf{I}_P)=0 \tag{8.5}$$

对于每个 $y\in\mathbb{R}^n$ 和 $P\in\mathcal{P}^n$，都有 $\mathrm{Z}(u)=0$，对于每个 $u\in$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)$。

我们提出两种证明这一结果的方法。与引理 7.7 的证明类似，由于 Z 的连续性，我们可以将问题归结为 $u\in$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)$ 为分段仿射的情形。这里，这意味着存在内部两两不相交的多胞体 P_1，.....， $P_m\in\mathcal{P}^n$，以及仿射函数w_1，.....， $w_m\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得

$$u=\bigwedge_{i=1}^{m}(w_i+\mathbf{I}_{P_i}), \tag{8.6}$$

也就是说， u 是在互不相交的多胞体上限制的仿射函数的分段最小值。

证明（第一种方法）。我们对 (8.6) 中的数目 m 使用归纳法证明该结果。先考虑 $m=1$ 的情形。由于存在 $y_1\in\mathbb{R}^n$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 使得 $w_1=\ell_y+t$，我们有 $u=\ell_{y_1}+\mathbf{I}_{P_1}+t$，因此，根据 Z 的上图平移不变性，由 (8.5) 可得 $\mathrm{Z}(u)=0$。

假设该命题对 $m-1$ 成立，并设 u 在表示式 (8.6) 中有 m 个分量。不失一般性，我们可以假设存在互不相交的指标集 I_1、 $I_2\subset\{1,\dots,m\}$，使得 $0<|I_1|$、 $|I_2|<m$，且这些集合

$$\bigcup_{i\in I_1}P_i\quad\text{and}\quad\bigcup_{i\in I_2}P_i$$

是凸的（关于此类划分的更详细讨论，请参见 [21, 第 7.1] 节）。定义 u_1、 $u_2\in\mathrm{Conv}_{sc}(\mathbb{R}^n)$ 如下:

$$u_1:=\bigwedge_{i\in I_1}(w_i+\mathbf{I}_{P_i})\quad\text{and}\quad u_2:=\bigwedge_{i\in I_2}(w_i+\mathbf{I}_{P_i}).$$

显然， $u=u_1\wedge u_2$，并且根据归纳假设，$\mathrm{Z}(u_1)=\mathrm{Z}(u_2)=0$。此外，容易¯ ¯看出，若 $\bar{u}:=u_1\vee u_2$，则存在多胞体 P_1、...、 $P_k\in\mathcal{P}^n$（其维数至多为 $(n-1)$），满足 $k\le m-1$，以及仿射函数 $\bar{w}_1$、...、 $\bar{w}_k$，使得

$$\bar{u}=\bigwedge_{i=1}^{k}(\bar{w}_i+\mathbf{I}_{\bar{P}_i}).$$

再次利用归纳假设，我们还可得出 $\mathrm{Z}(\bar{u})=0$。因此，根据 Z 的赋值性质，

$$\mathrm{Z}(u)=\mathrm{Z}(u_1)+\mathrm{Z}(u_2)-\mathrm{Z}(\bar{u})=0,$$

至此，证明完毕。 □

¯证明（第二种方法）。与（2.1）类似，对于每个连续赋值 Z : 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$) $\to \mathbb{R}$ 和u_1, $\dots u_m \in$ 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$)，满足 $u_1 \wedge \ldots \wedge u_m \in$ 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$)，我们有

$$\bar{\mathrm{Z}}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) = \sum_{\varnothing \neq I \subset \{1,\dots,m\}} (-1)^{|I|-1} \bar{\mathrm{Z}}(u_I),$$

其中 $u_I := \bigvee_{i\in I} u_i$。因此，要证明 Z 在形如 (8.6) 的函数上为零，只需证明

$$\mathrm{Z}\left(\bigvee_{i\in I}(w_i + \mathbf{I}_{P_i})\right) = 0$$

对每个 $\varnothing \neq I \subset \{1,\dots,m\}$ 都成立。由于每个这样的函数 $\bigvee_{i\in I}(w_i + \mathbf{I}_{P_i})$ 仍是多胞体上仿射函数的限制，因此由 (8.5) 和 Z 的垂直平移不变性即可得出结论。□

现在我们已具备证明齐次分解定理所需的一切条件。

定理 8.2 的证明。设赋值 $\mathrm{Z}_0, \dots, \mathrm{Z}_n$: 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$) $\to \mathbb{R}$ 由引理 8.4 给出，并¯定义 Z : 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$) $\to \mathbb{R}$ 如下:

$$\bar{\mathrm{Z}}(u) := \mathrm{Z}(u) - \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Z}_i(u).$$

¯显然，Z 是连续的上图平移不变赋值。此外，根据赋值 Z_i 对于 $0 \le i \le n$ 的性质，我们有

$$\bar{\mathrm{Z}}(\ell_y + \mathbf{I}_P) = 0$$

对于每个多胞体 $P \in \mathcal{P}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}^n$。因此，由引理 8.5,

$$\mathrm{Z}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Z}_i(u)$$

对于每个 $u \in$ 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$)。

接下来需要证明，对于每个 $0 \le i \le n$，赋值 Z_i 都是次数为 i 的上图齐次赋值。对于 $\lambda \ge 0$和 $0 \le i \le n$，令

$$\bar{\mathrm{Z}}_{\lambda,i}(u) = \mathrm{Z}_i(\lambda \cdot u) - \lambda^i \mathrm{Z}_i(u)$$

¯对于 $u \in$ 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$)。注意，$\mathrm{Z}_{\lambda,i}$ 是凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$)上的赋值。利用与上述相同的论证，¯我们得到 $\mathrm{Z}_{\lambda,i} \equiv 0$，这表明对于每个 $0 \le i \le n$，赋值 Z_i 都是次数为 i的上图齐次赋值。□

采用与定理 4.8 类似的方法，固定 $\bar{u} \in$ 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$)，考察$u \mapsto \mathrm{Z}_i(u \,\square\, \bar{u})$，即可得到以下结果。

定理 8.6. 设 $1 \le m \le n$。如果 Z: 凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$) $\to \mathbb{R}$ 是一个连续、上图平移不变的¯赋值，且为次数 m的上图齐次赋值，那么存在一个对称函数 Z : (凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$))$^m \to \mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(\lambda_1 \cdot u_1 \,\square\, \cdots \,\square\, \lambda_k \cdot u_k) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \in \{0,\dots,m\} \\ i_1+\cdots+i_k = m}} \binom{m}{i_1 \cdots i_k} \lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_k^{i_k} \, \bar{\mathrm{Z}}(u_1[i_1], \dots, u_k[i_k])$$

对于每个 $k \ge 1$、每个 u_1、.....、$u_k \in$凸函数空间sc($\mathbb{R}^n$) 以及每个 λ_1、.....、$\lambda_k \ge 0$，¯。此外，Z 对每个变量都是上图可加的，并且该映射

$$u \mapsto \bar{\mathrm{Z}}(u[j], u_1, \dots, u_{m-j})$$

是定义在 Convsc($\mathbb{R}^n$) 上的连续、上图平移不变赋值，并且对于 $1 \le j \le m$ 以及每个 u_1，...，$u_{m-j} \in$ Convsc($\mathbb{R}^n$)，它是 j 次上图齐次的。

这里，函数 $\mathrm{Y}:\mathrm{Conv}_{sc}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 称为上图可加的，如果

$$\mathrm{Y}(u\,\square\, v)=\mathrm{Y}(u)+\mathrm{Y}(v)$$

对于每个 $u,v\in$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)$。前一定理中的特殊情形 $m=1$ 导出了以下结果，它是推论 4.9 的函数版本。

推论 8.7. 若 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是连续的上图平移不变赋值，且为 1 次齐次，则 Z 是上图可加的。

8.3. 分类结果。本节将证明，引理 8.1 中所描述的赋值，确实是凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)$ 上仅有的连续且上图平移不变、次数为 n 的上图齐次赋值。以下结果已在 [28, 定理 2] 中得到证明。

定理 8.8. 映射 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是连续且上图平移不变、次数为 n 的上图齐次赋值，当且仅当存在 $\zeta\in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\mathrm{Z}(u)=\int_{\operatorname{dom}u}\zeta(\nabla u(x))\,\mathrm{d}x \tag{8.7}$$

对于每个 $u\in$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)$。

证明。对于给定 $\zeta\in C_c(\mathbb{R}^n)$，由引理 8.1 可知，(8.7) 具有所需的性质。

反过来，设 $\mathrm{Z}:$ 凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ 是一个连续的、上图平移不变的赋值，并且是上图-齐次的，其次数为 n。对于 $y\in\mathbb{R}^n$，定义 $\mathrm{Z}_y:\mathcal{K}^n\to\mathbb{R}$ 为 $\mathrm{Z}_y(K):=\mathrm{Z}(\ell_y+\mathrm{I}_K)$。根据引理 8.3，泛函 Z_y 是连续的平移不变赋值。此外，容易看出，Z_y 是次数为 n 的齐次泛函。因此，由定理 4.10 可知，对每个 $y\in\mathbb{R}^n$，都存在一个常数 $\zeta(y)\in\mathbb{R}$，使得

$$\mathrm{Z}(\ell_y+\mathbf{I}_K)=\tilde{\mathrm{Z}}_y(K)=\zeta(y)V_n(K) \tag{8.8}$$

对于每个 $K\in\mathcal{K}^n$。此外，由 Z 的连续性可知，$\zeta(y)$ 关于$y\in\mathbb{R}^n$连续变化。这定义了一个连续函数 $\zeta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$。

接下来，我们证明 ζ 具有紧支撑。反设存在一个序列$y_k\in\mathbb{R}^n$，满足

$$\lim_{k\to\infty}|y_k|=+\infty \tag{8.9}$$

但对每个 $k\in\mathbb{N}$，$\zeta(y_k)\neq 0$。适当取一个子序列后，不失一般性地假设对每个 $k\in\mathbb{N}$，$\zeta(y_k)$ 都为正，并且存在一个向量 $e\in\mathbb{S}^{n-1}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{y_k}{|y_k|}=e.$$

设 $B_k,B_\infty\in\mathcal{K}^n$ 由下式给出

$$B_k=\{x\in y_k^\perp\colon|x|\le 1\},\quad B_\infty=\{x\in e^\perp\colon|x|\le 1\}$$

并定义 $C_k\in\mathcal{K}^n$ 如下

$$C_k=\Big\{x+t\frac{y_k}{|y_k|}\colon x\in B_k,t\in\Big[0,\frac{1}{\zeta(y_k)}\Big]\Big\} \tag{8.10}$$

对于 $k\in\mathbb{N}$。注意，C_k 是一个正交圆柱体，并且

$$V_n(C_k)=V_{n-1}(B_k)\frac{1}{\zeta(y_k)}=\frac{\kappa_{n-1}}{\zeta(y_k)} \tag{8.11}$$

对于 $k \in \mathbb{N}$。接下来，设 $u_k := \ell_{y_k} + \mathbf{I}_{C_k}$，对于 $k \in \mathbb{N}$，并注意 $u_k \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$。由 (8.9) 和 (8.10) 可知，$u_k \to \mathbf{I}_{B_\infty}$，当 $k \to \infty$ 时。因此，结合 (8.8)，Z 的连续性意味着

$$0 = \mathrm{Z}(\mathbf{I}_{B_\infty}) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Z}(u_k).$$

另一方面，由 (8.8) 和 (8.11) 可得

$$\mathrm{Z}(u_k) = \zeta(y_k) V_n(C_k) = \kappa_{n-1} > 0$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都成立，这与假设矛盾。因此，我们得出 ζ 具有紧支撑。

剩下只需证明 (8.7) 成立。定义 $\mathrm{Z} :$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 为

$$\bar{\mathrm{Z}}(u) := \mathrm{Z}(u) - \int_{\operatorname{dom} u} \zeta(\nabla u(x))\, \mathrm{d}x.$$

根据引理 8.1 以及关于 Z 的假设，算子 Z 是一个连续的上图平移不变赋值。此外，由 (8.8) 可得

$$\bar{\mathrm{Z}}(\ell_y + \mathbf{I}_K) = \mathrm{Z}_y(K) - \int_K \zeta(y)\, \mathrm{d}x = 0$$

对每个 $y \in \mathbb{R}^n$ 和 $K \in \mathcal{K}^n$ 都成立。因此，引理 8.5 蕴含

$$\bar{\mathrm{Z}}(u) = 0$$

对于每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$，由此完成证明。 □

8.4. 当前研究现状一瞥。如 (8.4) 所述，对于任意 $\zeta \in C_c(\mathbb{R}^n)$，算子

$$u \mapsto \int_{\operatorname{dom} u} \zeta(\nabla u(x))\, \mathrm{d}x$$

可视为凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$上 n维体积的函数类比。定理 8.8 进一步支持了这一解释；除连续性假设外，它是定理 4.10 的函数版本。下文将范围限定在旋转不变的情形；若赋值 $\mathrm{Z} :$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 满足

$$\mathrm{Z}(u \circ \vartheta^{-1}) = \mathrm{Z}(u)$$

对于每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$及 $\vartheta \in \mathrm{SO}(n)$，则称其为旋转不变赋值。

定义

$$\overline{\mathrm{V}}_{n,\alpha}(u) := \int_{\operatorname{dom} u} \alpha(|\nabla u(x)|)\, \mathrm{d}x$$

对于 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$及 $\alpha \in C_c([0,\infty))$。

由定理 8.4 可知，对于每个 $0 \le j \le n-1$，都存在一个连续、上图平移不变赋值 $\mathrm{V}_{j,\,\alpha} :$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$，它是次数为 j 的上图齐次赋值，使得

$$\overline{\mathrm{V}}_{n,\alpha}(u \,\square\, r \cdot \mathbf{I}_{B^n}) = \sum_{j=0}^{n} r^{n-j} \kappa_{n-j}\, \overline{\mathrm{V}}_{j,\alpha}(u) \tag{8.12}$$

对每个 $u \in$ 凸函数空间$_{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $r \ge 0$ 都成立。注意，(8.12) 对应于经典的 Steiner公式 (2.5)，其中我们用 $\mathrm{V}_{n,\,\alpha}$ 替换了 n维体积，并且现在由 $\mathbf{I}_{B^n}$ 起到单位球的作用。

在许多方面，泛函 $\mathrm{V}_{j,\,\alpha}$ 的表现类似于经典的内在体积。首先，由于 $\mathrm{V}_{n\text{的}\alpha}$ 旋转不变性以及 $\mathbf{I}_{B^n}$ 的径向对称性，可知对于每个 $0 \le j \le n-1$，$\mathrm{V}_{j\,\text{也}\,\alpha}$ 具有旋转不变性。其次，由于

$$\mathbf{I}_K \,\square\, r \cdot \mathbf{I}_{B^n} = \mathbf{I}_{K + rB^n},$$

由（2.5）、（8.4）和（8.12）可知

$$\overline{\mathrm{V}}_{j,\alpha}(\mathbf{I}_K) = \alpha(0)V_j(K)$$

对每个 $0 \le j \le n$ 和 $K \in \mathcal{K}^n$。最后但同样重要的是，泛函 $\mathrm{V}_{j,\alpha}$ 由一个 Hadwiger 型定理刻画。这里陈述的版本可由 [26, 定理 1.3] 和 [30, 定理 1.4]推出。

定理 8.9。设 $n \ge 2$。泛函 $\mathrm{Z} : 凸函数空间_{sc}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 是连续的、在上图平移下不变且旋转不变的赋值，当且仅当存在函数 $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in C_c([0,\infty))$，使得

$$\mathrm{Z}(u) = \overline{\mathrm{V}}_{0,\alpha_0}(u) + \cdots + \overline{\mathrm{V}}_{n,\alpha_n}(u)$$

对每个 $u \in 凸函数空间_{sc}(\mathbb{R}^n)$。

定理 8.9 是 Hadwiger 定理（定理 5.1）的函数类比，并表明赋值 $\mathrm{V}_{j,\alpha}$ 显然在凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)$上发挥着内在体积的作用。

在 [26], 中采用了不同的方法和记号。那里的泛函形式为

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(|\nabla u(x)|)[\mathrm{D}^2 u(x)]_{n-j}\, \mathrm{d}x \tag{8.13}$$

此外，$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$，其中 $\zeta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 具有有界支集，并且在 0^+处可能存在某种奇异性。后来在 [30, 定理 1.4] 中证明，式 (8.13) 在凸函数空间$_{sc}(\mathbb{R}^n)$上的连续延拓与本文所考虑的泛函 $\mathrm{V}_{j,\,\alpha}$一致，其中 ζ 和 α 通过积分变换相联系。

关于泛函内在体积及相关泛函，仍有许多未解决的问题。目前的研究课题包括刻画结果，尤其是针对更多变换群的结果；还包括在函数空间中发展积分几何理论，并为新定义的泛函建立不等式。关于近期的一些结果，请参阅 [5, 29–31, 42, 43]。

致谢。M. Ludwig 获奥地利科学基金（FWF）部分资助：P 34446；F. Mussnig 获奥地利科学基金（FWF）资助：J 4490。

参考文献

[1] Alesker, S.：《关于 P. McMullen 平移不变赋值猜想》。《数学进展》155，239–263（2000）[2] Alesker, S.：《凸集上平移不变赋值的描述及 P. McMullen 猜想的解答》。Geom. Funct. Anal. 11，244–272（2001）[3] Alesker, S.：《流形上的赋值理论：综述》。Geom. Funct. Anal. 17，1321–1341（2007）[4] Alesker, S.：《赋值理论导论》，CBMS区域会议数学系列，第126卷。由美国数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛州（2018）[5] Alesker, S.：《凸函数与凸集上的赋值及 Monge-Amp`ère 算子》。Adv. Geom. 19，313–322（2019）[6] Alesker, S., Fu, J.H.G.：《积分几何与赋值》。数学高级课程，CRM巴塞罗那。Birkh¨auser/Springer，巴塞尔（2014）[7] Artstein-Avidan, S., Giannopoulos, A., Milman, V.D.：《渐近几何分析》。第二部分，数学调查与专著，第261卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（2021）[8] Baryshnikov, Y., Ghrist, R.：《通过欧拉示性数积分进行目标枚举》。SIAM J. Appl. Math. 70，825–844（2009）[9] Baryshnikov, Y., Ghrist, R., Wright, M.：《可定义函数的 Hadwiger 定理》。《数学进展》245，573–586（2013）[10] Bernig, A.：《特殊酉群的一个 Hadwiger 型定理》。Geom. Funct. Anal. 19，356–372（2009）[11] Bernig, A.：《代数积分几何》。载于：《整体微分几何》，Springer 数学论文集，第17卷，第107–145页。Springer，海德堡（2012）

[12] Bernig, A., Fu, J.H.G.：《Hermitian积分几何》。《数学年刊》（第2辑）173，907–945（2011）[13] Blaschke, W.：《微分几何 II》。Springer，柏林（1923）[14] Blaschke, W.：《积分几何讲义》，¨第2册。Teubner，柏林（1937）[15] Bobkov, S.G., Colesanti, A., Fragal`a, I.：《拟凹函数的拟混合体积与广义 Pr´ékopa–Leindler 不等式》。Manuscripta Math. 143，131–169（2014）[16] Boltianskii, V.：《希尔伯特第三问题》。John Wiley，纽约（1978）[17] B¨or¨oczky, K.J., Ludwig, M.：《格多胞体上的赋值》。载于：M. Kiderlen, E. Vedel Jensen（编），《张量赋值及其在随机几何与成像中的应用》。Springer（2017）[18] Braides, A.：《面向初学者的 Γ-收敛》，牛津数学及其应用讲座系列，第22卷。牛津大学出版社，牛津（2002）ˇ[19] Brandts, J., Korotov, S., Kˇr´ıˇzek, M., Solc, J.：《关于非钝角单纯剖分》。SIAM Rev. 51，317–335（2009）[20] Calabi, E., Olver, P., Tannenbaum, A.：《仿射几何、曲线流与不变数值逼近》。《数学进展》124，154–196（1996）[21] Cavallina, L., Colesanti, A.：《凸函数空间上的单调赋值》。Anal. Geom. Metr. Spaces 3，167–211（2015）[22] Colesanti, A., Lombardi, N.：《拟凹函数空间上的赋值》。载于：《泛函分析的几何方面》，数学讲义，第2169卷，第71–105页。Springer，沙姆（2017）[23] Colesanti, A., Lombardi, N., Parapatits, L.：《拟凹函数上的平移不变赋值》。Studia Math. 243，79–99（2018）[24] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《凸函数上的闵可夫斯基赋值》。Calc. Var. Partial Differential Equations 56，论文编号162（2017）[25] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《凸函数上的赋值》。Int. Math. Res. Not. IMRN，2384–2410（2019）[26] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《凸函数上的 Hadwiger 定理，I》。arXiv:2009.03702（2020）[27] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《Hessian赋值》。Indiana Univ. Math. J. 69，1275–1315（2020）[28] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《凸函数上赋值的齐次分解定理》。J. Funct. Anal. 279，108573（2020）[29] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《凸函数上的 Hadwiger 定理，II：Cauchy–Kubota公式》。arXiv:2109.09434（2021）[30] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《凸函数上的 Hadwiger 定理，III：Steiner公式与混合 Monge–Amp`ère 测度》。Calc. Var. Partial Differential Equations 61，论文编号181（2022）[31] Colesanti, A., Ludwig, M., Mussnig, F.：《凸函数上的 Hadwiger 定理，IV：Klain方法》（2022）。《数学进展》413，论文编号108832（2023）[32] Colesanti, A., Pagnini, D., Tradacete, P., Villanueva, I.：《Lip(S^{n-1})上的一类不变赋值》。《数学进展》366，论文编号107069（2020）[33] Colesanti, A., Pagnini, D., Tradacete, P., Villanueva, I.：《球面 Lipschitz 函数空间上的连续赋值》。J. Funct. Anal. 280，论文编号108873（2021）[34] Dal Maso, G.：《Γ-收敛导论》。《非线性偏微分方程及其应用进展》，第8卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州（1993）[35] Dehn, M.：《论体积》。Math. Ann. 55，465–478（1901）[36] Gardner, R.J.：《Brunn–Minkowski不等式》。Bull. Amer. Math. Soc.（新系列）39，355–405（2002）[37] Goodey, P., Weil, W.：《分布与赋值》。Proc. London Math. Soc.（第3辑）49，504–516（1984）[38] Haberl, C., Parapatits, L.：《中心仿射Hadwiger定理》。J. Amer. Math. Soc. 27，685–705（2014）[39] Hadwiger, H.：《关于体积、表面积与等周问题的讲义》。Springer，柏林（1957）[40] Klain, D.A.：《Hadwiger刻画定理的简短证明》。《Mathematika》42，329–339（1995）[41] Klain, D.A., Rota, G.C.：《几何概率导论》。剑桥大学出版社，剑桥（1997）[42] Knoerr, J.：《凸函数上对偶上图平移不变赋值的支集》。J. Funct. Anal. 281，论文编号109059（2021）[43] Knoerr, J.：《凸函数上的光滑赋值》。J. Differential Geom.，即将出版[44] Kusejko, K., Parapatits, L.：《平移等分解性的赋值论方法》。《数学进展》297，174–195（2016）[45] Leichtweiß, K.：《关于凸体的仿射表面积》。Manuscripta Math. 56，429–464（1986）[46] Leichtweiß, K.：《凸曲线的仿射校正》。Beiträge Algebra Geom. 40，185–193（1999）[47] Li, J., D. Ma：《拉普拉斯变换与赋值》。J. Funct. Anal. 272，738–758（2017）[48] Ludwig, M.：《仿射长度的刻画及凸圆盘的渐近逼近》。Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 69，75–88（1999）

[49] Ludwig, M.：《关于内部包含原点的多胞体的赋值》。《数学进展》170，239–256（2002）[50] Ludwig, M.：《费舍尔信息与矩阵值赋值》。《数学进展》226，2700–2711（2011）[51] Ludwig, M.：《函数空间上的赋值》。《Adv. Geom.》11，745–756（2011）[52] Ludwig, M.：《索伯列夫空间上的赋值》。《Amer. J. Math.》134，827–842（2012）[53] Ludwig, M.：《协方差矩阵与赋值》。《Adv. in Appl. Math.》51，359–366（2013）[54] Ludwig, M.：《几何赋值理论》。《第八届欧洲数学大会论文集》，即将出版（2022）[55] Ludwig, M., Reitzner, M.：《仿射表面积的一种刻画》。《数学进展》147，138–172（1999）[56] Ludwig, M., Reitzner, M.：《SL(n)不变赋值的分类》。《数学年刊》（第2辑）172，1219–1267（2010）[57] Ludwig, M., Reitzner, M.：《多胞体上的SL(n)不变赋值》。《Discrete Comput. Geom.》57，571–581（2017）[58] Lutwak, E.：《扩展仿射表面积》。《数学进展》85，39–68（1991）[59] Lutwak, E.：《布伦-闵可夫斯基-菲雷理论。II. 仿射表面积与几何最小表面积》。《数学进展》118，244–294（1996）[60] Ma, D.：《索伯列夫空间上的实值赋值》。《Sci. China Math.》59，921–934（2016）[61] McMullen, P.：《某些类凸多胞体上的赋值与欧拉型关系》。《Proc. London Math. Soc.》（第3辑）35，113–135（1977）[62] McMullen, P.：《紧凸集空间上的连续平移不变赋值》。《Arch. Math.》55，377–384（1980）[63] McMullen, P.：《凸多胞体上的弱连续赋值》。《Arch. Math.》（巴塞尔）41，555–564（1983）[64] McMullen, P.：《凸体上的单调平移不变赋值》。《Arch. Math.》（巴塞尔）55(6)，595–598（1990）[65] Milman, V., Rotem, L.：《混合积分及相关不等式》。《J. Funct. Anal.》264，570–604（2013）[66] Mussnig, F.：《凸函数的体积、极体积与欧拉示性数》。《数学进展》344，340–373（2019）[67] Mussnig, F.：《超强制凸函数上的SL(n)不变赋值》。《Canad. J. Math.》73，108–130（2021）[68] Mussnig, F.：《对数凹函数上的赋值》。《J. Geom. Anal.》31，6427–6451（2021）[69] Ober, M.：《 L_p-闵可夫斯基赋值在 L^q-空间上》。《J. Math. Anal. Appl.》414，68–87（2014）[70] Rockafellar, R.T., Wets, R.J.B.：《变分分析》，《数学科学基础丛书》第317卷。Springer-Verlag，柏林（1998）[71] Schneider, R.：《凸体上的简单赋值》。《Mathematika》43，32–39（1996）[72] Schneider, R.：《凸体：布伦-闵可夫斯基理论》，《数学及其应用百科全书》第151卷，第二版（扩充版）。剑桥大学出版社，剑桥（2014）[73] Schneider, R., Weil, W.：《随机与积分几何》。《概率及其应用》（纽约）。Springer-Verlag，柏林（2008）[74] Sch¨utt, C., Werner, E.：《凸浮体》。《Math. Scand.》66，275–290（1990）[75] Tradacete, P., Villanueva, I.：《星体上的径向连续赋值》。《J. Math. Anal. Appl.》454，995–1018（2017）[76] Tradacete, P., Villanueva, I.：《星体上赋值的连续性与表示》。《数学进展》329，361–391（2018）[77] Tsang, A.：《 L^p 空间上的赋值》。《Int. Math. Res. Not.》20，3993–4023（2010）[78] Tsang, A.：《 L^p-空间上的闵可夫斯基赋值》。《Trans. Amer. Math. Soc.》364，6159–6186（2012）[79] Villanueva, I.：《星体上的径向连续旋转不变赋值》。《数学进展》291，961–981（2016）[80] Wang, T.：《BV($\mathbb{R}^n$)上的半赋值》。《Indiana Univ. Math. J.》63，1447–1465（2014）

离散数学与几何研究所，维也纳工业大学，维德纳主街8-10/1046，1040 维也纳，奥地利 电子邮箱：monika.ludwig@tuwien.ac.at

离散数学与几何研究所，维也纳工业大学，维德纳主街8-10/1046，1040 维也纳，奥地利 电子邮箱：fabian.mussnig@tuwien.ac.at