arXiv:2302.00423v1 [math.AP] 1 Feb 2023

具有非齐次退化的全非线性积分微分方程的正则性估计

P^edra D.S. Andrade *[1], Disson S. dos Prazeres †[2], and Makson S. Santos ‡[3]

[1]里斯本大学高等技术学院 [2]塞尔希培联邦大学数学系 [3]里斯本大学高等技术学院

2023年2月2日

摘要

我们研究一类退化/奇异全非线性非局部方程解的正则性。在退化情形下，我们证明至少存在一个属于 $C^{1,\alpha}_{loc}$ 类的黏性解，其中 $\alpha \in (0,1)$ 为某个常数。此外，在关于 σ 的适当条件下，我们证明任意黏性解在 H¨older 空间中满足正则性估计。我们还考察奇异情形，并证明解的梯度满足 H¨older 正则性估计。

关键词：非局部算子、H¨older 正则性、奇异算子、退化算子。

MSC（2020年）：35B65；35R11；35R09；35D40。

1 引言

本文研究如下形式的退化/奇异全非线性积分微分方程解的正则性

$$-\left(|Du(x)|^p + a(x)|Du(x)|^q\right)\mathcal{I}_\sigma(u,x) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1, \tag{1}$$

其中 $0 \le a(\cdot) \in C(B_1)$， $\mathcal{I}_\sigma$ 是一个阶数为 $\sigma \in (1,2)$ 且$f \in L^\infty(B_1)$的全非线性椭圆型积分微分算子。我们建立了方程 (1) 的有界粘性解梯度的 H¨older 正则性估计。更准确地说，在退化情形 $0 < p \le q$ 下，我们证明对于任意 $1 < \sigma < 2$，至少存在一个方程 (1) 的粘性解 u，使得 $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，其中某个 $\alpha \in (0,1)$。即使在情形$a \equiv 0$下，这一结果也是新的。此外，我们证明存在一个足够接近 2 的常数 σ_0，使得解属于

*pedra.andrade@tecnico.ulisboa.pt
†disson@mat.塞尔希培联邦大学.br
‡makson.santos@tecnico.ulisboa.pt

类 $C^{1,\alpha}_{loc}$，其中某个 $\alpha \in (0,1)$，条件是 $\sigma_0 < \sigma < 2$。在奇异框架 $-1 < p \le q < 0$ 下，我们证明解属于 $C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，其中某个 $\alpha \in (0,1)$。

在文献中，积分微分算子通常被称为非局部算子。这类问题出现在许多数学建模过程中，例如图像处理和收益模型，参见 [12, 14, 27], ，这里只举几个例子。例如，线性非局部算子自然地出现在具有如下形式的不连续随机过程中

$$Lu(x) := \sum_{i,j} a_{ij}\partial_{ij}u + \sum_i b_i \partial_i u + \int_{\mathbb{R}^d} \left(u(x+y) - u(x) - Du \cdot y\chi_{B_1}(y)\right) d\mu(y), \tag{2}$$

对于适当的测度 μ。与此同时，非线性积分微分方程也见于随机控制问题，其中参与者可以在每一步改变策略。在这种情况下，我们得到由算子驱动的凸非线性方程

$$Iu(x) := \sup_{\alpha} L_\alpha u(x).$$

此外，我们还可以得到如下类型的模型

$$Iu(x) := \inf_{\beta} \sup_{\alpha} L_{\alpha,\beta} u(x),$$

当涉及两名或更多参与者时，参见 [32]。

多年来，许多作者对积分微分算子进行了广泛研究。关于解的定性性质， [7, 8, 33] 中的作者利用概率方法证明了 Harnack 不等式。值得指出的是，H¨older 估计并不能由 Harnack 不等式推出，因为后者要求解在整个 $\mathbb{R}^d$上为正。考虑到这一点， [7], 仍然采用概率技巧证明了 H¨older 估计。在 [31] 中，L. Silvestre 给出了 H¨older 连续性的解析证明，并且对算子提出了比以往研究更灵活的假设。

所有这些先前的结果都具有同一特点：当算子的阶趋近于 2 时，估计会发散。L. Caffarelli 和 L. Silvestre 在 [15] 中给出了首批对阶数一致的结果。在该论文中，作者提出了一系列拓展二阶算子理论的结果，例如比较原理、非局部版本的 Alexandroff-Bakelman-Pucci 估计、Harnack 不等式，以及 $C^{1,\alpha}$-估计。由于这些估计在算子的阶趋近于 2 时仍保持一致，因此这些结果可视为椭圆偏微分方程正则性理论的自然拓展。

在 [16] 中，作者采用扰动方法，将先前的结果拓展到非平移不变方程。具体而言，他们证明了方程解的 $C^{1,\alpha}$-正则性，其中这些方程在适当意义下接近另一个具有 $C^{1,\bar{\alpha}}$-估计的方程。几乎与此同时，G. Barles、E. Chasseigne 和 C. Imbert 也研究了非平移不变方程，并建立了 H¨older 正则性估计。值得注意的是，他们的假设与 [16], 中的假设不同，而且他们研究的方程包含二阶项和一阶项，因此允许存在某些退化算子。更多详情请参见[5]。

一个仍然悬而未决且非常有趣的问题是，解是否属于 f

$$|Du|^p \mathcal{I}_\sigma(u,x) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1, \tag{3}$$

$C^{1,\alpha}$。在局部情形中，这类问题吸引了许多作者的关注，例如[1, 2, 10, 11, 13, 19, 29] ，这里只列举几例。更一般地，具有双重退化形式的方程

$$(|Du|^p + a(x)|Du|^q)F(D^2u) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1, \tag{4}$$

.....也得到了研究。读者可参阅 [18, 21, 25], 及其中的参考文献。这些工作的主要创新之处在于，方程 (4) 不再是齐次的，这使缩放过程更加微妙。我们强调，(4) 中的算子是被广泛研究的 (p, q)-拉普拉斯算子的非变分对应算子，参见例如 [17, 20, 22, 23, 24, 26, 30]。

在非局部情形中，D. Prazeres 和 E. Topp 在 [28] 中给出了一个部分结果。作者假设 σ 充分接近 2，因此在交互过程中， $\mathcal{I}_\sigma$ 趋近于 F，其中 F 是一个局部算子。在这些假设下，他们证明了当 $p > 0$ 时，(3) 的粘性解属于 $C^{1,\alpha}$ 类。他们对 σ 的条件使其能够将 F-调和函数的某些正则性传递给 (3) 的解。在一般情形下， $\sigma \in$ (1, 2)，目前尚无关于 (3) 解的正则性结果。本文的一项贡献是证明：对于任意 $\sigma \in$ (1, 2)，一类包含 (3) 中算子的算子存在 $C^{1,\alpha}_{loc}$ 粘性解。这就是我们的第一个主要结果。

定理 1.1. 设 $0 < p \le q$。假设 A1-A3（将在下文进一步详细说明）成立。那么，至少存在一个 $u \in C(\overline{B}_1)$ 有界粘性解满足

$$-(|Du(x)|^p + a(x)|Du(x)|^q)\mathcal{I}_\sigma(u, x) = f(x) \quad in \quad B_1,$$

使得 $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，且满足如下估计

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|u\|_{L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)} + \|f\|^{\frac{\sigma-1}{1+p}}_{L^\infty(B_1)}\right),$$

其中

$$\alpha \in \left(0, \min\left(\bar{\alpha}, \frac{\sigma-1}{p+1}\right)\right),$$

并且 $C = C(d, p, \lambda, \Lambda)$ 是一个正常数。这里， $\bar{\alpha}$ 是与 $\mathcal{I}_\sigma$调和函数的正则性相关的指数。

我们指出，当 $0 < p \le q$ 时，方程 (1) 的粘性解的一般正则性理论仍未解决，即使在 $a \equiv 0$的情形下也是如此。这是因为缺少唯一性结果，而唯一性结果是局部情形下建立一般正则性理论的论证核心。另见注 3.1。

为了证明一般正则性结果，我们需要将讨论限制在 σ 接近 2 的情形，如 [28]所示。特别是，我们将 [28] 中的结果推广到非齐次退化情形。这就是我们的第二个结果的内容。

定理 1.2. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是下列方程的有界粘性解

$$-(|Du(x)|^p + a(x)|Du(x)|^q)\mathcal{I}_\sigma(u, x) = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $0 < p \le q$。假设 A1-A4 成立，具体条件将在后文详述。则存在充分接近 2 的 $\sigma_0 \in (1,2)$，使得若 $\sigma_0 < \sigma < 2$，则 $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，且满足以下估计

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|u\|_{L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)} + \|f\|^{\frac{\sigma-1}{1+p}}_{L^\infty(B_1)}\right),$$

其中

$$\alpha \in \left(0, \min\left(\bar{\alpha}, \frac{\sigma-1}{p+1}\right)\right),$$

且 $C = C(d,p,\lambda,\Lambda)$ 是一个正常数。这里，$\bar{\alpha}$ 是与 F调和函数正则性相关的指数。

上述估计中出现的常数 C 关于 σ 是一致的，这意味着当 σ 趋近于 2 时，它不会发散。因此，我们可以将定理 1.2 视为对 [21, 定理 1]的推广。

在奇异情形下，困难始于黏性解的概念。事实上，局部情形中采用的定义 [9, 定义 2.2], 似乎不适用于我们的情形，因为每当$x_0 \in \{Du = 0\}$时，我们都有 $u \equiv c$ 在 $B_{r(x_0)}(x_0)$ 中，这意味着 $F(D^2u) = 0$ 在 $B_{r(x_0)}(x_0)$ 中，因此可以说 $0 \le f(x_0)$（对于上解的情形）。另一方面，在非局部情形下，我们仍需考虑如下量

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_{r(x_0)}(x_0)} (u(x_0) - u(y))K(y)dy,$$

它依赖于 $r(x_0)$，且可能不为零。为克服这一点，我们采用近似黏性解的概念。该概念在集合 $\{Du \neq 0\}$ 上与通常的黏性解概念一致，并定义为一致椭圆非局部方程解的极限。近似黏性解的精确定义见定义 2.5。在这一设定下，我们证明了方程 (1) 的解具有 $C^{1,\alpha}$-正则性。更具体地说，我们证明如下:

定理 1.3. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是下列方程的有界近似黏性解

$$-\left(|Du(x)|^p + a(x)|Du(x)|^q\right)\mathcal{I}_\sigma(u,x) = f(x) \quad in \quad B_1,$$

其中 $-1 < p \le q < 0$。假设 A1-A3 成立，其具体内容将在后文给出。则 $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，并且有如下估计

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \le C\left(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|u\|_{L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)} + \|f\|^{\frac{\sigma-1}{1+p}}_{L^\infty(B_1)}\right).$$

其中某个 $\alpha \in (0,1)$，且 $C = C(d,p,\lambda,\Lambda)$ 是一个正常数。

本文其余部分安排如下：第二节汇集一些辅助结果并陈述我们的假设。第三节研究退化情形下解的梯度的 H¨older 正则性。最后一节则证明奇异情形下 H¨older 空间中的正则性估计。

2 预备知识

本节汇集基本概念，并详细说明本文中使用的主要假设。接下来，我们给出本文所研究的非局部算子的定义。

定义 2.1. 考虑 $\sigma \in (1, 2)$ 以及常数 $0 < \lambda \leq \Lambda$。我们将族 $\mathcal{K}_0$ 定义为满足以下条件的可测核 K 的集合: $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$\lambda \frac{C_{d,\sigma}}{|x|^{d+\sigma}} \leq K(x) \leq \Lambda \frac{C_{d,\sigma}}{|x|^{d+\sigma}},$$

其中 $C_{d,\ \sigma} > 0$ 是一个归一化常数。

定义 2.2. 给定 $u:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个可测集合，且 $K \in \mathcal{K}_0$，我们将算子 I_K 定义为

$$I_K[\Omega](u, x) := C_{d,\sigma} P.V. \int_\Omega (u(x + y) - u(x))\, K(y)\ \mathbf{d}y, \tag{5}$$

其中 P.V. 表示该积分的柯西主值。

定义 2.3. 我们称 u: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 属于 $L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$，如果

$$\|u\|_{L^1_\sigma} := \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)| \frac{1}{1 + |x|^{d+\sigma}} \mathbf{d}x < +\infty. \tag{6}$$

在本文中，我们考虑 σ 的不同取值范围，以获得主要结果。因此，我们采用记号 $\mathcal{I}_\sigma(u, x)$，以强调按 (5) 定义的非局部算子类对 σ 的依赖。

在定理 1.1 和定理 1.2 的证明中，我们使用了一些缩放函数，它们满足方程 (1) 的一个变体，即:

$$-\left(|Du + \xi|^p + a(x)|Du + \xi|^q\right) \mathcal{I}_\sigma(u, x) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1,$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^d$。因此，我们对上述方程定义解，并证明一些结果，而不只针对方程 (1)。我们首先给出方程 (1) 的黏性解的定义。考虑一族核 $\{K_{ij}\}_{i,\ j} \subseteq \mathcal{K}_0$。

定义 2.4（黏性解）。我们称 $u \in C(\overline{B}_1) \cap L^1_\sigma$ 是方程 (1) 的黏性次解，如果对于任意 $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$，以及所有满足 $u - \varphi$ 在 x_0 处取得局部极大值的 $x_0 \in B_1$，都有

$$-\left(|D\varphi + \xi|^p + a(x_0)|D\varphi + \xi|^q\right) \mathcal{I}_\delta(u, \varphi, x_0) \leq f(x_0) \quad in \quad B_1,$$

其中，算子 $\mathcal{I}_\delta$ 定义为

$$\mathcal{I}_\delta(u, \varphi, x) := \inf_i \sup_j \left(I_{K_{ij}}[B_\delta](\varphi, x) - I_{K_{ij}}[B^c_\delta](u, x) \right).$$

类似地，如果对于任意 $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 以及所有满足 $u - \varphi$ 在 x_0 处取得局部最小值的 $x_0 \in B_1$，我们都有 .....那么称 $u \in C(\mathbb{R}^d)$ 是方程 (1) 的黏性上解。

$$-\left(|D\varphi + \xi|^p + a(x_0)|D\varphi + \xi|^q\right) \mathcal{I}_\delta(u, \varphi, x_0) \geq f(x_0) \quad in \quad B_1.$$

最后，如果 $u \in C(\mathbb{R}^d)$ 既是粘性次解又是粘性上解，则称其为方程 (1) 的黏性解。

接下来，我们定义所谓的近似解。其主要目的是帮助我们处理奇异情形，但它也是证明定理 1.1 的一个基本概念。

定义 2.5（近似黏性解）。设 ξ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个向量。若 $u \in C(\overline{B}_1) \cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$ 是下列方程的近似黏性解

$$-\left(|Du+\xi|^p + a(x)|Du+\xi|^q\right)\mathcal{I}_\sigma(u,x) = f \quad in \quad B_1, \tag{7}$$

如果存在 序列 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in C(B_1) \cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$、$(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$、$(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$，且 $C_1 > 0$ 满足 g

$$u_j \ converges \ locally \ uniformly \ to \ u \ in \ B_1,$$

$$\|u_j\|_{L^1_\sigma} \le C_1(1+|x|^{1+\alpha}), \ \ 1+\alpha \in (0,\sigma),$$

$$\xi_j \to \xi, \ c_j \to 0,$$

使得 u_j 是下列方程的黏性解

$$-\left((|Du_j+\xi_j|+c_j)^p + a(x)(|Du_j+\xi_j|+c_j)^q\right)\mathcal{I}_\sigma(u_j,x) = f \quad in \quad B_1.$$

此外，若 $0 < p \le q$， c_j 还必须满足 $jc_j^p \to \infty$，如 $j \to \infty$。若 $\xi = 0$，则对所有 $j \in \mathbb{N}$，取 $\xi_j = 0$。

注 2.1. 若 $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个测试函数，在点 x_0 处从上方接触 u，那么由于 $u_j \to u$在 B_1 中局部一致地，我们有一个序列 $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使得 $\varphi_j \to \varphi$ 在B_1 中局部一致地，并且 φ_j 在点 x_j 处从上方接触 u_j，其中 $x_j \to x_0$。由于 u_j 是一个黏性解，这意味着，

$$-\left((|D\varphi_j(x_j)|+c_j)^p + a(x_j)(|D\varphi_j(x_j)|+c_j)^q\right)\mathcal{I}_\delta(u_j,\varphi_j,x_j) \le f(x_j).$$

注 2.2（缩放性质）。在全文中，我们要求

$$\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le \varepsilon, \tag{8}$$

对于某个 ε 待定。(8) 中的条件并不具有限制性。事实上，考虑函数

$$v(x) = \frac{u(x)}{K},$$

其中 $K > 0$。注意， v 在 B_1 中也是 (1) 的一个黏性解，且

$$\tilde{a}(x) := K^{q-p}a(x) \quad and \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{K^{p+1}}f(x).$$

因此，通过选择

$$K = \left(\varepsilon^{-1}\|f\|_{L^\infty(B_1)}\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

不失一般性，我们可以假设 (8) 成立。

2.1 主要假设

下文将详细说明本文的假设。第一个假设涉及算子$\mathcal{I}_\sigma$的次数。

A 1（算子的阶数）。我们假设 $1 < \sigma < 2$。

为确保式 (5) 中的非局部算子定义良好，我们必须对函数 u 在无穷远处的增长施加进一步条件。下一个假设正是对此作出的规定。

A 2（无穷远处的增长条件）。我们假设 $u \in L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$。

我们指出，有界函数满足增长条件 (6)。下一个假设涉及源项。

A 3（源项的正则性）。我们假设 $f \in L^\infty(B_1) \cap C(B_1)$。

虽然我们要求 $f \in C(B_1)$，但所有估计只取决于 f 的 $L^\infty(B_1)$ 范数。下一个假设涉及 a 的正则性。最后一个假设确保当 σ 趋于 2 时，算子 $\mathcal{I}_\sigma$ 收敛。

假设 4. 令 $\{K_{ij}\}_{i,j}$ 为 $\mathcal{K}_0$ 中的一族核。存在一个连续模 ω 和 $\{k_{ij}\}_{i,j} \in (\lambda, \Lambda)$，满足以下估计

$$\left|K_{ij}(x)|x|^{d+\sigma} + k_{ij}\right| \le \omega(|x|) \ \ for \ \ all\, i, j \ \ and \ \ |x| \le 1. \tag{9}$$

3 退化情形的分析

本节中，我们假设 $0 < p \le q$，即考虑退化情形。我们分两个小节给出结果：第一个小节证明定理 1.1，第二个小节证明定理 1.2。

3.1 $C^{1,\alpha}$ 正则性：通过近似黏性解

本小节致力于证明定理 1.1。我们首先介绍方程 (1) 的近似黏性解的一些性质。第一个性质指出，近似黏性解的集合包含于黏性解的集合中。

命题 3.1. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (7) 的一个近似黏性解。假设 A1-A3 成立，则 u 是同一方程的黏性解。

证明。令 $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 和 $x_0 \in B_1$，使得 $u - \varphi$ 在 x_0 处取得局部极大值。由定义 2.5 和注 2.1 可得

$$-\left[(|D\varphi_j(x_j) + \xi_j| + c_j)^p + a(x_j)(|D\varphi(x_j) + \xi_j| + c_j)^q\right] \mathcal{I}_\delta(u_j, \varphi_j, x_j) \le f(x_j),$$

其中 $\varphi_j \to \varphi$ 和 $u_j \to u$ 在 B_1、$x_j \to x_0$、$\xi_j \to \xi$ 和 $c_j \to 0$ 上局部一致地收敛。令 $j \to \infty$ 趋于极限，可得

$$-\left(|D\varphi(x_0)+\xi|^p + a(x_0)|D\varphi(x_0)+\xi|^q\right)\mathcal{I}_\delta(u,\varphi,x_0) \le f(x_0),$$

这意味着 u 是 (7) 的黏性次解。我们回顾一下，收敛 $\mathcal{I}_\delta(u_j,\varphi_j,x_j) \to \mathcal{I}_\delta(u,\varphi,x_0)$ 可由 [16, 引理 5] 得出。同理，我们可以证明 u 也是黏性上解。证明至此完成。

□

注 3.1. 由于缺少唯一性结果，逆命题可能并不成立 $e.$

接下来，我们给出关于 (7) 的近似黏性解的一个稳定性结果。

命题 3.2（近似黏性解的弱稳定性）。设 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in C(\overline{B}_1)$, $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ 和 $f_j \in C(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ 满足

$$-\left(|Du_j+\xi_j|^p + a_j(x)|Du_j+\xi_j|^q\right)\mathcal{I}_\sigma(u_j,x) = f_j \quad in \quad B_1$$

近似粘性解意义下。假设 A1-A3 成立。进一步假设存在函数 $u \in C(\overline{B}_1) \cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$，使得 $u_j \to u$ 在 B_1 上局部一致地收敛，且 $\|f_j\|_{L^\infty(B_1)} \le 1/j$。那么，$u$ 是一个黏性解

$$\mathcal{I}_\sigma(u,x) = 0 \quad in \quad B_1. \tag{10}$$

证明。根据定义 2.5，存在序列 $(u_j^m)_{m\in\mathbb{N}} \in C(B_1)\cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$、$(\xi_j^m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ 和 $(c_m)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$，满足

$$u_j^m \text{ converges locally uniformly to } u_j \text{ in } B_1,$$

$$c_m \to 0, \quad mc_m^p \to \infty,$$

当 $m \to \infty$ 时，u_j^m 是方程的黏性解

$$-\left[(|Du_j^m+\xi_j^m|+c_m)^p + a_j(x)(|Du_j^m+\xi_j^m|+c_m)^q\right]\mathcal{I}_\sigma(u_j^m,x) = f_j \quad \text{in} \quad B_1,$$

对每个固定的 j。现在，我们考虑序列 $(u_j^j)_{j\in\mathbb{N}}$。我们有 $u_j^j \to u$ 在 B_1 中局部一致地成立，且 u_j^j 是方程的黏性解

$$-\left[(|Du_j^j+\xi_j^j|+c_j)^p + a_j(x)(|Du_j^j+\xi_j^j|+c_j)^q\right]\mathcal{I}_\sigma(u_j^j,x) = f_j \quad \text{in} \quad B_1.$$

因此，u_j^j 也是.....的黏性解

$$\begin{aligned}
-\mathcal{I}_\sigma(u_j^j,x) &= \frac{f_j}{\left[(|Du_j^j+\xi_j^j|+c_j)^p + a_j(x)(|Du_j^j+\xi_j^j|+c_j)^q\right]} \\
&\le \frac{\|f_j\|_{L^\infty(B_1)}}{\left[(|Du_j^j+\xi_j^j|+c_j)^p\right]} \\
&\le \frac{1}{jc_j^p}.
\end{aligned}$$

根据定义， $jc_j^p \to \infty$，当 $j \to \infty$ 时，我们推知 u 是.....的粘性次解

$$-\mathcal{I}_\sigma(u,x) \le 0 \quad \text{in} \quad B_1.$$

类似地，我们证明 u 也是粘性上解。至此证明完成。 □

现在，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们考虑以下非局部一致椭圆方程

$$-\left[(|Du_j|+c_j)^p + a(x)(|Du_j|+c_j)^q\right]\mathcal{I}_\sigma(u_j,x) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1. \tag{11}$$

我们将证明，方程 (11) 的黏性解序列 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in C(B_1) \cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$ 收敛到函数 $u \in C(B_1) \cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$，其中 u 是方程 (1) 的一个近似黏性解，且具有适当的边界数据。为此，我们先为方程 (11) 的解建立一个紧性结果。

引理 3.1. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (11) 的一个黏性解。假设 A1-A3 成立。那么 u_j 局部 Lipschitz 连续，即

$$|u_j(x) - u_j(y)| \le C|x-y| \quad \textit{for all } x, y \in B_{1/2},$$

其中常数 $C > 0$ 不依赖于 j。

证明。我们考虑 $\tilde{\psi}:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 一个非负光滑函数，使得

$$\tilde{\psi} = 0 \quad \text{in} \quad B_{1/2}, \quad \tilde{\psi} = 1 \quad \text{in} \quad B^c_{3/4},$$

并定义

$$\psi = (\operatorname{osc}_{B_1} u_j + 1)\tilde{\psi}.$$

令 $\alpha \in (0,1)$ 为稍后确定的量，并将 $\varphi:\ [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\varphi(t) = \begin{cases} t - t^{1+\alpha}, & t \in [0,t_0] \\ \varphi(t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

其中， $t_0 > 0$ 的选取充分小，使得 $\varphi > 0$ 属于 $(0,+\infty)$。由 φ 的定义可知，它在 $(0,t_0)$ 上光滑，并在 $[0,t_0)$ 上可微。

考虑由 $\phi,\Phi:\ \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 定义的 $\phi,\Phi:\ \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，如下

$$\phi(x,y) := L\varphi(|x-y|) + \psi(y)$$

and

$$\Phi(x,y) := u_j(x) - u_j(y) - \phi(x,y).$$

由 Φ 的连续性可知， Φ 在 $\overline{B}_1 \times \overline{B}_1$ 中的最大值于 $(\bar{x},\bar{y})$ 处取得。因此，只需证明 $\Phi(\bar{x},\bar{y}) \le 0$。反设

$$\Phi(\bar{x},\bar{y}) > 0.$$

由此可得

$$u_j(\bar{x}) - u_j(\bar{y}) - L\varphi(|\bar{x}-\bar{y}|) - \psi(\bar{y}) > 0.$$

因此

$$\operatorname{osc}_{B_1} u - (\operatorname{osc}_{B_1} u + 1)\tilde{\psi}(\bar{y}) - L\varphi(|\bar{x}-\bar{y}|) > 0.$$

˜注意，若 $\bar{y} \in B^c_{3/4}$，则 $\psi \equiv 1$，这意味着

$$-1 - L\varphi(|\bar{x}-\bar{y}|) > 0,$$

这就产生了矛盾，因此 $\bar{y} \in B_{3/4}$。由于 $L\varphi(|\bar{x}-\bar{y}|) \le \operatorname{osc}_{B_1} u$，取 L 充分大，我们可以假设 $\bar{x} \in B_{7/8}$。最后，显然 $\bar{x} \neq \bar{y}$，否则我们将有$\Phi(\bar{x},\bar{y}) < 0$。

现在，我们计算$(\bar{x},\bar{y})$处的 $D_x\phi$ 和 $D_y\phi$

$$D_x\phi(\bar{x},\bar{y}) = L_2\varphi'(|\bar{x}-\bar{y}|)|\bar{x}-\bar{y}|^{-1}(\bar{x}-\bar{y})$$

and

$$-D_y\phi(\bar{x},\bar{y}) = L_2\varphi'(|\bar{x}-\bar{y}|)|\bar{x}-\bar{y}|^{-1}(\bar{x}-\bar{y}) - D\psi(\bar{y}).$$

记

$$\xi_{\bar{x}} := D_x\phi(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{and} \quad \xi_{\bar{y}} := D_y\phi(\bar{x},\bar{y}).$$

我们有，$u_j - \Phi_{\bar{y}}$ 在 $\bar{x}$处取得最大值，其中 $\Phi_{\bar{y}}(x) := u_j(\bar{y}) + \phi(x,\bar{y})$。因此，由于 u_j 是方程（11）的一个黏性解，我们得到以下粘性不等式

$$-\left[(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^p + a(\bar{x})(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^q\right]\mathcal{I}_\delta(u_j, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) \le f(\bar{x}).$$

现在，我们取 L 充分大，仅依赖于振荡量$_{B_1} u$，使得

$$(|\xi_{\bar{x}}| + c_j), (|\xi_{\bar{y}}| + c_j) \ge 1/2,$$

这意味着

$$\begin{aligned} -\mathcal{I}_\delta(u, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) &\le \frac{\|f\|_{L^\infty(B_1)}}{\left[(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^p + a(\bar{x})(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^q\right]} \\ &\le \frac{\|f\|_{L^\infty(B_1)}}{(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^p} \\ &\le 2\|f\|_{L^\infty(B_1)}. \end{aligned}$$

同理，我们可以得到 $-\mathcal{I}_\delta(u, -\Phi_{\bar{x}}, \bar{y}) \ge -2\|f\|_{L^\infty\,(B_1)}$，因此

$$\mathcal{I}_\delta(u, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) - \mathcal{I}_\delta(u, -\Phi_{\bar{x}}, \bar{y}) \ge -4\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

此时，我们着重估计上述不等式的左端，它由一致椭圆非局部算子构成。接下来的步骤沿用 [3, 6] 中的论证，为完整起见，我们在此给出。

对于 $|z| \le 1/10$，我们有 $\bar{x}+z, \bar{y}+z \in \overline{B}_1$。于是，存在一个核 K，属于族 $\mathcal{K}_0$，使得

$$-C(\|f\|_\infty + \operatorname{osc}_{B_1} u_j + \|u_j\|_{L^1_\sigma}) - 1 \le I_1 + I_2, \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_K[B_\delta](\phi(\cdot,\bar{y}),\bar{x}) - I_K[B_\delta](-\phi(\bar{x},\cdot),\bar{y}), \\ I_2 &:= I_K[B_{1/10}\setminus B_\delta](u_j,\xi_{\bar{x}},\bar{x}) - I_K[B_{1/10}\setminus B_\delta](u_j,\xi_{\bar{y}},\bar{y}), \end{aligned}$$

且常数 $C>0$ 取决于椭圆性常数。

我们记 $e=\bar{x}-\bar{y}$、$\hat{e}=e/|e|$ 和

$$\mathcal{C} = \{z \in B_\rho : |\langle \hat{e}, z\rangle| \ge (1-\eta)|z|\},$$

其中常数 $\eta \in \in (0,1)$ 和 $\rho \in \in (0, 1/10)$ 待定。由于 $(\bar{x},\bar{y})$ 是 Φ 的最大点，对所有 $z \in \overline{B}_{1/10}$，我们有以下不等式

$$\begin{aligned} u_j(\bar{x}+z) - u_j(\bar{x}) &\le u_j(\bar{y}+z) - u_j(\bar{y}) + \phi(\bar{x}+z,\bar{y}) - \phi(\bar{x},\bar{y}), \\ u_j(\bar{y}+z) - u_j(\bar{y}) &\ge -\phi(\bar{x},\bar{y}+z) + \phi(\bar{x},\bar{y}), \\ u_j(\bar{x}+z) - u_j(\bar{x}) &\le \phi(\bar{x}+z,\bar{y}) - \phi(\bar{x},\bar{y}), \end{aligned}$$

因此，可以得到

$$\begin{aligned} I_K[\mathcal{C}\setminus B_\delta](u_j,\xi_{\bar{x}},\bar{x}) &\le I_K[\mathcal{C}\setminus B_\delta](\varphi,e), \\ I_K[\mathcal{C}\setminus B_\delta](u_j,\xi_{\bar{y}},\bar{y}) &\ge -I_K[\mathcal{C}\setminus B_\delta](\varphi,e) - C\operatorname{osc}_{B_1} u_j, \end{aligned}$$

其中常数 $C>0$ 当 $\delta \to 0$时从上方和下方均一致有界。此外，对于每个满足 $\bar{x}+z$ 的集合 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$，都有 $\bar{y}+z \in \overline{B}_1$

$$I_K[\mathcal{O}](u_j,\varphi,\bar{x}) - I_K[\mathcal{O}](u_j,\varphi,\bar{y}) \le I_K[\mathcal{O}](\psi,\bar{y}) \le C\Lambda \operatorname{osc}_{B_1} u_j,$$

其中，后一个不等式由 ψ 的光滑性得出。

然后，我们将这些不等式代入 (12)，得出

$$-C(\|f\|_\infty + \operatorname{osc}_{B_1} u_j + \|u_j\|_{L^1_\sigma} + 1) \le 2I_K[\mathcal{C}\setminus B_\delta](\varphi,e) + I_1,$$

并且我们注意到，当 $\delta \to 0$ 时，项 $I_1 \to 0$；同时，由控制收敛定理可得$I_K[\mathcal{C}\setminus B_\delta](\varphi,e) \to I_K[\mathcal{C}](\varphi,e)$，当 $\delta \to 0$ 时成立。

令 $\delta \to 0$，并取 $\eta = c_1|e|^{2\alpha}, \rho = c_1|e|^\alpha$，其中某个普适常数为 $c_1>0$。利用 [3, 推论 9]，中的估计，我们得到

$$I_K[\mathcal{C}](\varphi,e) \le -cL|e|^{1-\sigma+\alpha(N+2-\sigma)}, \tag{13}$$

对某个 $c = c(\lambda,\Lambda,d) > 0$，使得 $\epsilon_0 \le c \le \epsilon_0^{-1}$对所有 $\sigma \in (1,2)$ 均成立，其中 $\epsilon_0 \in (0,1)$ 仅依赖于 d。

现在，我们将 $\alpha > 0$ 取足够小，从而得到

$$-\theta := 1 - \sigma + \alpha(N + 2 - \sigma) \leq (1 - \sigma)/2 < 0.$$

因此，将上述估计代入 (12)，可得

$$-C(\|f\|_\infty + \mathrm{osc}_{B_1}(u_j) + \|u_j\|_{L^1_\sigma} + 1) \leq -cL|\bar{x} - \bar{y}|^{-\theta},$$

并且由于

$$|\bar{x} - \bar{y}| \leq C_2 \mathrm{osc}_{B_1} u_j L^{-1}$$

我们得到

$$-C_1 \left(\|f\|_{L^\infty(B_1)} + \mathrm{osc}_{B_1} u_j + \|u_j\|_{L^1_\sigma} + 1\right) \leq -cC_2 L^\theta.$$

因此，取

$$L := C_3 \left(\|f\|_{L^\infty(B_1)} + \mathrm{osc}_{B_1} u_j + 1\right),$$

其中 C_3 是一个足够大的常数，仅依赖于 λ、 Λ、 d ，于是得到矛盾。证明至此完成。

□

命题 3.3（近似黏性解的存在性）。假设 A1-A3 成立。那么，方程 (1) 至少存在一个近似黏性解 $u \in C(B_1)$。

证明。考虑方程

$$\begin{cases} -\left[(|Du_j| + \frac{1}{j^{1/2p}})^p + a(x)(|Du_j| + \frac{1}{j^{1/2p}})^q\right] \mathcal{I}_\sigma(u_j, x) = f(x) & \text{in } B_1 \\ u_j(x) = g(x) & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B_1, \end{cases}$$

其中 $g \in L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$g(x) \leq 1 + |x|^{1+\alpha} \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

对任意 $1 + \alpha \in (0, \sigma)$。由于该算子是非局部一致椭圆的，依据 [4]，黏性解u_j 的存在性得以保证。由引理 3.1 可知，解 $u_j \in C^{0,\ 1}_{loc}(B_1)$ 满足的估计与 j 无关。因此，存在函数 $u_\infty \in C^\alpha_{loc}(B_1)$，对某个 $\alpha \in (0, 1)$，使得 $u_j \to u_\infty$ 在 B_1 中局部一致收敛，且 $u_\infty \equiv g$ 在 B_1 之外。令 $c_j := j^{1/2p}$，根据定义可直接得出，u_∞ 是方程 (1) 的一个近似黏性解。

□

如前所述，我们需要处理形如 (7) 的方程，因此首先证明这类方程解具有一定程度的紧性。

引理 3.2。设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (7) 的一个黏性解。假设 A1-A3 成立。存在常数 $c_0 > 1$ ，使得若 $|\xi| \geq c_0$，则 u 局部 Lipschitz 连续，即

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \quad \textit{for all } x, y \in B_{1/2},$$

其中常数 $C > 0$ 不依赖于 ξ。

证明。首先，我们将方程 (7) 改写如下

$$-(|\hat{\xi}+bDu|^p+\hat{a}(x)|\hat{\xi}+bDu|^q)\mathcal{I}_\sigma(u,x)=b^pf(x)\quad\text{in}\quad B_1, \tag{14}$$

其中 $\hat{\xi}=\xi/|\xi|$, $b=|\xi|^{-1}$ 和 $\hat{a}(x)=a(x)|\xi|^{q-p}$。

考虑到 与引理 3.1 中相同的记号，我们采用反证法，假设 g

$$\Phi(\bar{x},\bar{y})>0,$$

其中 $\bar{x},\bar{y}\in B_{9/10}$。

之后，我们继续计算 $(\bar{x},\bar{y})$ 处的 $D_x\phi$ 和 $D_y\phi$，并注意到 $u-\Phi_{\bar{y}}$ 在 $\bar{x}$ 处取得最大值。因此，由于 u 是方程 (14) 的黏性解，我们得到

$$-\left(|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{x}}|^p+\hat{a}(\bar{x})|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{x}}|^q\right)\mathcal{I}_\delta(u,\Phi_{\bar{y}},\bar{x})\le b^pf(\bar{x}).$$

类似地，我们有 $\bar{y}$ 处 u 的粘性不等式，

$$-\left(|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{y}}|^p+\hat{a}(\bar{y})|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{y}}|^q\right)\mathcal{I}_\delta(u,-\Phi_{\bar{x}},\bar{x})\ge b^pf(\bar{y}).$$

在下文中，通过选择 c_0 使得 $b\le 1/(2L(2+\alpha))$，我们可以得出

$$|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{x}}|,|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{y}}|\ge 1/2.$$

因此，前面的不等式意味着

$$\begin{aligned}
-\mathcal{I}_\delta(u,\Phi_{\bar{y}},\bar{x}) &\le \frac{b^p\|f\|_{L^\infty(B_1)}}{|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{x}}|^p+\hat{a}(\bar{x})|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{x}}|^q}\\
&\le \frac{b^p\|f\|_{L^\infty(B_1)}}{|\hat{\xi}+b\xi_{\bar{x}}|^p}\\
&\le \frac{2^p\|f\|_{L^\infty(B_1)}}{c_0^p}\\
&\le C_1\|f\|_{L^\infty(B_1)}.
\end{aligned}$$

类似地，$-\mathcal{I}_\delta(u,-\Phi_{\bar{x}},\bar{y})\ge -C_1\|f\|_{L^\infty(B_1)}$ 因此

$$\mathcal{I}_\delta(u,\Phi_{\bar{y}},\bar{x})-\mathcal{I}_\delta(u,-\Phi_{\bar{x}},\bar{y})\ge -2C_1\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

由此，我们可以仿照引理 3.1 完成证明。 □

下一个引理讨论 ξ范数的另一种情形，即 $|\xi|\le c_0$ 的情况 .

引理 3.3. 设 $u\in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (7) 的黏性解。假设 A1-A3 成立。若 $|\xi|\le c_0$，其中c_0 与前一个引理中的相同，则 u 局部 Lipschitz 连续，即

$$|u(x)-u(y)|\le C|x-y|\quad \textit{for all } x,y\in B_{1/2},$$

其中常数 $C>0$ 与 ξ无关。

证明。证明的总体思路与引理 3.2 的证明相同。我们按照前一个引理中的定义定义 ψ、ϕ 和 Φ。同样，我们可以假设 Φ 在 $(\bar{x},\ \bar{y}) \in B_{7/8} \times B_{7/8}$ 处取得最大值，并通过反证法进行论证，假设 $\Phi(\bar{x},\ \bar{y}) < 0$。取足够大的 L，其大小仅取决于 $\operatorname{osc}_{B_1} u$ 和 c_0，我们便可推得

$$|\xi + \xi_{\bar{x}}|, |\xi + \xi_{\bar{y}}| \geq 1.$$

由于 u 是方程 (7) 的粘性解，我们有

$$-\left(|\xi + \xi_{\bar{x}}|^p + a(\bar{x})|\xi + \xi_{\bar{x}}|^q\right) \mathcal{I}_\delta(u, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) \leq f(\bar{x}),$$

这意味着

$$-\mathcal{I}_\delta(u, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) \leq \|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

类似地，$-\mathcal{I}_\delta(u, -\Phi_{\bar{x}}, \bar{y}) \geq -\|f\|_{L^\infty(B_1)}$ 这意味着

$$\mathcal{I}_\delta(u, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) - \mathcal{I}_\delta(u, -\Phi_{\bar{x}}, \bar{y}) \geq -2\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

由此，我们可以按照引理 3.1 中的方法继续完成证明。 □

结合引理 3.2 和引理 3.3，我们得到方程 (7) 的解的紧性结果。特别地，我们得到方程 (1) 的粘性解的利普希茨估计。

命题 3.4. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (7) 的粘性解。假设 A1-A3 成立。则 u 局部 Lipschitz 连续，即

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \quad \textit{for all } x, y \in B_{1/2},$$

其中常数 $C > 0$ 不依赖于 ξ。

接下来的引理是证明定理 1.1 所需论证的核心。

引理 3.4. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (7) 的归一化近似粘性解。假设 A1-A3 成立。给定 $\mathfrak{M}$、$\delta > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1)$，存在 $\varepsilon > 0$，使得若

$$|u(x)| \leq \mathfrak{M}\left(1 + |x|^{1+\alpha}\right) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^d \tag{15}$$

and

$$\|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon,$$

那么我们可以找到一个函数 $h \in \mathcal{C}^{1,\bar{\alpha}}_{loc}(B_1)$，满足 $\bar{\alpha} \in (0, 1)$，并且

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \leq \delta.$$

证明。我们通过矛盾来论证。也就是说，存在 $\mathfrak{M}_0, \delta_0 > 0, \alpha_0 \in (0, 1)$ 以及序列 $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$、$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$、$(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使得 u_j 是下列方程的近似黏性解

$$-\left(|Du_j + \xi_j|^p + a_j(x)|Du_j + \xi_j|^q\right) \mathcal{I}_\sigma(u_j, x) = f_j(x) \quad \text{in} \quad B_1, \tag{16}$$

$$|u_j(x)| \le \mathfrak{M}_0 \left(1 + |x|^{1+\alpha_0}\right) \quad \text{in } \mathbb{R}^d,$$

and

$$\|f_j\|_{L^\infty(B_1)} \le 1/j,$$

然而

$$\|u_j - h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \ge \delta_0 \tag{17}$$

对所有 $h \in \mathcal{C}^{1,\bar{\alpha}}_{loc}(B_1)$。

由命题 3.4，我们可以保证存在一个函数 u_∞，使得 $u_j \to u_\infty$ 在 B_1 中局部一致地成立。回想一下，根据命题 3.1，近似黏性解也是黏性解。矛盾假设结合命题 3.2，使我们能够在 (16) 中取极限，并得出 u_∞ 是以下方程的黏性解

$$-\mathcal{I}_\sigma(u_\infty, x) = 0 \quad \text{in} \quad B_{9/10}.$$

因此，我们推断 u_∞ 属于 $C^{1,\alpha}_{loc}$ 类。最后，取 $h = u_\infty$，当 j 充分大时，我们便与 (17) 矛盾。

□

命题 3.5. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (1) 的一个近似黏性解。假设 A1-A3 成立。给定 $\mathfrak{M} > 0$，存在 $\varepsilon > 0$，使得若

$$|u(x)| \le \mathfrak{M}\left(1 + |x|^{1+\alpha}\right) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^d$$

and

$$\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le \varepsilon,$$

可以找到一个常数 $0 < \rho \ll 1/2$ 和一个仿射函数 ℓ，使得

$$\|u - \ell\|_{L^\infty(B_\rho)} \le \rho^{1+\alpha},$$

对每个 $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$。

证明。设 $h \in \mathcal{C}^{1,\bar{\alpha}}(B_{3/4})$ 是引理 3.4 中的函数，使得

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \le \delta.$$

根据 h 已有的正则性，我们得到

$$\|h - [h(0) + Dh(0) \cdot x]\|_{L^\infty(B_\rho)} \le C_0 \rho^{1+\bar{\alpha}},$$

其中 $C_0 = C_0(\lambda, \Lambda, d, p)$ 是一个正的常数。令 $\ell(x) := h(0) + Dh(0) \cdot x$，利用三角不等式，我们得到

$$\begin{aligned} \sup_{B_\rho} |u(x) - \ell(x)| &\le \sup_{B_\rho} |u(x) - h(x)| + \sup_{B_\rho} |h(x) - \ell(x)| \\ &\le \delta + C_0 \rho^{1+\bar{\alpha}} \\ &\le \rho^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

前提是我们选择 ρ 和 δ，使得

$$\rho := \min\left[\left(\frac{1}{2C_0}\right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}-\alpha}}, \left(\frac{1}{(1+C_0)100}\right)^{\frac{1}{\bar{\alpha}-\alpha}}\right] \quad \text{and} \quad \delta := \frac{\rho^{1+\alpha}}{2}. \tag{18}$$

请注意，δ 的统一选取通过引理 3.4 确定了 ε 的取值。 □

命题 3.6. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$是方程 (1) 的一个近似黏性解。假设 A1-A3 均成立。给定 $\mathfrak{M} > 0$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得，若

$$|u(x)| \le \mathfrak{M}\left(1 + |x|^{1+\alpha}\right) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^d$$

and

$$\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le \varepsilon,$$

那么我们可以找到一个仿射函数序列 $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其形式为 $\ell_k(x) := a_k + b_k \cdot x$，并满足

$$\sup_{B_{\rho^k}} |u(x) - \ell_k(x)| \le \rho^{k(1+\alpha)}$$

使得

$$|a_{k+1} - a_k| \le C\rho^{k(1+\alpha)} \quad \textit{and} \quad |b_{k+1} - b_k| \le C\rho^{k\alpha} \tag{19}$$

对所有

$$\alpha \in \left(0, \min\left(\bar{\alpha}, \frac{\sigma-1}{p+1}\right)\right), \tag{20}$$

其中 $C = C(\lambda, \Lambda, d, p)$是一个正的常数。

证明。我们对 j 进行归纳论证。$j = 1$ 的情形正是命题 3.5 的内容。假设已对 $j = 1, \ldots, k$ 验证了该命题。我们将证明 $j = k+1$ 的情形。定义辅助函数 $v_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，使得

$$v_k(x) = \frac{u(\rho^k x) - \ell_k(\rho^k x)}{\rho^{k(1+\alpha)}}.$$

根据归纳假设$\|v_k\|_{L^\infty(\overline{B}_1)} \le 1$。此外，$v_k$ 满足

$$-\left(|Dv_k + \rho^k b_k|^p + \tilde{a}(x)|Dv_k + \rho^k b_k|^q\right)\mathcal{I}_\sigma(x, v_k) = \tilde{f}(x),$$

其中 $\tilde{a}(x) = a(\rho^k x)\rho^{k\alpha(q-p)}$，且 $\tilde{f}(x) = \rho^{k\sigma - k(\alpha+\alpha p+1)} f(\rho^k x)$。注意到 $\tilde{a}(x) \ge 0$，并且 $\tilde{a} \in C(B_1)$。令 $\bar{\alpha}$ 如式（20）所示，从而 $\sigma - \alpha(1+p) - 1 \ge 0$。这意味着 $\|f\|_{L^\infty(B_1)} \le \varepsilon$。现在，我们断言

$$|v_k(x)| \le 1 + |x|^{1+\bar{\alpha}} \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^d. \tag{21}$$

一旦我们验证了（21），就可以将命题 3.5 应用于 v_k，从而得到

$$\sup_{B_\rho} |v_k(x) - \tilde{\ell}_k(x)| \le \rho^{1+\alpha},$$

因此，

$$\sup_{B_{\rho^{k+1}}} |u(x) - \ell_{k+1}(x)| \le \rho^{k(1+\alpha)},$$

其中 $\ell_{k+1}(x) := \ell_k(x) + \rho^{k(1+\alpha)}\tilde{\ell_k}(\rho^{-k}x)$，满足 $|a_{k+1} - a_k| \le C\rho^{k(1+\alpha)}$ 和 $|b_{k+1} - b_k| \le C\rho^{k\alpha}$，从而完成证明。

我们再次采用归纳论证。对于情形 $k = 0$，取 $v_0 = u$。假设我们已经证明了情形 $k = 0, ..., m$ 下的结论。现在验证情形 $k = m + 1$。注意到

$$v_{m+1}(x) = \frac{v_m(\rho x) - \tilde{\ell}_m(\rho x)}{\rho^{1+\alpha}}.$$

如果 $|x|\rho > 1/2$，则有

$$\begin{aligned} |v_{m+1}(x)| &\le \rho^{-(1+\alpha)}\left(|v_m(\rho x)| + |\tilde{\ell}_m(\rho x)|\right) \\ &\le \rho^{-(1+\alpha)}(1 + \rho^{1+\bar{\alpha}}|x|^{1+\bar{\alpha}}) + \rho^{-(1+\alpha)}C_0(1 + \rho|x|) \\ &\le \rho^{(\bar{\alpha}-\alpha)}(5 + 6C_0)|x|^{1+\bar{\alpha}} \\ &\le |x|^{1+\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了 (18)。另一方面，如果 $|x|\rho \le 1/2$，则得到

$$\begin{aligned} |v_{m+1}(x)| &\le \rho^{-(1+\alpha)}(|v_m(\rho x) - \tilde{h}(\rho x)| + |\tilde{h}(\rho x) - \tilde{\ell}_m(\rho x)| \\ &\le \rho^{-(1+\alpha)}\left(\frac{\rho^{1+\alpha}}{2} + C_0\rho^{1+\bar{\alpha}}|x|^{1+\bar{\alpha}}\right) \\ &\le 1/2 + C_0\rho^{(\bar{\alpha}-\alpha)}|x|^{1+\bar{\alpha}} \\ &\le |x|^{1+\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

˜其中 h 来自引理 3.4，且我们在最后一个不等式中再次用到了 (18)。证明至此完成。 □

现在我们准备给出定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明。由 (19) 可知，序列 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 均为柯西序列。因此，存在常数 a_∞ 和 b_∞，使得

$$\lim_{j\to\infty} a_j = a_\infty \quad \text{and} \quad \lim_{j\to\infty} b_j = b_\infty.$$

此外，我们还有以下估计

$$|a_j - a_\infty| \le C\rho^{j(1+\alpha)} \quad \text{and} \quad |b_j - b_\infty| \le C\rho^{j\alpha}.$$

固定 $0 < \rho \ll 1$，并令 $k \in \mathbb{N}$ 满足 $\rho^{k+1} < r < \rho^k$。根据前面的计算，我们估计

$$\begin{aligned} \sup_{B_r}|u(x) - \ell_\infty(x)| &\le \sup_{B_{\rho^k}}|u(x) - \ell_k(x)| + \sup_{B_{\rho^k}}|\ell_k(x) - \ell_\infty(x)| \\ &\le \rho^{k(1+\alpha)} + |a_k - a_\infty| + \rho^k|b_k - b_\infty| \\ &\le \rho^{k(1+\alpha)} + C\rho^{k(1+\alpha)} + C\rho^k \cdot \rho^{k\alpha} \\ &\le C\left(\tfrac{1}{\rho}\right)^{(1+\alpha)}\rho^{(k+1)(1+\alpha)} \\ &\le Cr^{(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

为完成证明，我们刻画系数 a_∞ 和 $b_{\infty\circ}$ 事实上，通过对不等式取极限

$$\sup_{B_{\rho^n}} |u(x) - \ell_n(x)| \le C\rho^{n(1+\alpha)}, \tag{22}$$

在 0 处取值，我们得到 $a_\infty = u(0,0)$。我们还可以得出 $b_\infty = Du(0,0)$，例如参见 [13]。我们已经证明，近似黏性解属于 $C^{1,\alpha}_{loc}$ 类，并且根据命题 3.3，它们存在。由于近似黏性解也是黏性解（命题 3.1），因此存在一个 $C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$ 黏性解满足方程 (1)。

□

3.2 $C^{1,\alpha}$ 正则性：关于 $2-\sigma$ 的小量条件

在本小节中，我们给出定理 1.2 的证明。我们从一个逼近引理开始，该引理使我们能够将模型与一个二阶局部方程联系起来。

引理 3.5. 设 $u \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (7) 的归一化黏性解。假设 A1-A4 均成立。给定 $\mathfrak{M}$、$\delta > 0$ 和 $\alpha \in (0,1)$，存在 $\varepsilon > 0$，使得如果

$$|u(x)| \le \mathfrak{M}\left(1 + |x|^{1+\alpha}\right) \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^d \tag{23}$$

and

$$|\sigma - 2| + \|f\|_{L^\infty(B_1)} \le \varepsilon,$$

那么我们可以找到一个函数 $h \in \mathcal{C}^{1,\bar\alpha}_{loc}(B_1)$，满足 $\bar\alpha \in (0,1)$，使得

$$\|u - h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \le \delta.$$

证明。我们用反证法。也就是说，存在 $\mathfrak{M}_0$、$\delta_0 > 0$、$\alpha_0 \in (0,1)$ 以及序列 $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$、$(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$、$(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$、$(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$，使得

$$-\left(|Du_j + \xi_j|^p + a_j(x)|Du_j + \xi_j|^q\right)\mathcal{I}_{\sigma_j}(u_j, x) = f_j(x) \quad \text{in} \quad B_1, \tag{24}$$

$$|u_j(x)| \le \mathfrak{M}_0\left(1 + |x|^{1+\alpha_0}\right),$$

and

$$|\sigma_j - 2| + \|f_j\|_{L^\infty(B_1)} \le 1/j,$$

然而

$$\|u_j - h\|_{L^\infty(B_{3/4})} \ge \delta_0 \tag{25}$$

对所有 $h \in \mathcal{C}^{1,\bar\alpha}_{loc}(B_1)$。

由于 $\sigma_j \to 2$，根据 $A4$，我们有 $\mathcal{I}_{\sigma_j} \to F_\infty$，其中 F_∞ 是一个一致椭圆算子。此外，根据命题 3.4，我们可以保证存在一个函数 u_∞，使得 $u_j \to u_\infty$ 在 $B_{3/4}$ 中。我们将证明 u_∞ 满足

$$F_\infty(D^2 u_\infty) = 0, \tag{26}$$

在黏性意义下。

我们首先证明 u_∞ 是一个粘性上解。设 $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个测试函数，在 $\tilde{x} \in B_1$ 处从下方严格接触 u_∞，即在 $\tilde{x}$ 的一个小邻域内，$\varphi(\tilde{x}) = u_\infty(\tilde{x})$ 且 $\varphi(x) < u_\infty(x$。为简单起见，我们可以取 $\tilde{x} = 0$，使得 $\varphi(0) = u_\infty(0) = 0$。

我们可以假设 φ 由二次多项式给出

$$\varphi(x) := \frac{1}{2}Mx \cdot x + b \cdot x.$$

由于 $u_j \to u\infty$ 关于 $B_{3/4}$一致，因此我们可以找到一点 x_j 以及一个形如.....的二次多项式 m

$$\varphi_j(x) := \frac{1}{2}M(x - x_j) \cdot (x - x_j) + b \cdot (x - x_j) + u_j(x_j)$$

使得 φ_j 在原点的一个小邻域内从下方于 x_j 处与 u_j 相切。由于 u_j 满足方程 (24)，我们得到

$$-\left(|b + \xi_j|^p + a_j(x_j)|b + \xi_j|^q\right) \mathcal{I}_\delta(u_j, \varphi_j, x_j) \geq f_j(x_j).$$

接下来，我们考察两种情形。首先考虑序列 $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 无界的情形。在这种情形下，我们可以找到一个子序列 ξ_j，使得当 $j \to \infty$时，$|\xi_j| \to \infty$。取充分大的 $j \in \mathbb{N}$，使得 $|\xi_j| \geq \max\{1, 2|b|\}$。首先，注意到

$$\frac{1}{|b + \xi_j|^p} \leq \frac{2^p}{|\xi_j|^p} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty,$$

这意味着，

$$\left|\frac{f_j(x_j)}{|b + \xi_j|^p + a_j(x)|b + \xi_j|^q}\right| \leq \frac{2^p}{j|\xi_j|^p} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad j \to \infty.$$

因此，在式 (24) 中取极限后，我们得出

$$-F_\infty(M) = -\lim_{j\to\infty} \mathcal{I}_\delta(u_j, \varphi_j, x_j) \geq -\lim_{j\to\infty} \frac{2^p}{j|\xi_j|^p} = 0.$$

另一方面，如果序列 $(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 有界，那么取一个子序列后，ξ_j 收敛到 ξ_∞。因此，当 j趋于无穷时，$\xi_j + b$收敛到 $\xi_\infty + b$。注意，如果 $|\xi_\infty + b| > 0$，那么当 j 充分大时，$|\xi_j + b| \geq \frac{1}{2}|\xi_\infty + b| > 0$。因此，我们得到

$$-F_\infty(M) = -\lim_{j\to\infty} \mathcal{I}_\delta(u_j, \varphi_j, x_j) \geq -\lim_{j\to\infty} \frac{2^p}{j|\xi_\infty + b|^p} = 0.$$

接下来，我们分析 $|\xi_\infty + b| = 0$的情形。反设

$$-F_\infty(M) < 0. \tag{27}$$

由于 F_∞ 是一致椭圆的，因此 M 至少有一个正特征值。定义 Γ 为由 M 的非负特征值所生成的所有特征子空间的直和，并令 Π_Γ 为到 Γ上的正交投影。由于 $|\xi_\infty + b| = 0$，因此要么 $\xi_\infty = -b$ 且 $|\xi_\infty|, |b| > 0$，要么 $|\xi_\infty| = |b| = 0$。

我们首先分析 $\xi_\infty = -b$ 且 $|\xi_\infty|, |b| > 0$ 的情形。回想一下，φ 从下方在 0 处与 u_∞ 相切，那么当 $k > 0$ 充分小时，函数

$$\phi_k(x) := \frac{1}{2}Mx \cdot x + b \cdot x + k|\Pi_\Gamma(x)|$$

在原点邻域内从下方于 $\tilde{x}_j$ 处与 u_j 相切。由于序列 $\{\tilde{x}_j\}$ 有界，经过抽取一个子序列，我们得到对于某个 $\tilde{x}_\infty \in B_1$， $\tilde{x}_j \to \tilde{x}_\infty$。现在，我们研究两种情形： $\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty) = 0$ 和 $\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty) \neq 0$。在情形 $\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty) = 0$ 中，我们有

$$|\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty)| = \max_{e\in\mathbb{S}^{d-1}} e\cdot\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty) = \min_{e\in\mathbb{S}^{d-1}} e\cdot\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty),$$

因此，我们可以将函数 ϕ_k 改写为

$$\phi_k(x) := \frac{1}{2}Mx\cdot x + b\cdot x + ke\cdot\Pi_\Gamma(x) \quad \text{for} \quad \text{all} \quad e\in\mathbb{S}^{d-1}.$$

注意到

$$D\left(e\cdot\Pi_\Gamma(x)\right) = \Pi_\Gamma(e), \ \text{ and } \ D^2(e\cdot\Pi_\Gamma(x)) = 0.$$

此外，

$$e\in\mathbb{S}^{d-1}\cap\Gamma \Rightarrow \Pi_\Gamma(e) = e \quad \text{and} \quad e\in\mathbb{S}^{d-1}\cap\Gamma^\perp \Rightarrow \Pi_\Gamma(e) = 0. \tag{28}$$

如果 $|M\tilde{x}_\infty| = 0$，那么对于所有足够大的 j，都有 $|M\tilde{x}_j| + |b+\xi_j| \le k/2$，从而 $|M\tilde{x}_j + b + \xi_j + ke| \ge k/2$。因此

$$\begin{aligned} -F_\infty(M) &= -\lim_{j\to\infty}\mathcal{I}_\delta(u_j,\varphi_j,\tilde{x}_j) \\ &\ge -\lim_{j\to\infty}\left|\frac{f_j(\tilde{x}_j)}{|M\tilde{x}_j+b+\xi_j+ke|^p + a_j(\tilde{x}_j)|M\tilde{x}_j+b+\xi_j+ke|^q}\right| \\ &\ge -\lim_{j\to\infty}\frac{2^p}{jk^p} \\ &= 0. \end{aligned}$$

这意味着 $-F_\infty(M) \ge 0$，这与（27）矛盾。

现在假设 $|M\tilde{x}_\infty| > 0$ 且 $\Gamma \equiv \mathbb{R}^d$。利用（28），我们取 $e\in\mathbb{S}^{d-1}$ 使得

$$|M\tilde{x}_\infty + k\Pi_\Gamma(e)| = |M\tilde{x}_\infty + ke| > 0.$$

因此，对于所有足够大的 j，我们有

$$|M\tilde{x}_j + ke| \ge \frac{1}{2}|M\tilde{x}_\infty + ke| > 0 \text{ and } |b+\xi_j| \le \frac{1}{4}|M\tilde{x}_\infty + ke|.$$

若 $\Gamma \not\equiv \mathbb{R}^d$，则我们可以找到 $e\in\mathbb{S}^{d-1}\cap\Gamma^\perp$，使得根据 (28)，有

$$|M\tilde{x}_\infty + k\Pi_\Gamma(e)| = |Mx_\infty| > 0.$$

因此，对于所有足够大的 j，我们有

$$|M\tilde{x}_j| \ge \frac{1}{2}|M\tilde{x}_\infty| \text{ and } |b+\xi_j| \le \frac{1}{4}|M\tilde{x}_\infty|.$$

在这两种情况下，我们都得到

$$|M\tilde{x}_j + b + \xi_j + k\Pi_\Gamma(e)| \ge \frac{1}{4}|M\tilde{x}_\infty + k\Pi_\Gamma(e)| > 0.$$

因此，

$$\begin{aligned} -F_\infty(M) &= -\lim_{j\to\infty} \mathcal{I}_\delta(u_j,\varphi_j,\tilde{x}_j) \\ &\geq -\lim_{j\to\infty} \left| \frac{f_j(\tilde{x}_j)}{|M\tilde{x}_j+b+\xi_j+k\Pi_\Gamma(e)|^p + a_j(\tilde{x}_j)\,|M\tilde{x}_j+b+\xi_j+k\Pi_\Gamma(e)|^q} \right| \\ &\geq -\lim_{j\to\infty} \frac{2^{2p}}{j|M\tilde{x}_\infty+k\Pi_\Gamma(e)|} \\ &= 0, \end{aligned}$$

这再次与 (27) 矛盾。

最后，考虑 $|\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty)|>0$ 的情形。和之前一样，当 j 充分大时，我们得到 $\Pi_\Gamma(\tilde{x}_j)>0$。由此可知，映射 $x\longrightarrow|\Pi_\Gamma(x)|$ 在 $\tilde{x}_j$ 的某个邻域内光滑且凸。由于 Π_Γ 是一个投影，我们有

$$\Pi_\Gamma(x)D(\Pi_\Gamma(x))=\Pi_\Gamma(x) \quad\text{and}\quad D^2\left(\Pi_\Gamma(x)\right)\geq 0. \tag{29}$$

因此，

$$\mathcal{I}_\delta(u_j,\phi_k,\tilde{x}_j)\geq \frac{f_j(\tilde{x}_j)}{\left|M\tilde{x}_j+b+\xi_j+k\frac{\Pi_\Gamma(\tilde{x}_j)}{|\Pi_\Gamma(\tilde{x}_j)|}\right|^p + a_j(\tilde{x}_j)\left|M\tilde{x}_j+b+\xi_j+k\frac{\Pi_\Gamma(\tilde{x}_j)}{|\Pi_\Gamma(\tilde{x}_j)|}\right|^q}.$$

我们像之前一样处理 $e=e_j:=\frac{\Pi_\Gamma(\tilde{x}_j)}{|\Pi_\Gamma(\tilde{x}_j)|}$，即考察 $|M\tilde{x}_\infty|=0$ 和 $|M\tilde{x}_\infty|>0$ 的情形，分别得到

$$\mathcal{I}_\delta(u_j,\phi_k,\tilde{x}_j)\geq -\frac{2^p}{jk^p} \quad\text{and}\quad \mathcal{I}_\delta(u_j,\phi_k,\tilde{x}_j)\geq -\frac{2^{2p}}{j|Mx_\infty+k\Pi_\Gamma(e)|^p}.$$

因此，我们可以得出 $-F_\infty(M+D^2\left(\Pi_\Gamma(\tilde{x}_\infty)\right))\geq 0$，由 (29) 可知这意味着 $-F_\infty(M)\geq 0$。因此，我们得到与 (27) 矛盾。

为完成证明，我们需要分析 $|\xi_\infty|=|b|=0$ 的情形。我们像之前一样，现使用函数

$$\phi_k(x):=\frac{1}{2}Mx\cdot x+k|\Pi_\Gamma(x)|,$$

在原点附近于 $\tilde{x}_j$ 处从下方接触 u_j，从而得到矛盾。

因此，我们得出结论：u_∞ 是方程 (26) 的粘性上解。类似地，我们可以证明 u_∞ 也是方程 (26) 的下解，这意味着 u_∞ 是一个解。由于方程 (26) 的解局部属于 $C^{1,\,\bar{\alpha}}$ 类，我们可以取 $h=u_\infty$，由此与 (25) 矛盾。证明至此完成。 □

现在我们继续证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。由引理 3.5，我们可以在引理 3.5 的相同假设下证明与命题 3.5 和命题 3.6 相同的结果，随后定理 1.2 的证明便可完全仿照定理 1.1 的证明进行。

□

4 奇异情形的分析

本节讨论奇异情形 $-1<p\leq q<0$。为清晰起见，我们将本节分为两个小节：在第一个小节中，我们证明近似黏性解的存在性；在第二个小节中，我们建立正则性结果。

4.1 近似黏性解的存在性

对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们考虑非局部一致椭圆方程

$$-((|Du_j| + c_j)^p + a(x)(|Du_j| + c_j)^q)\mathcal{I}_\sigma(u_j, x) = f(x) \quad \text{in} \quad B_1, \tag{30}$$

其中，$(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个正实数序列，使得 $c_j \to 0$ 且 $c_j \le 1$ 对每个 j都成立。我们证明，方程 (30) 的黏性解序列 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$，其边界数据属于 $L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$，收敛到函数 $u_\infty \in C(\overline{B}_1) \cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$，该函数是方程 (1) 的近似黏性解。

我们先给出方程 (30) 解的一个紧性结果，该结果与 j 无关。

引理 4.1. 设 $u_j \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (30) 的一个黏性解。假设 A1-A3 成立。则 u_j 局部 Lipschitz 连续，即，

$$|u_j(x) - u_j(y)| \le M|x - y| \quad \textit{for all } x, y \in B_{1/2},$$

其中 $M > 0$ 不依赖于 j。

证明. 证明过程与引理 3.1 相同，因此我们只给出一些细节。考虑引理 3.1 中的 φ 和 ψ。与之前一样，我们定义 ϕ、Φ： $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 如下

$$\phi(x, y) := L\varphi(|x - y|) + \psi(y)$$

and

$$\Phi(x, y) := u_j(x) - u_j(y) - \phi(x, y).$$

由于 Φ 是连续函数，因此 Φ 在 $\overline{B}_1 \times \overline{B}_1$ 中的最大值于 $(\bar{x}, \bar{y})$ 处取得。我们采用反证法，假设

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) > 0,$$

并沿用引理 3.1 中的相同记号，可得

$$-((|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^p + a(\bar{x})(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^q)\mathcal{I}_\delta(u_j, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) \le f(\bar{x}).$$

注意到

$$|\xi_{\bar{x}}| \le L(2 + \alpha),$$

从而得到

$$\begin{aligned}
-\mathcal{I}_\delta(u_j, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) &\le \frac{\|f\|_{L^\infty(B_1)}}{(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^p + a(\bar{x})(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^q} \\
&\le \frac{\|f\|_{L^\infty(B_1)}}{(|\xi_{\bar{x}}| + c_j)^p} \\
&\le (L(2 + \alpha) + 1)^{-p}\|f\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\le C_1\|f\|_{L^\infty(B_1)}.
\end{aligned}$$

类似的推理可得 $-\mathcal{I}_\delta(u_j, -\Phi_{\bar{x}}, \bar{y}) \geq -C_2\|f\|_{L^\infty(B_1)}$，其中 C_1 和 C_2 是普适常数，因此

$$\mathcal{I}_\delta(u_j, \Phi_{\bar{y}}, \bar{x}) - \mathcal{I}_\delta(u_j, -\Phi_{\bar{x}}, \bar{y}) \geq -2\bar{C}\|f\|_{L^\infty(B_1)},$$

其中 C 是一个普适常数。

此后，我们可以完全按照命题 3.1 中的方法完成证明。 □

在下一个 结果中，我们证明方程 (1) 存在近似黏性解 .

命题 4.1. 假设 A1-A3 成立。那么，方程 (1) 至少存在一个近似黏性解 $u \in C(B_1)$。

证明。考虑方程

$$\begin{cases} [(|Du_j| + 1/j)^p + a(x)(|Du_j| + 1/j)^q]\,\mathcal{I}_\sigma(u_j, x) &= f(x) \quad \text{in} \quad B_1 \\ u_j(x) &= g(x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_1, \end{cases}$$

其中 $g \in L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$g(x) \leq 1 + |x|^{1+\alpha} \quad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $1+\alpha \in (0, \sigma)$。由于该算子是非局部一致椭圆算子，根据 [4]，可确保存在黏性解 u_j。由引理 4.1 可知，解 $u_j \in C^{0,1}$ 的估计与 j 无关。因此，存在 $u_\infty \in C_{loc}(B_1)$，使得 $u_j \to u_\infty$ 在 B_1 中局部一致地成立，且 $u_\infty \equiv g$ 在 B_1 外成立。令 $c_j := 1/j$，根据定义可直接得出，u_∞ 是方程 (1) 的一个近似黏性解。

□

4.2 $C^{1,\alpha}$-正则性估计

本小节旨在证明定理 1.3。我们首先给出方程 (1) 的近似黏性解的一个紧性结果。

注意，(30) 中的算子是一个非局部一致椭圆算子，因此对每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $u_j \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$。请注意，$u_j$ 的 $C^{1,\alpha}$-范数可能会随着 $j \to \infty$ 而退化。接下来我们将验证这种情况不会发生。

命题 4.2. 设 $u_j \in C(\overline{B}_1)$ 是方程 (30) 的黏性解。假设 A1–A4 均成立。那么 $u_j \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，其中 $\alpha \in (0, 1)$。此外，存在一个正数常数 $C = C(\lambda, \Lambda, d, p)$，使得

$$\|u_j\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\|u_j\|_{L^\infty(B_1)} + \|u_j\|_{L^1_\sigma} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}).$$

证明. 设 $\varphi_j \in C^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个在 x_j 处从下方接触 u_j 的测试函数。我们写出粘性不等式

$$-[(|D\varphi_j(x_j)| + c_j)^p + a(x_j)(|D\varphi_j(x_j)| + c_j)^q]\,\mathcal{I}_\delta(u_j, \varphi_j, x_j) \leq f(x_j).$$

这意味着

$$-\mathcal{I}_\delta(u_j, \varphi_j, x_j) \leq (|D\varphi_j(x_j)| + c_j)^{-p}\|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq (|D\varphi_j(x_j)| + 1)^{-p}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

由于 u_j 属于 $C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，且 φ_j 在 x_j处从下方与 u_j 相切，因此由引理 4.1 可得$|D\varphi_j(x_j)| = |Du_j(x_j)| \leq M$。于是

$$-\mathcal{I}_\sigma(u_j, x) \leq M^{-p}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

同样，我们可以证明

$$-\mathcal{I}_\sigma(u_j, x) \geq -M^{-p}\|f\|_{L^\infty(B_1)}.$$

因此，由 [16, 定理 52] 可得 $u_j \in C^{1,\alpha}_{loc}(B_1)$，并且

$$\|u_j\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\|u_j\|_{L^\infty(B_1)} + \|u_j\|_{L^1_\sigma} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}),$$

其中 $C > 0$ 是一个普适常数。 □

至此，我们可以证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。根据定义 2.5，存在序列 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in C(\overline{B}_1) \cap L^1_\sigma(\mathbb{R}^d)$，以及 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$，使得 u_j 在 B_1 和 $c_j \to 0$中局部一致地收敛到 u，且 u_j 是下列方程的黏性解

$$-\left((|Du_j| + c_j)^p + a(x)(|Du_j| + c_j)^q\right)\mathcal{I}_\sigma(u_j, x) = f \quad \text{in} \quad B_1.$$

由命题 4.2 可知，u_j 属于 $C^{1,\alpha}_{loc}$，且满足以下估计

$$\|u_j\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\|u_j\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}).$$

其中，$C > 0$ 是一个不依赖于 j的常数。

将上述估计中的极限取为 $j \to \infty$，并结合 u_j 在 B_1中局部一致地收敛到 u 这一事实，我们得到以下估计

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{1/2})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|u\|_{L^1_\sigma} + \|f\|_{L^\infty(B_1)}).$$

定理的证明至此完成。 □

致谢：PA 得到了 CAPES-INCTMat（巴西）以及葡萄牙政府通过 FCT-Funda.c˜ao para a Ciˆencia e a Tecnologia, I.P. 在项目 UID/MAT/04459/2020 下提供的部分资助。D dos P 得到了 CNPq 和 CAPES/Fapitec 的部分资助。MS 得到了 FAPESP 项目 2021/04524-0 的部分资助，以及葡萄牙政府通过 FCT-Funda.c˜ao para a Ciˆencia e a Tecnolo- gia, I.P. 在项目 UID/MAT/04459/2020 和 PTDC/MAT-PUR/1788/2020 下提供的部分资助。本研究还部分获得了巴西高等教育人员培训协调机构（CAPES）的资助，资助代码 001。

参考文献

[1] P^edra Andrade、Daniel Pellegrino、Edgard Pimentel 和 Eduardo Teixeira。退化扩散方程的 C^1- 正则性。《数学进展》，409：论文编号 108667，34 页，2022 年。[2] Dami˜ao Ara´ujo 、Gleydson Ricarte 和 Eduardo Teixeira。退化椭圆方程解的几何梯度估计。《微积分变分与偏微分方程》，53(3-4)：605–625，2015年。[3] Guy Barles、Emmanuel Chasseigne、Adina Ciomaga 和 Cyril Imbert。混合积分微分方程解的利普希茨正则性。《微分方程杂志》，252(11)：6012–6060，2012年。[4] Guy Barles、Emmanuel Chasseigne 和 Cyril Imbert。二阶椭圆积分微分方程的狄利克雷问题。《印第安纳大学数学杂志》，57(1)：213–246，2008年。[5] Guy Barles、Emmanuel Chasseigne 和 Cyril Imbert。二阶非线性椭圆积分微分方程解的 H¨older 连续性。《欧洲数学学会杂志》，13(1)：1–26，2011年。[6] Guy Barles、Emmanuel Chasseigne 和 Cyril Imbert。二阶非线性椭圆积分微分方程解的 H¨older 连续性。《欧洲数学学会杂志》，13(1)：1–26，2011年。[7] Richard Bass 和 Moritz Kassmann。变阶算子下调和函数的 H¨older 连续性。《偏微分方程通讯》，30(7-9)：1249–1259，2005年。[8] Richard Bass 和 David Levin。跳过程的哈纳克不等式。《势分析》，17(4)：375–388，2002年。[9] Isabeau Birindelli 和 Fran¸coise Demengel。全非线性奇异算子的第一特征值与极大值原理。《微分方程进展》，11(1)：91–119，2006年。[10] Isabeau Birindelli 和 Fran¸coise Demengel。全非线性齐次算子的特征值、极大值原理与正则性。《纯粹与应用分析通讯》，6(2)：335–366，2007年。[11] Isabeau Birindelli 和 Fran¸coise Demengel。 $\mathcal{C}^{1,\beta}$ 与全非线性退化椭圆方程相关的狄利克雷问题的正则性。《ESAIM：控制、优化与变分计算》，20(4)：1009–1024，2014年。[12] Giovanni Bisci、Vicentiu Radulescu 和 Raffaella Servadei。非局部分数阶问题的变分方法，《数学及其应用百科全书》第 162 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2016年。Jean Mawhin 作序。[13] Anne Bronzi、Edgard Pimentel、Giane Rampasso 和 Eduardo Teixeira。一类变指数全非线性椭圆方程解的正则性。《函数分析杂志》，279(12)：108781，31 页，2020年。[14] Claudia Bucur 和 Enrico Valdinoci。非局部扩散及其应用，《意大利数学联合会讲义》第 20 卷。施普林格，[查姆]；意大利数学联合会，博洛尼亚，2016年。[15] Luis Caffarelli 和 Luis Silvestre。全非线性积分微分方程的正则性理论。《纯粹与应用数学通讯》，62(5)：597–638，2009年。

[16] Luis Caffarelli 和 Luis Silvestre。通过逼近得到的非局部方程正则性结果。《数学分析与力学文献》，200(1):59–88，2011年。[17] Maria Colombo 和 Giuseppe Mingione。双相变分积分的有界极小化子。《数学分析与力学文献》，218(1):219–273，2015年。[18] Jo˜ao Vitor Da Silva、Elzon J´unior、Giane Rampasso 和 Gleydson Ricarte。具有不平衡变量退化的一类完全非线性偏微分方程的全局正则性。预印本 arXiv:2108.08343。[19] Gonzalo D´avila、Patricio Felmer 和 Alexander Quaas。奇异完全非线性算子的 Harnack 不等式及若干存在性结果。《微积分变分与偏微分方程》，39(3-4):557–578，2010年。[20] Cristiana De Filippis。具有 (p, q)-增长的非正则抛物型方程解的梯度界。《微积分变分与偏微分方程》，59(5):第171号论文，32页，2020年。[21] Cristiana De Filippis。具有非齐次退化的完全非线性椭圆方程解的正则性。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》，151(1):110–132，2021年。[22] Cristiana De Filippis。一类具有 (p, q)-增长的非自治障碍问题解的正则性结果。《数学分析与应用杂志》，501(1):第123450号论文，40页，2021年。[23] Cristiana De Filippis 和 Giuseppe Mingione。非自治积分的插值间隙界。《数学物理分析》，11(3):第117号论文，39页，2021年。[24] Cristiana De Filippis 和 Giuseppe Mingione。Lipschitz 界与非自治积分。《数学分析与力学文献》，242(2):973–1057，2021年。[25] Cristiana De Filippis 和 Giampiero Palatucci。非局部双相方程的 H¨older 正则性。《微分方程杂志》，267(1):547–586，2019年。[26] Cristiana De Filippis 和 Giampiero Palatucci。非局部双相方程的 H¨older 正则性。《微分方程杂志》，267(1):547–586，2019年。[27] Eleonora Di Nezza、Giampiero Palatucci 和 Enrico Valdinoci。分数阶 Sobolev 空间搭便车者指南。《数学科学通报》，136(5):521–573，2012年。[28] Disson dos Prazeres 和 Erwin Topp。梯度退化的分数阶椭圆方程内部正则性结果。《微分方程杂志》，300:814–829，2021年。[29] Cyril Imbert 和 Luis Silvestre。$C^{1,\alpha}$ 某些退化完全非线性椭圆方程解的正则性。《数学进展》，233:196–206，2013年。[30] Giuseppe Mingione 和 Vicentiu Radulescu。非标准增长与非一致椭圆性问题的最新进展。《数学分析与应用杂志》，501(1):第125197号论文，41页，2021年。[31] Luis Silvestre。类似分数阶拉普拉斯算子的积分微分方程解的 H¨older 估计。《印第安纳大学数学杂志》，55(3):1155–1174，2006年。

[32] Halil Soner。具有状态空间约束的最优控制。II。《SIAM 控制与优化期刊》，24(6):1110–1122，1986年。

[33] Renming Song 和 Zoran Vondraˇcek。某些类马尔可夫过程的 Harnack 不等式。《数学杂志》，246(1-2):177–202，2004。

Pêdra D. S. Andrade里斯本大学高等技术学院（Instituto Superior Técnico），里斯本大学 – ULisboa，1049-001，Rovisco Pais 大道，里斯本，葡萄牙
pedra.andrade@tecnico.ulisboa.pt

Disson S. dos Prazeres塞尔希培联邦大学数学系，塞尔希培联邦大学 – UFS，49100-000，Roza Elze，S˜ao Cristóvão - 塞尔希培州，巴西
disson.mat.ufs.br

Makson S. Santos里斯本大学高等技术学院（Instituto Superior Técnico），里斯本大学 – ULisboa，1049-001，Rovisco Pais 大道，里斯本，葡萄牙
makson.santos@tecnico.ulisboa.pt