arXiv:2302.00430v1 [math.CT] 1 Feb 2023

dg-范畴的新模型

Elena Dimitriadis

Bermejo 2022年12月16日

目录

1 引言 **7**

1.1 ∞-范畴的模型.7 1.2 dg-范畴的模型.9 1.3 Segal 空间与 dg-Segal 空间.10 1.4 我们为什么对此感兴趣？.11 1.5 本文的组织结构.11 1.6 记号.13

2 引言 **15**

2.1 ∞-范畴的模型.15 2.2 dg-范畴的模型.16 2.3 dg-Segal 空间与 Segal 空间.18 2.4 我们为何关注？.19 2.5 正文结构安排.19 2.6 记号.21

3 背景概念 23

3.1 模型范畴.23 3.1.1 定义.23 3.1.2 同伦范畴.26 3.2 模型范畴上的构造.28 3.2.1 余纤维化生成的模型范畴.29 3.2.2 适当模型范畴与同伦余极限.33 3.2.3 （余）单纯框架与映射空间.35 3.2.4 Bousfield 局部化.38 3.3 单纯工具.39 3.3.1 单纯对象.39 3.3.2 单纯范畴.42 3.3.3 单纯局部化.45 3.3.4 泛模型范畴.47 3.4 微分分次范畴.48

3.4.1 定义与模型结构.48 3.4.2 微分分次范畴上的模.51

4 dg-Segal 空间 **55**

4.1 构造伴随.55 4.2 dg-Segal 空间.57 4.3 完备 dg-Segal 空间.62 4.4 超覆盖与自由 dg-范畴.66 4.5 函子 $Sing$ 全忠实.73

4.6 函子 $Sing$ 本质满.7 7

5 未来工作 **83**

5.1 完备 dg-Segal 空间与 DK-等价.83 5.2 线性单纯形范畴.84 5.2.1 初步构造.85 5.2.2 映射的刻画.89 5.2.3 预期结果.92 5.3 其他可能的研究方向.92 5.3.1 dg-范畴的自同构.92 5.3.2 超覆盖定义.93

第1章

法语导言

“有些事情，与其拒绝，不如开始去做，尽管结局可能一片黑暗。”

—J.R.R.Tolkien,《指环王》

本文旨在为 dg-范畴的同伦理论定义并研究一种新模型。与 dg-范畴上原有的模型结构相比，这种模型表现更佳，同时也更接近 ∞-范畴框架中建立的模型。有鉴于此，在开始之前，先简要回顾一下我们对 ∞-范畴和 dg-范畴中现有模型的了解，会很有帮助。

我们尽力在记号首次出现时解释清楚，但主要工具的记号将汇总于第1.6节，以便查阅。

1.1 ∞-范畴的模型

让我们从高阶范畴开始。直观地说，一个 ∞-范畴（或者更准确地说，一个 $(\infty,1)$-范畴）是定义在 ∞-群胚上的富化范畴：它具有一个对象集合，并且对于每一对对象，都有一个连接它们的 ∞-群胚。换句话说，我们不再仅仅要求对象之间存在态射，而是要求态射之间存在 2-态射、2-态射之间存在 3-态射，依此类推，同时要求所有带有 $n \geq 2$ 的 n-态射都是可逆的。这种构造在文献中也被称为“一种同伦理论”，它出现在许多不同的情形中。

一个经典的例子是，当人们关注那些在比同构更弱的概念下分类的结构时（例如，按同伦等价分类的拓扑空间、按弱等价分类的链复形等），∞-范畴便会自然出现。我们希望将这些范畴局部化，使这一类态射变为可逆态射。Quillen 已在 [Qui67] 中通过引入模型范畴解决了这个问题；但尽管模型范畴非常有用，其问题在于，为了使其发挥作用，必须为它们添加大量结构。此外，它们的同伦范畴（也就是局部化）并不会保留所添加的信息。为了解决这些问题，Dwyer 和 Kan 在 [DK80a] 中引入了单纯局部化，它是一种以单纯对象为富化对象的富化范畴。此后，许多研究者致力于寻找这类范畴的合适模型。其中有四种模型尤为重要。

第一个选择显然是单纯范畴本身。Dwyer 和 Kan 在这一背景下发展了单纯局部化理论，将其视为以单纯空间为富化对象的富集范畴。正如我们将在第 3.3.2 节详细讨论的那样，这里暂且不多作介绍。我们只补充一点：Bergner 在 [Ber07a] 中证明，单纯范畴范畴具有模型结构。

第二种非常成功的模型是拟范畴。Boardman 和 Vogt 首次在 [BV73], 中提出了这种方法，将拟范畴（也称为“弱 Kan 复形”）定义为满足以下条件的单纯集合 X：对于任意内角 $\Lambda^k[n] \to X$，都存在一个填充 $\Delta[n] \to X$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 < k < n$ 均如此。实际上，我们要求任意一对 n-态射都有一个第三个态射，即“复合”，以及一个连接二者的（$n+1$）-态射。后来，Joyal 在诸如 [Joy02], 的论文中，以及 Lurie 在 [Lur09] 和 [Lur17] 中扩展了这一理论。Joyal 和 Tierney 也在 [JT07] 中为拟范畴定义了模型结构。

我们的第三种模型是 Segal 范畴。它们是单纯范畴的一种自然推广，因为可以将其视为复合仅在同伦意义下定义的单纯范畴。Dwyer、Kan 和 Smith 首次在[DKS89], 中定义了它们，并将其定义为满足以下条件的单纯空间 X： $\Delta^{op} \to$sSet，且 X_0 是离散的单纯集合，并且对于任意 $k \geq 1$，Segal 态射

$$\phi_k : X_k \to \overbrace{X_1 \times_{X_0} \ldots \times_{X_0} X_1}^{k \text{ fois}}$$

是一个弱等价。Segal 范畴的范畴具有一种模型结构，该结构由 Hirschowitz 和 Simpson 在 [HS01] 中为 n-Segal 范畴构造，Bergner 则在 [Ber07b] 中以另一种形式构造了该结构。

最后，第四种模型也是对我们最有趣的一种，就是 Segal 空间。Rezk 在 [Rez01], 中首次定义了完全 Segal 空间：它也是一种单纯空间，其中对任意 $k \geq 1$，Segal 态射 ϕ_k 都是弱等价；但我们不再要求 X_0 是离散的，而是要求态射

$$X_0 \to X_{hoequiv}$$

是一个弱等价，其中 $X_{hoequiv}$ 是同伦等价的空间。在同一篇论文中，Rezk 构造了一种模型结构，其中完全 Segal 空间是纤维对象。

话虽如此，我们构造了四种模型，并称它们都是同一事物的模型。但仅从定义来看，这一点并不显而易见。它们确实有一些共同之处，但彼此之间也相当不同。这正是我们引入模型结构的原因：事实上，Bergner 在 [Ber07b] 中证明，完全 Segal 空间与 Segal 范畴之间存在 Quillen 等价（也就是说，模型范畴之间存在等价），Segal 范畴与单纯范畴之间也存在另一种 Quillen 等价。另一方面，Joyal 和 Tierney 在 [JT07] 中证明，拟范畴与完全 Segal 空间也 Quillen 等价。注意：尽管我们知道所有这些范畴都 Quillen 等价，但这些 Quillen 等价的方向彼此相反，这意味着它们无法复合成一个单独的 Quillen 等价。

多年来，人们曾尝试为 ∞-范畴制定公理化定义，例如 Toën 在 [Toë05] 中提出的“ ∞-范畴理论”，以及 Riehl 和 Verity 在 [RV22], 中提出的“∞-上托普斯”，但这里不再详述。

1.2 dg-范畴的模型

现在来谈谈 dg-范畴。与单纯范畴一样，dg-范畴被定义为在某种对象上富集的范畴：在本例中，是余链复形。由于我们将在第3.4节详细讨论这一点，这里就不赘述了：我们只说明 Tabuada 已在 [Tab05] 中证明，dg –cat 上存在一种模型结构。

虽然 ∞-范畴有着悠久的历史，但 dg-范畴出现得更早：事实上，早在 20 世纪 60 年代的论文中就能看到它们，例如 Kelly 的文章 [Kel65]。鉴于此，我们不会全面介绍它们的发展史；这也不是本导论的目的。只需指出，虽然范畴和 ∞-范畴足以用于代数拓扑，但代数几何往往需要一种线性概念，而这种概念并不总能与前两者很好地兼容。因此，已经具备线性概念的 dg-范畴，成为这一领域的重要研究对象。它们的一个典型应用是几何朗兰兹纲领：Arinkin 和 Rozenblyum 用 dg-范畴的语言重新表述了这一纲领，见 [AG15] 。如需了解更多详情，请参阅 Gaitsgory 和 Rozenblyum 所著的《导出代数几何研究》（见 [GR17a] 和 [GR17b]）。

但是，尽管 dg-范畴非常有用，它们并不完美。例如，dg-范畴范畴具有模型结构，也具有幺半结构；但两者并不兼容。这个问题以及其他问题促使一些研究者寻找 dg-范畴的其他模型，沿用在 ∞-范畴中所做工作的思路。我们已经谈过第一种比较：dg-范畴就是单纯范畴。值得注意的是，学界开始为 ∞-范畴寻找其他模型的原因之一，也是单纯范畴同时具有模型结构和幺半结构（此处为直积），而这两者并不兼容。

先从拟范畴说起。Cohn 在 [Coh16] 中给出了一个结果：dg-范畴模型范畴经莫里塔等价局部化后，其底层 ∞-范畴与稳定、 k-线性且幂等完备的拟范畴所成的 ∞-范畴等价。遗憾的是，稳定的 k-线性拟范畴并不容易使用：例如，若两个线性拟范畴之间存在一个伴随，要证明存在一个线性伴随就非常困难。此外，若 x 是一个 k-线性拟范畴中的对象，那么在 k-线性拟范畴的框架中，要证明 End(x) 可以由一个 dg-代数表示非常复杂；而在 dg-范畴中，这几乎是由定义直接得出的。

最近，关于这个问题还有另一种方法：Mertens 在 [Mer22] 中提出了余完备幺半范畴 C 上富集拟范畴的定义（更多详情见 [ML20] 中的定义 2.2.26），并构造了一个函子，将经典 dg-神经 dg –cat $\to$ sSet 提升为线性 dg-神经

$$\mathbf{dg-cat} \to S_{\otimes}\mathbf{Mod}(k)$$

其中 $S_{\otimes}$Mod(k) 是 templicial 模范畴（“张量单纯形”；更多详情见 [ML20] 中的定义 2.4）。在 2022年9月于庞加莱研究所的一场报告中（见 [Low22]），Lowen 提到，Mertens 和她正在致力于构造一种 Quillen 等价，以关联 Mod(k) 上的富集拟范畴与 dg-范畴，不过这项工作仍在进行中。

在 Segal 范畴方面，Bacard 在 [Bac20] 中定义了富集 Segal 范畴的概念，进而定义了 Segal dg-范畴的概念。他指出，一旦固定一个集合 $\mathcal{O}$ ，Segal dg-范畴就是一个形如以下形式的 W-余纤维态射

$$F : P_{\overline{\mathcal{O}}} \to \mathbf{C}(\mathbf{k}),$$

其中 $\overline{\mathcal{O}}$ 是一个群胚，称为“与 $\mathcal{O}$ 关联的粗范畴”，而 $P_{\overline{\mathcal{O}}}$ 是 $\overline{\mathcal{O}}$ 的 2-路径范畴（更多详情请参见 [Bac20] 中的定义 4.1 和 2.7 ）。同样，在这种情况下，这些对象与 dg- 范畴之间的比较似乎仍在进行中：事实上，Bacard 在本文引言中指出，富集 Segal 范畴的概念一经明确定义，首要目标便是发展 Segal dg-范畴的同伦理论，并将其与经典 dg-范畴进行比较。

这样我们就有了 dg-拟范畴的定义，以及 Segal dg-范畴的定义；但如果遵循上一节的思路，我们还缺少一个模型：我们还没有谈到完全 dg-Segal 空间。事实上，我们的结果正是在这里出现。我们将遵循 Rezk，构造完全 Segal 空间的一个“线性”版本，并且（在满足某个假设的前提下）证明存在一条 Quillen 伴随链，从而得到一个同伦范畴的等价。

单纯范畴	dg-范畴
拟范畴	k-线性拟范畴 dg-拟范畴
Segal 范畴	Segal dg-范畴
完全 Segal 空间	??

1.3 Segal 空间与 dg-Segal 空间

在 Rezk 的文章中， [Rez01], 提出了构造其 ∞-范畴模型的几个重要步骤。首先，他像之前所见那样定义 Segal 空间：它是一个单纯空间（也就是说，是一个从 Δ^{op} 到 sSet 的函子），其中某些态射是弱等价。接着，他证明，在单纯空间上存在一个相对于投射结构的 Bousfield 局部化，使得 Segal 空间是其中的纤维对象。但这种结构不足以给出与 ∞-范畴的等价：有一类态射本应是等价，却尚未成为等价。基于这一点，他对该模型结构应用另一个 Bousfield 局部化，并得到一个模型结构，其纤维对象是完全 Segal 空间。最后，他在单纯空间范畴中定义了一类态射，称为 Dwyer-Kan 等价，并证明，完全 Segal 空间的模型范畴结构中的弱等价，恰好就是 Segal 空间之间的 Dwyer-Kan 等价。

在我们的情形中，我们将沿用类似的方案；但这条路并非那么简单。事实上，dg-范畴的线性结构会多次增加我们的工作难度。首先，我们会选取一个函子范畴（在我们的情形中，是从有限生成自由范畴到单纯空间的单纯函子范畴），并将 dg-Segal 空间定义为该范畴中的对象，且要求某些态射为弱等价。仅有 Segal 态射条件还不够：我们还需要增加一项条件，指出可以在态射中的模复形里添加项。

完成这一步后，不难证明存在一个 Bousfield 局部化，使得其局部对象恰好是关于投射模型结构而言纤维的 dg-Segal 空间。遗憾的是，和 Segal 空间的情形一样，神经函子（这里称为 Sing）并不构成 Quillen 等价，因此我们不得不再进行一次 Bousfield 局部化。我们不必舍近求远：只需定义一个从 dg-Segal 空间到经典 Segal 空间的“遗忘”函子，并将完全 dg-Segal 空间定义为经遗忘函子映像后成为完全空间的 dg-Segal 空间。

但在这里，我们仍然会遇到线性问题。事实上，为了证明神经是该模型结构下的 Quillen 等价，我们希望像 Rezk 那样定义一类态射，称为 DK-等价，使得完全 Segal 空间的模型结构中的弱等价，恰好是 dg-Segal 空间之间的 DK-等价。但要做到这一点，

Rezk 利用单纯空间中的直积来计算某个指数对象。我们没有这样的优势：正如前文所述，dg –cat 中的模型结构与幺半结构并不相容。因此，为了证明我们的结果，我们首先需要在完全 Segal 空间中定义一个模型结构。由于时间不足，我们未能在这份手稿中完成这一工作，因此将“完全 dg-Segal 空间结构中的等价是 dg-Segal 空间之间的 DK- 等价 ” 这一事实作为假设接受。

不过，假设这一假设成立，我们可以证明，dg-范畴的同伦范畴与完全 dg-Segal 空间的同伦范畴之间存在等价；这里所指的是完全 dg-Segal 空间的模型结构。

1.4 为什么这对我们很重要?

显然，如果我们要 投入这么多时间和精力来构造 dg-Segal 空间
的完备形式，我们必须为自己的选择给出理由。

第一个原因之前已经提到过多次：我们所熟知的 dg-范畴范畴具有模型结构和幺半结构，但二者并不兼容。事实上，对象 $\Delta_k(1,0,1)$（即具有两个对象以及 k 二者之间的态射复形的 dg-范畴）在 dg-范畴的模型结构中是余纤维的，但很容易看出， $\Delta_k(1,0,1) \otimes \Delta_k(1,0,1)$ 并非如此。话虽如此，完全 dg-Segal 空间的构造本身迫使我们在其上定义一种与模型结构兼容的幺半结构，从而解决这一问题。就其本身而言，这将是证明范畴论经典定理的线性版本的重要一步，例如 Barr–Beck 定理；该定理不仅无法由其非线性版本推出，甚至在目前的线性情形下都无法被准确地定义。

除此之外，将 dg-范畴构造为 dg-Segal 空间，还会为我们提供一个函子范畴。引用 Dugger 在 [Dug01], 中的话，它是“一种生成元与关系表示”。正如这类结构中的情形一样，这样的表示会使从完全 dg-Segal 空间出发构造态射容易得多：我们只需在生成元上定义它们，并确保“关系”映射为弱等价。特别是，这会为我们提供一种更简单的方式来计算 dg –cat 的自同构。

这并非什么新进展：Toën 在 [Toë05] 中，以及 Barwick 和 Schommer-Pries 在 [BSP21] 中，都使用了这类“生成元与关系表示”分别定义（$\infty,1$）-范畴和（∞,n）-范畴的公理化；随后，他们利用这些表示证明，在（∞,n）-范畴中的自同构群与离散群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$同构。Toën 的论文最终得出这样的结果并非巧合：任何 ∞-范畴理论都等价于完全 Segal 空间范畴，而不是 ∞-范畴的其他模型。

1.5 本文的组织结构

本 论文分为三个不同部分，每一部分由不同的章节标示 .

在第一章“背景概念”中，我们将提醒读者（或向其介绍）后续会用到的一些概念：模型范畴和 Quillen 伴随，尤其是余链复形和图表相关的模型范畴与伴随；左适定和右适定模型范畴；映射空间；左 Bousfield 局部化；单纯对象、单纯范畴；以及 dg-范畴。我们会特别关注 dg-范畴的模型结构。本章还包括一节，解释 Dugger 的“泛模型范畴”的构造。

在第二章“dg-Segal 空间”中，我们将介绍主要研究成果。就内容而言，这些成果可以分为三部分。

在包含第 1 节的第一部分中，我们将构造 dg-范畴范畴与 Fun$^{\mathbb{S}}$($c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$,sSet) 之间的一条 Quillen 伴随链；后者是从有限生成自由范畴到单纯集合的单纯函子所构成的函子范畴。我们将给出该伴随的显式构造

$$\mathrm{Re} : \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \mathbf{dg-cat} : \mathrm{Sing}\,.$$

在包含第 2 节和第 3 节的第二部分中，我们将构造 dg-Segal 空间。遵循 [Rez01]，的例子，我们将尝试通过描述这些函子是否将某些态射变为弱等价，来确定 Sing 函子的像。特别地，如果函子 F 满足以下条件，我们就称它为 **dg-Segal 空间**:

1. Pour tous $L, K \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$, $F(L \coprod K) \to F(L) \times F(K)$ est une équivalence faible.

2. 初始对象的像是一个点，换言之， $F(\emptyset) \simeq *_{\circ}$

3. 设 G 是 Gr(C(k)) 中的一个图。对于任意 $\alpha \in Z^n(G(x,y))$，由$G(<\alpha>)$ 导出的自由 dg-范畴的像是 sSet 中具有以下形式的同伦拉回:

$$\begin{array}{ccc} F(L(G(<\alpha>))) & \longrightarrow & F(L(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\Delta_k^c(1,n,1)) & \longrightarrow & F(\Delta_k(1,n,1)). \end{array}$$

随后，我们构造 Fun$^{\mathbb{S}}$($c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$,sSet) 与单纯空间之间的 Quillen 伴随，并证明它将 dg-Segal 空间映射为经典 Segal 空间。我们利用这一伴随来定义完全 dg-Segal 空间：完全 dg-Segal 空间是指经该伴随映射后成为完全 Segal 空间的 dg-Segal 空间。由此得到如下定义： F 是一个**完全 dg-Segal 空间**，如果它是一个 dg-Segal 空间且

$$F(k) \to F_{hoequiv}$$

是一个弱等价。我们证明 Sing 的像属于完全 dg-Segal 空间。随后，我们为 Fun$^{\mathbb{S}}$($c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$,sSet) 构造两种模型结构，使 dg-Segal 空间和完全 dg-Segal 空间分别成为它们的纤维对象。最后，在本节中，我们定义了一类称为 DK-等价的态射，并提出如下假设：dg-Segal 空间之间的弱等价，恰好是完全 dg-Segal 空间的模型结构中的弱等价。

假设 1.5.1 (假设4.3.22)**.** 设 $f\colon F \to G$ 是两个 *dg-Segal* 空间之间的一个态射。那么，f 是 *DK*-等价，当且仅当 f 是完全 *dg-Segal* 空间的模型结构中的弱等价。

最后，本章的第三部分（包括第4、5、6节）证明了（除一个假设外），(Re, Sing) 确实是完全 dg-Segal 空间中的一个 Quillen 等价。为此，我们在第4节先在一般的模型范畴中、随后在 dg-范畴中构造一种特定类型的超覆盖， $T_* \to T$，并证明这种超覆盖的同伦余极限弱等价于原始对象，hocolim $T_i \simeq T$。之后，在第5节中，我们利用这些超覆盖证明，该伴随在相差一个 DK-等价的意义下是完全忠实的。

定理 1.5.2 (定理 4.5.6)。 假设假设 *4.3.22* 成立，则对于任意 $T \in \mathbf{dg}\ \text{–范畴范畴}$，有 $\mathrm{Re}_k(\mathrm{Sing}_k)(T) \simeq T$，且函子 Sing 是完全忠实的。

在最后一节，即第 6 节中，我们证明（假设该假设成立时）这个伴随在 dg-Segal 空间上本质满射。为此，我们在 Fun$^{\mathbb{S}}$($c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$,sSet) 中构造一种特殊的函子超覆盖，其形式为 Sing(T_*) $\to F$，并证明 T_* 的同伦余极限的像与 F DK-等价。

定理 1.5.3 (定理 4.6.14). 设 F 是一个 *dg-Segal* 空间。那么存在一个 *dg*-范畴 T，使得存在一个 *DK*-等价 $\mathrm{Sing}(T) \to F$。因此，若假设 *4.3.22* 成立，则伴随 $\mathrm{Re} : \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal} \rightleftharpoons \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{cat} : \mathrm{Sing}$ 是一个 *Quillen* 等价。

在第三章“未来工作”中，我们将探讨若干可以拓展本论文工作的方向。在第一节中，我们将讨论上一章中的假设，并说明可以采用哪些方法来证明它。在第二节中，我们将讨论单纯形线性范畴 Δ_k。它旨在作为单纯形范畴 Δ 的一种线性版本，我们认为这将为我们提供 Fun$^{\mathbb{S}}$($c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 与 Fun$^{\mathbb{S}}$($\Delta_k^{op}$, sSet) 之间的 Quillen 等价，从而使我们能够将完全 dg-Segal 空间定义为 Δ_k 与 sSet 之间的单纯函子。最后，我们将简要评论我们结果的其他一些可能应用。

1.6 记号

虽然这里的所有记号都会在下一章中解释，但我们在此处提及它们，以便更便于查阅。

- 我们用 $F\colon M \rightleftharpoons N\colon G$ 表示两个范畴之间的伴随，其中左伴随始终是上方的箭头。
- 我们用 sSet 表示单纯集合范畴，用 C(k) 表示余链复形范畴，用 dg –cat 表示 dg-范畴范畴。
- 我们用 k 表示一个交换环。我们用 $-\otimes-$ 表示 C(k) 中在 k 上的张量积，用 $A[-]$ 表示余链复形 A 的平移。
- 我们用 $k[s]$ 表示集中在度 s 的余链复形，它在该处取值为 k；用 $k^c[s]$ 表示集中在度 s 和 $s-1$ 的复形，它在这些度上取值为 k。
- 我们用 Fun(A, B) 表示范畴 A 和 B 之间的函子范畴，用 Fun$^{\mathbb{S}}$(A, B) 表示单纯范畴 A 和 B 之间的单纯函子范畴。
- 用 Gr(A) 表示在范畴 A 上富化图的范畴，用 Gr(C(k))^{tf} 表示由有限型复形上的富化图构成的满子范畴。
- 用 $\mathcal{L}$ 表示自由微分分次范畴的范畴，用 $c\mathcal{L}$ 表示有限型余纤维化自由微分分次范畴构成的满子范畴。

第 2 章

引言

> “有些事情，即使结局可能黑暗，也最好开始去做，而不是拒绝。”
>
> ——J.R.R. Tolkien，《指环王》

本文旨在为 dg-范畴的同伦论定义并研究一种新模型。与 dg-范畴原有的模型结构相比，这种模型性质更好，也更接近 ∞-范畴中广为接受的模型。因此，在开始之前，先快速回顾一下我们对 ∞-范畴和 dg-范畴现有模型的了解会很有帮助。

我们尽力在记号出现时对其加以说明，但为便于查阅，所有主要概念的记号都汇总在第 2.6 节。

2.1 ∞-范畴的模型

我们先从高阶范畴谈起。直观地说，∞-范畴（更准确地说，是一个 $(\infty, 1)$-范畴）是由∞-群胚富化的范畴：它有一组对象，并且任意两个对象之间都有一个∞-群胚。换言之，我们不只要求对象之间存在态射，还要求态射之间存在 2-态射、2-态射之间存在 3-态射，以此类推，同时要求所有带有同伦的态射都是可逆的。这种构造在文献中也称为“同伦论”，它出现在许多不同的情境中。

一个经典例子是，在常见的计算中，当我们关注那些按弱于同构的某种概念分类的结构时（例如按同伦等价分类的拓扑空间、按弱等价分类的链复形等），就会出现∞-范畴。我们希望对范畴作局部化，使这类态射变为可逆态射。Quillen 在 [Qui67] 中引入模型范畴，成功解决了这个问题；但模型范畴虽然很有用，其问题在于，为了使其发挥作用，我们需要添加一整套结构。此外，它们的同伦范畴（即所讨论的局部化）无法保留我们所构造的高阶信息。为了解决这些问题，Dwyer 和 Kan 在 [DK80a] 中引入了单纯局部化，它是一个由单纯集合富化的范畴。此后，多年来有多位研究者致力于为这类范畴寻找合适的模型。其中，四种处理∞-范畴的方法影响尤为深远。

当然，第一种选择就是单纯范畴本身。Dwyer 和 Kan 在这一框架下发展了单纯局部化理论，将其视为以单纯集合为富化对象的范畴。由于我们将在第 3.3.2 节对此作进一步阐述，这里不再花费太多篇幅：我们只补充一点，Bergner 证明了

单纯范畴的范畴在 [Ber07a] 中具有一个模型结构。

第二种模型，而且非常成功的一种，是拟范畴。Boardman 和 Vogt 在 [BV73], 中首次定义了这种方法：拟范畴（也称为“弱 Kan 复形”）是指满足以下条件的单纯集合 X：对于每个内角 $\Lambda^k[n] \to X$，都存在一个填充子 $\Delta[n] \to X$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $0 < k < n$ 均如此。这实际上要求每对 n-态射都存在第三个“复合” n-态射，以及一个连接二者的 $(n+1)$-态射。Joyal 在 [Joy02] 等论文中进一步发展了这套理论，当然，Lurie 也在 [Lur09] 和 [Lur17] 中进行了进一步研究。Joyal 和 Tierney 还在 [JT07] 中证明，这一理论存在一种模型结构。

第三种模型是 Segal 范畴。它们是单纯范畴的一种自然推广，因为可以将其看作复合仅在同伦意义下定义的单纯范畴。Dwyer、Kan 和 Smith 在 [DKS89], 中首次对其作出定义：它们是满足以下条件的单纯空间 X： $\Delta^{op} \to$sSet，且 X_0 是离散单纯集合，并且对于所有 $k \geq 1$ ，Segal 映射

$$\phi_k : X_k \to \overbrace{X_1 \times_{X_0} \ldots \times_{X_0} X_1}^{k \text{ times}}$$

是一个弱等价。Segal 范畴的范畴具有一种模型结构：Hirschowitz 和 Simpson 在 [HS01] （法语文本）中为一般的 Segal n-范畴构造了该结构，Bergner 则在 [Ber07b] 中给出了一个替代版本。

最后，第四种也是对我们而言最有趣的 ∞-范畴模型，是完全 Segal 空间。Rezk 首次在 [Rez01], 中定义了它；完全 Segal 空间也是一种单纯空间，使得 Segal 映射 ϕ_k 对所有 $k \geq 1$ 都是弱等价，但我们不再要求 X_0 是离散的，而是要求态射

$$X_0 \to X_{hoequiv}$$

是一个弱等价，其中 $X_{hoequiv}$ 是同伦等价空间。在同一篇论文中，Rezk 构造了一种模型结构，其中完全 Segal 空间构成纤维对象。

现在，我们已经构造了四种不同的模型，并声称它们都是同一事物的模型，但仅从定义来看，这一点并不明显。它们确实有一些共同之处，但彼此之间也相当不同。不过，这正是我们要在它们之上引入模型结构的原因：事实上，Bergner 在 [Ber07b] 中证明，完全 Segal 空间与 Segal 范畴之间存在 Quillen 等价（即模型范畴理论中的等价），Segal 范畴与单纯范畴之间也存在另一种 Quillen 等价。另一方面，Joyal 和 Tierney 在 [JT07] 中证明，拟范畴与完全 Segal 空间也是 Quillen 等价的。不过请注意：尽管我们知道所有这些范畴都是 Quillen 等价的，但 Quillen 伴随的方向彼此相反，这意味着它们不能复合成单个 Quillen 等价。

多年来，人们曾尝试对 ∞-范畴给出公理化定义，例如 Toën 在 [Toë05] （法语文本）中的“ ∞-范畴理论”，以及 Riehl 和 Verity 在 [RV22], 中的“∞-topos”，但这里不再详细讨论这些内容。

2.2 dg-范畴的模型

现在我们来谈谈 dg-范畴。和单纯范畴一样，dg-范畴被定义为富化于某种对象之上的范畴：在这里，这种对象是上链复形。我们将在第3.4节详细讨论它们，因此这里不再展开，只提一下 Tabuada 在 [Tab05] （法语；英文定义见 [Tab10] ）中证明，dg 范畴上存在一种模型结构。

如果说 ∞-范畴早已有着悠久而辉煌的历史，那么 dg-范畴的历史则更加久远：事实上，早在 20 世纪 60 年代的论文中，我们就能看到它们的应用，例如 Kelly 于 1965年 发表的论文 [Kel65]。鉴于此，我们不打算在这里详细追溯它们的发展史；这也不是本篇导言的重点。只需指出，尽管在代数拓扑中，范畴和 ∞-范畴在大多数情况下已足以满足研究需要，但代数几何往往要面对一种线性结构，而它未必能与这些概念很好地契合。因此，dg-范畴本身就内含线性结构，多年来一直是该领域不可或缺的工具，直到今天依然如此。几何朗兰兹纲领便是一个很好的例子：Arinkin 和 Gaitsgory 用 dg-范畴的语言重新阐述了这一纲领，见 [AG15] 。关于这一点的更多详情，请参阅 Gaitsgory 和 Rozenblyum 合著的著作《导出代数几何研究》（参见 [GR17a] 和 [GR17b]）。

然而，尽管 dg-范畴很有用，却并不完美。例如，dg-范畴范畴具有幺半结构，也具有模型结构，但二者并不兼容。这一点以及其他原因，促使研究者在过去几年里尝试寻找 dg-范畴的其他模型，追随 ∞-范畴的脚步。我们已经谈到了第一个类比：dg-范畴对应单纯范畴。有趣的是，促使人们在单纯范畴之外寻找 ∞-范畴的替代模型的原因之一，也与我们的情况类似：单纯范畴上的单纯模型结构同样与其幺半结构（在该语境下为直积）不兼容。

我们先从拟范畴说起。Cohn 在 [Coh16] 中给出了一个结果，指出 dg-范畴模型范畴在 Morita 等价处局部化后，其底层的 ∞-范畴与小的、幂等完备的 k-线性稳定拟范畴所构成的 ∞-范畴之间存在等价。遗憾的是， k-线性稳定拟范畴并不太便于使用：例如，若两个线性拟范畴之间有一个伴随，要证明存在一个线性伴随就非常复杂。此外，若 x 是一个 k-线性拟范畴中的对象，那么在 k-线性拟范畴的框架下，证明 End(x) 可由 dg-代数表示也非常复杂；但在 dg-范畴中，这几乎是定义直接给出的结果。

近年来，关于这一主题又出现了另一种方法：Mertens 在 [Mer22] 中为 C 余完备幺半范畴上的 C-富化拟范畴给出了定义（更多详情见 [Mer22] 中的定义 2.2.26），并构造了一个函子，将经典的 dg-神经函子 dg $-$cat $\to$ sSet 提升为线性的 dg-神经

$$\mathbf{dg}-\mathbf{cat}\to S_{\otimes}\mathbf{Mod}(k)$$

其中 $S_{\otimes}$Mod(k) 是张量单纯的（即“张量单纯”；其“kMod(k)-富化”的单纯集合）模的范畴（更多详情见 [ML20] 中的定义 2.4）。在 2022年9月于庞加莱研究所的一场报告中（见 [Low22]），Lowen 提到，她和 Mertens 正在研究一种 Quillen 等价，以将她们的 Mod(k)-富化拟范畴与 dg-范畴联系起来，但这项工作仍在进行中。

在 Segal 范畴这一方面，Bacard 在 [Bac20] 中定义了富化 Segal 范畴的概念，并由此定义了 Segal dg-范畴的概念：固定一个集合 $\mathcal{O}$，Segal dg-范畴就是如下形式的一个 W-余笛卡尔态射

$$F:P_{\overline{\mathcal{O}}}\to\mathbf{C}(\mathbf{k}),$$

其中 $\overline{\mathcal{O}}$ 是一个群胚，称为与 $\mathcal{O}$ 相关联的粗范畴，而 $P_{\overline{\mathcal{O}}}$ 是 $\overline{\mathcal{O}}$ 的 2-路径范畴（更多细节请参见 [Bac20] 中的定义 4.1 和 2.7）。在这种情况下，这些对象与 dg-范畴之间的比较似乎也仍在进行中：事实上，在本文引言中，Bacard 表示，既然富化 Segal 范畴已经定义，接下来的首要任务将是发展 dg-Segal 范畴的同伦论，并将其与我们原先的范畴进行比较。

因此，我们已经有了 dg-拟范畴的定义和 dg-Segal 范畴的定义；但如果我们遵循上一节中的相同模式，还缺少一个：我们还没有完备 dg-Segal

空间的定义。这正是我们的结果发挥作用之处。沿着 Rezk 的足迹，我们将构造完全 Segal 空间的“线性化版本”，并将看到（在某个尚未证明的假设下）存在一串 Quillen 伴随，使其成为同伦范畴之间的等价。

单纯范畴	dg-范畴
拟范畴	k-线性拟范畴 微分分次拟范畴
Segal 范畴	Segal 微分分次范畴
完全 Segal 空间	??

2.3 dg-Segal 空间与 Segal 空间

在 Rezk 的论文 [Rez01], 中，为了构造他针对 ∞-范畴的模型，我们需要经历几个重要步骤：首先，当然，他将 Segal 空间定义为如上所述的单纯空间（即一个从 Δ^{op} 到 sSet 的函子），其中一定数量的态射是弱等价。接着，他证明，在单纯空间上的投射结构上存在一种 Bousfield 局部化，使得 Segal 空间恰好是其局部对象。但这一结构不足以证明它与 ∞-范畴等价；仍有一类态射需要求逆。有鉴于此，他对自己的模型结构再进行一次 Bousfield 局部化，得到一个模型结构，其局部对象定义为完全 Segal 空间。最后，他在单纯空间范畴中定义了一类态射，称为 Dwyer-Kan 等价，并证明完全 Segal 模型结构中的弱等价恰好是 Segal 空间之间的 Dwyer-Kan 等价。

在我们的情形中，我们将遵循类似的模式：但这并非一条笔直明晰的道路。事实上，我们现在赋予范畴的线性结构会一再出现，使事情变得复杂。首先，我们将选取某个函子范畴（在我们的情形中，是从有限型自由 dg-范畴到单纯集合的稍复杂一些的函子范畴），并将 dg-Segal 空间定义为该范畴中满足某些态射为弱等价这一条件的对象。仅有 Segal 态射上的条件还不够：我们还需要添加一项条件，要求能够在态射中的模复形里添加一个项。

完成这一步后，不难证明存在一个 Bousfield 局部化，其局部对象恰好是关于投射结构纤维的 dg-Segal 空间。接着，如同 Segal 空间的情形，神经函子（这里我们将其称为 Sing）对于这个模型结构并非 Quillen 等价，因此我们不得不进行第二次 Bousfield 局部化。对此，我们不必舍近求远：只需定义一个连接 dg-Segal 空间与经典 Segal 空间的“遗忘”函子，并将完备 dg-Segal 空间定义为经由遗忘函子后成为完备的 dg-Segal 空间。

但在这里，我们又一次遇到了亲爱的线性结构。事实上，为了证明我们的神经函子在此处是 Quillen 等价，我们希望像 Rezk 那样，定义一类称为 DK-等价的态射，使得完备 dg-Segal 模型结构中的弱等价正是 dg-Segal 空间之间的 DK-等价。但为了做到这一点，Rezk 使用单纯空间上的直积来计算某个指数对象。我们没有这种便利：如前所述，dg – 范畴中的幺半结构与模型结构并不相容。因此，为了证明我们的主要结果，我们首先必须在我们的完备 dg-Segal 空间上定义一个幺半模型结构。由于时间不足，在本手稿中未能实现这一点；因此，我们将“dg-Segal 空间之间的 DK-等价是完备 dg-Segal 模型范畴中的弱等价”这一事实作为一个假设。

不过，假设该假设成立，我们就可以有效地证明：对于完备 dg-Segal 模型结构，dg-范畴范畴的同伦范畴与完全 dg-Segal 空间范畴的同伦范畴之间存在等价。

2.4 我们为何在意?

当然，如果我们要花费这么多时间和精力来构造这些完全 dg-Segal 空间，就需要为我们的选择提供合理依据。我们为什么要构造这些对象?

第一个原因前面已经提到：我们所熟知的 dg-范畴范畴具有幺半结构，也具有模型结构，但二者并不兼容。事实上，对象 $\Delta_k(1,0,1)$（也就是具有两个对象、且两个对象之间的态射复形为 k 的 dg-范畴）在 dg-范畴的模型范畴中是余纤维的，但很容易证明 $\Delta_k(1,0,1) \otimes \Delta_k(1,0,1)$ 并非如此。现在，构造完备 dg-Segal 模型结构本身将迫使我们为它们定义一种与模型结构兼容的幺半结构，从而解决这个问题。这很可能是证明经典范畴论定理的线性版本（例如 Barr-Beck 定理）的一大步；在当前阶段，这些定理不仅无法从经典版本推导出来，甚至在线性情形下都无法得到恰当定义。

此外，将 dg-范畴构造为 dg-Segal 空间，会使我们得到一个函子范畴；借用 Dugger 在 [Dug01], 中的话，它们是“一种由生成元与关系给出的表示”。正如这类结构通常的情况，这样的表示会让我们更容易从完全 dg-Segal 空间范畴构造函子：我们只需在“生成元”上定义函子，并确保它们将“关系”映为弱等价。特别是，这会为我们提供一种更简洁、更简便的方法来计算 dg- –范畴中的自同构。

这也并非一种全新的处理方式：Toën 在 [Toë05] 中，以及 Barwick 和 Schommer-Pries 在 [BSP21] 中，都利用了这些“由生成元与关系给出的表示”，分别为 $(\infty,1)$-范畴和 (∞,n)-范畴建立公理化；随后，他们又利用这些表示证明，(∞,n)-范畴的自同构群同构于离散群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$。Toën 的论文结尾指出，每一种 ∞-范畴理论都等价于完全 Segal 空间范畴，而非其他模型，这并非巧合。

2.5 正文的组织结构

本论文分为三个部分，分别对应不同的章节。

在第一章“背景概念”中，我们将回顾（或介绍）本文所涉及的基本概念：模型范畴与 Quillen 伴随，尤其是链复形及图表的相关内容；左、右适当模型范畴与同伦余极限；映射空间；左 Bousfield 局部化；单纯对象、单纯范畴及 dg-范畴。我们将特别关注 dg-范畴的模型结构。本章还包括一节，讲解 Dugger 为范畴 C 构造“泛模型范畴”的方法。

在第二章“dg-Segal 空间”中，我们将讨论大部分研究结果。就内容而言，我们可以将其分为三个部分。

第一部分仅包含第 1 节，我们将在其中构造 dg-范畴范畴与 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathrm{sSet})$ 之间的一串 Quillen 伴随；后者是有限型自由 dg-范畴与单纯集合之间的单纯函子范畴。我们将明确构造该函子，

$$\mathrm{Re} : \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \mathbf{dg-cat} : \mathrm{Sing}\,.$$

在第二部分中，　　其中涵盖了第 2 节和第 3 节，我们将讨论并构造 dg-Segal 空间　　s

和完备 dg-Segal 空间。仿照 [Rez01], ，我们将通过描述函子 Sing 的像中函子的性质，判断它们是否将某些态射变为弱等价，从而确定函子 Sing 的像。特别地，若函子 F 满足以下条件，我们称之为**dg-Segal 空间**

1. 对所有 $L, K \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$, $F(L \coprod K) \to F(L) \times F(K)$ 都是弱等价。

2. 始对象的像是一个点，即 $F(\emptyset) \simeq *$。

3. 设 G 是 Gr(C(k)) 中的一个图。对所有 $\alpha \in Z^n(G(x, y))$，由 $G(< \alpha >)$ 得到的自由 dg-范畴的像是 sSet 中如下形式的同伦拉回：

$$\begin{array}{ccc} F(L(G(<\alpha>))) & \longrightarrow & F(L(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\Delta_k^c(1,n,1)) & \longrightarrow & F(\Delta_k(1,n,1)). \end{array}$$

接下来，我们在 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 与单纯空间之间构造一个 Quillen 伴随，并证明它将 dg-Segal 空间映射为经典 Segal 空间。随后，我们利用该伴随定义完备 dg-Segal 空间：它们是指经线性化函子映射后成为完全 Segal 空间的 dg-Segal 空间。由此得到以下定义： F 是一**个完备 dg-Segal 空间**，当且仅当

$$F(k) \to F_{hoequiv}$$

是一个弱等价。我们证明，Quillen 伴随 Sing 的像包含于完全 Segal 空间中。我们为 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 构造两种模型结构，使 dg-Segal 空间和完全 dg-Segal 空间分别成为它们的纤维对象。最后，在本节中，我们定义一种称为 DK-等价的态射，并提出假设：完备 dg-Segal 模型结构中的弱等价恰好就是 DK-等价。

假设 2.5.1 (假设 4.3.22)。 设 f： $F \to G$ 是两个满足 *dg-Segal* 条件的函子之间的态射。那么， f 是 *DK*-等价，当且仅当它是完备 *dg-Segal* 模型结构中的弱等价。

最后，本章的第三部分涵盖第4、5和6节，旨在证明（假设该假设成立）(Re, Sing) 实际上是完全 dg-Segal 空间上的一个 Quillen 等价。首先，在第4节中，我们将在一般模型范畴中、继而在 dg-范畴 $T_* \to T$ 上定义并构造某种超覆盖，并证明这种超覆盖的同伦余极限与原对象弱等价，即 hocolim $T_i \simeq T$。然后，在第5节中，我们利用这些超覆盖证明伴随 (Re, Sing) 在 DK-等价意义下是全忠实的。

定理 2.5.2 (定理 4.5.6)。 假设假设 *4.3.22* 成立，则对于所有 $T \in \mathbf{dg}$ –范畴，我们有$\mathrm{Re}_k(\mathrm{Sing}_k)(T) \simeq T$，且函子 Sing_k 是全忠实的。

最后，在第 6 节中，我们证明，假设该假设成立，则该伴随在 dg-Segal 空间上本质满射。为此，我们构造 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 中形如 Sing($T_*$) $\to F$ 的函子的特殊类型超覆盖，并证明 T_* 的同伦余极限的像弱等价于 F。

定理2.5.3 (定理 4.6.14)。 设 F 是一个满足 *dg-Segal* 条件的函子。则存在一个 *dg*-范畴 T，使得态射 $\mathrm{Sing}(T) \to F$ 是一个 *DK*-等价。因此，若假设成立，则伴随 $\mathrm{Re} : \mathbf{dg} - \mathbf{Segal} \rightleftharpoons \mathbf{dg}$ –范畴 : Sing 是一个 *Quillen* 等价。

在第三章也是最后一章“未来工作”中，我们探讨了若干条可以进一步拓展本论文工作的路径。第一节将讨论上一章中的假设，并说明证明该假设所需的主要方法。第二节将介绍线性单纯形范畴 Δ_k。我们希望它能成为单纯形范畴 Δ的某种线性化版本，并期望它能在 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 和 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(\Delta_k^{op}$, sSet) 之间建立某种 Quillen 等价，使我们能够直接将完备 dg-Segal 空间定义为从 Δ_k 到 sSet 的单纯函子。最后，我们简要谈谈研究结果的其他潜在应用。

2.6 记号

尽管以下记号都会在下一章中提及并解释，我们仍将它们列于此处，以便查阅。

- 我们将两个范畴之间的伴随记作 $F\colon M \rightleftharpoons N\colon G$，其中左伴随总是写在上方的箭头。

- 我们将单纯集合范畴记作 sSet，将上链复形范畴记作 C(k)，将 dg-范畴范畴记作 dg $-$cat。

- 我们固定 k 为一个交换环。我们将 C(k) 中 k 上的张量积记作 $-\otimes -$，并将上链复形 A 上的平移记作 $A[-]$。
- 我们将集中在次数 s上的上链复形记作 $k[s]$，其在该次数上的值为 k；将集中在次数 s 和 $s-1$上的复形记作 $k^c[s]$，其在这些次数上的值为 k。
- 我们将范畴 A 和 B之间的函子范畴记作 Fun(A,B)，将单纯范畴 A 和 B之间的单纯函子范畴记作 Fun$^{\mathbb{S}}(A,B)$。
- 我们用 $Gr(A)$ 表示由范畴 A 富化的图所构成的范畴，并用 $Gr(\mathrm{C}(k))^{tf}$ 表示由有限型复形富化的图所构成的全子范畴。
- 我们用 $\mathcal{L}$ 表示自由 dg-范畴的范畴，并用 $c\mathcal{L}$ 表示有限型余纤维自由 dg-范畴的全子范畴。

第 3 章

背景概念

“让我们从最初开始，那是个绝佳的起点”——《音乐之声》，《哆来咪》

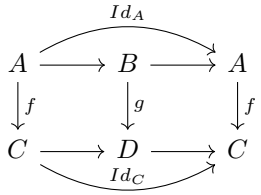
3.1 模型范畴

本研究的一项核心工具是模型范畴这一概念。因此，我们来回顾一些关于模型范畴的结果和定义。这些结果都是众所周知的，除非另有说明，本节中的结果均引自 [Hov99]。

3.1.1 定义

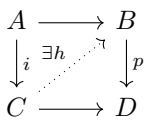
本节的结果出自 [Hov99，第 1.1 节和第 1.3] 节。

定义 3.1.1。设 M 为一个范畴，且 f，g 是 M 中的态射。若存在如下形式的交换图，我们称 f 是 g 的 ***retract***：



定义 3.1.2。设 M 为一个范畴。函子的**函子性分解** 是一个有序对$(\alpha,\ \beta) : \mathrm{Morph}(M)^2 \to \mathrm{Morph}(M)^2$，使得对于 C 中的所有态射 f，都有一个分解 $f = \beta(f) \circ \alpha(f)$。

定义 3.1.3。设 M 为一个范畴，i 和 p 为 M 中的态射。若对于每个交换方形，我们称 i 相对于 p 具有**左提升性质**，并称 p 相对于 i 具有**右提升性质**：



存在 h，称为“提升”，使得两个三角形也都交换。

定义3.1.4. 设 M 是一个范畴。我们称 M 上的一个**模型结构**为由 M中称为**弱等价**、**纤维化** 和**余纤维化**的三个态射集，以及两个函子性分解(α,β) 和(γ,δ) 组成的数据，并满足以下性质。设 f和 g是 M中的态射。

- 三取二性质：如果可以定义 f和 g的复合，且 f、 g和 $f\circ g$ 中有两个是弱等价，那么第三个也是弱等价。

- *retract* 闭性：如果 f 是 g 的 *retract*，且 g 是弱等价、纤维化或余纤维化，那么f 也是如此。

- 提升性质：我们将同时为弱等价和纤维化（余纤维化）的态射定义为**平凡纤维化（平凡余纤维化）**。平凡余纤维化相对于纤维化具有左提升性质，而余纤维化相对于平凡纤维化具有左提升性质。换言之，如果 i 是余纤维化， p是纤维化，且两者中至少有一个是弱等价，那么存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ C & \longrightarrow & D \end{array}$$

。

- 分解性质：态射 $\alpha(f)$是余纤维化， $\beta(f)$是平凡纤维化， $\gamma(f)$是平凡余纤维化，而 $\delta(f)$是纤维化。换言之，使用函子性分解对态射进行分解时，第一项总是纤维化，第二项总是余纤维化，并且其中至少一项是弱等价。

定义3.1.5。 我们称一个既完备又余完备、并带有模型结构的范畴为**模型范畴**。

注3.1.6。 这个定义是自对偶的，也就是说，如果 M 是一个模型范畴，那么 M^{op} 也是一个模型范畴，其中 M 的纤维化就是 M^{op} 的余纤维化，反之亦然。函子性分解留给读者自行寻找。

由于我们假设模型范畴是完备且余完备的，因此它有一个始对象和一个终对象，分别是空图表的极限和余极限。由此得到以下定义：

定义3.1.7。 设 M 是一个模型范畴。若从对象 $x\in \mathrm{Obj}(M)$ 到终对象的映射是纤维化，则称该对象是**纤维**的。若从始对象到 x 的映射是余纤维化，则称 x 是**余纤维**的。

利用模型结构中的函子性分解可知，对于模型范畴中的任意对象 $x\in M$， $\emptyset\to x$ 都存在如下形式的分解： $\emptyset\to Qx\to x$，其中对象 Qx 是余纤维的，且 $Qx\to x$ 是平凡纤维化。类似地， $x\to *$ 也存在如下形式的分解： $x\to Rx\to *$，其中对象 Rx 是纤维的，且 $x\to Rx$ 是平凡余纤维化。

定义 3.1.8. 我们称 Qx为 x的余纤维替换，并称 Rx 为 x的纤维化替换。我们有函子 $Q,R\colon M\to M$，并称它们为余纤维（纤维）替换函子。

实际上，我们不需要显式定义模型结构中的所有组成部分。事实上，有一个结果告诉我们，这些公理是过度确定的。

命题 3.1.9。 设 M 是一个模型范畴。那么， M 中的映射是余纤维化（平凡余纤维化），当且仅当它对所有平凡纤维化（纤维化）都具有左提升性质。由对偶性可知，映射是纤维化，当且仅当它对所有平凡余纤维化（余纤维化）都具有右提升性质。

因此，我们几乎从不同时定义纤维化和余纤维化，因为只要给定其中一种以及弱等价，另一种就完全确定了。

按照范畴论中定义概念的惯例，既然我们已经有了对象，现在就需要定义这些对象之间的态射。我们究竟将什么视为模型范畴之间的态射？我们称之为 Quillen 函子，或者等价地，称为 Quillen 伴随。

定义 3.1.10. 设 M 和 N 是两个模型范畴。

- 如果函子 $F\colon M \to N$ 是左伴随，且保余纤维化和平凡余纤维化，我们就称它为**左 Quillen 函子**。
- 如果函子 $U\colon N \to M$ 是右伴随，且保纤维化和平凡纤维化，我们就称它为**右 Quillen 函子**。
- 设 (F, U, ϕ) 是 M与 N之间的一个伴随。若(F, U, ϕ) 是一个**Quillen 伴随** 或**Quillen 函子**，则 F 是一个左 *Quillen* 函子。

注 3.1.11. 重要的是要记住，左 *Quillen* 伴随和右 *Quillen* 伴随都不保所有弱等价，而只保同时也是余纤维化（左侧情形）或纤维化（右侧情形）的弱等价。这意味着 *Quillen* 等价本身并不保模型范畴的全部结构。不过，在一种情况下确实如此：我们知道，每个左 *Quillen* 函子都保余纤维对象之间的弱等价，而每个右 *Quillen* 函子都保纤维对象之间的弱等价。

注记 3.1.12. 听起来可能有些奇怪，也缺乏对称性：我们只要求 F 是左 *Quillen* 函子，而不要求 U 也同时是右 *Quillen* 函子。事实上，很容易证明，如果我们有一个 *Quillen* 函子 (F, U, ϕ)，那么函子 U 会自动成为右 *Quillen* 函子，所以无需另作要求。

注记 *3.1.13.* 当然，我们可以复合左 *Quillen* 函子，得到新的左 *Quillen* 函子；右 *Quillen* 函子也一样。另一方面，将左 *Quillen* 函子与右 *Quillen* 函子复合，并不一定能得到任何有用的结果，这一点并不令人意外。具体来说，这意味着如果我们有三个模型范畴 M、N、L，以及两个 *Quillen* 伴随 $(F, U, \phi)\colon M \to N$ 和 $(F', U', \psi)\colon N \to L$，那么 M 与 L 之间存在一个 *Quillen* 伴随；但如果我们有两个 *Quillen* 伴随 $(F, U, \phi)\colon M \to N$ 和 $(F', U', \psi)\colon L \to N$，则没有理由认为 M 与 L 之间会存在 *Quillen* 伴随。

注记 3.1.14. 实际上，我们很少通过给出整个伴随来描述 *Quillen* 函子：通常只给出其中一个函子即可。这种不严谨的说法并不重要，因为我们可以证明，若 (F, U, ϕ) 是一个 *Quillen* 伴随，并且还有另一个伴随 (F, U', ψ)，那么(F, U', ψ) 也构成一个 *Quillen* 伴随。

记号 3.1.15. 每当我们写出构成伴随的两个函子时，就用$F\colon M \rightleftharpoons N\colon Q$表示，其中左伴随总是写在上面的箭头。

此外，还有一个判据对我们之后很有用，可用来证明某个伴随是 Quillen 伴随。

命题 3.1.16. *[JT07,* 命题 *7.15]* 设 M 和 N 是两个模型范畴，并设 $F\colon M \rightleftharpoons N\colon G$是它们之间的一个伴随。那么，该伴随是 *Quillen* 伴随，当且仅当 F 保余纤维化且 G 保纤维对象。

最后，在这一部分中，我们将定义我们所称的模型范畴中的等价。

定义 3.1.17。设 M 和 N 是两个模型范畴，且 (F, U, ϕ) 是一个 *Quillen* 伴随。若对于 M 中的所有余纤维对象 X 和 M 中的所有纤维对象 Y，映射 $f\colon FX \to Y$ 在 N 中是弱等价，当且仅当 $\phi(f)\colon X \to UY$ 在 M 中是弱等价，则称 (F, U, ϕ) 是一个 **Quillen 等价**。

3.1.2 同伦范畴

从历史上看，引入模型范畴的主要原因是：虽然我们总能相对于一组态射 W 将范畴 C 局部化，但 Gabriel-Zisman 局部化所得的对象很难处理，而且这一构造迫使我们考虑高阶宇宙。幸运的是，我们可以证明，如果能构造一个以集合 W 作为其弱等价的模型范畴，那么局部化范畴就等价于一个性质好得多且更小的范畴。除非另有说明，本节的结果均来自 [Hov99，第 1 节。2]

定义 3.1.18. （*Gabriel-Zisman* 局部化）设 C 是一个范畴， W 是 C中的一组态射。我们称 W 的局部化为一个“范畴”（暂不考虑大小问题）$C\left[W^{-1}\right]$，并配备函子 $l{:}C \to C\left[W^{-1}\right]$，该函子将 W中的所有态射映为$C\left[W^{-1}\right]$中的同构，且满足以下泛性质。设 D 是一个范畴，并配备函子 $f\colon C \to D$，使得 f 将 W中的所有态射映为 D中的同构；那么存在唯一的函子 $f'\colon C\left[W^{-1}\right] \to D$，使得 $f' \circ l = f$。

注 3.1.19. 此定义取自 *[Toë11，《第 2 节》1]*。建议好奇的读者阅读 *[Hov99，定义 1.2。1]*，以了解上述局部化的显式构造。

记号 3.1.20. 有时我们将 M 的同伦范畴中对象之间的态射记作 $[X,Y]_M$；如果底模型范畴明确，也可简记为 $[X,Y]$。

记号 3.1.21. 若取 C 为一个模型范畴，并令 W 为其弱等价集合，则我们将 $C\left[W^{-1}\right]$ 记作 $\mathrm{Ho}(C)$，并称之为 C 的**同伦范畴**。

现在我们已经定义了 M 一个模型范畴的同伦范畴，是时候开始构造我们承诺过的那个等价版本了；它会容易使用得多。为此，我们先引入一个记号。

记号 3.1.22. 设 M 为一个模型范畴。那么，

- 我们将余纤维对象构成的全子范畴记作 M_c。
- 我们将纤维对象构成的全子范畴记作 M_f。
- 我们用 M_{cf} 表示由既纤维又余纤维的对象构成的全子范畴。

命题 3.1.23. 设 M 是一个模型范畴。那么，包含函子诱导出范畴之间的等价：$\mathrm{Ho}(M_{cf}) \to \mathrm{Ho}(M_c) \to \mathrm{Ho}(M)$ 以及 $\mathrm{Ho}(M_{cf}) \to \mathrm{Ho}(M_f) \to \mathrm{Ho}(M)$。

因此，如果我们能找到一种更容易理解的方式来定义 $\mathrm{Ho}(M_{cf})$（并且它也是这个宇宙中的一个范畴），就能将它用作 $\mathrm{Ho}(M)$ 的等价范畴。

定义 3.1.24. 设 M 是一个模型范畴。

- 设 B 是 M中的一个对象。如果折叠映射 $B \coprod B \to B$ 可分解为一个余纤维化 $i_0 + i_1\colon B \coprod B \to B'$ 和一个弱等价 $s\colon B' \to B$，我们就称 B' 为 B 的**柱体对象**。
- 设 X 是 M中的一个对象。如果对角映射 $X \to X \times X$ 可分解为一个弱等价 $X \to X'$ 和一个纤维化 $(p_0, p_1)\colon X' \to X \times X$，我们就称 X' 为 X 的**路径对象**。

注记 3.1.25。显然，这样的分解总是存在：事实上，我们只需应用此前定义的函子性分解即可。在这种情况下，态射 $B' \to B$ 也是一个平凡纤维化，而 $X \to X'$ 是一个平凡余纤维化。

定义 3.1.26。设 M 为一个模型范畴，f，g：$B \to X$ 是 M中的两个态射。

- 我们称从 f 到 g 的一个**左同伦**为映射 H：$B' \to X$，其中 B' 是 B的柱体对象，并且满足 $Hi_0 = f$ 和 $Hi_1 = g$。如果存在这样的左同伦，则称 f 和 g **左同伦**，记作 $f \sim^l g$。

- 我们称从 f 到 g 的一个**右同伦**为映射 $H\colon\ B \to X'$，其中 X' 是 X的路径对象，并且满足 $p_0H = f$ 和 $p_1H = g$。如果存在这样的右同伦，则称 f 和 g **右同伦**，记作 $f \sim^r g$。

注记 3.1.27. 读者可能会认出代数拓扑中用于定义同伦群的那些同伦，这并非巧合：事实上，借助我们稍后将给出的拓扑空间模型范畴的构造，右同伦和左同伦的定义彼此一致，也都与经典定义一致。

定义 3.1.28. 设 M是一个模型范畴，$f, g\colon B \to X$是其中两个态射。若 f和 g既左同伦又右同伦，我们称它们是**同伦的**，并记作 $f \sim g$。

定义 3.1.29. 设 M是一个模型范畴，$f\colon B \to X$是其中一个态射。若存在另一个态射 $g\colon X \to B$，使得 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_X$ 且 $g \circ f \sim \mathrm{Id}_B$，我们称 f为**同伦等价**。若存在这样的同伦等价，我们称 B 和 X 是**同伦等价的**。

在这个阶段，熟悉代数拓扑的人大概已经知道接下来要做什么：我们要尝试通过取由同伦等价给出的等价关系来构造一个商范畴。我们希望能直接这样做，但行不通。事实上，一般而言，左同伦与复合相容，但仅在左侧相容；右同伦与复合相容，但仅在右侧相容。同样地，只有当 B 是余纤维的（对于左同伦）或 X 是纤维的（对于右同伦）时，这些关系才是等价关系。因此，我们必须对对象添加一些条件，使这些关系具备正确的性质。

命题 3.1.30. 设 M 是一个模型范畴，B 是 M 中的余纤维对象，而 X 是 M 中的纤维对象。那么，左同伦和右同伦的定义在 $\mathrm{Hom}(B, X)$ 上一致，并且都是等价关系。特别地，同伦关系是 M_{cf} 上的等价关系，并且与复合相容。因此，商范畴 $M_{cf}/\sim$ 存在。

这是我们希望证明与 Ho(*M*) 等价的范畴。目前，我们知道函子$M \to M_{cf}/\sim$ 会将同伦等价映射为同构。它也会将弱等价映射为同构吗?

命题 3.1.31. 设 M 是一个模型范畴。那么，M_{cf} 中的映射是同伦等价，当且仅当它是弱等价。

推论 3.1.32. 设 M 是一个模型范畴。那么，范畴 $M_{cf}/\sim$ 与函子$L : M_{cf} \to M_{cf}/\sim$ 满足以下泛性质。设 D 是一个范畴，并带有函子$f\colon\ M_{cf} \to D$，使得 f 将 M_{cf} 中所有的弱等价映射为 D 中的同构；那么存在唯一的函子 $f'\colon M_{cf}/\sim \to D$，使得 $f' \circ L = f$。

现在我们已经证明，范畴 $M_{cf}/\sim$ 是相对于弱等价的 M_{cf} 的局部化。不过，我们还需要证明 $M_{cf}/\sim$ 确实等价于 M 的局部化。这是命题 3.1.23 的推论：我们已经证明 Ho(M_{cf}) 与 Ho(M) 等价。我们在一个定理中总结以上全部内容。

定理 3.1.33. 设 M 是一个模型范畴，$\mathrm{Ho}(M)$ 是 M 相对于弱等价的局部化，而 $l\colon\ M \to \mathrm{Ho}(M)$ 是局部化函子。提醒一下，R 是纤维替换函子，Q 是余纤维替换函子。

- 包含函子 $i\colon\ M_{cf} \to M$ 诱导出一个范畴等价

$$(M_{cf}/\sim) \cong \mathrm{Ho}(M_{cf}) \to \mathrm{Ho}(M).$$

- 存在自然同构

$$(\mathrm{Hom}_M(QRX, QRY)/\sim) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}\,M}(l(X), l(Y)) \cong (\mathrm{Hom}_M(RQX, RQY)/\sim).$$

特别地，$\mathrm{Ho}(M)$ 是一个不改变宇宙的范畴。

- 左 函子 $l\colon M \to \mathrm{Ho}(M)$ 将右同伦映射和左同伦映射变为同构 $s.$

- 如果 $f\colon A \to B$ 是 模型范畴 M中的一个映射，且 $l(f)$ 在 $\mathrm{Ho}(M)$ 中是同构，那么 f是一个弱等价 $e.$

最后，既然现在我们已经得到了模型范畴 M 的同伦范畴的一个实用定义，就可以提出这样一个问题：如何从模型范畴之间的函子得到诱导的同伦范畴之间的函子。

定义3.1.34。设 M 和 N 是两个模型范畴，$F\colon M \to N$ 是一个左 *Quillen* 函子，而 $U\colon N \to M$ 是一个右 *Quillen* 函子。

- 我们将**全左导出函子** $\mathbb{L}F\colon \mathrm{Ho}(M) \to \mathrm{Ho}(N)$ 定义为以下复合

$$\mathbb{L}F = \mathrm{Ho}(F) \circ \mathrm{Ho}(Q) : \mathrm{Ho}(M) \to \mathrm{Ho}(M_c) \to \mathrm{Ho}(N).$$

- 我们将**全右导出函子** $\mathbb{R}U\colon \mathrm{Ho}(N) \to \mathrm{Ho}(M)$ 定义为以下复合

$$\mathbb{R}U = \mathrm{Ho}(U) \circ \mathrm{Ho}(R) : \mathrm{Ho}(N) \to \mathrm{Ho}(N_f) \to \mathrm{Ho}(M)$$

记号 3.1.35. 由于函子几乎从不同时是同一模型结构下的左、右 *Quillen* 函子，我们通常不说明全导出函子是左导出还是右导出。我们把从 *Quillen* 函子转到全导出函子的过程称为对函子进行“导出”。

注 3.1.36. 正如我们所见，要使定义成立，F 和 U 并不一定非得是 *Quillen* 函子：任何保持余纤维对象之间弱等价的函子，都可以导出为全左导出函子；任何保持纤维对象之间弱等价的函子，都可以导出为全右导出函子。

另一方面，除了 Quillen 伴随，我们还定义了另一类函子：Quillen 等价。我们希望两个 Quillen 等价的模型范畴在概念上是“同一个”模型范畴，就像两个等价的范畴在概念上是“同一个”范畴一样。遗憾的是，它们并非完全如此。归根结底，问题仍然在于同伦范畴。

命题 3.1.37。设 M 和 N 是两个模型范畴，且 $F\colon M \rightleftharpoons N\colon U$ 是一个 *Quillen* 伴随。则以下各项等价：

1. (F, U, ϕ) 是一个 *Quillen* 等价。

2. 对所有余纤维的 X，复合映射 $X \to UFX \to URFX$ 是弱等价；对所有纤维的 Y，复合映射 $FQUY \to FUY \to Y$ 也都是弱等价。

3. 伴随 $(\mathbb{L}F, \mathbb{R}U, R\phi)$ 是范畴的伴随等价。

因此，两个模型范畴 Quillen 等价，当且仅当它们的同伦范畴等价。

3.2 模型范畴上的构造

现在我们已经掌握了模型范畴的主要定义。但我们该如何使用它们，又能用它们做什么呢？本节将构造一些结构，供我们后续使用，既可为我们喜爱的范畴建立模型结构，也可用于研究这些喜爱的模型范畴。

3.2.1 余纤维生成模型范畴

证明一个范畴具有模型结构相当困难。为此，我们有一个概念可以帮助我们以一种“更容易”的方式构造模型范畴，即余纤维化生成的模型范畴。不过，在此之前，我们还需要一些定义。本部分的结果均来自 [Hov99，第 2 章、第3], 章，除非另有说明。

定义 3.2.1. 设 C 是一个具有所有小余极限的范畴， λ 是一个序数。 **λ-序列** 是一个保余极限函子 $X:\lambda\to C$。

由于 λ-序列保余极限，对于所有极限序数 $\gamma<\lambda$，我们都有一个同构 $\operatorname{colim}_{\beta<\gamma}X_\beta\to X_\gamma$ 。

定义 3.2.2. 设 C 是一个具有所有小余极限的范畴， λ 是一个序数，且 $X:\lambda\to C$ 是一个 λ-序列。那么我们称映射 $X_0\to\operatorname{colim}_{\beta<\lambda}X_\beta$ 为该 λ-序列的**超限复合** 。

定义 3.2.3. 设 κ 是一个基数。若序数 α 是一个 **κ-滤过** 序数，并且若$A\subset\alpha$ 且 $|A|<\kappa$，则$\sup A<\alpha$，我们称该序数为 **κ-滤过** 的。

定义 3.2.4. 设 C 是一个具有所有小余极限的范畴， I 是 C中的一族态射， A 是 C 的一个对象，且 κ 是一个基数。若对于所有 κ-滤过序数 α 以及所有满足以下条件的 α-序列 $X:$ 对 $\beta+1<\alpha$，每个 $X_\beta\to X_{\beta+1}$ 都属于 I，映射

$$\operatorname{colim}_{\beta<\alpha}\operatorname{Hom}_C(A,X_\beta)\to\operatorname{Hom}_C(A,\operatorname{colim}_{\beta<\alpha}X_\beta)$$

是一个同构。 我们称 A 相对于 I 是小的，若对于某个基数 κ，它相对于 I 是 κ-小的。

定义 3.2.5。 设 C 是一个范畴， I 是 C 中的一组映射，且包含所有小余极限。那么，**相对 I-胞腔复形** 是由 I中的元素经推出得到的超限复合。我们用 I-胞腔表示相对 I-胞腔复形的集合。

定义 3.2.6。 设 C 是一个范畴， I 是 C中的一组映射。

- 若一个映射对 I中的每个映射都具有右提升性质，则称其为 **I-单射** 。我们用 $I-inj$表示 I-单射映射的集合。
- 若一个映射对 I中的每个映射都具有左提升性质，则称其为 **I-投射** 。我们用 $I-proj$表示 I-投射映射的集合。
- 若映射具有相对于 $I-inj$ 中每个映射的左提升性质，即属于 $(I-inj)-proj$，则称其为 **I-余纤维化** 。我们用 $I-cof$ 表示 I-余纤维化的集合。
- 若映射具有相对于 $I-proj$ 中每个映射的右提升性质，即属于 $(I-proj)-inj$，则称其为 **I-纤维化** 。我们用 $I-fib$ 表示 I-纤维化的集合。

至此，我们终于具备了所需的定义，可以介绍我们想用来构造模型范畴的工具。

定义 3.2.7。 设 M 是一个模型范畴。若存在两个映射集 I 和 J，使得

- 映射 I 的定义域相对于 I-胞腔是小的。
- 映射 J 的定义域相对于 J-胞腔是小的。
- 纤维化是指对 J 中每个映射都具有右提升性质的映射，也就是说，纤维化的集合为 $J-inj$。
- 平凡纤维化是指相对于 I 中每个映射都具有右提升性质的映射，也就是说，平凡余纤维化的集合是 $I-inj$。

我们称 I t 生成**生成余纤维化**，以及 J 生成**生成平凡余纤维** .

正如我们所见，余纤维生成模型范畴首先也是模型范畴。事实上，我们在"现实生活"中打交道的大多数模型范畴都属于这一类型。实际上，我们可以用一种不必经过主要定义的方式来证明某个范畴是余纤维生成模型范畴。无论如何，这些条件也不容易证明，但它们比另一种方法简单一些。

定理 3.2.8. 设 C 是一个具有所有小极限和余极限的范畴。设 W、 I 和 J 是C中的映射集。当且仅当满足以下条件时， C 上存在一个余纤维生成模型结构，其弱等价为 W ，生成余纤维化集为 I ，生成平凡余纤维化集为 J :

- 集合 W 具有二取三性质。
- 集合 W 在收缩下封闭。
- I 中的映射的定义域相对于 I-胞腔是小的。
- J 中的映射的定义域相对于 J-胞腔是小的。
- 我们有包含映射 $J-cof \subseteq (W \cap I-cof)$。
- 我们有包含映射 $I-inj \subseteq (W \cap J-inj)$。
- 这些包含映射中至少有一个是相等的。

有几个模型范畴的例子将在本文中频繁使用：现在让我们描述它们的模型结构。

先从拓扑空间开始。我们将用 S^{n-1} 表示维数为 n 的单位球面，用 D^n 表示维数为 n的单位圆盘。

定义 3.2.9。 令 **Top** 表示拓扑空间范畴，并令 $f\colon X \to Y$ 是 **Top** 中的一个态射 .

- 我们称 f 是 **Top** 中的弱等价，如果对所有 $x \in X$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$ ，诱导的群态射都是群同构。

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$$

- 我们定义 I 为所有边界嵌入 $f\colon S^{n-1} \to D^n$ 构成的集合，其中 $n \in \mathbb{N}$取遍所有值。
- 我们定义 J为所有包含映射 $f\colon D^n \to D^n \times [0,1]$ 构成的集合，使得对于所有 $x \in X$和 $n \in \mathbb{N}$， $f(x) = (x, 0)$。

定理 3.2.10。 在 **Top** 中存在一个余纤维生成模型结构，其弱等价如上所述， I 生成余纤维化以及 J 生成平凡余纤维化。此外，**Top**中的每个对象都是纤维的。

现在我们有了拓扑空间，可以得到下一个模型范畴；它对后续内容很重要：sSet，即单纯集合范畴。不过，在此之前，我们需要先了解几个结果。

定义 3.2.11. 设 $n \in \mathbb{N}$ 为自然数。我们定义一个单纯集合 Δ_n： $\Delta^{op} \to \mathbf{Set}$ 为 b e

$$\Delta_n([k]) = \mathrm{Hom}_{\Delta}([k], [n])$$

对所有 $[k] \in \Delta^{op}$。

命题 3.2.12。 设 C 是一个具有小余极限的范畴。那么从 Δ 到 C的函子范畴$\mathrm{Fun}(\Delta, C)$等价于伴随的范畴**sSet** $\rightleftharpoons C$。

特别地，这一结果意味着，如果我们想构造单纯集合与另一个范畴 C之间的伴随，只需在 C 中构造一个余单纯对象即可。我们将利用这一点来构造单纯空间与拓扑空间之间的伴随。

定义 3.2.13. 拓扑空间与单纯集合之间存在一个伴随。我们将其记为 $\mathrm{Re} : \mathbf{sSet} \rightleftharpoons \mathbf{Top} : \mathrm{Sing}$。我们称 Re 为**几何实现**，称 Sing 为**奇异函子**。

构造概要。 取定 $n \in \mathbb{N}$一个自然数。我们将 $\mathrm{Re}(\Delta_n)$ 定义为 $(e_0, .. . , e_n) \in \mathbb{R}^n$ 的凸包，其中 $e_0 = (0, \ldots, 0)$, 并且对于所有的 $1 \leq i \leq n$ e_i，其都是第 i 个坐标为 1、其余坐标均为 0 的向量。换句话说，

$$\mathrm{Re}(\Delta_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ \forall 1 \leq i \leq n,\ t_i \geq 0,\ \sum t_i \leq 1\}.$$

于是我们得到一个余单纯拓扑空间 $\mathrm{Re}(\Delta_*)$。根据命题 3.2.12，我们得到一个伴随 $\mathrm{Re} : \mathrm{sSet} \rightleftharpoons \mathrm{Top} : \mathrm{Sing}$，至此构造完成。

Q.E.D.

定义 3.2.14. 令**sSet**表示单纯集合范畴。

- 我们称单纯集合的态射 $f\colon X \to Y$ 是弱等价，当且仅当其几何实现$\mathrm{Re}(f)$ 是我们在**Top**上定义的模型结构中的弱等价。
- 我们定义 I 为对所有 $n \in \mathbb{N}$的包含映射 $\partial\Delta_n \to \Delta_n$ 。
- 我们定义 J 为对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $0 \leq r \leq n$的角包含映射 $\Lambda^r_n \to \Delta_n$ 。

定理 3.2.15. 在**sSet** 中存在一个余纤维生成模型结构，其弱等价如上所述， I 为生成余纤维化， J 为生成平凡余纤维。此外，**sSet**中的每个对象都是余纤维的。

最后，我们将给出交换环 k上的上链复形范畴 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 的模型结构。我们定义 $k[n]$ 为集中在次数 n的上链复形，其在该次数上的取值为 k；还定义 $k^c[n]$为集中在次数 n和 $n-1$的复形，其取值为k。

定义 3.2.16. 令 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 为 k 上的上链复形范畴。

- 我们称 $f\colon X \to Y$ 在 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 中是一个弱等价，如果对于所有 $x \in \mathbb{N}$ ，上同调群的诱导态射

$$H^n(f) : H^n(X) \to H^n(Y)$$

  是群的同构。
- 我们将 I 定义为对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立的包含映射 $k[n-1] \to k^c[n]$ 。
- 我们将 J 定义为对所有 $n \in \mathbb{N}$ 的包含映射 $0 \to k^c[n]$ ，其中 0 是处处为零的复形。

定理 3.2.17。 存在一个$\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 中的余纤维生成模型结构，其弱等价如上所述， I 为生成余纤维化， J 为生成平凡余纤维化。此外，$\mathbf{C}(\mathbf{k})$中的每个对象都是纤维的。

一个特别有趣的模型范畴是模型范畴上的图表（或预层）范畴。由于它对本文的主要结果至关重要，我们将对此加以关注。从现在起，本节中的结果均取自 [Hir03，第 11] 章。

定义 3.2.18。 设 C 和 M 是两个范畴。我们定义 C**-图表范畴** M，并将其记作$\mathrm{Fun}(C,M)$，其数据如下：

- 由从 C 到 M的函子组成的对象集，即函子 $F\colon\ C\to M$。
- 对于任意两个对象 F，$Q\colon\ C\to M\in\mathrm{Obj}(\mathrm{Fun}(C,\ M))$，都有一个集合 $\mathrm{Hom}(F,\ Q)$，其中包含 F 与 Q 之间的自然变换。

记号 3.2.19。 当我们考虑 C的对偶时，我们将 $\mathrm{Fun}(C^{op},\ M)$ 称为 M上的**-预层范畴**C。**特别地，如果 sSet**，我们就称之为**单纯预层范畴。**

是否每次都必须证明每个图表范畴都存在模型结构？幸好不必。我们可以证明，如果范畴 M 具有余纤维生成模型结构，那么图表范畴也具有模型结构（事实上，它有两种！）

定义 3.2.20。 设 C 是一个范畴，M 是一个余完备范畴。设 I 是M中的一组态射。我们将 F_I^C记作$\mathrm{Fun}(C,\ M)$ 中形如以下形式的映射集合

$$\coprod_{C(\alpha,\cdot)} A=F_A^\alpha\to F_B^\alpha=\coprod_{C(\alpha,\cdot)} B,$$

其中 $A\to B$ 是 I 的一个元素，$\alpha\in\mathrm{Obj}(C)$。

定理 3.2.21。 设 C 是一个小范畴，M 是一个余纤维生成模型范畴，其中 I 为生成余纤维化的集合，J 为生成平凡余纤维的集合。则 C在 M中的图表范畴是一个余纤维生成模型范畴，其生成余纤维化为 F_I^C，生成平凡余纤维为 F_J^C。在这个模型范畴中，有

- 态射 $f\colon\ F\to Q$ 是 $\mathrm{Fun}(C,M)$ 中的弱等价，当且仅当它在 M中逐对象地是弱等价，即对于所有 $\alpha\in C$，态射 $f(\alpha)=F(\alpha)\to Q(\alpha)$ 在 M中是弱等价。
- 态射 $f\colon\ F\to Q$ 是 $\mathrm{Fun}(C,M)$ 中的纤维化，当且仅当它在 M中逐对象地是纤维化，即对于所有$\alpha\in C$，态射 $f(\alpha)=F(\alpha)\to Q(\alpha)$ 在 M中是纤维化。

我们将此模型结构称为 $\mathrm{Fun}(C,M)$上的投射模型结构。

我们有一个模型结构，而且它相当简单：只需逐对象考察态射即可。但余纤维化呢？它们也是逐对象的吗？是的，但在这种情况下，两者并不等价。

命题 3.2.22. 设 C 是一个小范畴，M 是一个余纤维生成模型范畴。那么，$\mathrm{Fun}(C,M)$上的投射模型结构中的余纤维化，也是在 M中逐对象的余纤维化。

注 3.2.23. 请务必记住，在投射模型结构中，所有余纤维化都是逐对象的余纤维化，但反过来则未必成立：一个态射逐对象是余纤维化，并不意味着它就是$\mathrm{Fun}(C,M)$中的余纤维化。图表范畴还存在另一种模型结构，称为**单射模型结构**；它将逐对象的弱等价定义为弱等价，并将逐对象的余纤维化定义为余纤维化，但在这种情况下，并非所有逐对象的纤维化都是纤维化。单射模型结构相对较少使用，因为余纤维生成模型范畴的定义缺乏对称性，这意味着要使其存在，我们需要更多条件。不过，在最常见的例子中，它确实存在。

命题 3.2.24. 设 C，M，N是三个模型范畴，且设 $f\colon C\to M$是从 C到M的函子。那么我们有一个 *Quillen* 伴随

$$f_!:\mathrm{Fun}(C,N)\rightleftharpoons\mathrm{Fun}(M,N):f^*$$

是一个 *Quillen* 伴随，其中 f^*:$\mathrm{Fun}(M,\ N)\to\mathrm{Fun}(C,\ N)$是通过将态射 $M\to N$与 $f\colon C\to M$预合成而给出的。

3.2.2 正常模型范畴与同伦余极限

范畴论中的两个重要工具是拉回和推出；处理模型范畴时，我们也希望继续使用它们。问题在于，一般来说，弱等价的推出不一定是弱等价。不过，有一类特殊的模型范畴，其中弱等价可以进行推出和拉回而不失其性质：适当范畴。此外，我们研究的是同伦意义下的对象：如果能将极限和余极限定义到同伦意义下，并考察它们与经典极限和余极限之间的联系，将会很有意思。本节的结果引自 [Hir03, Chapter13]，除非另有说明。

定义 3.2.25. 设 M 是一个模型范畴，且 $\mathfrak{A}$ 是如下形式的交换方形

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

- 如果每个沿余纤维化对弱等价取的推出仍是弱等价，我们就称 M 是 **左适当**。换言之，若 $\mathfrak{A}$ 是一个推出，g 是余纤维化，且 f 是弱等价，那么 h 也是弱等价。

- 如果每个沿纤维化对弱等价取的拉回仍是弱等价，我们就称 M 是 **右适当**。换言之，若 $\mathfrak{A}$ 是一个拉回，k 是纤维化，且 h 是弱等价，那么 f 也是弱等价。

- 如果 M 同时是左适当和右适当的，我们就称它是 **适当**。

注 3.2.26. 读者从定义中可以看出，即使一个模型范畴是适当的，我们仍不能保证弱等价在沿任意态射取推出或拉回时保持不变：只有沿余纤维化和纤维化取推出或拉回时才成立。不过，这对我们的目的已经足够了。

那么，我们如何知道一个模型范畴是左适当还是右适当呢？对于我们知道所有对象都是纤维／余纤维的情形，答案其实相当简单。

命题 3.2.27. 设 M 是一个模型范畴。

- 沿余纤维化对余纤维对象之间的弱等价作任意推出，所得仍是弱等价。
- 沿纤维化对纤维对象之间的弱等价作任意拉回，所得仍是弱等价。

推论 3.2.28. 设 M 是一个模型范畴。

- 如果 M 中的每个对象都是余纤维对象，那么模型范畴 M 是左适当的。
- 如果 M 中的每个对象都是纤维的，那么模型范畴 M 是右适当的。
- 如果 M 中的每个对象既是余纤维的又是纤维的，那么模型范畴 M 是适当的。

这足以说明 Top 和 C(k) 范畴是右适当的，而 sSet 是左适当的。但实际上，我们得到的还不止这些。

命题 3.2.29。 模型范畴 $\mathbf{Top}$、$\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 和 $\mathbf{sSet}$ 都是适当的。

但这还不是全部：我们还可以为范畴上的预层范畴找到相应的条件。

命题 3.2.30. 设 M 是一个余纤维生成模型范畴，C 是一个小范畴。那么，如果 M 是左适当或右适当的，则函子范畴 $\mathrm{Fun}(C, M)$ 也分别是左适当或右适当的。

现在我们来定义同伦拉回。我们不定义同伦推出，因为用不到它，但其构造严格对偶。提醒读者，如果 M 带有模型结构，那么它不仅包含纤维化、余纤维化和弱等价，还包含两个函子性分解。具体来说，有一个函子性分解 (γ, δ)，使得若 f 是 M 中的一个态射，则 $\gamma(f)$ 是平凡余纤维化，而 $\delta(f)$ 是纤维化。

定义 3.2.31。设 M 是一个右正合模型范畴，且有一个图表 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$。我们将该图表的**同伦拉回** 定义为关联图表 $X' \xrightarrow{\delta(f)} Z \xleftarrow{\delta(g)} Y'$的拉回，并记作 $X \times_Z^h Y$。

备注 3.2.32。我们只在右正合模型范畴的语境下定义了同伦推出，因为我们将要讨论的所有范畴都是适当的；但即使范畴 M 不是右正合的，这个定义依然存在。在这种情况下，在按照定义进行构造之前，我们需要为涉及的所有对象找到纤维化替换。

乍一看，没有理由认为这个定义在弱等价下是不变的；但它 .

命题 3.2.33。设 M 是一个右正合模型范畴，且有一个图表

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{g} & B & \xleftarrow{f} & C \\ \downarrow{\scriptstyle w_A} & & \downarrow{\scriptstyle w_B} & & \downarrow{\scriptstyle w_C} \\ A' & \xrightarrow{g'} & B' & \xleftarrow[f']{} & C' \end{array}$$

其中 w_A，w_B，w_C 都是弱等价。那么由此诱导的同伦拉回之间的映射

$$A \times_B^h C \to A' \times_{B'}^h C'$$

是一个弱等价。

这样我们就得到了同伦拉回的一种描述：然而，计算态射的函子性分解可能很困难。幸运的是，有一种情况可以让我们跳过这一步。

命题 3.2.34. 设 M 是一个右适当模型范畴，且有一个图表 $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$。若 f 或 g 是纤维化，则同伦拉回 $X \times_Z^h Y$ 自然地弱等价于拉回 $X \times_Z Y$。

命题 3.2.35. 设 M 是一个右适当模型范畴，一个态射 $h\colon Y \to Z$，以及两个态射f，$g\colon X \to Z$，它们是左同伦或右同伦的。那么，$X \xrightarrow{f} Z \leftarrow Y$ 的同伦拉回与$X \xrightarrow{g} Z \leftarrow Y$ 的同伦拉回弱等价。

最后，我们将定义态射在一点上的同伦纤维。回顾一下，如果有一个态射 f和一个点 $z\colon * \to Z$，那么 f在 z上的纤维是沿着 z对 f作拉回。现在我们将对同伦拉回做同样的事情。

定义 3.2.36. 设 M是一个模型范畴，$f\colon X \to Z$是 M中的一个态射，$z\colon * \to Z$是 M中的一个点。我们称 f **在** z 上的**同伦纤维** 为 M 中的一个纤维对象，它与沿着 z对 f 作出的同伦拉回弱等价。

注 3.2.37. 我们没有直接将同伦纤维定义为沿着一点对 f 作出的同伦拉回，因为这样的对象不一定是纤维的；但正如在 **Top** 和 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 中，所有对象都是纤维的，在这两个范畴中，我们可以直接把同伦拉回作为同伦纤维来计算。

最后，我们给出几个推论；在列出关于同伦拉回的结果之后，它们显然成立。

推论 3.2.38。设 M 是一个右正合模型范畴。若 $f\colon X \to Z$ 是一个纤维化，且 $z\colon * \to Z$ 是 M中的一个点，则 f 在 z 上的纤维与 f 在 z上的同伦纤维之间存在自然弱等价。

推论 3.2.39。 设 M 是一个右正合模型范畴，且 $f\colon\ X \to Z$ 是 M中的一个态射。若有两个点 $z\colon\ * \to Z$ 和 $z'\colon\ * \to Z$，它们是左同伦或右同伦的，则 f在 z 上的同伦纤维与 f 在 z'上的同伦纤维弱等价。

记号 3.2.40. 特别是，最后这个结果意味着，同伦纤维不依赖于我们取纤维所依据的点，只要这些点彼此同伦即可。为方便起见，我们将其称为“ f的同伦纤维”，而不指定具体的点。

最后，我们讨论了同伦拉回；还有一个相关概念是我们需要讨论的，那就是同伦余极限。我们之前定义的拉回实际上是同伦极限（即其对偶概念）的一种特殊情形。从现在起，本节的所有结果均出自[Lur09, 附录 A.2.8]。

定义 3.2.41. 设 M 为一个模型范畴， $f\colon\ C \to C'$ 为小范畴之间的一个函子。设 $f_!\colon \mathrm{Fun}(C, M) \rightleftharpoons \mathrm{Fun}(C', M)$ 为命题 *3.2.24* 中定义的 ***Quillen*** 伴随。我们称其全左导出函子 $\mathbb{L}f_!$ **为** f的同伦左 ***Kan*** 扩张。

定义 3.2.42。 设 M 为一个模型范畴，且 $f\colon\ C \to *$ 为从一个小范畴 C 到小范畴范畴中的终对象的函子。于是，我们将 f **称为同伦余极限函子**的同伦左***Kan***扩张称为

$$\mathbb{L}f_! : \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}(C, M)) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}(*, M)).$$

定义 3.2.43。 提醒读者，在 $\mathrm{Fun}(*,\ M)$ 中取一个元素，与在 M中取一个对象是相同的；因此，通过这一过程，我们取一个函子 $\phi\colon\ C \to M$，并通过应用同伦余极限函子得到 M 中的一个对象。我们将 $\mathbb{L}f_!(\phi)$ **称为** ϕ的同伦余极限。

3.2.3 （余）单纯框架和映射空间

在这篇论文中，我们将研究单纯空间，这意味着我们需要一种从范畴中的对象得到（余）单纯对象的方法。该怎么做呢？使用（余）单纯框架。除非另有说明，本节中的结果均来自 [Hov99，第 5] 章和 [Hir03，第 16] 章。

定义 3.2.44。 令 Δ 为单纯形范畴，即由有限序数和弱单调函数构成的范畴。我们定义 Δ^+ 为保序单射构成的子范畴；定义 Δ^- 为保序满射构成的子范畴。令 $[n]$ 为 Δ中的一个对象。

- 我们称 $[n]$ 中 Δ 的**挂接范畴** 为$(\Delta^+ \downarrow n)$ 的全子范畴，它包含除 n的恒等映射外的所有对象；也就是说，它是由 Δ^+ 中以 $[n]$ 为陪域的所有态射（恒等态射除外）构成的范畴。我们将其记为 $\partial(\Delta^+ \downarrow n)$。

- 我们称 $[n]$ 中 Δ 的**匹配范畴** 为$(n \downarrow \Delta^-)$ 的全子范畴，它包含除 n上的恒等映射外的所有对象；也就是说，它是由 Δ^- 中以 $[n]$ 为定义域的所有态射（恒等态射除外）构成的范畴。我们将其记为 $\partial(n \downarrow \Delta^-)$。

记号 3.2.45。 我们将 Δ 和 Δ^{op} 中的对象分别记作 $[n]$ 和 Δ^n。

定义 3.2.46。 设 M 是一个模型范畴。我们将 M 中的一个**余单纯对象**定义为形如 $F^*\colon\ \Delta \to M$的图表，并将其项 $\Delta^n \to M$记作 F^n。我们将 M 中的余单纯对象范畴记作 cM。

定义 3.2.47。 设 M 是一个模型范畴。我们将形如 $F_*\colon\ \Delta^{op} \to M$ 的图表称为 M 中的**单纯对象**，并将其项 $\Delta^n \to M$ 记作 F_n。我们将 M 中单纯对象的范畴记作 sM。

定义 3.2.48。设 M 是一个模型范畴，$[n]$ 是 Δ 中的一个对象，且 $X\colon \Delta \to M$ 是一个余单纯对象。滥用记号，我们也将诱导图表 $X\colon \partial(\Delta^+ \downarrow n) \to M$ 称为 X，它在对象上的定义为 $X([m] \to [n]) = X(m)$；并将诱导图表 $X\colon \partial(n \downarrow \Delta^-) \to M$ 称为 $X([n] \to [m]) = X(m)$，它在对象上的定义为。

- 我们将 X **在** n 处的**闩对象**定义为 $L_nX = \mathrm{colim}_{\partial(\Delta^+\downarrow n)}X$，并将 X**在** n 处的**闩映射**定义为自然映射 $L_nX \to X_n$。
- 我们将 X **在** n 处的**匹配对象**定义为 $M_nX = \lim_{\partial(n\downarrow\Delta^-)}X$，并将 X**在** n 处的**匹配映射**定义为自然映射 $X_n \to M_nX$。

注 3.2.49. 这里我们决定以最基础的方式给出这些定义，以避免不必要的繁杂，因为我们只会用到这些定义。不过，匹配对象和闩对象很容易推广到任意的 C ***Reedy*** 范畴，而不只是 Δ。事实上，这些最后给出的定义改编自 *[Hir03，第 15 节。2]*, 其中的表述适用于任意 C ***Reedy*** 范畴。特别地，通过取对偶，可以为 M 中的 X 单纯对象定义这些概念。在这种情况下，我们将 $(\Delta^-)^{op}$ 取作我们的 Δ^+，并将 $(\Delta^+)^{op}$ 取作我们的 Δ^-，其余一切都以完全相同的方式进行。

定义 3.2.50。设 M 是一个模型范畴，X 是 M中的一个对象。

- 我们定义 X上的一个**余单纯框架**，记作 $C^*(X)$，即 M中的一个余单纯对象，也就是说，一个函子 $C^*(X)\colon \Delta \to M$，满足 $C^0(X)$ 同构于 X；并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$C^n(X)$ 在 M 中 Δ-图表的模型结构下弱等价于 X，且闩映射 $L_nC^*(X) \to C^n(X)$是 M中的余纤维化。

- 我们定义 X上的一个**单纯框架**，记作 $C_*(X)$，即 M中的一个单纯对象，也就是说，一个函子$C_*(X)\colon \Delta^{op} \to M$，满足 $C_0(X)$ 同构于 X；并且对所有 $n \in \mathbb{N}$，$C_n(X)$ 在 M 中 Δ- 图表的模型结构下弱等价于 X，且匹配映射 $C_n(X) \to M_nC_*(X)$是 M中的纤维化。

正如数学各个领域中常见的做法，我们给出了对象的定义，但尚未探究这些对象是否确实存在。幸运的是，它们确实存在。

定理 3.2.51. 设 M 是一个模型范畴。存在函子性单纯框架 $C_*(-)$ 和函子性余单纯框架 $C^*(-)$。

因此，现在对于模型范畴 M 中的每个对象，我们都有一个（余）单纯对象。接下来，我们将利用这些对象得到真正的单纯集合。为此，我们将为每个（余）单纯对象找到一个伴随，见 [Hov99，第 3.1] 节。

命题 3.2.52. 设 M 是一个具有所有小余极限的范畴（特别地，也可以是一个模型范畴）。那么，M中的余单纯对象范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta, M)$与伴随范畴 $\mathrm{Adj}(\mathbf{sSet}\ M)$等价。特别地，若 A^* 是 M 中的一个单纯对象，则右伴随 $\mathrm{Map}(A^*, -)\colon M \to \mathbf{sSet}$ 定义为其 n-单形为 $\mathrm{Hom}(A^n, -)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$均如此。我们将与余单纯对象 A^* 相关联的伴随记为 $A^* \otimes - : \mathbf{sSet} \rightleftharpoons M\colon Map(A^*, -)$。

注 3.2.53. 照例，我们有这一结果的单纯类比。在这种情况下，若我们有 A_* 中的一个单纯对象，则右伴随 $\mathrm{Map}(-, A_*)\colon M \to \mathbf{sSet}^{op}$ 定义为其 n-单形为 $\mathrm{Hom}(-, A_n)$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均如此；我们将与单纯对象 A_* 相关联的伴随记为 $(\mathrm{Hom}(-, A_*), \mathrm{Map}(-, A_*)\ \psi)$.

推论 *3.2.54.* 设 M 是一个模型范畴，$A \in M$ 是 M 的一个对象。那么，A 上的函子性余单纯框架 *$C^*(A)$* 诱导出伴随函子 *$(C^*(A) \otimes -, Map(C^*(A)\ \phi)$*。对偶地，$A$ 上的函子性单纯框架 *$C_*(A)$* 诱导出伴随函子 *$Hom(-, C_*(A)), Map(-, C_*(A))\ \psi)$*。

命题 3.2.55。设 M是一个模型范畴。设 A、B、X、Y是 M中的对象。

- 设 $p\colon X \to Y$是 M中的纤维化。那么映射 $p_*\colon \mathrm{Map}(C^*(A)\ X) \to \mathrm{Map}(C^*(A)\ Y)$ 是单纯集合之间的纤维化；若 p 是平凡纤维化，则它是平凡纤维化。

- 设 $i\colon A \to B$ 是 M 中的余纤维化。那么映射 $i^*\colon \mathrm{Map}(B, C_*(X)) \to \mathrm{Map}(A, C_*(Y))$ 是单纯集合之间的纤维化；若 i 是平凡余纤维化，则它是平凡纤维化。

这些伴随是 Quillen 伴随吗？两个称为 Map 的右伴随之间有什么联系？遗憾的是，这些伴随通常不是 Quillen 伴随，但它们确实保留了足够的结构，可以进行导出；而 $\mathbf{Map}(C^*(A)\ -)$ 和 $\mathbf{Map}(-, C_*(Y))$ 的全导出函子相同。不过，如果要让原来的伴随满足这些条件，我们还需要施加一些额外条件。

命题 3.2.56. 设 M 是一个模型范畴。

- 设 X 是 M 中的一个余纤维对象。那么函子 $C^*(X) \otimes -$ 保持余纤维化和平凡余纤维化，而它的右伴随 $\mathrm{Map}(C^*(X)\ -)$ 保持纤维化和平凡纤维化。特别地，若 X 是 M 中的一个余纤维对象，则 $C^*(X) \otimes -\colon \mathbf{sSet} \rightleftharpoons M\colon \mathrm{Map}(C^*(X)\ -)$ 是一个 *Quillen* 伴随。
- 设 Y 是 M 中的纤维对象。那么函子 $\mathrm{Hom}(-, C_*(Y))$ 保留余纤维化和平凡余纤维化，其右伴随 $\mathrm{Map}(-, C_*(Y))$ 保留纤维化和平凡纤维化。特别地，若 Y 是 M 中的纤维对象，则 $(\mathrm{Hom}(-, C_*(Y)), \mathrm{Map}(-, C_*(Y))\ \psi)$ 是一个 *Quillen* 伴随。

命题 3.2.57。 设 M 是一个模型范畴， X 是一个余纤维对象， Y 是一个纤维对象。那么存在弱等价

$$\mathrm{Map}(C^*(X), Y) \to \mathrm{diag}\,\mathrm{Map}(C^*(X), C_*(Y)) \leftarrow \mathrm{Map}(X, C_*(Y)).$$

注记 3.2.58。 我们想特别指出，这意味着 $\mathrm{Map}(C^*(X)\ Y)$ 和 $\mathrm{Map}(X, C_*(Y))$在同伦范畴上同构，但它们之间并不存在直接的弱等价：我们需要经过 $\mathrm{diag}\,\mathrm{Map}(C^*(X)\ C_*(Y))$。

注记 3.2.59. 另一方面，我们定义这个 *Quillen* 伴随和这些弱等价时，只考虑了 X 是余纤维的且 Y 是纤维的情形。这并不是什么大问题：我们记得有纤维替换与余纤维替换。因此，我们也可以将这些弱等价定义在所有 $X, Y in\ M$ 上，方法如下：

$$\mathrm{Map}(C^*(X), R(Y)) \to \mathrm{diag}\,\mathrm{Map}(C^*(X), C_*(Y)) \leftarrow \mathrm{Map}(Q(X), C_*(Y)).$$

记号 3.2.60. 滥用记号，我们将用 $\mathrm{Map}(X, Y)$ 同时表示两个单纯集合 $\mathrm{Map}(C^*(X)\ RY)$ 和 $\mathrm{Map}(QX, C_*(Y))$。

定义 3.2.61. 设 M 是一个模型范畴， X, Y 是其中的两个对象。我们称 X**与** Y之间的映射空间，并用 $\mathrm{Map}(X, Y)$ 表示单纯集合 $\mathrm{Map}(C^*(X)\ R(Y))$ 和$\mathrm{Map}(QX, C_*(Y))$。

And，最后，为结束本部分，给出一个总结同伦范畴中结果的定理 y.

定理 3.2.62. 设 M 是一个模型范畴。那么， $-\otimes -\colon M \times \mathbf{sSet} \to M$ 和 $\mathrm{Hom}(-,-)\colon \mathbf{sSet} \times M^{op} \to M^{op}$ 的全左导出函子存在。我们分别将它们记为 $-\otimes^{\mathbb{L}} -$ 和 $\mathbb{R}Hom(-,-)$。$\mathrm{Map}(-,-)$ 的全右导出函子存在，且自然同构。我们将它们记为$\mathbb{R}\,\mathrm{Map}(-,-)$。在 $\mathrm{Ho}(M)$ 中有自然同构

$$\left[X \otimes^{\mathbb{L}} K, Y\right] \cong [K, \mathbb{R}\,\mathrm{Map}(X, C^*(X), Y)] \cong [K, \mathbb{R}\,\mathrm{Map}(X, C_*(Y))] \cong [X, \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}(K, Y)]\,.$$

因此存在一个双变量伴随 $\mathrm{Ho}(M) \times \mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}) \to \mathrm{Ho}(M)$。此外还有一个自然同构$X \otimes^{\mathbb{L}} \Delta[0] \cong X$。

进入下一节之前，我们先补充 Hir03]，关于映射空间与同伦余极限之间联系的最后一个结果。

Th定理 3.2.63。 *[Hir03，定理 19.4。4]* 设 M 是一个模型范畴， C 是一个小范畴 *y.*

1. 设 X_i 是 M 中的逐对象余纤维 C-图表，且 Y 是 M中的纤维对象。那么，映射空间函子 $\mathrm{Map}(-, Y)$ 将同伦余极限映射为同伦极限，即 $\mathrm{Map}(\mathrm{hocolim}(X_i)\ Y) \simeq \mathrm{holim}(\mathrm{Map}(X_i, Y))$。

2. 令 X 为 M 中的余纤维对象，且 Y_i 为 M 中逐对象纤维的 C-图表。则映射空间函子 $\mathrm{Map}(X, -)$ 将同伦极限映至同伦余极限，即 $\mathrm{Map}(X, \mathrm{holim}\, Y_i) \simeq \mathrm{holim}(Map(X, Y_i))$。

3.2.4 Bousfield 局部化

本节将介绍模型范畴中的一个非常重要的工具：Bousfield 局部化。除非另有说明，本节所有结果均出自 [Hir03，第 3] 章。

构造 Bousfield 局部化需要一些基础构件。我们先来处理这些内容。

注记 3.2.64. *Bousfield* 局部化不止一种：它分为左局部化和右局部化。本文将只讨论左 *Bousfield* 局部化，因为后文只会用到它，因此有时会省略"左"字。右 *Bousfield* 局部化的构造是对偶的，尽管其存在性的证明并非如此。

定义 3.2.65。设 M 是一个模型范畴，C 是 M中的一个态射类。设 X 是 M中的一个对象。若对于 C 中的每个态射 $f: A \to B$，诱导映射$\mathrm{Map}(f, X) : \mathrm{Map}(A, X) \to \mathrm{Map}(B, X)$ 是弱等价，则称 X 为**一个 C-局部对象**。

备注 3.2.66。熟悉 *[Hir03]* 中所采用约定的读者可能已经注意到，这并不完全是那里的定义：事实上，*Hirschhorn* 还增加了纤维条件。为求清晰，我们更倾向于采用这个替代版本。这也并非牵强之举：毕竟，这是在 ∞-范畴语境中给出的定义。

定义 3.2.67。设 M 是一个模型范畴，C 是 M中的一个态射类。设 $f: A \to B$ 是 M中的一个态射。若对于每个 C-局部对象 X，诱导映射$\mathrm{Map}(f, X) : \mathrm{Map}(A, X) \to \mathrm{Map}(B, X)$ 是弱等价，则称 f 为**一个 C-局部等价**。

现在，在计算 Bousfield 局部化时，我们的目标是让 C-局部等价成为新的弱等价，并让 C-局部对象成为新的纤维对象。为此，我们将确保这些概念对此用途而言定义良好。

命题 3.2.68. 设 M 是一个模型范畴，C 是 M 中的态射类。设 X 和 Y 是两个弱等价的纤维对象。那么，X 是 C-局部的，当且仅当 Y 也是如此。

命题 3.2.69. 设 M 是一个模型范畴，C 是 M 中的态射类。那么，C-局部等价类满足三取二性质，并且在收缩下封闭。

现在，我们已经具备了定义局部化所需的一切。

定义 3.2.70. 设 M 是一个模型范畴，C 是 M 中的映射。关于 C 的 M 的左 *Bousfield* 局部化，是范畴 M 上的一个模型范畴结构 $L_C M$，满足

1. $L_C M$ 的弱等价类就是 C-局部等价类。
2. $L_C M$ 的余纤维化类与 M中的余纤维化类相同。

现在，这是一个定义：和往常一样，我们无法据此断定这样的模型结构存在。我们只知道，如果它确实存在，就称之为左 Bousfield 局部化。它并非在所有情形下都存在；但幸运的是，在我们需要的所有情形下，它都存在。

定理 3.2.71。 *[Hir03，定理 4.1.1。]* 设 M 是一个左正常胞腔模型范畴，且 C 是 M中的一类态射。那么，相对于 C 的左 *Bousfield* 局部化存在，并且局部化 $L_C M$ 是一个左正常胞腔模型范畴。此外，如果 M 是一个单纯模型范畴（见下一节），那么该局部化在继承的结构下也是一个单纯模型范畴。

现在，这个定义中有一些术语我们还没有讨论过。什么是胞腔模型范畴？这对我们并不重要。我们只需要知道所研究的范畴是否属于这种范畴。

命题 3.2.72。 *[Hir03，命题 4.1。4]* 单纯集合范畴 **sSet**是左正常胞腔模型范畴。

命题 3.2.73。 *[Hir03，命题 4.1。5]* 设 M 是一个左正常胞腔模型范畴， T 是一个小范畴。那么，图表范畴 $\mathrm{Fun}(T, M)$ 也是一个左正常胞腔模型范畴。

现在我们已经有了这个局部化，并且知道在我们关心的情形下它确实存在，接下来陈述几个稍后会用到的结果。

命题 3.2.74。 设 M 是一个模型范畴， C 是 M上的一类态射。假设相对于 C, $L_C M$， M 的左 *Bousfield* 局部化存在。那么有以下性质。

1. M 中的每个弱等价都是 $L_C M$中的弱等价。
2. $L_C M$ 中的每个纤维化都是 M中的纤维化。
3. M 中的每个平凡余纤维化都是 $L_C M$中的平凡余纤维化。

命题 3.2.75. 设 M 是一个左适当模型范畴，且 C 是 M上的一个态射类。若左 *Bousfield* 局部化 $L_C M$ 存在，则它也是左适当的。

最后，我们给出一个关于此类局部化的纤维对象的结果。

命题 3.2.76. 设 M 是一个左适当模型范畴，且 C 是 M上的一个态射类。假设相对于 C和 $L_C M$的 M 的左 *Bousfield* 局部化存在。那么，对象 X 是 $L_C M$ 中的纤维对象，当且仅当它是 M中的 C-局部纤维对象。

3.3 单纯工具

本节将介绍一些关于单纯对象和单纯范畴的工具，以及单纯局部化的构造。

3.3.1 单纯对象

除非另有说明，本节中的所有定义和结果均出自 [DHI04] 和 [TV05].

定义 3.3.1。 设 C 为一个范畴， n 为一个整数。我们称 n-**截断单纯对象于** C为一个函子 $F:\ \Delta_{\leq n} \to C$。我们用 $sC_{\leq n}$ 表示 C中 n-截断单纯对象所成的范畴。

定义 3.3.2. 设 C 是一个范畴。我们称一个**取值于** C 的增广单纯对象为函子 $F:\Delta_+^{op} \to C$，其中 Δ_+ 是可能为空的有限全序集范畴。等价地，它是 C 的一个单纯对象 U_*，并附带一个态射 $U_* \to cX$，其中 cX 是每个次数上都为 X 的常值单纯对象。我们将其记为 $U_* \to X$。

记号 3.3.3。 我们将 C 中的增广单纯对象范畴记为 s_+C，并将 C 中的n截断增广对象范畴记为 $s_+C_{\leq n}$。

如果 C 是余纤维生成模型范畴，我们已经讨论过一种可用于 sC、 s_+C 和 $sC_{\leq n}$ 的模型结构。事实上，如果 C 是余纤维生成模型范畴，我们就有可用的投射模型结构。但对于单纯对象，我们还有另一种结构： Δ （以及 Δ_+ 和 $\Delta_{\leq n}$ ）也是 Reedy 范畴。于是，我们将为这些范畴定义 Reedy 模型结构。为此，我们将使用在定义 3.2.48 中定义的 latching 对象和映射对象。我们将针对单纯对象进行定义，但这些定义可以很容易地推广到此前提到的所有其他结构。本节中的结果来自 [Hir03，第 15 节。3]

定义 3.3.4. 设 M 是一个模型范畴， $X, Y\colon \Delta^{op} \to M$ 是 M 中的两个单纯对象。若映射 $f\colon X \to Y$ 是逐对象的弱等价，也就是说，对每个对象 Δ^n ，诱导映射 $X_n \to Y_n$ 在 M 中都是弱等价，则称其为 **Reedy 弱等价** 。

定义 3.3.5. 设 M 是一个模型范畴， $X, Y\colon \Delta^{op} \to M$ 是 M 中的两个单纯对象。若映射 $f\colon X \to Y$ 对每个对象 Δ^n 所诱导的映射

$$X_n \coprod_{L_n X} L_n Y \to Y_n$$

是 M 中的余纤维化。

定义 3.3.6. 设 M 是一个模型范畴， $X, Y\colon \Delta^{op} \to M$ 是 M 中的两个单纯对象。若映射 $f\colon X \to Y$ 对每个对象 Δ^n 所诱导的映射

$$X_n \to Y_n \coprod_{M_n Y} M_n X$$

是 M 中的纤维化。

定理 3.3.7. 设 M 是一个模型范畴。范畴 sM 具有一个模型结构，其弱等价、纤维化和余纤维化如上所述。我们称此模型结构为 sM 上的 **Reedy 模型结构**。特别地，若范畴 M 是左（右）适当的，则带有 *Reedy* 模型结构的范畴 sM 也左（右）适当。

不过，能够用匹配对象和闩对象定义的不只是纤维化和余纤维化。事实上，平凡纤维化和平凡余纤维化也可以用完全相同的方式定义。

定理 3.3.8. 设 M 是一个模型范畴，且 $f\colon X \to Y$ 是 sM 中的一个态射。那么， f 是 *Reedy* 平凡余纤维化，当且仅当

$$X_n \coprod_{L_n X} L_n Y \to Y_n$$

是 M 中的平凡余纤维化。等价地， f 是 *Reedy* 平凡纤维化，当且仅当

$$X_n \to Y_n \coprod_{M_n Y} M_n X$$

是 M 中的平凡纤维化。

因此，当 M 是一个余纤维生成模型范畴时，我们为 sM 定义了两种不同的模型结构。我们看到，弱等价相同，这意味着同伦范畴也完全相同；但模型结构并不相同。事实上，Reedy 模型结构的余纤维化更少、纤维化更多，而投射模型结构则相反（每个 Reedy 余纤维化都是投射余纤维化，但反之不成立）。不过，我们仍然有一个 Quillen 等价。

定理 3.3.9。 设 M 是一个余纤维生成模型范畴。那么， sM 中的恒等函子是从投射模型结构到 *Reedy* 模型结构的左 *Quillen* 等价，反向则是右 *Quillen* 等价。

现在我们可以回过头来讨论其他一些函子，它们在讨论单纯对象时会很重要。不出所料，单纯对象与截断单纯对象之间有着密切联系。虽然这些函子的定义或许很简单，但它们非常有用，因此值得专门加以讨论。

定义 3.3.10. 设 C 是一个范畴， n 是一个整数。我们称遗忘函子sk_n： $s_+C \to s_+C_{\leq n}$为 n-**骨架函子** 。我们称增广单纯对象 X在该函子下的像为 n-**骨架** X ，并记作$\mathrm{sk}_n X$。

命题 3.3.11. 设 C 是一个范畴。存在 n-骨架函子的右伴随cosk_n :$s_+C_{\leq n} \to s_+C$，它是关于 *Reedy* 模型结构的右 *Quillen* 伴随。我们称它为 n-**余骨架函子** ； 对于一个 n-截断单纯对象 X，我们称 X 在cosk_n下的像为n-**余骨架** X。

注 3.3.12. 根据构造，容易看出：若固定一个整数 $n \in \mathbb{N}$ 和一个单纯对象X，则对于所有 $i \leq n$，都有 $X_i = (\mathrm{cosk}_n \mathrm{sk}_n X)_i$ 。

除此之外，我们还会在定义中使用另一个伴随。

命题 3.3.13. 设 M 是一个模型范畴。那么， sM和 s_+M上存在一个以**sSet** 为基底的张量范畴结构，定义如下：设 $X_* \in sM$（或 s_+M）是一个单纯对象，且 $\underline{A} \in$**sSet**，则外积定义为

$$(\underline{A} \otimes X_*)_n = \coprod_{A_n} X_n.$$

存在 $- \otimes -$的一个右伴随，我们称之为 X **关于** $\underline{A}$ 的指数对象，并记作 $X_*^{\underline{A}}$。

定义 3.3.14. 我们用 X_*^A 表示单纯对象$(RX)_*^{\underline{A}}$的第 *0* 层，其中 RX 是相对于 *Reedy* 模型结构对 X 作出的纤维化替换。其具体形式如下： $X_*^A = \mathrm{End}(F)$ 其中 F 由下式给出：

$$F : \Delta^{op} \times \Delta \longrightarrow sM$$

$$([n], [m]) \longmapsto \coprod_{A_m} (RX)_n$$

注 3.3.15. 原则上，我们可以将此定义直接设为单纯集合 $X_*^{\underline{A}}$的第 *0* 层。若 X 是 M中的一个对象，那么在同伦范畴上， X_*^A与$(c(X)^{\mathbb{R}A})_0$，（即关于 $c(X)$ 常值单纯对象的导出指数对象的第 *0* 层）之间确实存在同构。不过，我们必须记住，这两种构造本身并不同构，只有在同伦范畴中才同构。

现在我们可以利用这一构造进行几项计算。

命题 3.3.16。 设 $U_* \to X$ 是 M 一个模型范畴中的增广单纯对象。那么我们有以下同构：

1. 设 $\emptyset$ 是**sSet**中的始对象。那么我们有同构 $U_*^{\emptyset} \simeq X$。

2. 对所有 $n \in \mathbb{N}$ ，我们都有同构 $U_*^{\Delta^n} \simeq U_n$。

3. 设 $\underline{A}$ 为一个单纯集合。我们有一个同构 $U_*^{\mathrm{sk}_n \underline{A}} \simeq (\mathbb{R}\,\mathrm{cosk}_n U_*)^A$。特别地， $U_*^{\partial\Delta^n} \simeq (\mathbb{R}\mathrm{cosk}_{n-1}(\mathrm{sk}_{n-1} U_*))_n$。

3.3.2 单纯范畴

让我们继续讨论单纯范畴。除非另有说明，本部分的结果均出自 [TV05，第 2] 节。

定义 3.3.17。 我们将 T *a* **单纯范畴** 定义为在 **sSet** （单纯集合范畴）上富化的范畴。等价地，单纯范畴由以下数据构成：

- 一个对象集 $\mathrm{Obj}(T)$。
- 对于 T 中的每一对对象，$(x,y) \in \mathrm{Obj}(T)_2$，都有一个单纯集合 $\mathrm{Hom}(x,y) \in \mathbf{sSet}$。
- 对于 T 中的每组三个对象，$(x,y,z) \in \mathrm{Obj}(T)^3$ 有一个在 **sSe** 中的复合态射 **t**

$$\mu : \mathrm{Hom}(x,y) \times \mathrm{Hom}(y,z) \to \mathrm{Hom}(x,z)$$

  并满足通常的结合条件。

- 对于 T 中的每个对象， $x \in T$ 都有一个 *0*-单形 $\mathrm{Id}_x \in \mathrm{Hom}(x,x)_0$，它满足上述复合所对应的通常单位条件。

定义 3.3.18。 设 T 和 T' 是两个单纯范畴。**单纯函子** （也称为**单纯范畴的态-射**）是一个在单纯集合范畴上富化的函子 $f:\ T \to T'$ 。等价地，它由以下数据组成：

- 一个集合映射 $\mathrm{Obj}(T) \to \mathrm{Obj}(T')$。
- 对于 T 中的每一对对象，$(x,y) \in Ob(T)_2$，有一个单纯集合的态射

$$\mathrm{Hom}(x,y) \to \mathrm{Hom}(f(x),f(y)).$$

  满足通常的结合条件和单位条件。

记号 3.3 .19. 我们将由单纯范畴及其态射构成的范畴记作**sCat** 。

例 1. 单纯集合范畴**sSet**是一个单纯范畴，其中对所有 $x,y \in \mathbf{sSet}$ ， 我们取$\mathrm{Hom}_n(x,y)$ 为$\mathrm{Hom}(x \times \Delta_n, y)$。

记号 3.3.20. 设 T, T' 是两个单纯范畴。我们将它们之间的单纯函子所构成的范畴记作$\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T,T')$ 。

注 3.3.21. 利用包含函子 i : 集合范畴 $\to$ **sSet**，我们可以看出存在一个显然的包含**Cat** $\to$**sCat**。因此，我们可以将所有范畴都视为单纯范畴：考虑一个对象相同、且以常值单纯集合为态射单纯集合的单纯范畴。为方便起见，我们仍将与范畴 C对应的单纯范畴称为 C ，除非这种区别会影响结果。

对于任意单纯范畴 T，我们都可以定义一个与之关联的范畴，称为 T 的同伦范畴。

定义 3.3.22. 设 T 是一个单纯范畴。我们称 **的同伦范畴**，并记作 $\pi_0(T)$。这是一个与 T 具有相同对象的范畴，其态射由下式给出：

$$\forall x,y \in \mathrm{Obj}(T),\ \mathrm{Hom}_{\pi_0(T)}(x,y) = \pi_0(\mathrm{Hom}_T(x,y)),$$

也就是说，态射单纯集合的连通分支集合。

注 3.3.23。 不难验证，函子 π_0 ： **sCat** $\to$ **Cat** 是包含函子的左伴随。

正如我们迄今定义的每个范畴一样，单纯范畴的范畴上存在一个模型结构。我们甚至可以证明，它是余纤维生成的。弱等价和纤维化定义如下。

定义 3.3.24. *[Ber07a，引言 (1)]* 设 $f\colon T \to T'$ 是单纯范畴的一个态射。若 f 满足以下条件，则称其为**弱等价**：

- 对于所有 $x, y \in \mathrm{Obj}(T)$，相应的态射 $\mathrm{Hom}(x,y) \to \mathrm{Hom}(f(x)\ f(y))$ 是单纯集合之间的弱等价。 f 单纯集合。
- 同伦范畴所诱导的函子 $\pi_0(f)\colon \pi_0(T) \to \pi_0(T')$ 是范畴等价。

定义 3.3.25. *[Ber07a，引言]* 设 T 是一个单纯范畴。若 T,$f \in \mathrm{Hom}_T(x,y)_0$, 中的一个态射在 $\pi_0(T)$ 中成为同构 $\pi_0(f)$，则称其为**同伦等价**。

定义 3.3.26. *[Ber07a，引言 (2)]* 设 $f\colon T \to T'$ 是单纯范畴的一个态射。若 f 满足以下条件，则称其为**纤维化**：

- 对所有 $x, y \in \mathrm{Obj}(T)$，关联的态射 $\mathrm{Hom}(x,y) \to \mathrm{Hom}(f(x)\ f(y))$ 是单纯集合的纤维化。
- 对所有 $x \in \mathrm{Obj}(T)$、$y' \in \mathrm{Obj}(T')$，以及所有 $h\colon f(x) \to y'$ 在 T' 中的同伦等价，存在一个对象 $y \in \mathrm{Obj}(T)$ 和一个同伦等价 $g\colon x \to y$，使得 $f(g) = h$。

定理 3.3.27。 *[Ber07a，定理 1。1]* 范畴 **sCat** 具有一个模型结构，该结构由上文定义的弱等价和纤维化给出。特别地，这个模型结构是余纤维生成的。

命题 3.3.28。 *[Ber07a，命题 3。5]* 在上文定义的模型结构下，模型范畴 **sCat**是右适当的。

因此，单纯范畴构成一个模型范畴。不过，我们也可以问：如果得到的单纯范畴本身已经带有模型结构，会发生什么？我们能对此说些什么吗？当然可以。我们采用以下定义，出自 [Hir03，定义 9.1.6]。

定义 3.3.29。 设 M 是一个同时也是单纯范畴的模型范畴。如果 M 满足以下条件，我们就称它为**单纯模型范畴**：

- 对于所有 $X, Y \in \mathrm{Obj}(M)$以及所有单纯集合 K，存在对象 $X \otimes K$和 Y^K属于 M，使得存在单纯集合的同构

$$\mathrm{Hom}_M(X \otimes K, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathrm{Hom}(X,Y)) \simeq \mathrm{Hom}_M(X, Y^K).$$

- 如果 $i\colon A \to B$ 是 M 中的余纤维化，且 $p\colon X \to Y$ 是 M中的纤维化，那么单纯集合之间的映射

$$\mathrm{Hom}(B,X) \xrightarrow{i^* \times p_*} \mathrm{Hom}(A,X) \times_{\mathrm{Hom}(A,Y)} \mathrm{Hom}(B,Y)$$

是一个纤维化；如果 i 或 p是弱等价，那么它还是一个平凡纤维化。

我们已经看到，模型范畴上的图表范畴仍然是一个模型范畴。因此，考虑单纯模型范畴上的图表范畴是否仍然是一个单纯模型范畴，并非毫无道理；答案是肯定的。我们采用了[Hir03，第 11 节7]中的单纯模型范畴构造。

命题 *3.3.30.* 设 M 是一个单纯模型范畴，C 是一个小范畴。那么，图表范畴 *Fun(C, M)* 是一个单纯范畴。对于图表 X、$Y \in$*Fun(C, M)*，我们将 X 与 Y 之间的态射单纯集合定义如下：*Hom(X, Y)*$_*$ 的 *n*-单形由映射 $X \otimes \Delta_n \to Y$ 给出，其中 $X \otimes \Delta_n$ 对所有对象 $\alpha \in$*Obj(C)* 定义为 $(X \otimes \Delta_n)(\alpha) = X(\alpha) \otimes \Delta_n$，而对所有态射 $f \in C$ 定义为 $(X \otimes \Delta_n)(f) = X(f) \otimes Id_{\Delta_n}$。

定理 3.3.31. 设 M 是一个单纯形余纤维生成模型范畴， C 是一个小范畴。那么，$\mathrm{Fun}(C, M)$ 上的投射模型结构与命题 *3.3.30* 中的单纯形富集相容，并且 $\mathrm{Fun}(C, M)$ 是一个单纯形余纤维生成模型范畴。

定理 3.3.32。 设 M 是一个单纯形余纤维生成模型范畴。那么， sM 的 *Reedy* 模型结构与命题 *3.3.30* 中的单纯形富集相容，并且 sM 是一个单纯模型范畴。

命题 3.3.33。 设 M 是一个单纯形余纤维生成模型范畴，且 $f:\ T \to T'$ 是单纯范畴的一个等价。则诱导出的 *Quillen* 伴随

$$f_! : \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T, M) \rightleftharpoons \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T', M) : f^*$$

是一个 *Quillen* 等价。

既然我们正在讨论单纯函子的范畴，我们将构造 Yoneda嵌入的一个单纯等价版本，不过是在单纯函子的情形下。

记号 3.3.34。 设 T 是一个单纯范畴。我们将由函子$^{\mathbb{S}}$（T^{op}，$\mathbf{sSet}$）得到的自然单纯形富集记作 函子$^{\mathbb{S}}$（T^{op}，$\mathbf{sSet}$）$_s$。

记号 3.3.35。 设 T 是一个单纯范畴，且 x 是 T 中的一个对象。我们将 $\underline{h}_x:\ T^{op} \to \mathbf{sSet}$ 在函子$^{\mathbb{S}}$（T^{op}，$\mathbf{sSet}$）$_s$ 中的单纯函子 $\underline{h}_x$（y） $= \mathrm{Hom}_T$（y， x）记作，其中我们取 T 中的态射单纯集合。

定义 3.3.36。 设 T 为一个单纯范畴。我们定义一个单纯范畴态射 $\underline{h}:\ T \to$函子$^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathbf{sSet})_s$，其定义为 $\underline{h}(x) = \underline{h}_x$。

命题 3.3.37。 设 T为一个单纯范畴， x 为 T中的一个对象，且 F为一个单纯函子 $F:\ T \to \mathbf{sSet}$。存在一个单纯集合的典范同构

$$F(x) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathbf{sSet})_s}(\underline{h}_x, F)$$

它关于有序对 (F, x)具有函子性。特别地， $\underline{h}$ 作为单纯函子是全忠实的。

因此，函子 $\underline{h}$诱导出一个函子 $\pi_0(h):\ \pi_0(T) \to \pi_0(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathrm{sSet})_s)$。不过，我们希望得到一个指向单纯预层的同伦范畴的全忠实函子，而不带单纯富化。我们可以使用恒等函子 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathrm{sSet})_s \to \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathrm{sSet})$，但它是否会在同伦范畴之间诱导出一个定义良好的函子呢?

备注 3.3.38. 提醒读者，我们这里讨论的是两种不同的、都称为同伦范畴的对象：一方面，我们有作为单纯范畴的同伦范畴；另一方面，我们有作为模型范畴的同伦范畴。这意味着，如果我们取 $F, G \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathbf{sSet})_s)$ 单纯预层，以及 f, g两个从 F到 G的态射，那么一方面我们有 $\pi_0(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathbf{sSet})_s)$，其中 f和 g在属于同一个连通分支时相等（即单纯形同伦）；另一方面，我们有 $\mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathbf{sSet}))$，其中 f和 g在它们之间存在同伦等价（经过纤维化/余纤维替换后）时相等。

这两种局部化确实兼容吗? 恒等函子能否在同伦范畴之间诱导出一个定义良好的函子? 可以。必要的结果可由 [Hir03, 引理 9.5.15] 得到。

引理 3.3.39。 设 M是一个单纯模型范畴，且 X、Y是 M中的两个对象。如果 f、$g:\ X \to Y$是单纯同伦映射，那么 f 和 g 在 M 作为模型范畴的同伦范畴中是同一个映射。

命题 3.3.4 **0.** 设 T 是一个单纯范畴。恒等态射诱导出一个定义良好的函子 r

$$\pi_0(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathbf{sSet})_s) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op}, \mathbf{sSet})).$$

这最终为我们给出了富化 Yoneda 嵌入的同伦版本。

命题 3.3.41。令 T 为一个单纯范畴，x 为 T 中的一个对象，F 为一个单纯函子 $F:\ T^{op}\to \mathbf{sSet}$。在 $\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet})$ 中存在一个典范同构

$$F(x)\simeq \mathbb{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op},\mathbf{sSet})}(\underline{h}_x,F)$$

它关于序对 $(F,\ x)$ 具有函子性。特别地，函子

$$\underline{h}:\pi_0(T)\to \pi_0(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op},\mathbf{sSet})_s)\to \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(T^{op},\mathbf{sSet}))$$

是全忠实的。

3.3.3 单纯局部化

在关于模型范畴的同伦范畴的章节中，我们已经提到过 Gabriel-Zisman 局部化。不过，我们还可以给出增强局部化的定义；它不再赋予我们一个范畴，而是赋予我们一个单纯范畴。除非另有说明，本节中的所有结果均来自 [TV05，第 2.2 节和第 2.3] 节。

定义 3.3.42。令 C 为一个范畴，W 为其态射的一个子集。我们称一对 $(L_WC,\ l)$ 为 C**关于** W **的单纯局部化**，其中 L_WC 是一个单纯范畴，$l:\ C\to L_WC$ 是一个单纯范畴态射，称为**局部化态射**，并且对于每个单纯范畴 T，上述态射都会诱导出一个单纯范畴的等价

$$l^*:\mathbb{R}\,\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_WC,T)\simeq \mathbb{R}\,\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}_W(C,T)$$

其中 $\mathbb{R}$ 函子$^{\mathbb{S}}(L_W,\ T)$ 被视为 $\mathrm{Ho}(\mathbf{sCat})$中的一个对象，而 $\mathbb{R}$ 函子$^{\mathbb{S}}_W(C,\ T)$ 表示 $\mathrm{Ho}(\mathbf{sCat})$ 中 $\mathbb{R}$ 函子$^{\mathbb{S}}(C,\ T)$ 的全子范畴，其中包含所有将 W映为 T中等价的单纯态射。换言之，该局部化态射满足：对于每个单纯范畴 T，l 都会诱导一个单纯范畴态射

$$l^*:\mathbb{R}\,\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_WC,T)\to \mathbb{R}\,\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(C,T)$$

该态射是全忠实的，其本质像由那些将 W 中的态射映为 T中等价的函子构成。

注 3.3.43. 我们再次以抽象的方式给出了定义，却不能确定这样的对象是否存在。不过，已经证明，上文定义的单纯局部化总是存在的，并且它与 */DK80b/*中的 ***Dwyer-Kan*** 单纯局部化等价。

注 3.3.44. 熟悉 */TV05/* 的读者可能会指出，这里给出的泛性质看起来比该论文中给出的强得多；事实上，我们采用的是 */Toë14*，《局部化与模型范畴》/中的泛性质。不过，我们可以证明，这两个泛性质实际上是等价的。

因此，我们现在得到的是一个单纯范畴，而不是经典范畴意义上的局部化。这个单纯范畴有可能始终是平凡的，那样的话，我们这番努力就毫无收获。幸运的是，事实并非如此：一般来说，L_WC 中的态射空间并非 0-截断。不过，Gabriel-Zisman 局部化与这种局部化之间仍有密切关系。

命题 3.3.45。设 C 是一个范畴，W 是其态射的一个子集。我们取 C相对于 W的单纯局部化，$(L_WC,\ l)$。局部化态射在 ***Gabriel-Zisman*** 局部化 $C\left[W^{-1}\right]$ 与 L_WC的同伦范畴之间诱导出一个等价，$\pi_0(L_WC)$。

在范畴 C 是一个模型范畴的情况下，我们还有一个关于 Top 的有用结果。同样，我们将不从 [TV05], ，而是从 [Toë14，《局部化与模型范畴》] 中引用这一结果。

命题 3.3.46。 设 M 是一个模型范畴， C 是一个小范畴。则存在一个单纯范畴的自然等价

$$L_{W_C}(\mathrm{Fun}(C,M)) \simeq \mathbb{R}\,\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(C, L_W M),$$

其中， W 是 M 中的弱等价，而 W_C 是使用投射模型结构时在 $\mathrm{Fun}(C,M)$ 上的弱等价。

注记 3.3.47。 这一结果的一个推论是：如果 M 是一个模型范畴， $L_W M$ 具有所有极限和余极限，并且这些极限和余极限可以利用同伦极限和余极限来计算。

既然我们正在讨论从局部化到模型范畴 M的单纯图表范畴，那么可以问，当我们取 M =sSet时会发生什么。在这种情况下，我们有一个 Quillen 等价构造。我们将 sSet 视为一个单纯模型范畴，其所采用的结构由例 1 给出。

定义 3.3.48。 设 C 是一个单纯范畴， W 是其态射的一个子集。我们将**从** (C,W) **到 sSet 的受限图表的模型范畴**称为$\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(C,\mathbf{sSet})$沿形如$\underline{h}_x \to \underline{h}_y$ 的态射（对所有 $x \to y \in W$）的左 *Bousfield* 局部化，其中 $\underline{h}_x$ 如记号 *3.3.35*中所定义。我们将其记为$\mathbf{sSet}^{C,W}$。

注记 3.3.49. 根据 *Bousfield* 局部化的一般理论，$\mathbf{sSet}^{C,W}$ 的纤维对象是满足以下条件的函子 $f\colon C \to \mathbf{sSet}$：

- 函子 f 是投射模型结构中的纤维化。
- 对于 W 中的每个 $x \to y$ 态射，诱导态射 $f(x) \to f(y)$ 都是 $\mathbf{sSet}$ 中的等价。

定理 3.3.50. 设 C 是一个单纯范畴， W 是其态射的一个子集。令 (F_*C, F_*W) 为 (C,W) 作为单纯范畴的典范自由分解。存在两个自然函子

$$(C,W) \xleftarrow{p} (F_*C, F_*W) \xrightarrow{l} L_{F_*W} F_*C = L_W C$$

它们诱导出两个右 *Quillen* 函子

$$\mathbf{sSet}^{C,W} \xrightarrow{p^*} \mathbf{sSet}^{F_*C,F_*W} \xleftarrow{l^*} \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W C, \mathbf{sSet}).$$

这些 *Quillen* 函子 p^*, l^* 是 *Quillen* 等价。特别地，$\mathbf{sSet}^{C,W}$ 与 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W C, \mathbf{sSet})$之间存在一串 *Quillen* 等价。

注记 3.3.51。 请注意，我们说的是“存在一条 *Quillen* 等价链”，而不是“存在一个 *Quillen* 等价”。正如我们在注记 *3.1.13* 中所说，我们不能将 p_* 与 l_* 的左 *Quillen* 伴随复合并得到一个 *Quillen* 伴随，因为它们并非都是右伴随函子。

推论 3.3.52。 设 C， D 是两个单纯范畴， W 是 C 的一组态射， V 是 D 的一组态射。设 $f\colon C \to D$ 是一个单纯形范畴态射，满足 $f(W) \subset V$。若诱导函子 $Lf\colon L_W C \to L_V D$ 是单纯范畴的等价，则 *Quillen* 伴随

$$f_! : \mathbf{sSet}^{C,W} \rightleftharpoons \mathbf{sSet}^{D,V} : f^*$$

是一个 *Quillen* 等价。

照例，我们也可以为这种类型的局部化构造一个米田引理。此结果出自[TV05，第 4.2 定理。3]该定理针对伪模型范畴给出。

定理 3.3.53。 设 C 为一个同时也是单纯范畴的模型范畴，且 W 为弱等价的集合，那么函子

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Sing}(-) : \mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}^{C,W})$$

是全忠实的。

3.3.4 万有模型范畴

最后，在本节中，我们将为每个范畴 C 构造一个“泛模型范畴” UC，其含义是：对于所有模型范畴 M 和所有函子 γ：$C \to M$，都存在一个经由 UC 对 γ 的分解，并且在某种意义上是唯一的。除非另有说明，接下来的所有结果均出自 [Dug01] 。

定义 3.3.54。 设 C 为一个范畴，设 M 和 N 为两个模型范畴。固定一个函子 f： $C \to M$。对于所有 g：$C \to N$，我们将一个**经由** M**对** g 的分解定义为一个三元组 $(L,\ R,\ \eta)$，满足

- 函子 L： $M \rightleftharpoons N$： R 构成一个 *Quillen* 伴随。
- 我们有一个弱等价 η： $L \circ f \simeq g$。

定义 3.3.55。 设 C 为一个范畴，设 M 和 N 为两个模型范畴。固定一个函子 f： $C \to M$，并取 g：$C \to N$。若有 $(L,\ R,\ \eta)$ 和 $(L',\ R',\ \eta')$ 这两个经由 M 对 g 的分解，我们将**分解之间的态射** 定义为一个自然变换 F： $L \to L'$，使得对于所有 $x \in C$，该图表

$$\begin{tikzcd} L \circ f(x) \arrow[rr, "F \circ \mathrm{Id} f"] \arrow[dr, "\eta"'] & & L' \circ f(x) \arrow[dl, "\eta'"] \\ & g(x) & \end{tikzcd}$$

可交换。

记号 3.3.56. 在上述条件下，我们将 分解范畴$f(g)$ 记作 g 经过 M 的分解范畴及其间的态射。

命题 3.3.57. *[Dug01, 命题 2.3]* 设 C 是一个范畴， M 是一个模型范畴。存在一个闭模型范畴 UC 以及一个函子 r: $C \to UC$，使得以下结论成立：对于每个函子γ: $C \to M$，都存在 γ 经过 UC 的分解，$(\mathrm{Re}, \mathrm{Sing}\ \eta)$,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\gamma"'] & UC \arrow[d, shift right, "\mathrm{Re}"'] \arrow[dl, phantom, "\overset{\eta}{\Swarrow}"] \\ & M \arrow[u, shift right, "\mathrm{Sing}"'] \end{tikzcd}$$

并且分解范畴 $\mathbf{Fact}_r(\gamma)$是可缩的。

构造概要。 [Dug01, 第 9.5 节 3]泛模型范畴 UC不过就是 UC =Fun(C^{op}, sSet)，即定义在 C上的单纯预层范畴。包含 i : 集合范畴 $\to$ sSet 诱导出一个显然的包含 j : Fun(C^{op}, 集合范畴) $\to$ Fun(C^{op}, sSet)，它与 Yoneda嵌入复合后，便得到所需的函子，从 C 到 Fun(C^{op}, sSet)， $r = j \circ h$： $C \to$ Fun(C^{op}, 集合范畴) $\to$ Fun(C^{op}, sSet)。

现在我们有了闭模型范畴 Fun(C^{op}, 集合范畴) 和函子 r： $C \to$ Fun(C^{op}, sSet)，取一个函子 γ： $C \to M$ 到另一个模型范畴。我们将给出这个分解，但不会证明它确实是一个分解。较容易定义的伴随是 Sing。事实上，这正是我们引入余单纯框架和映射空间的原因。我们如下定义 Sing：

$$\mathrm{Sing}(x) = \mathrm{Map}(\gamma(-), x) \in \mathrm{Fun}(C^{op}, \mathbf{sSet}).$$

函子 Re 正是 Sing 的左伴随。特别地，它的形式如下：

$$\mathrm{Re}(F) = (C^* \circ \gamma) \otimes_C F = \mathrm{coeq}\ [\textstyle\coprod_{a \to b} (C^* \circ \gamma)(a) \otimes F(b) \rightrightarrows \coprod_c (C^* \circ \gamma)(c) \otimes F(c)]$$

其中张量积是命题 3.2.52 中给出的张量积。

证毕。

注 3.3.58. 这些函子被称为 Re 和Sing，显然并非巧合：实际上，这一想法源自从 Δ 构造余完备范畴的过程，它为我们提供了伴随函子$\mathrm{Re}:\mathbf{sSet}=$函子$(\Delta$,集合范畴$)\rightleftharpoons\mathbf{Top}:\mathrm{Sing}$，分别是几何实现和奇异函子。

注 3.3.59. 这种构造的优点在于，$\mathrm{Fun}(C^{op},\mathbf{sSet})$ 是一个性质尤为良好的模型范畴，因为它继承了**sSet**的大部分优良性质。特别地，$\mathrm{Fun}(C^{op},\mathbf{sSet})$ 是单纯的、余纤维生成的且适当的。

注 3.3.60. 可表函子 rX 总是余纤维的，因此$\mathrm{Re}\circ r$ 的像都是余纤维的。这就是我们要求该分解在某个弱等价意义下交换的原因：除非函子 γ 将所有对象都映到 M中的余纤维对象，否则该图表不会严格交换。

与经典情形一样，我们知道每个预层都可以表示为可表对象的余极限；现在我们可以证明，Fun(C^{op}, sSet)中的每个对象都是可表对象的同伦余极限。下面来构造所需的可表对象。

定义 3.3.61. 设 C 是一个范畴，F 是$\mathrm{Fun}(C^{op}$,集合范畴)中的一个对象，即一个经典预层。我们可以用以下公式定义与 F 相关联的**单纯预层**:

$$(\tilde{Q}F)_n=\coprod_{rX_n\to\ldots\to rX_0\to F} rX_n.$$

定义 3.3.62. 设 C 是一个范畴，F_* 是$\mathrm{Fun}(C^{op},\mathbf{sSet})$中的一个对象，即任意单纯~预层。构造 QF_* 给出一个双单纯预层，$(QF_*)_n=QF_n$. 我们可以定义以下单纯预层:

$$QF=\mathrm{diag}(\tilde{Q}F_*),$$

~双单纯预层 QF_*的对角线。

命题 3.3.63. 设 C 是一个范畴，F_* 是$\mathrm{Fun}(C^{op},\mathbf{sSet})$中的一个对象，即任意单纯预层。那么，相关联的单纯预层 QF 是余纤维的，且自然映射 $QF\to F_*$ 是弱等价。特别地，每个单纯预层都是可表对象的同伦余极限。

3.4 微分分次范畴

在讨论本文的核心结果之前，我们需要回顾一些关于本文主要研究对象——dg-范畴——的基本结果和记号。

3.4.1 定义与模型结构

我们先来定义相关术语。什么是微分分次范畴？又该如何为其赋予模型结构？本节的结果应该会让读者感到熟悉，因为微分分次范畴和单纯范畴都是更一般框架——富化范畴——中的常见例子。因此，这里的定义会非常相似。除非另有说明，本节的结果均取自[Toë11], ，不过 [Kel06] 也是很好的参考资料。

定义 3.4.1. 我们将 T 一个**dg-范畴**（微分分次范畴）定义为一个以$\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 上链复形范畴为富化范畴的范畴。等价地，*dg*-范畴由以下数据构成:

- 对象集 $\mathrm{Obj}(T)$。
- F对于 T 中的每一对对象，$(x,\ y)\in\mathrm{Obj}(T)^2$, 一个上链复形 $\mathrm{Hom}(x,\ y)\in\mathbf{C}(\mathbf{k})$。

- 对于 T 中的每三个对象，$(x,\ y,\ z) \in \mathrm{Obj}(T)^3$ 一个复合态射，属于$\mathbf{C}(\mathbf{k}$ $)$

$$\mu : \mathrm{Hom}(x,y) \otimes \mathrm{Hom}(y,z) \to \mathrm{Hom}(x,z)$$

  满足通常的结合条件。

- 对于 T 中的每个对象，$x \in T$，有一个态射 e_x：$k \to \mathrm{Hom}(x,\ x)$，它满足相对于上述复合的通常单位条件，其中 k 是只有一个对象且以 k 为其态射复形的 *dg*-范畴。

定义 3.4.2。设 T 和 T' 是两个 *dg*-范畴。**dg-函子**（也称为**dg-范畴的态射**）是一个在复形范畴上富化的函子 f：$T \to T'$。等价地，它由以下数据组成：

- 一个集合映射 $\mathrm{Obj}(T) \to \mathrm{Obj}(T')$。
- 对于 T 中的每一对对象，$(x,\ y) \in Ob(T)_2$，有一个复形态射

$$\mathrm{Hom}(x,y) \to \mathrm{Hom}(f(x), f(y)).$$

  满足通常的结合条件和单位条件。

记号 3.4.3. 我们将 *dg*-范畴与 *dg*-函子构成的范畴记为$\mathbf{dg}\ -\mathbf{cat}$。

Fo对于任意 dg-范畴 T，我们可以定义一个与之相关的范畴：其同伦范畴 T.

定义 3.4.4. 设 T 是一个 *dg*-范畴。我们称 T 的同伦范畴为 $[T]$，它是一个与 T 具有相同对象的范畴，其态射定义为

$$[T]\,(x,y) = H^0(\mathrm{Hom}_T(x,y)) \quad \forall (x,y) \in \mathrm{Obj}(T)^2,$$

也就是说，态射复形的 *0* 次上同调群。

该范畴中的复合由所有 $(x,y,z) \in$ 对象集$(T)^3$ 上的态射复合给出

$$H^0(\mathrm{Hom}_T(x,y)) \otimes H^0(\mathrm{Hom}_T(y,z)) \to H^0(\mathrm{Hom}_T(x,y) \otimes \mathrm{Hom}_T(y,z)) \to H^0(\mathrm{Hom}_T(x,z)).$$

注记 3.4.5. 我们已经定义了三种不同的“某物的同伦范畴”。尽管它们之间存在某些联系，但重要的是要记住，这些定义不能互换：正因如此，我们必须牢记所取同伦范畴的对象究竟是什么。是模型范畴、单纯范畴，还是 *dg*-范畴？

已经证明，$\mathrm{dg}\ -$ 范畴具有模型结构，甚至具有余纤维生成模型结构。其定义如下：

定义 3.4.6. 设 $f\colon T \to T'$ 是 *dg*-范畴之间的态射。

- 如果诱导的同伦范畴态射 $[f]\colon [T] \to [T']$ 是本质满的，我们就称 f 为**准本质满**。

- 如果对于任意两个对象$(x,y)\ \in \mathrm{Obj}(T)^2$，相应的复形态射 $T(x,y) \to T(f(x)\ f(y))$ 是复形之间的弱等价，我们就称 f 为**拟全忠实**。
- 我们称 f 为**拟等价**，如果它是准本质满且拟全忠实的。

定义 3.4.7。 *[Tab10，注 2。5]*设 T是一个 *dg*-范畴。若态射在 T, $f \in Z^0(\mathrm{Hom}_T(x,y))$中成为 $H^0(f)$ 中的同构 $[T]$, 则称它为**同伦等价**。

定义 3.4.8。 *[Tab10，定义 2.12]* 设 $f\colon T \to T'$ 是一个微分分次范畴之间的态射。我们称 f 是一个**纤维化**，如果

- 对于任意两个对象 $(x,y) \in$对象集$(T)^2$，相应的复形态射 $T(x,y) \to T'(f(x)\ f(y)$ ）是复形纤维化，即为满射。
- 对于所有 $x \in$对象集(T)、 $y' \in$对象集(T')，以及所有 h： $f(x) \to y'$ 中 T'的同伦等价，都存在一个对象 $y \in$对象集(T)和一个同伦等价 g： $x \to y$，其中 T满足 $f(y) = y'$以及 $f(g) = h$。

定理 3.4.9。*([Tab10，定义 2.14], 参见 [Tab05，定理 2.1]*法语证明）范畴 $\mathbf{dg}$ –范畴具有一个模型结构，其弱等价为拟等价，纤维化如上所定义。它是一个余纤维生成模型范畴，而生成余纤维化 $\{I, P(s)/\ s \in \mathbb{Z}\}$ 如下：

- 函子 I 是唯一的 *dg*-函子 $\emptyset \to k$，其中 $\emptyset$ 是 $\mathbf{dg}$ –范畴中的始对象。
- 对于所有 $s \in \mathbb{Z}$，令 Δ_k*(1, s, 1)* 为具有两个对象 *0* 和 *1* 的 *dg*-范畴，其中 *Hom(0, 0)* =*Hom(1, 1)* $= k$, *Hom(1, 0)* $= 0$ 且 *Hom(0, 1)* $= k[s]$; 并令 Δ_k^c*(1, s, 1)* 为具有两个对象 *0* 和 *1* 的 *dg*-范畴，其中 *Hom(0, 0)* $=$ *Hom(1, 1)* $= k$, *Hom(1, 0)* $= 0$ 且 *Hom(0, 1)* $= k^c[s]$。对于所有 $s \in \mathbb{Z}$, *P(s)*： Δ_k*(1, s, 1)* $\to \Delta_k^c$*(1, s, 1)* 是 *dg*-函子，它们将 *0* 映到 *0*，将 *1* 映到 *1*，并通过以下态射将 *Hom*$_{\Delta_k}$*(1,s,1)(0, 1)* 映到 *Hom*$_{\Delta_k^c}$*(1,s,1)(0,1)*：

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow & & \\ \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

推论 3.4.10. 在该模型结构下，所有 *dg*-范畴都是纤维的。此外，若 *dg*-范畴 T 是余纤维的，则对所有$(x,y) \in$对象集$(T)^2$，复形$\mathrm{Hom}_T(x,y)$ 在$\mathbf{C}(\mathbf{k})$上的模型结构中是余纤维的。

注记 3.4.11. *Bergner* 在单纯范畴上的模型结构和 *Tabuada* 在 *dg*-范畴上的模型结构（以及其他许多模型结构）都可以看作定义在富化于 N, N–范畴范畴的范畴范畴上的典范模型结构的特例，其中 N 是一个右适当、适当的幺半模型范畴，具有余纤维单位元以及一个 N-区间生成集。完整的构造和证明可见于 *[BM13，定理 2.5]*。

命题 3.4.12. *[BM13，定理 1.10]* 在上述模型结构下，模型范畴$\mathbf{dg}$ –范畴范畴 是右适当的。

在继续之前，我们将给出一种定义 $\mathbf{dg}$ –范畴中拟全忠实 dg-函子的不同但等价的方法。为此，我们将回顾一个在任意模型范畴中普遍成立的定义。

定义 3.4.13。设 M 是一个模型范畴，且 f： $X \to Y$是 M中的一个态射。我们称 f 为**同伦单态射**，如果对于所有 $Z \in M$，单纯集合的诱导态射

$$f_* : \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y)$$

在 π_0 上诱导出一个单射，并且对于所有 $i > 0$ 以及所有基点，在 π_i 上都是同构。这个定义等价于要求态射 $X \to X \times^h_Y X$ 在$\mathrm{Ho}(M)$中是一个同构。

在 dg-范畴的情形下，我们实际上并没有定义新的概念：可以证明，这些 dg-函子恰好就是拟全忠实 dg-函子。

命题 3.4.14。 *[Toë07，引理 2.4]*设 f： $T \to T'$是$\mathbf{dg}$ – 范畴中的一个 *dg*-函子。那么，当且仅当 f 是同伦单态射时， f 是拟全忠实的。特别地，如果 f 是$\mathbf{dg}$ –范畴中的弱等价，那么 f 是同伦单态射。

推论 3.4.15. *[Toë07,* 推论 *2.5]*设 $f\colon T \to T'$ 是 $\mathbf{dg}$ – 范畴范畴中的拟全忠实态射，且 $Y \in \mathbf{dg}$ –范畴范畴是一个 *dg*-范畴。那么，在 π_0 上，诱导单射的像为，

$$\pi_0(\mathrm{Map}(Y,T)) = [Y,T] \to \pi_0(\mathrm{Map}(Y,T')) = [Y,T'],$$

由满足以下条件的态射给出：诱导函子 $[Y] \to [T']$ 可以通过 $[Y] \to [T]$ 的本质像进行因子分解。

现在，为了结束本节，我们将给出几个稍后会用到的子范畴定义。

定义 3.4.16. 存在一个 *Quillen* 伴随 $L\colon Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k})) \rightleftharpoons \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{cat}\colon U$，其中 $Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))$ 是模复形上的图范畴，U 是遗忘函子。我们称**自由 dg-范畴**T为满足以下条件的 *dg*-范畴：存在一个 $T' \in Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))$ 使得 $T = L(T')$。我们用 $\mathcal{L}$表示自由 *dg*-范畴构成的全子范畴。

特别地，若 X 是 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$上的一个图，则有 $L(X)$与 X 具有相同的对象，并且对所有对象 $x, y \in \mathrm{Obj}(X) = \mathcal{O}$,

$$L(X)(x,y) = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \bigoplus_{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathcal{O}^m} (X(x,x_1)\otimes\ldots\otimes X(x_m,y)).$$

不过，自由 dg-范畴对我们的目的来说仍然过于庞大。我们将使用稍小一些的对象：有限型自由 dg-范畴。由于我们研究的是自由 dg-范畴，因此可以先将这些对象定义为图，再通过自由函子将它们映射过去。

定义 3.4.17. 设 $G \in Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))$ 是模复形上的一个图。若其顶点数有限，且任意两个顶点之间的边都是完美复形，则称 G 为**有限型图**。我们用 $Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))^{tf}$表示有限型图构成的全子范畴。

定义 3.4.18. 设 $L = L(G)$ 是一个自由 *dg*-范畴。若其底层图 G 是有限型图，则称 L 为**有限型自由 dg-范畴**。

3.4.2 微分分次范畴上的模

作为本章的最后一节，我们来讨论微分分次范畴上的模。除非另有说明，本节的所有结果均出自 [Toë07，第 3 节和 4]。

定义 3.4.19. 设 T 是一个 *dg*-范畴。我们称一个 T**-dg-模**（如果显然是在讨论 $\mathbf{dg}$ – 范畴，则称为一个 T-模）为一个形式为 $F\colon T \to \mathbf{C}(\mathbf{k})$ 的 *dg*-函子 F。若 F, G 是两个 T-模，则我们将 F 和 G 之间的 T-模态射定义为富化自然变换。

记号 3.4.20. 设 T 是一个 *dg*-范畴。我们用 $T - \mathbf{Mod}$ 表示 T-模范畴。

注记 3.4.21. 由于 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 是一个余纤维生成模型范畴，因此 T –模 是一个具有定理 *3.2.21* 所给投射结构的模型范畴。

在这种情况下，我们可以定义某种微分分次增强的 Yoneda 嵌入。不过，为此我们需要再引入一个定义：内范畴。

定义 3.4.22. 设 T为一个 *dg*-范畴， T –模 为其 T-模范畴。我们将 T –模 的**内范畴** 定义为如下子微分分次范畴：其对象是$T -$ 模中的纤维且余纤维对象，并记作 $\mathrm{Int}(T\text{ –模})$。

注记 3.4.23. 在 *[Toë07]* 中，这一定义适用于任意 $M\,\mathbf{C}(\mathbf{k})$-模型范畴；但由于我们只会在此语境下使用它，因此决定仅针对 T –模陈述此定义。事实上，下一个结果对所有 T –模也成立。

正如我们在模型范畴 M 的同伦范畴一节中所回顾的，同伦范畴可以定义为由纤维且余纤维对象构成的子范畴 M^{cf} 的商；内范畴可以看作 $T - \mathrm{Mod}^{cf}$ 的 C(k)-丰度。我们定义 dg –cat 中的同伦函子时，它将 dg-范畴映射到经典范畴；当时我们提醒过，尽管名称相同，模型范畴的同伦范畴与 dg-范畴的同伦范畴并非同一定义；不过，我们也补充说，两者之间存在联系。下面就是这种联系。

命题 3.4.24。 设 T 是一个 *dg*-范畴。那么，作为 *dg*-范畴的 $\mathrm{Int}(T-\mathbf{Mod})$ 的同伦范畴，自然同构于作为模型范畴的 $T-\mathbf{Mod}$ 的同伦范畴，

$$[\mathrm{Int}(T-\mathbf{Mod})] \simeq \mathrm{Ho}(T-\mathbf{Mod}).$$

现在我们可以定义 Yoneda 嵌入。

记号 3.4.25. 设 T 为一个 *dg*-范畴， x 为 T中的一个对象。我们将 $\underline{h}_x: T^{op} \to \mathbf{C}(\mathbf{k})$ 表示为 *dg*-函子 $\underline{h}_x(y) = \mathrm{Hom}_T(y,x)$，其中我们取 T中的态射上链复形。

定义 3.4.26. 设 T为一个 *dg*-范畴。我们定义一个微分分次范畴之间的态射 $\underline{h}: T \to T^{op}-\mathbf{Mod}$ *by* $\underline{h}(x) = \underline{h}_x$，其构造使用 $T^{op}-\mathbf{Mod}$的自然 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$-富化。

命题 3.4.27. 设 T为一个 *dg*-范畴。对于所有 $x \in T$，对象 $\underline{h}_x$在 $T^{op}-Mod$ 中既是纤维的也是余纤维的。这定义了一个 *dg*-函子

$$\underline{h}: T \to \mathrm{Int}(T^{op}-\mathbf{Mod})$$

并且它是拟全忠实的。

定义 3.4.28. 设 T 为一个 *dg*-范畴，并设 F 为一个 T^{op}-模。

- 我们称 F 是**可表**的，若存在一个对象 $x \in T$ 属于 T，使得 F 在$\mathrm{Int}(T^{op}-\mathbf{Mod})$ 中与 $\underline{h}_x$ 同构。
- 我们称 F 是**拟可表**的，若存在一个对象 $x \in T$ 属于 T，使得 F 在$\mathrm{Int}(T^{op}-\mathbf{Mod})$ 中与 $\underline{h}_x$ 弱等价，也就是说，若 F 在$\mathrm{Ho}(T^{op}-\mathbf{Mod})$中与 $\underline{h}_x$ 同构。

注 3.4.29。 由于 $\underline{h}_x$ 是拟全忠实的，这个定义意味着，在$\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$ 中， T 与由拟可表对象组成的$\mathrm{Int}(T^{op}-\mathbf{Mod})$ 子范畴之间存在一个弱等价。

我们知道，C(k) 有一个张量积，记作 $-\otimes-$；利用它，我们可以很容易地在整个 dg $-$范畴上定义张量积。

定义 3.4.30。 设 T 和 T' 是两个 *dg*-范畴。我们将 T 和 T' 的张量积定义为一个范畴 $T\otimes T'$，使得

- $T\otimes T'$ 中的对象就是$\mathrm{Obj}(T)\times\mathrm{Obj}(T')$中的对象。
- 对于 $T\otimes T'$中的任意一对对象$(x,y),(x',y')$，一个形如以下形式的上链复形

$$T'\otimes T'((x,y),(x',y')) = T(x,x')\otimes T'(y,y').$$

命题 3.4.31. 上述定义的张量积赋予$\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$ 一个闭对称幺半结构。该幺半结构的单位元是一个只有一个对象、且其态射复形为 k 的 *dg*-范畴，我们将其记为 $\Delta_k(0)$ 或 k。

注记 3.4.32. 遗憾的是，这个对称幺半结构与模型结构不相容，这意味着我们没有对称幺半模型范畴：事实上，两个余纤维对象的张量积不一定仍是余纤维对象。不过，张量积确实具有足够好的性质，因此可以将其导出。

命题 3.4.33. $-\otimes^{\mathbb{L}}-:\mathrm{Ho}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat})\times\mathrm{Ho}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat})\to\mathrm{Ho}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat})$。具体如下：设 T和 D 是两个 *dg*-范畴。我们将导出张量积计算为

$$T\otimes^{\mathbb{L}} D = Q(T)\otimes D$$

其中 Q 是一个在对象上为恒等态射的余纤维替换。当 T 是余纤维时，存在一个自然的拟等价 $T\otimes^{\mathbb{L}} D \to T\otimes D$。

现在我们可以考虑 $(T\otimes D^{op})$-模范畴。对于任意 $x\in T$，存在一个自然的 dg-函子$j_x\colon D^{op}\to T\otimes D^{op}$，它将对象 $y\in D^{op}$ 映射为 $(x,y)\in T\otimes D^{op}$；并且对于每一对对象 $y,z\in D^{op}$，复形态射 $D^{op}(y,z)$ 到 $T(x,x)\otimes D^{op}(y,z)$ 由 $k\otimes \mathrm{Id}_{D^{op}}$ 给出。

定义 3.4.34. 设 T,D 是两个 *dg*-范畴。那么对所有 $x\in T$，我们定义一个 *dg*-函子 r

$$i_x : D^{op}\to Q(T)\otimes^{\mathbb{L}} D^{op}$$

由 j_x 诱导

定义 3.4.35. 设 T和 D 是两个 *dg*-范畴。若对象 $F\in(T\otimes^{\mathbb{L}} D^{op})$ $-$模 对所有 $x\in T$, $i_x^*(F)$ 均为拟可表，则称其为**右拟可表** 。

注 3.4.36. 若有 $T=k$，容易看出，对象 $F\in(k\otimes^{L} D^{op})-$模 $=D^{op}-$模是右拟可表的，当且仅当它是拟可表的。

定义 3.4.37. 设 T和 D 是两个 *dg*-范畴。我们将$(Q(T)\ D)$ 定义为$\mathbf{dg}$ $-$范畴 的（非满）子范畴，定义如下：

- 由右拟可表的 $Q(T)\otimes D^{op}$-模构成的对象集合。
- 右拟可表模之间，$(Q(T)\otimes D^{op})-\mathbf{Mod}$ 的投射模型结构中的弱等价。

现在我们可以写出一直以来要证明的结果：

定理 3.4.38。 *[Toë07，定理 4。2]* 设 T 和 D 为两个 *dg*-范畴。存在 *sSet* 中的弱等价，使得$\mathbf{sSet}$

$$\mathrm{Map}(T,D)\to \mathrm{diag}(N(M(C^*(T),D)))\leftarrow N(F(Q(T),D))$$

其中 N表示一个范畴的神经；对于所有 $n\in\mathbb{N}$, $M(C^n(T)\ D)$，它是 $F(C^n(T)\ D)$的子范畴，其对象为右拟可表的 $T\otimes D^{op}$-模 F；并且对于所有 $x\in C^n(T)$， D^{op}-模 $F(x,-)$ 在 $D^{op}-\mathbf{Mod}$中是余纤维的。

推论 3.4.39。 设 T 为一个 *dg*-范畴。那么，$\mathrm{Ho}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat})$ 中的映射集合 $[k,T]$ 与范畴 $[T]$的同构类集合之间存在函子性同构。

推论 3.4.40. 设 T 是一个 *dg*-范畴，且 $x\in T$ 是 T中的一个对象。那么存在群的自然同构

$$\pi_1(\mathrm{Map}(k,T),x)\simeq \mathrm{Aut}_{[T]}(x)$$
$$\pi_i(\mathrm{Map}(k,T),x)\simeq H^{1-i}(T(x,x))\ \ \forall i>1.$$

第4章

dg-Segal 空间

> “一旦确定了正确的定义和定理，结果几乎就会自行证明。”
>
> —Daniel Dugger，通用同伦理论

现在，我们已经掌握了所需的全部背景信息，可以开始定义主要结果中将用到的对象。我们固定一个 k 交换环。

4.1 构造伴随

记号 4.1.1。 我们将有限型余纤维自由 *dg*-范畴的全子范畴记为 $c\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$。由于本文不会考虑其他类型，因此在大多数情况下，我们会在说明中省略“余纤维”一词。

定义 4.1.2。 设 W 为 $\mathbf{dg}$ –范畴 （*dg*-范畴范畴）上的弱等价集合。按照定义 *3.3.42*，我们相对于 W （即弱等价）构造 *dg*-范畴的单纯局部化 $L_W\mathbf{dg}$ – 范畴 。我们定义单纯 $c\mathcal{L}$，并将其记为 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$: 它是 $L_W\mathbf{dg}$ – 范畴 的全单纯子范畴，其对象是 $c\mathcal{L}$ 中的对象。

注 4.1.3。 我们必须谨慎对待 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 的定义。直接将其定义为 $L_W c\mathcal{L}$ 似乎很自然，但范畴 $L_W c\mathcal{L}$ 和 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 并不一致。

定理 4.1.4. 存在一列如下形式的 *Quillen* 伴随

$$\mathrm{Re} : \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \ldots \rightleftharpoons \mathbf{dg}-\mathbf{cat} : \mathrm{Sing},$$

并且可以将其导出为一个单独的伴随

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})) \rightleftharpoons \mathrm{Ho}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}).$$

证明。 我们从右边开始。由于我们已定义 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 具有由 $L_W\mathbf{dg}$ – cat 的单纯结构所诱导的单纯结构，因此存在一个自然的单纯包含函子 $j\colon c\mathcal{L}_{\mathbb{S}} \hookrightarrow L_W\mathbf{dg}$ – cat。若我们在单纯函子的范畴上取投射模型结构，则存在如下形式的 Quillen 伴随

$$j_! : \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet}) : j^*$$

现在，根据单纯局部化的定义，存在一个函子 $l\colon \mathbf{dg}$ – cat $\to L_W\mathbf{dg}$ – cat，它给出了如下形式的 Quillen 伴随

$$l_! : \mathrm{Fun}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet}) : l^*$$

最后，利用 Dugger 在命题 3.3.57 中的构造，若取范畴 C 和模型范畴 M 均为 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$，并令函子 γ 为恒等函子，则有如下分解 $(\mathrm{Re}_W, \mathrm{Sing}_W, \eta)$，

$$\mathrm{Re}_W : \mathrm{Fun}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \mathbf{dg}-\mathbf{cat} : \mathrm{Sing}_W$$

其中我们知道右伴随由 $\mathrm{Sing}_W(X) = \mathrm{Map}(-, X)$ 给出。

我们构造了一列从 $\mathbf{dg}-$范畴到 $\mathrm{Fun}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathrm{sSet})$ 的 Quillen 伴随。不过，正如我们此前多次提到的，不能将右 Quillen 函子与左 Quillen 函子复合，同时仍得到一个 Quillen 伴随。而在这种情况下，伴随 $(l_!, l^*)$ 的方向“错了”。事实上，若我们写出这一列 Quillen 伴随，并始终将左 Quillen 函子写在上方，就会得到如下图表：

$$\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}) \underset{j^*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet}) \underset{l^*}{\overset{l_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fun}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet}) \underset{\mathrm{Sing}_W}{\overset{\mathrm{Re}_W}{\rightleftarrows}} \mathbf{dg}-\mathbf{cat}.$$

在这个层面上，我们无能为力，无法修正这一点；但在同伦范畴中则可以。事实上，在同伦范畴中，我们可以构造函子 Sing_W 的一个分解，从而不再需要伴随 $l_!$。换句话说，我们将尝试寻找一个函子 Sing'，使得图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})) & \underset{j^*}{\overset{j_!}{\rightleftarrows}} & \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet})) & \underset{l^*}{\overset{l_!}{\rightleftarrows}} & \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet})) \\ & & \overset{\mathrm{Sing}'}{\nwarrow} & & \uparrow \mathrm{Sing}_W \; \downarrow \mathrm{Re}_W \\ & & & & \mathrm{Ho}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}). \end{array}$$

交换。

根据单纯局部化范畴的定义，若有一个函子 F: $\mathbf{dg}-\mathbf{cat} \to \mathrm{sSet}$，将 W 中的所有态射映为 sSet 中的弱等价，那么它便可在同伦范畴上经由 l^* 分解。但 $\mathrm{Sing}_W(X) = \mathrm{Map}(-, X)$ 是一个右 Quillen 伴随，因此它会将纤维对象之间的弱等价映为弱等价，而 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$ 中的所有对象都是纤维的。因此，对于所有 $X \in \mathbf{dg}-\mathbf{cat}$，像 $\mathrm{Sing}_W(X)$ 都可经由 $L_W\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$ 分解。这就给出了如下形式的函子性分解：

$$\mathrm{Sing}_W(X) = l^* \circ \mathrm{Sing}'(X)$$

在同伦范畴中。

现在我们只需证明函子 $\mathrm{Sing} = j^* \circ \mathrm{Sing}'$ 和 $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_W \circ l^* \circ j_!$ 确实互为伴随，也就是说，对所有 $X \in \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathrm{sSet})$ 和所有 $Y \in \mathbf{dg}-\mathbf{cat}$，都存在如下形式的函子性同构：

$$\left[X, j^* \circ \mathrm{Sing}'(Y)\right]_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})} \simeq \left[\mathrm{Re}_W \circ l^* \circ j_!(X), Y\right]_{\mathbf{dg}-\mathbf{cat}}.$$

让我们从左侧开始，逐步推导。我们从 $\left[X, j^* \circ \mathrm{Sing}'(Y)\right]_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})}$ 开始。由于函子 $j_!$ 和 j^* 互为伴随，因此我们有

$$\left[X, j^* \circ \mathrm{Sing}'(Y)\right]_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})} \simeq \left[j_!(X), \mathrm{Sing}'(Y)\right]_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet})}.$$

由于我们讨论的是同伦范畴，根据单纯局部化的定义（见定义 3.3.42），函子 l^* 是全忠实的。这意味着，特别是，我们得到以下同构：

$$\left[j_!(X), \mathrm{Sing}'(Y)\right]_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet})} \simeq \left[l^* \circ j_!(X), \mathrm{Sing}_W(Y)\right]_{\mathrm{Fun}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet})}.$$

最后，再次利用 Re_W 和 Sing_W 上的伴随定义，我们得到 t

$$\left[l^* \circ j_!(X), \mathrm{Sing}_W(Y)\right]_{\mathrm{Fun}(\mathbf{dg}-\mathbf{cat}^{op}, \mathbf{sSet})} \simeq \left[\mathrm{Re}_W \circ l^* \circ j_!(X), Y\right]_{\mathbf{dg}-\mathbf{cat}}.$$

我们有如下同构

$$[X, \mathrm{Sing}(Y)]_{\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})} \simeq [\mathrm{Re}(X), Y]_{\mathbf{dg-cat}}$$

并且，$\mathrm{Re} : \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathrm{sSet})) \rightleftharpoons \mathrm{Ho}(\mathrm{dg}\ -\mathrm{cat}) : \mathrm{Sing}$ 这一对函子在同伦范畴上构成一个伴随。证明完毕。

Q.E.D.

现在，我们在所需的范畴之间建立了一个伴随。下一步是证明这个函子是一个等价。但这并不容易。为此，我们需要一些背景概念和构造。

4.2 dg-Segal 空间

正如我们在引言中所说，本节的灵感来源于完全 Segal 空间。我们提醒读者，这类空间的定义如下。

定义 4.2.1. *[Rez01，定义 4.1]* 设 W 是一个 *Reedy* 纤维化的单纯空间。若映射满足下述条件，则称 W 为一个 **Segal 空间**

$$W_k \to \overbrace{W_1 \times_{W_0} \cdots \times_{W_0} W_1}^{k\ times}$$

对所有 $k \geq 2$，它们都是弱等价。

我们可以对函子施加一些类似的条件，但在我们的情形下，这些条件还不够。事实上，我们研究的不仅仅是单纯集合：还需要考虑线性结构。因此，我们需要对平移增加一个额外条件；为此，我们将定义把一个模加到一个模复形上的作用。

定义 4.2.2。 令 $G \in Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))$ 为复形范畴中的一张图， $x, y \in \mathrm{Obj}(G)$ 为G中的两个对象，且 $\alpha \in Z^n(G(x, y))$ 为 $G(x, y)$中的一个循环。我们将图 $G(<\alpha>)$ 定义为一张复形图，使得

- 图 $G(<\alpha>)$ 与 G具有相同的对象。
- 图 $G(<\alpha>)$ 与 G 在 $x', y' \in \mathrm{Obj}(G)$ 之间具有相同的态射，只要 $(x', y') \neq (x, y)$，即 $G(<\alpha>)(x', y') = G(x', y')$。
- 我们定义 $G(<\alpha>)(x, y)$ 为态射复形 $G(x, y) \oplus_k \beta$ 其中 $d\beta = \alpha$。

换句话说， $G(<\alpha>)$ 是图范畴中沿态射 $k[n] \to k^c[n]$的一个推出，其中$k[n]$ 是一个有两个对象 0,1的图，且 $k[n]$ 是这两个对象之间的态射，作为 $\mathrm{Hom}(0,1)$ ； 而 $k^c[n]$ 是一个有两个对象 0,1的图，其复形 $\mathrm{Hom}(0,1)$ 除次数 $n-1$和 n外始终为零，在这两个次数上，它等于 k。

$$\begin{array}{ccc} k[n] & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ k^c[n] & \longrightarrow & G(<\alpha>). \end{array}$$

注 4.2.3. 不难看出，我们在这里所做的一切，只是在模复形 $G(x, y)$中增加了次数为 $n-1$ 的一项。

现在我们有了这个定义，可以应用它，最终定义像的条件。

定义 4.2.4. 令 $F \in \text{函子}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})$ 为从余纤维自由 *dg*-范畴到单纯集合的单纯函子。若 F 满足 **dg-Segal 条件**，则称：

1. 对所有 $L, K \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$, $F(L \coprod K) \to F(L) \times F(K)$ 都是弱等价。

2. 始对象的像是一个点，即 $F(\emptyset) \simeq *$。

3. 设 G 是 $Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))$ 中的一个图，且 $x, y \in \mathrm{Obj}(G)$。对于所有 $\alpha \in Z^n(G(x,y))$，由 $G(<\alpha>)$ 生成的自由 *dg*-范畴的像是 **sSet** 中的一个同伦拉回，其形式如下：

$$\begin{array}{ccc} F(L(G(<\alpha>))) & \xrightarrow{\ulcorner h} & F(L(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\Delta^c_k(1,n,1)) & \longrightarrow & F(\Delta_k(1,n,1)) \end{array}$$

其中 $\Delta^c_k(1,n,1) = L(k^c[n])$ 且 $\Delta_k(1,n,1) = L(k[n])$；也就是说， F 将前一定义中的同伦推出映射为同伦拉回。

我们将满足 *dg-Segal* 条件的 $F \in$ 函子范畴$^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}^{op}_{\mathbb{S}}, \mathbf{sSet})$ 的全子范畴记作 $\mathbf{dg-Segal}$，并称其对象为 **dg-Segal 空间。**

我们目前的猜想是：第 4.1 节中定义的函子 Sing 的像，在弱等价意义下由满足 dg-Segal 条件的函子构成。为了证明这一点，我们首先需要证明像中的每个对象都具有这种形式。

命题 4.2.5。 设 $T \in \mathbf{dg-}$范畴 是一个 *dg*-范畴。那么函子 $\mathrm{Sing}(T)$ 满足 *dg-Segal* 条件。

证明。 我们需要验证 T 满足定义中的三个条件。

1. 设 $L, K \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 是两个余纤维自由 dg-范畴。由于 L, K 是余纤维的，我们有 tha t

$$\mathrm{Sing}(T)(L \coprod K) = \mathrm{Map}(L \coprod K, T) = \mathrm{Hom}(L \coprod K, C_*(T)).$$

但根据余积的定义，条件 1. 在此情形下成立：

$$\mathrm{Hom}(L \coprod K, C_*(T)) = \mathrm{Hom}(L, C_*(T)) \times \mathrm{Hom}(K, C_*(T)) = \mathrm{Map}(L, T) \times \mathrm{Map}(K, T)$$

至此证明完毕。

2. 这个条件显然成立：根据终对象的定义，$\mathrm{Sing}(\emptyset) = \mathrm{Map}(-, \emptyset) = *$。

3. 我们需要证明以下图表是一个同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sing}(T)(L(G(<\alpha>))) = \mathrm{Map}(L(G(<\alpha>)), T) & \longrightarrow & \mathrm{Sing}(T)(L(G)) = \mathrm{Map}(L(G), T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sing}(T)(\Delta^c_k(1,n,1)) = \mathrm{Map}(\Delta^c_k(1,n,1), T) & \longrightarrow & \mathrm{Sing}(T)(\Delta_k(1,n,1)) = \mathrm{Map}(\Delta_k(1,n,1), T). \end{array}$$

这些对象都属于 sSet，而 sSet 是一个适当范畴，这意味着如果其中一条箭头是纤维化，那么我们就有一个同伦拉回。由定理 3.4.9 可知， $\Delta_k(1,s,1) \to \Delta^c_k(1,s,1)$ 是 $\mathbf{dg-cat}$ 中的一个生成余纤维化；由命题 3.2.55 可知，$\mathrm{Sing}(T)(\Delta^c_k(1,s,1)) \to \mathrm{Sing}(T)(\Delta_k(1,s,1))$ 是一个纤维化。因此，前面的图表是一个同伦拉回。

函子 $\mathrm{Sing}(T)$ 满足 dg-Segal 条件，我们的证明也就完成了 f.

Q.E.D.

注 4.2.6. 请读者注意，尽管我们并未要求 *dg-Segal* 空间是纤维的，但由于伴随性，每个$\mathrm{Sing}(T)$ 实际上都是纤维的。

我们已经证明，Sing 的像中的每个元素都是 dg-Segal 空间。证明本质满射性时，请读者牢记这一点。

不过现在，让我们聚焦于这些 dg-Segal 空间所能获得的模型结构。在 [Rez01], Rezk 在 Fun(Δ^{op}, sSet) 上取其模型结构，并对其进行 Bousfield 局部化，使 Segal 空间成为其中的纤维对象；他称之为**Segal 空间模型范畴结构**。沿着他的思路，我们在 Fun$^{\mathbb{S}}$($c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 上得到一种新的模型结构，其纤维对象是相对于投射结构纤维的 dg-Segal 空间。尽管本节中关于 Segal 空间和完全 Segal 空间的结果出自 Rezk，我们在介绍这些结果时将借鉴 Rasekh 在 [Ras20] 中的讲义。

定理 4.2.7. 在$\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$,$\mathbf{sSet})$ 上存在一种单纯闭模型结构以及一类态射 C ，使得

1. 余纤维化与投射模型结构中的余纤维化相同。

2. 纤维　化对象是对于射影模型结构为纤维的 *dg-Segal* 空间　　$re.$

3. 弱等价是相对于态射类 C 的 C-局部等价。

我们将这样的模型结构**称为 dg-Segal 模型结构**。

证明。 为了证明这一点，我们将使用左 Bousfield 局部化。首先需要做的是找出一个态射类 C ，使得 dg-Segal 空间恰好是 C-局部对象，也就是说，对于每个 dg-Segal 空间 F 以及每个态射 $f\colon\ A \to B$ 中的 C，态射

$$\mathrm{Map}(B, F) \to \mathrm{Map}(A, F)$$

是一个弱等价。为此，我们定义三个态射类，分别对应 dg-Segal 空间定义中的每个条件。

1. 我们的第一类态射是 $C_1 = \{\mathrm{Sing}(L) \coprod \mathrm{Sing}(L') \to \mathrm{Sing}(L \coprod L')/\ L, L' \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}\}$。我们来验证， C_1-局部对象恰好是满足 dg-Segal 空间定义中第一个条件的函子。设 F 是 Fun$^{\mathbb{S}}$($c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 中的一个函子，且是一个 C_1-局部对象。那么，根据米田引理，我们有

$$\mathrm{Map}(\mathrm{Sing}(L \coprod L'), F) \simeq F(L \coprod L') \to \mathrm{Map}(\mathrm{Sing}(L) \coprod \mathrm{Sing}(L'), F) \simeq F(L) \times F(L')$$

是一个弱等价。根据构造， F 满足第一个 dg-Segal 条件。

2. 由于 dg-Segal 空间定义中的第二个条件只是一个弱等价，因此与之相关联的态射类也只有一个态射。我们考虑 $C_2 = \{\emptyset \to \mathrm{Sing}(\emptyset)\}$。设$F$ 是一个 C_2-局部对象。那么，同样根据米田引理，我们有

$$\mathrm{Map}(\mathrm{Sing}(\emptyset), F) \simeq F(\emptyset) \to \mathrm{Map}(\emptyset, F) \simeq *$$

是一个弱等价，并且 F 满足第二个 dg-Segal 条件。

3. 最后，我们取类 $C_3 = \{\mathrm{Sing}(L(G)) \coprod_{\mathrm{Sing}(\Delta_k(1,\ s,\ 1))} \mathrm{Sing}(\Delta_k^c(1, s, 1))\ \to \mathrm{Sing}(L(G(< \alpha >))/\ G \in Gr$ (C(k)) $s \in \mathbb{Z}, x, y \in \mathrm{Obj}(G)\ \alpha \in Z^n(x, y)\}$。令 F为一个 C_3-局部对象。于是，根据米田引理，我们有态射

$$\mathrm{Map}(\mathrm{Sing}(L(G(< \alpha >))), F) \simeq F(L(G(< \alpha >))) \to$$

$$\mathrm{Map}(\mathrm{Sing}(L(G)) \coprod_{\mathrm{Sing}(\Delta_k(1,n,1))} \mathrm{Sing}(\Delta_k^c(1, n, 1)), F) \simeq F(L(G)) \times_{\mathrm{Sing}(\Delta_k(1,n,1))} F(\Delta_k^c(1, n, 1))$$

是一个弱等价。换言之，这意味着 dg-Segal 条件中条件 3 的图表是一个同伦拉回，并且 F 满足第三个 dg-Segal 条件。

我们取态射类 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ 作为 Bousfield 局部化中的 C。如果这样的局部化存在，其纤维对象恰好是那些在投射模型结构下纤维的 dg-Segal 空间。

根据定理 3.2.71，如果我们试图进行局部化的范畴是左正常胞腔模型范畴，那么左 Bousfield 局部化就存在。由命题 3.2.72 可知，单纯集合的范畴 sSet 是左适当且胞腔的；由命题 3.2.73 可知，其上的函子也具有左适当性和胞腔性。因此，这个局部化存在，我们的工作也就完成了。

Q.E.D.

鉴于我们基本上紧随 Rezk 的方法，读者看到我们的 dg-Segal 空间与经典 Segal 空间之间存在密切关系，想必不会感到意外。事实上，模型范畴 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$, sSet) 与模型范畴 $\mathrm{Fun}(\Delta^{op}$, sSet) 之间存在一个 Quillen 伴随。下面我们来构造它。

命题4.2.8。 在范畴 Δ 和$c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$之间存在一个态射，称为 Δ的线性化，它定义了范畴 函子$^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$ ，$\mathbf{sSet})$ 与函子$(\Delta^{op}$，$\mathbf{sSet})$ 之间的 ***Quillen*** 伴随，这两个范畴分别带有投射结构。

证明。 设 $[n] \in \Delta$ 是 Δ中的一个对象。我们定义 $j([n]) = [n] \times k$ 为一个自由 dg-范畴，使得

$$j([n]) = 0 \xrightarrow{k} 1 \xrightarrow{k} \dots \xrightarrow{k} n.$$

这是一个有限型的自由 dg-范畴，并且也是余纤维的（关于余纤维性的详细证明，见推论 5.2.6），因此态射 j 作为 $\Delta \to c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$是良定义的。接着我们构造如下的 Quillen 伴随：

$$j_! : \mathrm{Fun}(\Delta^{op}, \mathbf{sSet}) \simeq \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(\Delta^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}) : j^*$$

由此证明完毕。

Q.E.D.

记号 4.2.9。 我们将线性化态射得到的像记作 $j([n]) = \Delta_k(n,\ 0,\ 1)$。

定义 4.2.10. 我们称态射 $j^* : \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$,$\mathbf{sSet})$ $\to \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(\Delta^{op}$,$\mathbf{sSet})$ 为**去线性化态射**。

现在，我们已经计算出投射模型结构下的 Quillen 伴随。但这里有两个局部化：让我们证明，在局部化之后，这仍然是一个 Quillen 伴随。下面来看这个伴随是否将 dg-Segal 空间映到经典的 Segal 空间。

命题 4.2.11. 设 $F \in \mathbf{dg}\ \mathbf{-Segal}$ 是一个 ***dg-Segal*** 空间。那么，它在去线性化态射 j^* 下的像是一个 ***Segal*** 空间。

证明。 设 F是一个 dg-Segal 空间。那么，为了证明它在 j^* 下的像是一个 Segal 空间，根据 Segal 空间的定义，我们需要证明对于所有的 $n \geq 1$，态射

$$j^*(F)_n \to \overbrace{j^*(F)_1 \times_{j^*(F)_0} \dots \times_{j^*(F)_0} j^*(F)_1}^{n \text{ times}}$$

是弱等价。展开这个定义可知，对于每个 $i \in \mathbb{N}$, $j^*(F)_i = j^*(F)([i]) = F(j([i])) = F(\Delta_k(i, 0, 1))$。因此，证明 $j^*(F)$ 是 Segal 空间，可以改写为要求对所有$n \geq 1$,

$$\Phi_n : F(\Delta_k(n, 0, 1)) \to F(\Delta_k(1, 0, 1)) \times_{F(\Delta_k(0,0,1))} \dots \times_{F(\Delta_k(0,0,1))} F(\Delta_k(1, 0, 1))$$

是单纯空间之间的弱等价。

为了简化　　记号，我们将 $\Delta_k(i,0,1)$ 记作 Δ_k^i。我们还注意到， $F(\Delta_k^0) = F(k)$。

我们将用归纳法证明该命题。

- $n=1$。这显然成立，因为 $F(\Delta_k^1) \simeq F(\Delta_k^1)$。无需证明。
- $n \geq 2$。我们假设态射

$$\Phi_{n-1} : F(\Delta_k^{n-1}) \to \overbrace{F(\Delta_k^1) \times_{F(k)} \dots \times_{F(k)} F(\Delta_k^1)}^{n-1 \text{ times}}$$

是弱等价。我们来证明态射 Φ_n 也是弱等价。

与归纳法中通常的做法一样，我们需要以一种能让 $F(\Delta_k^{n-1})$ 出现的方式分解 $F(\Delta_k^n)$。在这种情况下，我们将利用 dg-Segal 范畴的性质来实现这一点。我们定义 G^0 为如下形式的图：

$$G^0 = j([n-1]) \coprod * = 0 \xrightarrow{k} 1 \xrightarrow{k} \dots \xrightarrow{k} n-1 \xrightarrow{0} n$$

接下来，我们可以将 Δ_k^n 构造为如下推出：

$$\begin{array}{ccc} \Delta_k(1,-1,1) & \longrightarrow & \Delta_k^c(1,-1,1) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow \\ L(G^0) & \longrightarrow & \Delta_k^n \end{array}$$

利用第三个 dg-Segal 条件，我们可以将 $F(\Delta_k^n)$ 写成如下形式：

$$F(\Delta_k^n) \simeq F(G^0) \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} F(\Delta_k^c(1,-1,1)) \simeq F(\Delta_k^{n-1} \coprod k) \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} F(k \coprod k)).$$

根据第一个 dg-Segal 条件，我们可以使这些余积与 F 按如下方式交换：

$$F(\Delta_k^n) \simeq F(\Delta_k^{n-1} \coprod k) \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} F(k \coprod k)) \simeq (F(\Delta_k^{n-1}) \times F(k)) \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} (F(k) \times F(k)).$$

现在，特别地，如果我们取 $n=1$，就得到如下公式：

$$F(\Delta_k^1) \simeq (F(\Delta_k^0) \times F(k)) \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} F(k)^2 = F(k)^2 \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} F(k)^2.$$

我们是一个快要完成了。若在 $F(\Delta_k^n)$ 的公式中加上再减去一个 $F(k)$，就完成了　　e.

$F(\Delta_k^n) \simeq (F(\Delta_k^{n-1}) \times F(k)) \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} F(k)^2 \simeq F(\Delta_k^{n-1}) \times_{F(k)} (F(k) \times F(k)) \times_{F(\Delta_k(1,-1,1))} F(k)^2$

and 我们有 $F(\Delta_k^n) \simeq F(\Delta_k^{n-1}) \times_{F(k)} F(\Delta_k^1)$。根据归纳法假设，我们有

$$F(\Delta_k^n) \simeq \overbrace{F(\Delta_k^1) \times_{F(\Delta_k^0)} \dots \times_{F(\Delta_k^0)} F(\Delta_k^1)}^{n-1 \text{ times}} \times_{F(\Delta_k^0)} F(\Delta_k^1).$$

像 $j^*(F)$ 是一个 Segal 空间，我们的证明也就此完成。

证毕

注 4.2.12. 读者可能会想知道，我们为什么要引入记号 $\Delta_k(n,\ 0,\ 1)$，却马上又将它简化。答案是，这些 *dg*-范畴实际上是某些 *dg*-范畴的一个特例，我们将用 $\Delta_k(n,\ s,\ d)$ 表示这些范畴，其中 $s \in \mathbb{Z}^n$ 和 $d \in \mathbb{N}^n$；我们认为它们可能构成 $c\mathcal{L}$ 的一个全子范畴，足以用于这一构造。我们将在第*5*章第*5.2*节进一步阐述这一假设。

推论 4.2.13. 伴随 $j_! : \mathrm{Fun}(\Delta^{op}, \mathbf{sSet}) \rightleftharpoons \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}) : j^*$ 分别是 *Segal* 模型结构和 *dg-Segal* 模型结构之间的 *Quillen* 伴随。

证明. 这一结果直接由上一条命题得出。事实上，根据命题 3.1.16，我们知道，如果两个模型范畴之间有一个伴随 $F : M \rightleftharpoons N : G$，并且我们想证明它是一个 Quillen 伴随，那么只需证明 F 保余纤维化，且 G 保纤维对象。

现在，左 Bousfield 局部化不会改变余纤维化，而我们的伴随在投射模型结构上已经是 Quillen 伴随； $j_!$ 保余纤维化。我们只需证明 j^*保纤维对象。但 dg-Segal 模型结构中的纤维对象，是在投射模型结构中纤维的 dg-Segal 空间。根据上一条命题， j^* 将 dg-Segal 空间映射为 Segal 空间；又因为它在投射模型结构中已经是 Quillen 伴随，所以它保留该结构中的纤维对象。因此，它也保留 dg-Segal 模型结构中的纤维对象。

该伴随分别是 Segal 模型结构和 dg-Segal 模型结构上的 Quillen 伴随，我们的证明至此完成。

Q.E.D.

4.3 完备 dg-Segal 空间

当我们尝试用 Segal 空间刻画 ∞-范畴时，很快便会发现，先前给出的 Segal 空间定义并不足够。事实上，存在一类称为 Dwyer-Kan 态射的态射，它们本应是等价，却并非如此。在 [Rez01], 试图将这些态射求逆的过程中，作者得到了以下结果：

定义 4.3.1. 我们定义 $E(1)$ 为在层级 $n \in \mathbb{N}$ 给出的离散空间

$$E(1)_n = \{x, y\}^{[n]},$$

也就是说，每个层级上都有两个非退化胞腔。若 n 为奇数，它们分别是$(xy)^{n/2}$ 和$(yx)^{n/2}$ ；若 n为奇数，它们则是$(xy)^{(n-1)/2}$ 和$(yx)^{(n-1)/2}$ 。

命题 4.3.2. *[Rez01，命题 7。6], [Ras20，命题 4。5]* 设 $f : V \to W$ 是两个 *Segal* 空间之间的一个映射。假设态射 $\mathrm{Map}(E(1)\ X) \to \mathrm{Map}(*, X)$ 是弱等价，且两者均满足 $X =V$和 W，其中 $* \to E(1)$是某个态射。那么 f 是 *Dwyer-Kan* 等价，当且仅当它是弱等价。

但这仅仅意味着，当两个 C-局部对象属于 sSet 时，它们之间的 Dwyer-Kan 等价就是等价；其中 C 是一个只有一个对象的类， $* \to E(1)$。因此，他们定义了一个新概念，即完全 Segal 空间，它们正是我们刚刚定义的对象。

定义 4.3.3。 *[Rez01，定义 4.1，节 6] [Ras20，命题 4.5]* 设 W 是一个 *Reedy* 纤维化的单纯空间。若映射满足以下条件，我们称 W 为**完全 Segal 空间**:

$$W_k \to \overbrace{W_1 \times_{W_0} \ldots \times_{W_0} W_1}^{k\ times} \ and\ \mathrm{Map}(E(1), W) \to \mathrm{Map}(*, W)$$

对所有 $k \geq 1$ 都是弱等价。或者，等价地，

$$W_k \to \overbrace{W_1 \times_{W_0} \ldots \times_{W_0} W_1}^{k\ times} \ and\ W_0 \to W_{hoequiv}$$

对所有 $k \geq 1$ 都是弱等价，并且 $W_{hoequiv}$ 是同伦等价的空间 .

现在，Rezk 使用左 Bousfield 局部化，以 $\{* \to E(1)\}$ 作为他的 C，并以完全 Segal 空间作为他的 C-局部对象，从而得到一个适合他的模型范畴。

定理 4.3.4。 *[Rez01]* 在单纯空间范畴上存在一个单纯闭模型结构，具有以下性质：

1. 余纤维化恰好是单态射。

2. 纤维对象恰好是完全 *Segal* 空间。

3. 弱等价恰好是完全 *Segal* 空间之间的 *Dwyer-Kan* 等价。

在我们的情形中，我们将看到，与经典情形相仿，我们定义的 dg-Segal 空间也不足以完全刻画我们的 dg-范畴。事实上，我们无法证明函子 Sing 是全忠实的；但我们能够在某种态射意义下证明这一点，我们将这种态射称为 DK-等价。因此，我们需要再进行一次左 Bousfield 局部化，以将这些态射变为等价，然后将其局部对象定义为我们的完备 dg-Segal 空间。

不过，我们不会按那个顺序进行，而是从完备 dg-Segal 模型结构的定义开始。为此，我们将使用上一节定义的线性化函子。

定义 4.3.5. 令 $E(1)$ 如上所定义。我们定义

$$E_k = \mathbb{L}(j_!(E(1))).$$

注 4.3.6. 我们提醒读者， E_k 并非我们的函子 Sing 将某个 *dg*-范畴映射所得的像；事实上，它甚至不是一个 *dg-Segal* 空间!

定理 4.3.7. 存在一个态射类 C，以及 $\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})$ 上的单纯闭模型结构，使得

1. 余纤维化与投射模型结构中的相同。 *2.* 纤维对象是满足 $F(k) \to j^*(F)^{hoequiv}$ 为单纯空间之间的弱等价的 *dg-Segal* 空间，并且它们在投射模型结构下是纤维对象。 *3.* 弱等价是 C-局部等价。

我们称这样的模型结构为**完备 dg-Segal 模型结构**。

证明。证明很直接，因为我们只是通过线性化函子将完全 Segal 模型结构搬运到新的设置中。事实上，我们可以在 dg-Segal 模型结构上对类 $C = \{\Phi : E_k \to \mathrm{Sing}(k)\} = \{\Phi : j_!(E(1)) \to j_!(*)\}$进行左 Bousfield 局部化，从而构造出该模型结构。我们不再写出这是否确实给出了一个局部化的细节，因为这些细节与构造 dg-Segal 模型结构时完全相同。

剩下唯一要做的就是验证 C-局部对象确实如上文所定义。设 F 是一个 C-局部对象。我们知道， F 是一个 dg-Segal 空间，在投射结构下是纤维的，而且下述态射

$$\mathrm{Map}(\mathrm{Sing}(k), F) \to \mathrm{Map}(E_k, F)$$

是一个弱等价。根据伴随的定义，我们有

映射(E_k, F) $=$映射$(j_!(E(1))\ F)$ $\simeq$映射$(E(1)\ j^*(F))$ 和映射$(\mathrm{Sing}(k)\ F)$ $=$映射$(j_!(*)\ F)$ $\simeq$映射$(*, j^*(F))$。

因此，该条件等价于要求映射$(*, j^*(F)) \to$映射$(E(1) \ j^*(F))$是一个弱等价。而这正是 $j^*(F)$是一个完全 Segal 空间的定义。因此，如果 F是一个 C-局部对象，那么 F就是一个 dg-Segal 空间，并且 $j^*(F)_0 = F(k) \to j^*(F)^{hoequiv}$是一个弱等价。根据命题 3.2.76，完备 dg-Segal 模型结构中的纤维对象是这样一个 F，它同时也是投射模型结构中的纤维对象。

我们已经具备所需的全部条件，证明也已完成。

Q.E.D.

注 4.3.8. 重要的是要记住，$j^*(F)^{hoequiv}$ 是 $j^*(F)_1$ 的子集，其 *0*-单形都是同伦等价。鉴于我们已经看到 $j^*(F)_1 = F(\Delta_k(1,\ 0,\ 1))$，我们可以将$j^*(F)_{hocolim}$改写为 $F(\Delta_k(1,\ 0,\ 1))$ 的子集，其中 *0*-单形都是同伦等价，而无需提及去线性化态射。

记号 4.3.9. 设 F是一个 *dg-Segal* 空间。我们用 $F_{hoequiv}$表示 $F(\Delta_k(1,\ 0,\ 1))$ 中由同伦等价构成的 *0*-单形所组成的子集。

定义 4.3.10. 设 F 是函子范畴$^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$，$\mathbf{sSet})$中的一个对象。若 F 是**完备 dg-Segal 空间**，则它是一个 *dg-Segal* 空间，且态射

$$F(k) \to F_{hoequiv}$$

是一个弱等价。

定义 4.3.11。 我们将完备 *dg-Segal* 空间的$\mathbf{dg\ -Segal}$ 全子范畴记为$\mathbf{dg\ -Segal}_{\mathbf{c}}$.

与处理 dg-Segal 空间时一样，我们现在将证明，$Sing$ 中的每个元素实际上都是一个完备 dg-Segal 空间。

命题 4.3.12. 设 $T \in \mathbf{dg\ -cat}$ 是一个 *dg-*范畴。那么 $\mathrm{Sing}(T)$ 是一个完备 *dg-Segal* 空间 .

证明。 这是 [Toë07] 中推论 8.7 的证明的直接推论。事实上，在该证明过程中，Toën 证明了对于所有 $T \in$dg $-$cat，态射 Map(k, T) =Sing$(T)(k)$ $\to$Map$(\Delta_k(1, 0, 1)\ T)$ =Sing$(T)(\Delta_k(1, 0, 1))$ 在 π_0 上诱导单射，并在所有 $i > 0$的 π_i 上诱导双射；而且，它在同伦范畴中的像是 $[T]$ 中的同构态射。这意味着该态射是全忠实的，且其本质像是 Sing$(T)^{hoequiv}$。

因此，对于所有 T，态射 Sing$(T)(k)$ $\to$Sing$(T)^{hoequiv}$ 是弱等价，而 Sing(T) 是一个完备的 dg-Segal 空间。

Q.E.D.

现在，我们已经为 C 局部对象给出了一个不错的定义，但 C 局部等价仍然是以抽象方式定义的。我们之前也说过，要定义一种称为 DK-等价的对象，并需要将其变成等价。不过，在此之前，我们还需要给出另一个定义。

记号 4.3.13。 我们用 $\mathbf{C}(\mathbf{k})^c \subset \mathbf{C}(\mathbf{k})$ 表示模的余纤维化复形所构成的全子范畴。

定义 *4.3.14.* 设 $F \in dg\ -Segal$ 是满足 *dg-Segal* 条件的函子，设 $x, y \in \pi_0(F(k))$。对于所有 $E \in C(k)^c$ 余纤维化模复形，我们将 $F_{(x,y)} \in Fun(C(k)^c,^{op}, sSet)$ 定义为 $F(E_{x,y}) \to F(k) \times F(k)$ 的同伦纤维，其中 $E_{x,y}$是由如下图给出的自由 *dg-*范畴：它有两个对象 x 和 y，而 E 是 x 与 y 之间的复形，

$$\begin{array}{ccc} F_{(x,y)}(E) & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(E_{x,\ y}) & \longrightarrow & F(k) \times F(k)。 \end{array}$$

我们称 $F_{(x,y)}$ **为** F **在** x**处的 dg 映射空间**，y。

这个定义 比我们想象的更直观。事实上，这些函子总是可表的 .

命题 4.3.15. 设 $F \in \mathbf{dg}-\mathbf{Segal}$ 是一个满足 *dg-Segal* 条件的函子，令 $x, y \in \pi_0(F(k))$。存在一个模复形，在弱等价意义下唯一，$F(x,y) \in \mathbf{C}(\mathbf{k})$，使得$F_{(x,y)}(-) \simeq \mathrm{Map}(-, F(x,y))$。

证明。唯一性直接来自米田引理。我们假设存在两个模复形，$F_1(x,y)$ 和 $F_2(x,y)$，使得 $F_{(x,y)}(-) \simeq \mathrm{Map}(-, F_1(x,y))$，且 $F_{(x,y)}(-) \simeq \mathrm{Map}(-, F_2(x,y))$。但米田引理告诉我们，可表预层之间的弱等价必定来自表示对象之间的弱等价。这意味着我们有

$$F_1(x,y) \simeq F_2(x,y).$$

我们已经证明了唯一性。

接下来来看存在性。这直接来自 [TV15]，中的命题 1.9，尤其是其第 1 部分证明中的一个特定论证。事实上，我们在那里证明了：如果 A 是一个 ∞-范畴，那么所有与同伦余极限相容的函子 $G \in \mathrm{Fun}(A^{op}, \mathrm{sSet})$ 都是可表的。于是，这一结果将我们的问题归结为证明函子 $F_{(x,y)}$ 将所有同伦余极限映为同伦极限（提醒读者，$F_{(x,y)}$ 是一个反变函子）。为了让这段证明更易于书写，我们暂且忽略 F 是反变的这一事实，并将此称为“与同伦极限相容”。

现在，要证明一个函子与同伦极限相容，可以证明它与所有滤过同伦极限、所有同伦推出以及所有有限和相容。由于 F 满足 dg-Segal 条件，它已经与沿完美对象的所有滤过极限相容，这意味着 $F_{(x,y)}$ 与所有滤过极限相容；并且根据第三个 dg-Segal 条件，它已经与沿生成余纤维化的同伦推出相容。由于每个同伦推出都可以写成沿生成余纤维化的同伦推出上的滤过同伦极限（此处采用投射模型结构），这意味着 $F_{(x,y)}$ 与所有同伦推出相容。最后，除了零元和之外，所有有限和都是同伦推出，因此我们只剩下证明这一点。

设 G 是一个有两个对象且它们之间为零复形的图。根据定义，与 G 相关联的自由 dg-范畴是余积 $L(G) = k \coprod k$。根据第一个 dg-Segal 条件，这意味着 $F(L(G)) = F(k \coprod k) \simeq F(k) \times F(k)$。现在若应用 $F_{(x,y)}$的定义，则有 $F_{(x,y)}(G)$ 是 $F(L(G)) = F(k) \times F(k) \to F(k) \times F(k)$ 的同伦纤维。由于这是一个同构，我们有 $F_{(x,y)}(G) = *$，即 sSet 中的零对象，证毕。

于是我们已经证明，$F_{(x,y)}$ 将所有同伦余极限映为同伦极限。我们有 $F_{(x,y)}$是可表的，也就是说，存在一个模复形 $F(x,y)$，使得 $F_{(x,y)}(-) \simeq \mathrm{Map}(-, F(x,y))$。

至此，我们完成了这个证明。

Q.E.D.

注 4.3.16. 再次运用米田引理，显然，若函子 F 具有 $\mathrm{Sing}(T)$的形式，其中 $T \in \mathbf{dg}$ –范畴，那么对于所有 $E \in \mathbf{C}(\mathbf{k})^c$，我们都有：

$$F_{(x,y)}(E) = \mathrm{Map}(E, T(x,y)).$$

最后再给出一个定义。

定义 4.3.17。 设 $F \in \mathbf{dg}-\mathbf{Segal}$ 是一个 *dg-Segal* 空间。我们称其为**同伦范畴** F，并记作 $[F]$，这是一个范畴，其对象是 $F(k)$ 的 *0*-单形，而对所有 $x, y \in \pi_0(F(k))$，其态射定义为

$$[F](x,y) = H^0(F(x,y))$$

也就是说，在 x和 y处与 *dg* 映射空间相关联的态射复形的 *0* 次上同调群。

注 4.3.18。 提醒读者，若 $F \in \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}$，则

$$H^0(F(x,y)) = \pi_0(\mathrm{map}_{j^*(F)}(x,y)),$$

其中 映射$_{j^*(F)}$ 是相应 *Segal* 空间中的映射空间，因此我们可以在那里使用复合法则。

现在我们可以定义 DK-等价了。

定义 4.3.19。 设 $f\colon F \to G \in \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}$ 是两个满足 *dg-Segal* 条件的函子之间的态射。若 f 满足以下条件，则称其为**DK-等价**：

1. 诱导态射 $[f]\colon [F] \to [G]$ 是本质满的。

2. 对所有对象 $x, y \in \pi_0(F(k))$，*dg* 映射空间上的诱导态射 $F_{(x,y)} \to G_{(f(x),f(y))}$是 $\mathrm{Fun}(\mathbf{C}(\mathbf{k})^{c,op}, \mathbf{sSet})$中的函子拟等价。

注记 4.3.20. 有些读者可能会问，为什么我们只在 *dg-Segal* 空间上定义 *DK*-等价，而不在任意函子上定义。原因是，如果这样做，*DK*-等价将不满足三取二条件。确实，若有三个态射 *f, g* 和 $f \circ g$，并且其中任意两个在任意函子上都是 *DK*-等价，那么由于拟等价满足三取二条件，第三个也满足 *DK*-等价的第二个条件；但第一个条件并不总是成立。只有当我们有 f, g *DK*-等价，或者 g和 $f \circ g$ *DK*-等价时，它才成立。不过，如果这些空间全都是 *dg-Segal* 空间，那么该条件确实成立。

注记 4.3.21. 如果 F, G 的形式为 $F = \mathrm{Sing}(T)$ $G = \mathrm{Sing}(T')$，那么我们刚刚定义的内容基本上恰好就是 *dg*-范畴之间的弱等价。

现在，这个结果的其余部分尚未完成。我们会在下一章中更详细地讨论，但目前先介绍如下内容。

假设 4.3.22。 设 $f\colon F \to G$ 是两个满足 *dg-Segal* 条件的函子之间的一个态射。那么， f 是 *DK*-等价，当且仅当它是完备 *dg-Segal* 模型结构中的弱等价。

现在，我们已具备证明该函子是全忠实所需的一切条件。

4.4 超覆盖与自由 dg-范畴

我们证明的下一步是证明 Sing 实际上是全忠实的。为此，我们将证明到 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 的限制是全忠实的嵌入，然后进一步证明每个 dg-范畴都可以表示为 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 中对象的某个特定余极限，并且 Sing$_W$ 与这些余极限相交换。为此，我们将使用超覆盖。

超覆盖是一个有用的概念，在多种不同的语境中都有定义。不过，它们仍有一些共同特征：在所有这些语境中，对象 A 的超覆盖都是某种满足一组类似条件的增广对象 $U_* \to A$；而在大多数语境中，还有性质 $\mathrm{hocolim}\, U_n \simeq A$。例如，Dugger 和 Isaksen 在 [DI04] 中证明，在 Top 中确实有弱等价 $\mathrm{hocolim}\, U_n \simeq A$。在我们的情形中，我们更常用的经典超覆盖概念，是指单纯集合范畴 sSet 中的超覆盖。下面给出它的定义。尽管熟悉 Lurie 著作的读者都知道，他给出的定义具有更一般的适用范围，但我们决定在此将其转述为单纯对象的语言，因为这是我们会用到它的唯一语境。

定义 4.4.1. *[Lur09，定义 6.5.3.2，推论 7.2.1.15]* 令 $X \in \mathbf{sSet}$ 为一个单纯集合，并令$U_* \to X$ 为 *sSet* 中的一个增广单纯对象。我们称 U_* 是 X 的**超覆盖**，如果对于所有 $n \in \mathbb{N}$，函子

$$U_n \to U_*^{\partial \Delta^n}$$

是一个有效满射。换句话说，若对所有 $n \in \mathbb{N}$，$U_* \to X$ 就是一个超覆盖

$$\pi_0(U_n) \to \pi_0(U_*^{\partial \Delta^n})$$

是一个满态射。

命题 4.4.2。 *[Lur09，定理 6.5.3。12]* 设 $X \in$**sSet** 是一个单纯集合，且 $U_* \to X$ 是一个单纯集合的超覆盖。那么有 同伦余极限$U_n \simeq X$。

遗憾的是，已知的超覆盖定义都不适用于我们所需的情形，因此我们不得不自行给出定义。

定义 4.4.3。 设 M是一个模型范畴，M_0是 M的一个子范畴。于是我们定义 $f\colon\ T \to T'$ M 中的一个态射为一个 M_0**-满态射**，若对所有 $X \in M_0$，诱导函子

$$\mathrm{Map}(X, T) \to \mathrm{Map}(X, T')$$

是 **sSet**中的一个有效满射，即该态射

$$\pi_0(\mathrm{Map}(X, T)) \to \pi_0(\mathrm{Map}(X, T'))$$

是满射。

定义 4.4.4. 设 M 是一个模型范畴，M_0 是 M的一个子范畴。设 $X \in M$ 是 M的一个对象，且 $U_* \to X$ 是 M中的一个增广单纯对象。若对所有 $n \in \mathbb{N}$，函子 U_*是一个 M_0**-超覆盖** X，则称其为

$$U_n \to U_*^{\partial \Delta^n}$$

是一个 M_0-满态射。换言之，利用命题 *3.3.16*，$U_* \to X$ 是一个 M_0-超覆盖，当且仅当

$$U_0 \to X$$

是一个 M_0-满态射，且对所有 $n \geq 1$

$$U_n \to (\mathbb{R}\,\mathrm{cosk}_{n-1}\,\mathrm{sk}_{n-1}\,U)_n$$

是一个 M_0-满态射。

现在我们已经定义了 M_0-超覆盖，接下来要证明，对于一个范畴中的所有元素，我们都能构造一个完全由 M_0 中的对象组成的超覆盖。当然，这对一般的 M_0 并不成立：我们还需要一些额外条件。像这类情况通常所做的那样，我们将逐层构造超覆盖，因此需要定义 n-截断超覆盖。

定义 4.4.5. 设 M是一个模型范畴，M_0是 M的一个子范畴。设 $X \in M$是 M中的一个对象。我们将 一个 n**- 截断** M_0**- 超覆盖** X 定义为一个增广的 n- 截断单纯集合 $X_* \to X$，其中对所有 $i \leq n$

$$X_i \to X_*^{\partial \Delta^i}$$

是一个 M_0-满态射。

现在给出定理:

定理 4.4.6。设 M 是一个模型范畴，其中每个对象都是纤维的；设 M_0 是 M 的一个关于有限余积封闭的子范畴。我们假设，对于每个 $X \in M$，存在 M_0 中的一个对象 $U \in M_0$，以及一个 $U \to X$，它是一个 M_0-满态射。那么，存在一个 M_0 的超覆盖 X，其由 M_0 中的对象组成。

证明。我们将通过归纳法证明这一点。设 $X \in M$ 是 M中的一个对象。我们将证明，对于所有$n \in \mathbb{N}$，都存在一个 X的 n-截断超覆盖。

- $n = 0$。根据假设，这成立。我们假设存在一个对象 $U_0 \in M_0$ 及一个态射 $U_0 \to X$，它是 M_0-满态射。于是我们取一个 0-截断单纯集合，其在次数 0 上为 U_0。根据定义，它是一个 0-截断超覆盖。

- $n \in \mathbb{N}$。根据归纳假设，存在一个 X的 n-截断超覆盖，记为 $V_* \to X$。我们需要构造一个 X的 $(n+1)$-截断超覆盖，记为 $U_* \to X$。

我们定义 $V'_* = \mathrm{sk}_{n+1}(\mathrm{cosk}_n V_*)$。这个单纯对象是 $(n+1)$-截断的，但项 $n+1$ 不一定属于 M_0。根据假设，存在一个态射 $U'_{n+1} \to V'_{n+1}$，它是一个 M_0-满态射，并且$U'_{n+1} \in M_0$。对于所有 $i \leq n$，我们将 $(n+1)$-截断的 M_0-超覆盖 $U_* \to X$ 定义为$U_i = V'_i = V_i$，并且

$$U_{n+1} = U'_{n+1} \coprod_{i \leq n} V_i$$

对于 $n+1$，我们对 $i \leq n$ 取余极限。由于元素集 $i \leq n$ 是有限的，并且我们已假设 M_0 对有限余极限封闭，因此仍有 $U_{n+1} \in M_0$。

我们需要证明 $U_* \to X$ 是一个增广单纯集合，并且还具有 M_0-超覆盖性质。让我们为所有态射 $[n+1] \to [m]$ 和$[m] \to [n+1]$构造态射 $U_m \to U_{n+1}$ 和 $U_{n+1} \to U_m$，其中 $m \leq n+1$。

这些态射的构造很直接：一个方向上，我们只需取复合

$$U_{n+1} \to U'_{n+1} \to V'_{n+1} \to V'_m = U_m.$$

而在另一个方向上，我们只需取由余极限给出的态射。

最后，我们需要证明，对于所有 $i \leq n+1$，态射 $U_i \to U_*^{\partial \Delta^i}$ 都是一个 M_0-满态射。

对于 $i \leq n$，根据归纳假设，这成立。事实上，我们对 U_* 的定义使得 $U_i = V'_i$，并且由注 3.3.12 可知，对于所有 $i \leq n$，都有 $V'_i = (\mathrm{sk}_{n+1}(\mathrm{cosk}_n V_*))_i = V_i$。因此，我们需要证明

$$U_i = V'_i = V_i \to (\mathrm{cosk}_{i-1}\,\mathrm{sk}_{i-1}\,U_*)_i = (\mathrm{cosk}_{i-1}\,\mathrm{sk}_{i-1}\,V_*)_i$$

是一个 M_0-满态射。由于 V_* 是一个 n-截断的 M_0-超覆盖，这一条件得以满足。我们只需对 $n+1$ 证明这一点。

因此，我们需要证明态射

$$U_{n+1} = U'_{n+1} \coprod V_i \to (U_*)^{\partial \Delta^n} = (\mathrm{cosk}_n\,\mathrm{sk}_n\,U_*)_{n+1} = (\mathrm{cosk}_n\,V_*)_{n+1} = V'_{n+1}$$

是一个 M_0-满态射。设 $W \in M_0$ 是 M_0 中的一个对象，我们将证明

$$\mathrm{Map}(W, U'_{n+1} \coprod V_i) \to \mathrm{Map}(W, V'_{n+1})$$

在 π_0 上是满射。根据假设， M 中的每个对象都是纤维对象，这意味着我们可以将 $\mathrm{Map}(W, U'_{n+1} \coprod V_i)$ 写成 $\mathrm{Hom}(C^*(W)\ U'_{n+1} \coprod V_i)$，$\mathrm{Map}(W, V'_{n+1})$ 也同理。因此，我们接下来要

证明

$$\pi_0(\mathrm{Map}(W, U'_{n+1} \coprod V_i)) = \mathrm{Hom}(W, U'_{n+1} \coprod V_i)/\sim \to \pi_0(\mathrm{Map}(W, V'_{n+1})) = \mathrm{Hom}(W, V'_{n+1})/\sim$$

是满射，其中 $\sim$ 是同伦等价关系。

为此我们需要一个辅助态射。根据单纯集合的定义，对所有 $i \leq n$ ，都存在一个态射 $V_i = V'_i \to V'_{n+1}$。此外，根据我们构造 U_*的方式，存在一个态射$u\colon U'_{n+1} \to V'_{n+1}$，它是一个 M_0-满态射。因此，根据余积的定义，存在一个态射 $f\colon U'_{n+1} \coprod V_i \to V'_{n+1}$，以及一个分解 $g\colon U'_{n+1} \to U'_{n+1} \coprod V_i$，使得 $f \circ g = u$。

现在让我们证明满射性。设 $F\colon W \to V'_{n+1}$ 是一个态射。由于 $u\colon U'_{n+1} \to V'_{n+1}$ 是一个 M_0-满态射，这意味着存在一个态射 $F'\colon W \to U'_{n+1}$，使得$u \circ F' = F$，其中的态射在同伦意义下确定。但我们已经说过， u可经由 f分解。于是，我们可以计算一个态射

$$g \circ F' : W \to U'_{n+1} \to U'_{n+1} \coprod V_i$$

使得 $f \circ g \circ F' = u \circ F' = F$ 在同伦意义下成立。我们有态射

$$\pi_0(\mathrm{Map}(W, U'_{n+1} \coprod V_i)) = \mathrm{Hom}(W, U'_{n+1} \coprod V_i)/\sim \to \pi_0(\mathrm{Map}(W, V'_{n+1})) = \mathrm{Hom}(W, V'_{n+1})/\sim$$

是一个 M_0-满态射。$(n+1)$-截断单纯集 $U_* \to X$ 是 X 的 $(n+1)$-截断 M_0-超覆盖，至此我们完成了证明。

Q.E.D.

正如读者所能想到的，我们决定使用有限型自由 dg-范畴，因为我们预期它们的性质足够良好，使我们能够处理 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖。不过，即使可以直接构造 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖，其中的对象数量也会很快膨胀，而我们并不希望如此。因此，我们不会直接处理有限型自由 dg-范畴，而是先固定对象。完成这一步后，就该兑现我们的承诺了：让我们证明这确实如此。

命题 4.4.7。 设 X 是一个 *dg*-范畴， $\mathcal{O}$ 是其对象集。设 M 为以 $\mathcal{O}$ 为对象集的 *dg*-范畴模型范畴，$M_0 = c\mathcal{L}_{\mathbb{S}\mathcal{O}}$ 为以 $\mathcal{O}$ 为对象集的有限型自由 *dg*-范畴全子范畴。存在一个 M_0-超覆盖 $U_* \to X$ ，使得对所有 $i \in \mathbb{N}$，都有 $U_i \in M_0$ 。

证明。 我们只需证明模型范畴 M 与子范畴 M_0 满足定理 4.4.6 的条件，即 M 中的所有对象都是纤维的，M_0 对有限余积封闭，并且对每个对象 $X \in M$，都存在对象 $U \in M_0$ 和一个 M_0-满态射 $U \to X$。

- 第一个条件由推论 3.4.10 得出。
- 设 X、Y 是两个定义在 $\mathcal{O}$ 上的自由 dg-范畴。根据定义，存在两个图 X'、$Y' \in$，使得 $L(X') = X$，且 $L(Y') = Y$，其中 Gr 和 ^{tf} 属于 C(k)。然而， L 是左伴随，而有限余积是余极限的一种特殊情形，因此我们知道 L 与有限余积可交换。由此得到 $X \coprod Y = L(X') \coprod L(Y') = L(X' \coprod Y')$，并且 $X \coprod Y$ 是一个有限型自由范畴，它来自图 $X' \coprod Y'$ 的余积。因此， $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 对有限余积封闭，证明完毕。
- 设 X 是一个 dg-范畴。我们将证明，态射 $LU(X) \to X$ 是我们所需的 M_0-满态射。首先，根据自由 dg-范畴的定义， $LU(X)$ 与 X 具有相同的对象，并且它是 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}\mathcal{O}}$中的一个对象。设 A 是一个定义在 $\mathcal{O}$上的有限型自由 dg-范畴。那么，我们需要证明

$$\mathrm{Map}(A, LU(X)) \to \mathrm{Map}(A, X)$$

在 π_0上是满射。但这个态射已经是满射。事实上，若取 $f\colon C^*(A) \to X$，我们可以定义一个态射 $f'\colon C^*(A) \to LU(X)$，从而得到所需结果。确实， X和 $LU(X)$具有相同的对象，因此这不会造成影响。我们只需定义复形之间的态射。

令 $x, y \in C^*(A)$。于是我们有一个态射 $\phi\colon C^*(A)(x,y) \to X(f(x)\ f(y))$。现在提醒读者，根据定义 3.4.16， $L(U(X))$ 中的态射定义如下：

$$L(U(X))(f(x),f(y)) = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \bigoplus_{x_1,\dots,x_m\in\mathcal{O}} (U(X)(f(x),f(x_1)) \otimes \dots \otimes U(X)(f(x_m),f(y))).$$

我们定义态射 $\phi'\colon C^*(A)(x,y) \to LU(X)(f(x)\ f(y))$，使得对于所有 $g \in C^*(A)(x,y)$，其在 ϕ' 下的像是在零分量上取 $\phi(g)$、在其他所有分量上取零的直和。

我们具备存在一个 M_0-超覆盖所需的全部三个条件。对于所有 X，都存在一个由 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 中的对象组成的 X 的 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖。证毕。

注 4.4.8. 我们需要着重指出这个构造中的一件重要事情。若我们有一个按此方式定义的 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖 $U_* \to X$，那么对于所有 $x, y \in$ 对象集(X)，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有$U_n(x,y) \to U_*(x,y)^{\partial\Delta^n}$ 是一个分裂满射。

这条补充说明给出了我们接下来需要用到的一个概念。

定义 4.4.9. 我们将 E 在 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 中的**分裂超覆盖** 定义为一个增广单纯复形$E_* \to E$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，态射 $E_n \to E_*^{\partial\Delta^n}$ 都是分裂满射。

定义确立之后，还有一点需要牢记。

推论 4.4.10. 若我们有一个增广单纯对象 $T_* \to T$，它位于 $\mathbf{dg}$ – 范畴$\mathcal{O}$ 中，并且对所有 $x, y \in \mathcal{O}$，相应的增广单纯复形 $T_*(x,y) \to T(x,y)$ 是 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$中的分裂超覆盖，那么 $T_* \to T$就是 $\mathbf{dg}$ –范畴$\mathcal{O}$中的超覆盖。

现在我们已经在 dg-范畴上定义了超覆盖。最初介绍它们时，我们指出这类构造往往具有一项重要性质：它们的同伦余极限与原对象拟等价。我们也希望这种情况在此处成立。让我们着手研究这一点。不过，为此我们需要先得到一个辅助结果。

引理 4.4.11。 设 $M =$ 微分分次 –范畴 且 $M_0 = c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$。设 T是 微分分次 – 范畴 中的一个对象，且 $T_* \to T$ 是使用定理 *4.4.6* 和命题 *4.4.7* 构造的一个 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖。那么对所有 x， $y \in$对象集(T)，我们有同伦余极限$_{\Delta^{op}}(T_i(x,\ y))$ $\simeq T(x,\ y)$ 属于 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$。

证明。 正如我们在上一条注记中所说，若 $T_* \to T$ 是使用上述定理构造的一个 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖，则对所有 $x, y \in \mathcal{O}$, $T_*(x,\ y) \to T(x,y)$ 都是分裂满射。接下来我们将证明，若 $E_* \to E$是复形的一个分裂超覆盖，则同伦余极限$_{\Delta^{op}} E_i \simeq E$。

我们先讨论连通情形。假设 $E_*, E \in \mathsf{C}(\mathsf{k})^{\leq 0}$，且 $E_* \to E$ 是 $\mathsf{C}(\mathsf{k})^{\leq 0}$中的一个分裂超覆盖。我们可以使用 Dold-Kan 等价， $DK\colon \mathsf{sSet} \rightleftharpoons \mathsf{C}(\mathsf{k})^{\leq 0}\colon DK^{-1}$，并且 $DK^{-1}(E_*) \to DK^{-1}(E)$ 在 sSet 中关于 π_0 是满射，也就是说，它是单纯集合的一个超覆盖。由命题 4.4.2 可知，在 sSet 中 $\mathsf{hocolim}_{\Delta^{op}} DK^{-1}(E_i) \simeq DK^{-1}(E)$。但 Dold-Kan 等价不仅仅是一个等价：它还是一个模型等价，这意味着它是一个同时保持模型结构的范畴等价（[GJ09，第三章，第 2] 节）。特别地，应用 DK 后，我们有 $\mathsf{hocolim}_{\Delta^{op}} E_i \simeq E$，于是证明完成。

由此可知，连通情形成立。现在我们将使用朴素截断 $\tau\colon \mathsf{C}(\mathsf{k}) \to \mathsf{C}(\mathsf{k})^{\leq 0}$，把一般情形归约为连通情形，使得若 $E \in \mathsf{C}(\mathsf{k})$，则对所有 $i \leq 0$， $H^i(\tau(E)) = H^i(E)$，并且对所有 $i > 0$， $H^i(\tau(E)) = 0$。然而，知道 $E_* \to E$ 是 $\mathsf{C}(\mathsf{k})$ 中的分裂超覆盖，并不能保证 $\tau(E_*) \to \tau(E)$ 也会是 $\mathsf{C}(\mathsf{k})^{\leq 0}$ 中的分裂超覆盖。为证明这一点，我们需要以下结果。

子引理 4.4.12。设 $E_* \to E$ 是 $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ 中的一个分裂超覆盖，且 K 是一个有限单纯对象。那么我们有如下等价关系

$$H^i(E_*^K) \simeq H^i(E_*)^K.$$

证明。我们将对 K 的维数进行归纳，以证明这一点。我们来证明：对于所有 $n \in \mathbb{N}$，如果 $\dim K = n$，那么 $H^i(E_*^K) \simeq H^i(E_*)^K$。

- $n = 0$。这几乎是直接的。事实上，如果 $\dim K = 0$，那么 $K = \coprod_p *$，并且 $E_*^K = E_0^p$。由于上同调与积交换，我们有 $H^i(E_*^K) \simeq H^i(E_*)^K$。

- $n \geq 1$。我们假设，对于每个维数为 $K' < n$ 的 K'，都有 $H^i(E_*^{K'}) \simeq H^i(E_*)^{K'}$。设 K 是一个维数为 n 的单纯对象。那么我们有如下同伦余积

$$\begin{array}{ccc} \coprod \partial\Delta^n & \longrightarrow & \coprod \Delta^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{\leq n-1} & \xrightarrow{\lrcorner h} & K \end{array}$$

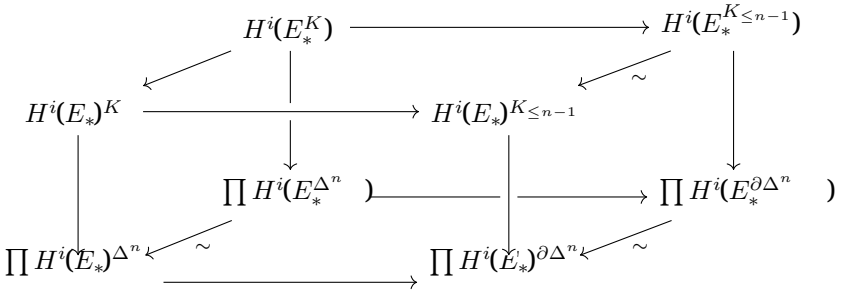
其中，$K_{\leq n-1}$ 是 K 的维数为 $n-1$ 的单纯子对象。反过来，该方格为我们给出了如下同伦积

$$\begin{array}{ccc} E_*^K & \xrightarrow[\ulcorner h]{} & E_*^{K_{\leq n-1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod E_*^{\Delta^n} & \longrightarrow & \prod E_*^{\partial\Delta^n} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^i(E_*)^K & \xrightarrow[\ulcorner h]{} & H^i(E_*)^{K_{\leq n-1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod H^i(E_*)^{\Delta^n} & \longrightarrow & \prod H^i(E_*)^{\partial\Delta^n}. \end{array}$$

现在，我们希望取第一个方块上的 H^i 后，仍然得到一个同伦乘积。一般来说，这并不成立。但我们对这个方块还知道一些额外信息：事实上，由于 $E_* \to E$ 是一个分裂超覆盖，我们知道 $\prod E_*^{\Delta^n} \to \prod E_*^{\partial\Delta^n}$ 是一个分裂满射，而在这种情况下，这个方块

$$\begin{array}{ccc} H^i(E_*^K) & \xrightarrow[\ulcorner h]{} & H^i(E_*^{K_{\leq n-1}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod H^i(E_*^{\Delta^n}) & \longrightarrow & \prod H^i(E_*^{\partial\Delta^n}) \end{array}$$

是一个同伦积。根据归纳法，我们有 $H^i(E_*)^{K_{\leq n-1}} \simeq H^i(E^{K_{\leq n-1}})_*$ 以及 $\prod H^i(E_*)^{\partial\Delta^n} \simeq \prod H^i(E_*^{\partial\Delta^n})$（因为 $\dim K_{\leq n-1} = \dim \partial\Delta^n = n-1$）；根据定义，我们有 $H^i(E_*)^{\Delta^n} \simeq H^i(E_n) \simeq H^i(E_*^{\Delta^n})$。于是得到如下立方图，其中前方和后方的两个方形都是同伦积，且四条由前向后的箭头中有三条是等价。



我们有　第四个箭头也是一个等价，$H^i(E_*^K) \simeq H^i(E_*)^K$，至此我们完成了　　d.

Q.E.D.

现在我们已经得到这一点，可以证明如果 $E_* \to E$ 是一个分裂超覆盖，那么 $\tau(E_*) \to \tau(E)$ 也是。事实上，根据子引理 4.4.12，对于所有 $i \leq 0$，我们有：

$$H^i(\tau(E_*)^{\partial\Delta^n}) \simeq H^i(\tau(E_*))^{\partial\Delta^n} \simeq H^i(E_*)^{\partial\Delta^n} \simeq H^i(\tau(E_*^{\partial\Delta^n}))$$

且 $\tau(E_*)^{\partial\Delta^n} \simeq \tau(E_*^{\partial\Delta^n})$。于是，对于所有的 $n \in \mathbb{N}$，$\tau(E)_n \to \tau(E_*)^{\partial\Delta^n} \simeq \tau(E_*^{\partial\Delta^n})$ 都是一个分裂满射，并且 $\tau(E_*) \to \tau(E)$ 也是一个分裂满射。

现在，如果 $E_* \to E$ 是一个分裂超覆盖，那么对于所有的 $i \in \mathbb{N}$，$E_*[-i] \to E[-i]$ 也是一个分裂超覆盖，且 $\tau(E_*[-i]) \to \tau(E[-i])$ 也是。根据连通情形，我们有同伦余极限 hocolim $\tau(E_n[-i]) \simeq \tau(E[-i])$。由于这对所有的 $i \in \mathbb{N}$ 都成立，因此我们有 hocolim $E_n \simeq E$。

总之，如果 $T_* \to T$ 是利用定理 4.4.6 构造的超覆盖，那么对于 C(k) 中所有 $x, y \in \mathrm{Obj}(T)$，我们有 hocolim$(T_i(x,y)) \simeq T(x,y)$，至此便完成了。

Q.E.D.

我们几乎已经可以证明：如果 $T_* \to T$ 是按指示构造的 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖，那么 hocolim $T_i \to T$ 是弱等价。我们已经证明，态射复形满足该条件。但这一性质能否在复形与 dg-范畴之间顺利传递，反之亦然?

引理 4.4.13. 遗忘函子 $U : \mathbf{dg}\ -\text{范畴}_{\mathcal{O}} \to Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))_{\mathcal{O}}$ 与关于Δ^{op}的同伦余极限交换。

证明。 这直接由 [Lur17, 引理 4.1.8.13.], 得出，尤其是由其证明得出。事实上，在该结果中，我们指出：若有一个组合单oidal模型范畴 A 和一个小范畴 C，其神经 $N(C)$ 是筛滤的；并且一方面，A的幺半结构是对称的且满足幺半群公理，另一方面，A 是左适当的，且其余纤维化由余纤维对象之间的余纤维化生成；那么，遗忘函子 Alg$(A) \to A$ 与关于 C的同伦余极限交换。

现在，我们将固定对象图上的幺半结构定义如下：设 $G, G' \in Gr(\mathrm{C(k)})_{\mathcal{O}}$和 $x, y \in \mathcal{O}$，我们定义

$$(G \otimes G')(x,y) = \oplus_z G(x,z) \otimes G'(z,y).$$

具有固定对象的 dg-范畴范畴是关于 $Gr(\mathrm{C(k)})_{\mathcal{O}}$ 的代数范畴，Alg$(Gr(\mathrm{C(k)})_{\mathcal{O}})$。由于带有此幺半结构的图范畴满足上述条件，且 $N(\Delta)$ 是筛滤的，因此遗忘函子 $\mathrm{dg}\ -\ \mathrm{cat}_{\mathcal{O}} \to Gr(\mathrm{C(k)})_{\mathcal{O}}$ 与同伦余极限交换，我们的证明也就完成了。

Q.E.D.

现在，我们可以证明这个结果了。

命题 4.4.14。 设 T 是一个具有固定对象的 *dg*-范畴，且 $T_* \to T$ 是 $\mathbf{dg}\ -\mathbf{cat}_{\mathcal{O}}$ 中的一个 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖，其中该范畴是具有固定对象 $\mathcal{O} = \mathrm{Obj}(T)$ 的 *dg*-范畴范畴。则在 $\mathbf{dg}\ -\mathbf{cat}$ 中有 同伦余极限 $T_i \simeq T$。

证明。 令 ϕ: hocolim $T_* \to T$为从同伦余极限到 T的态射。我们需要证明这个态射是 dg $-$cat$_{\mathcal{O}}$中的弱等价。但由于两者的对象相同，拟本质满射性自动成立。我们只需证明 ϕ 是拟全忠实的。根据定义，这意味着对于所有 $x, y \in \mathcal{O}$，我们需要证明 (hocolim T_i)$(x,y) \simeq T(x,y)$。但由引理 4.4.13 可知，遗忘函子与 hocolim 可交换，也就是说，只需证明对于所有 $x, y \in \mathcal{O}$，都有 hocolim$(T_i(x,y)) \simeq T(x,y)$。根据引理 4.4.11，这成立。

我们有 ϕ: ho　　dg $-$ 范畴范畴$_{\mathcal{O}}$ 中的余极限 $T_i \simeq T$。如果我们能够证明函子 $\Phi : \mathrm{dg}\ -$ 范畴范畴$_{\mathcal{O}} \to \mathrm{dg}\ -\mathrm{ca}\ \mathbf{t}$

与 Δ^{op} 上的同伦余极限相容，我们就完成了证明。设 $X = \mathbf{hocolim}_{\Delta^{op}} T_i$ 属于 $\mathbf{dg}-$范畴范畴$_{\mathcal{O}}$，并将遗忘态射称为 $\Phi : \mathbf{dg}-$范畴范畴$_{\mathcal{O}} \to \mathbf{dg}-$范畴范畴 和 $\Xi : \mathbf{dg}-$范畴范畴$_{\mathcal{O}} \to \coprod_{\mathcal{O}} k/\mathbf{dg}-$范畴范畴，其中对所有 $X \in \mathbf{dg}-$范畴范畴$_{\mathcal{O}}$ $\Xi(X)$，都给出一个从 $\coprod_{\mathcal{O}} k$ 到 $\Phi(X)$ 的态射。

对于所有 $T' \in \mathbf{dg}-\mathbf{cat}$，我们于是得到一个形如

$$\mathrm{Map}(\Phi(X), T') \to \mathrm{Map}(\coprod k, T') \simeq \prod \mathrm{Map}(k, T').$$

取该态射的纤维 并对 $\mathbf{hocolim}\, T_i$ 做同样的处理，我们得到以下图表 :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Map}(X,T') & \longrightarrow & \mathrm{Map}(\Xi(X),T') & \longrightarrow & \mathrm{Map}(\Phi(X),T') & \longrightarrow & \prod \mathrm{Map}(k,T') \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
\mathrm{holim}\,\mathrm{Map}(T_i,T') & \longrightarrow & \mathrm{holim}\,\mathrm{Map}(\Xi(T_i),T') & \longrightarrow & \mathrm{holim}\,\mathrm{Map}(\Phi(T_i),T') & \longrightarrow & \prod \mathrm{Map}(k,T').
\end{array}$$

如果我们能证明 f 是弱等价，就完成了。为此，我们将使用该图表最左边的方块。事实上，如果态射 $\mathbf{Map}(\Xi, T')$ 和 $\mathbf{holim}\ \mathbf{Map}(\Xi, T')$ 是弱等价，根据二取三性质， f 也将是弱等价。如果我们能证明 Ξ 是全忠实的，就具备了所需的一切。

我们有一个伴随 $\Xi : \mathbf{dg}-\mathbf{cat}_{\mathcal{O}} \rightleftharpoons \coprod k/\mathbf{dg}-\mathbf{cat} : \Gamma$，其中右伴随 Γ 满足：对于所有 $(K, \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{O}}, x_\alpha \in \mathbf{Obj}(K)) \in \coprod k/\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$， $\Gamma(K)$ 的对象为 $\mathcal{O}$，并且对于每个 $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$,$\Gamma(K)(\alpha, \beta) = K(x_\alpha, x_\beta)$。容易看出 $\Gamma\Xi = \mathrm{Id}^{\mathbf{dg-cat}_{\mathcal{O}}}$。因此， Ξ 是全忠实的，从而 $\mathbf{Map}(\Xi, T')$ 是弱等价。

因此，我们有

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}(X,T') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Map}(\Xi(X),T') \\
\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
\mathrm{holim}\,\mathrm{Map}(T_i,T') & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{holim}\,\mathrm{Map}(\Xi(T_i),T')
\end{array}$$

并且 f 是弱等价。因此 Φ 与余极限交换；又由于 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}_{\mathcal{O}}$ 中的 $\mathbf{hocolim}\, T_i \simeq T$，我们有 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$ 中的 $\mathbf{hocolim}\, T_i \simeq T$，于是证明完成。

Q.E.D.

现在我们可以尝试证明伴随函子 Sing 的全忠实性。

4.5 函子 $Sing$ 是全忠实的

我们来证明 Sing 实际上是全忠实的。为此，我们将证明对 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 的限制是全忠实的嵌入，然后进一步证明每个 dg-范畴都可以写成 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 中元素的某种余极限，并且 Sing 与这些余极限交换。第一部分相当显然。

命题 4.5.1. 根据定理 *4.1.4* 中的构造，函子

$$\mathrm{Sing}^{c\mathcal{L}} : \mathrm{Ho}(c\mathcal{L}) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet}))$$

是全忠实的。

证明。 为此，我们使用定理 3.3.50 和定理 3.3.53，将模型范畴取为 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$，并将 W 取为有限型自由范畴的 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$ 全子范畴中的弱等价。事实上，若转到同伦范畴，我们可以将 $\mathrm{Sing}^{c\mathcal{L}}$ 分解为

$$\mathrm{Ho}(c\mathcal{L}) \to \mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}^{c\mathcal{L},W}) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(L_W c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})) = \mathrm{Ho}(\mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathbf{sSet})).$$

但根据定理 3.3.53，我们知道这里的第一个态射是全忠实的；根据定理 3.3.50，第二个态射是等价。因此，两者的复合是全忠实的，我们的证明也就完成了。

Q.E.D.

现在，我们终于具备了使用自由超覆盖所需的一切条件。下面证明所需的 DK-等价。

引理 4.5.2. 设 $T_* \to T$ 是按照定理 *4.4.6* 和命题 *4.4.7* 所构造的 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖， $T \in \mathbf{dg}$ –范畴 是一个 *dg*-范畴。那么，其像在 Sing_k下的同伦余极限 $\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}_k(T_i))$满足 *dg-Segal* 条件。

证明。 为了证明这一结果，我们需要证明该同伦余极限满足 dg-Segal 空间定义中的三个条件。前两个条件很容易证明，其依据是：此处的同伦余极限与有限乘积可交换，并且 Sing 的所有像都满足 dg-Segal 条件。

1. 设 L, K 是两个有限型自由 dg-范畴。根据 Sing 的像所满足的第一条 dg-Segal 条件，

$$\text{同伦余极限}(\mathrm{Sing}(T_i))(K \coprod L) = \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(K \coprod L)) \simeq \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(K) \times \mathrm{Sing}(T_i)(L)$$

并且，由于在 Δ^{op} 上的同伦余极限与有限积可交换，

$$\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i))(K \coprod L) \simeq \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(K)) \times \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(L))$$

这样我们就完成了。

2. 第二个性质甚至更容易证明。事实上，

$$\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i))(\emptyset) \simeq \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(\emptyset)) \simeq \mathrm{hocolim}(*) \simeq *.$$

现在我们来讨论第三个条件。为了保证一般性，同时也为了简化记号，我们将在稍大的背景下进行计算，并借助以下子引理。

子引理 4.5.3. 设 $F \in$ 函子$^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}^c{}_{,\mathbb{S}}{}^{op}, \mathbf{sSet})$ 满足 *dg-Segal* 条件中的条件 *1* 和 *2*，并且还满足如下附加条件：

4. 对所有 $L, K \in c\mathcal{L}^c_{\mathbb{S}}$, $F(L \coprod_{k \coprod k} K) \to F(L) \times_{F(k)\times F(k)} F(K)$ 都是弱等价。换言之， F将余积变为积。

于是我们有 F 满足 *dg-Segal* 条件的条件 *3*。换言之，对于任意有限型图 $G \in Gr(\mathbf{C}(\mathbf{k}))$， $x, y \in \mathrm{Obj}(G)$ 中两个对象，以及 $\alpha \in Z^n(G(x,y))$ 中的一个循环 $G(x,y)$，下图是一个同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} F(L(G(<\alpha>))) & \xrightarrow{\ulcorner h} & F(L(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\Delta^c_k(1,n,1)) & \longrightarrow & F(\Delta_k(1,n,1)). \end{array}$$

证明。为了让这个证明更容易理解，我们先考虑 G 有两个对象的情形，再逐步推广。假设 G 是一个有两个对象的自由 dg-范畴。有一个态射 $\gamma : F(G) \to \mathrm{Map}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O})$，其中 $\mathcal{O}_G = \mathrm{Obj}(G)$ 是 G的对象集，且 $\mathcal{O} = \pi_0(F(k))$。我们知道，$\pi_0(\mathrm{Map}(\mathcal{O}_G, \mathcal{O}))$ 是从 $\mathcal{O}_G$ 到 $\mathcal{O}$的态射集合。那么，若取 $f: \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}$， γ 的纤维就是$F_{(f(x),f(y))}(G)$。将 G 上的两个点与 $\Delta^c_k(1, s, 1)$ 和 $\Delta_k(1, s, 1)$ 上的两个点等同后，我们可以把问题归结为：对所有 $f: \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}$ ，下面的图表是一个同伦拉回

$$\begin{array}{ccc} F_{(f(x),f(y))}(G(<\alpha>)) & \longrightarrow & F_{(f(x),f(y))}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{(f(x),f(y))}(\Delta^c_k(1,n,1)) & \longrightarrow & F_{(f(x),f(y))}(\Delta_k(1,n,1)) \end{array}$$

但我们已经知道，对于所有 dg-Segal 空间 F， $F_{(f(x),f(y))}(E_{x,\ y}) \simeq$Map$(E, F(f(x)\ f(y)))$，其中 $E_{x,\ y}$是由两个点构成的自由范畴，而 E 是从 x 到 y的复形态射。所以问题最终归结为是否

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(G<\alpha>, F(f(x),f(y))) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(G, F(f(x),f(y))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Map}(k^c[n], F(f(x),f(y))) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(k[n], F(f(x),f(y))) \end{array}$$

是一个同伦拉回。但这个图表位于 sSet 中，而 sSet 是一个适当模型范畴，这意味着只要图表中的某个态射是纤维化，我们就完成了。事实上，态射 $k[n] \to k^c[n]$ 是 C(k) 的一个生成余纤维化，这意味着态射 Map$(k^c[n], F(f(x)\ f(y))) \to$Map$(k[n], F(f(x)\ f(y)))$ 是一个纤维化。该图表是一个同伦拉回，因此我们就完成了。如果 G 有两个对象，那么 F 在其上满足第三个 dg-Segal 条件。

从两个元素推广到更多元素，关键在于注意到条件 3 只是一个局部条件：直观地说，其中唯一的变化与 x 和 y 之间的态射有关。除此之外，无论原来的自由 dg-范畴 G 有两个对象还是三千个对象，情况都没有变化。按照这个思路，我们将把 G 分解为两个部分：一个会变化，另一个不会。

设 G 是一个有限型自由 dg-范畴，且 x、y 是 G中的两个对象。容易看出，我们可以将其写成 $G = G^0 \coprod_{k \coprod k} G_{x,\ y}$，其中 $G_{x,\ y}$是一个有两个对象的自由 dg-范畴，而 $G(x,y)$ 是这两个对象之间的态射复形； G^0 是一个自由 dg-范畴，使得 G^0 与 G 具有相同的对象，并且若 $(x',y') \neq (x,y)$，则 $G^0(x',y') = G(x',y')$，且 $G^0(x,y) = 0$。由于 $G_{x,\ y}$是一个有两个对象的自由 dg-范畴，因此 F 满足 $G_{x,\ y}$上的第三个 dg-Segal 条件。接着我们可以构造如下形式的同伦拉回塔：

$$\begin{array}{ccc} F(G^0) \times_{F(k)\times F(k)} F(G_{x,y}(<\alpha>)) & \xrightarrow[\ulcorner h]{} & F(G^0) \times_{F(k)\times F(k)} F(G_{x,y}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(G_{x,y}(<\alpha>)) & \xrightarrow[\ulcorner h]{} & F(G_{x,y}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\Delta^c_k(1,n,1)) & \longrightarrow & F(\Delta_k(1,n,1)) \end{array}$$

且最外层的方块是一个同伦拉回。根据条件 4，我们有

$$F(G^0) \times_{F(k)\times F(k)} F(G_{x,y}(<\alpha>)) \simeq F(G^0 \coprod_{k \coprod k} G_{x,y} <\alpha>) \simeq F(G(<\alpha>)$$

and

$$F(G^0) \times_{F(k)\times F(k)} F(G_{x,y}) \simeq F(G^0 \coprod_{k \coprod k} G_{x,y}) \simeq F(G),$$

因此我们有 我们的条件 3 适用于所有 G 有限型自由 dg-范畴，至此我们的证明就完成了 f. Q.E.D.

现在我们想将这个子引理应用于我们的同伦余极限。我们已经证明 hocolim(Sing(T_i)) 满足 dg-Segal 条件的条件 1 和 2； 我们只需证明它也满足条件

4。设 K, L 是两个有限型自由 dg-范畴。按照命题 4.2.5 的证明中的类似方法，我们有

$$\mathrm{Sing}(K \coprod_{k \coprod k} L) \simeq \mathrm{Sing}(K) \times_{\mathrm{Sing}(k)^2} \mathrm{Sing}(L).$$

但只要有限积的底空间具有有限的 π_0，我们就有同伦余极限与它可交换。这意味着

$$\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i))(K \coprod_{k \coprod k} L) \simeq \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(K) \times_{\mathrm{Sing}(k)^2} \mathrm{Sing}(T_i)(L)) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(K)) \times_{\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(k))^2} \mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)(L)).$$

因此，函子 hocolim(Sing(T_i)) 满足子引理的条件 4，从而满足 dg-Segal 空间的第三个条件。

函子 hocolim(Sing(T_i)) 满足全部三个 dg-Segal 条件，我们的证明也就完成了。

Q.E.D.

注记 4.5.4. 我们在这里证明了，如果满足前两个 *dg-Segal* 条件，并且满足$F(L \coprod_{k \coprod k} K) \to F(L) \times_{F(k) \times F(k)} F(K)$，那么它就是一个 *dg-Segal* 空间；我们还在命题 *4.2.11* 中证明了，如果它是一个 *dg-Segal* 空间，那么至少满足 $F(\Delta^n_k) \simeq F(\Delta^1_k) \times_{F(k)} \dots \times_{F(k)} F(\Delta^1_k)$。这与 *Segal* 空间的定义已经非常相似。事实上，我们认为很可能可以改写 *dg-Segal* 空间的定义，使其与该定义更加接近。我们决定不这么做，因为我们认为当前定义更能凸显线性结构。无论如何，这也不是一个极简构造：更多细节请参见第 *3* 章。

既然我们知道 hocolim(Sing(T_i)) 是一个 dg-Segal 空间，那么我们就可以考察诱导态射 hocolim(Sing(T_i)) $\to$ Sing(T) 在 dg $-$ Segal 中是否为 DK-等价。

引理 4.5.5。设 $T_* \to T$ 是按定理 *4.4.6* 和命题 *4.4.7* 中的构造得到的一个 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖。那么态射 $\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)) \to \mathrm{Sing}(T)$ 是一个 *DK*-等价。

证明。为了证明这一点，我们需要确认这个态射满足定义中的两个条件。第一个条件很容易验证：事实上，我们在构造超覆盖时已确保超覆盖的所有项都具有相同的元素。因此，[hocolim(Sing(T_i))] $\to$ [Sing(T)] 是本质满的。

至于关于态射的条件，我们已经完成了大部分工作。我们知道，对所有 $(x, y) \in \pi_0$(Sing(T)(k))，Sing(T)$_{(x,y)}$(E) = Map($E, T(x, y)$)。因此，我们可以将这个条件改写为判断

$$\mathrm{hocolim}(\mathrm{Map}(-, T_i(x, y)) \simeq \mathrm{Map}(-, T(x, y)).$$

但我们知道，$T_* \to T$是一个 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖，这尤其意味着，对于所有 x，$y \in T$，$T_n(x, y) \to T_*(x, y)^{\partial \Delta^n}$ 都是分裂满射。因此，对于所有 $E \in$ C(k),

$$\pi_0(\mathrm{Map}(E, T_n(x, y))) \to \pi_0(\mathrm{Map}(E, T_*(x, y)^{\partial \Delta^n})) \simeq \pi_0(\mathrm{Map}(E, T_*(x, y))^{\partial \Delta^n})$$

都是满态射。但我们已经看到，这恰好就是 sSet 中超覆盖的定义。因此，在单纯集合中，Map($E, T_*(x, y)$) 是 Map($E, T(x, y)$) 的超覆盖；由命题 4.4.2 可知，对于所有 E，我们有 hocolim Map($E, T_*(x, y)$) $\simeq$ Map($E, T(x, y)$)。也就是说，根据定义，这等同于说

$$\mathrm{hocolim}(\mathrm{Map}(-, T_i(x, y)) \to \mathrm{Map}(-, T(x, y))$$

是一个弱等价。

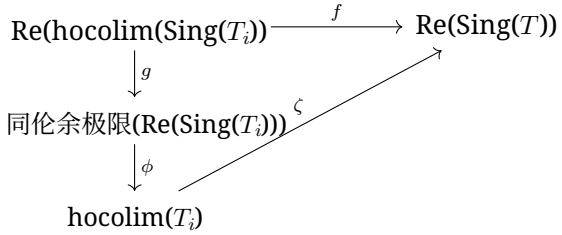
第二个条件已满足，且态射 hocolim(Sing(T_i)) $\to$ Sing(T) 是 DK-等价。

证毕。

最后，我们有足够的信息来证明函子 Sing 的完全忠实性 .

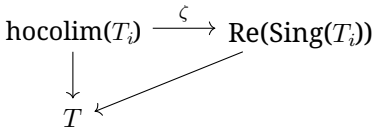
定理 4.5.6. 假设假设 *4.3.22* 成立，则对所有 $T \in \mathbf{dg}-\mathbf{cat}$，我们都有 $\mathrm{Re}(\mathrm{Sing})(T) \simeq T$，且函子 Sing 是全忠实的。

证明。 设 T 是一个 dg-范畴。我们用前述方法构造一个 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖 T,$T_i \to T$。根据引理 4.5.5，我们知道，该态射经 Sing 映射后的像是一个 DK-等价。于是我们得到如下图表



假设假设 4.3.22成立，我们知道态射 hocolim(Sing(T_i)) $\to$ Sing(T) 对于完备 dg-Segal 模型结构是弱等价。因此， f 在同伦范畴上是弱等价。另一方面，由于 Re 是左伴随，我们知道可以与同伦余极限交换，所以 g 也是弱等价。最后，我们已在命题 4.5.1 中证明，Sing 在自由 dg-范畴上是全忠实的；又由于所有 T_i 根据构造都是自由 dg-范畴，因此对于所有 T_i ，都有 Re(Sing(T_i)) $\simeq T_i$，而且态射 ϕ 也是弱等价。根据模型范畴中的三取二性质，这意味着态射 ζ 也是弱等价。

由此得到下图:



根据命题 4.4.14，竖直态射是弱等价，而且 ζ 也是弱等价。根据三取二性质，我们得到 Re(Sing(T)) $\to T$ 是弱等价。函子 Sing 是全忠实的，我们的证明到此完成。

Q.E.D.

我们最终得知 该函子是全忠实的！现在我们可以回过头来证明它是本质满的。

4.6 函子 $Sing$ 是本质满的

我们剩下要做的就是证明，每个满足 dg-Segal 条件的函子都同构于形如 Sing(T) 的对象。为此，我们将再次使用超覆盖：对于所有满足 dg-Segal 条件的函子 F，我们将构造一个 dg-范畴 T 的超覆盖，使其在 $Sing$ 函子下的像是 F 的超覆盖。因此，我们首先需要定义 F 的超覆盖。

定义 4.6.1。 令 F, $G \in \mathbf{dg}-\mathbf{Segal}$。我们称态射 f: $F \to G$ 为**dg-Segal 满射**，如果满足以下两个条件:

1. 态射 f 在对象集上是一个同构， $\pi_0(F(k)) \to \pi_0(G(k))$。
2. 对所有 x, y, $\in \pi_0(F(k))$，诱导态射 $F_{(x,y)} \to G_{(x,y)}$ 是一个分裂满射。

现在我们已经定义了想要的满态射，就可以定义超覆盖了。这并不复杂：我们基本上沿用上次使用的定义，只是用 dg-Segal 满射代替 M_0-满射。

定义 4.6.2. 设 $F \in \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}$ 是一个满足 *dg-Segal* 条件的函子，且 $F_* \to F$ 是 $\mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}$中的一个增广单纯对象。我们称 F_* 是**一个 的 dg-Segal 超覆盖**，如果对所有 $n \in \mathbb{N}$，函子

$$F_n \to F_*^{\partial \Delta^n}$$

是一个 *dg-Segal* 满射。换言之，根据命题 *3.3.16*， $F_* \to F$ 是一个 *dg-Segal* 超覆盖，当且仅当

$$F_0 \to F$$

是一个 *dg-Segal* 满射，并且对于所有 $n \geq 1$

$$F_n \to (\mathbb{R}\operatorname{cosk}_{n-1}\operatorname{sk}_{n-1} F)_n$$

是一个 *dg-Segal* 满射。

现在我们已经给出了超覆盖的定义，接下来的目标是对所有 F 构造一个由形如 Sing(T_i) 的函子组成的超覆盖，其中 T_i 是一个自由 dg-范畴。完全遵循定理 4.4.6 的证明，此时我们本应证明：对于每个 $F \in$ dg –Segal，存在一个自由 dg-范畴 T，使得 Sing(T) $\to F$ 是一个 dg-Segal 满射。对我们来说不幸的是，尽管这一结果无疑是正确的，但使用它会使我们的超覆盖中的对象在后续变得极其庞大，而这是我们不希望看到的。因此，我们将先固定这些对象。

记号 4.6.3。 我们将函子 $\mathrm{Sing}(k) \in \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}$ 记为 $\underline{k}$。

定义 4.6.4。 设 $\mathcal{O}$ 为一个集合。我们将**具有固定对象的 dg-Segal 空间范畴**$\mathcal{O}$ 定义为 $\coprod_{\mathcal{O}} \underline{k}/\mathbf{dg}\ -\ \mathbf{Segal}$ 中由 F *dg-Segal* 空间构成的全子范畴，其中态射 $\mathcal{O} \to \pi_0(F(k))$是一个同构，并将其记为 $\mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$。

定义 4.6.5。 设 Φ： $\mathbf{dg}\ -\ \mathbf{Segal}_{\mathcal{O}} \to \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}$ 为遗忘函子。我们将 $\mathbf{dg}\ -\ \mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$ 上的 *dg-Segal* 满射定义为 $\mathbf{dg}\ -\ \mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$ 中的一个态射 f，满足 $\Phi(f)$ 是一个 *dg-Segal* 满射。

注 4.6.6。 容易看出，*dg-Segal* 满射的第一个条件在$\mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$中总是成立。因此，只要我们处理的是固定对象，就不必检验该条件。

引理 4.6.7. 设 $F \in \mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}$ 是一个满足 *Segal* 条件的函子。我们固定一个集合 $\mathcal{O} = \pi_0(F(k))$。存在一个具有固定对象的 *dg*-范畴 $T \in \mathbf{dg}\ -\ \mathbf{cat}_{\mathcal{O}}$，使得 $\mathrm{Sing}(T) \to F$是 $\mathbf{dg}\ \text{–}\mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$中的 *dg-Segal* 满射。

证明。 构造这个 dg-范畴的大部分工作已经完成，我们只需将其组装起来。我们定义如下的图 G：

- 对象集(G) $= \mathcal{O}$。
- 对于所有 $x, y \in \mathcal{O}$，都有 $G(x, y) = F(x, y)$，它是 $F_{(x,y)}$ 的表示对象。

接着，我们将 $T = L(G)$ 定义为由 G 构造的自由范畴。

现在证明态射 Sing(T) $\to F$是 dg $-$ Segal$_{\mathcal{O}}$ 中的 dg-Segal 满射，或者等价地说，它在 dg –Segal 上的投影是一个 dg-Segal 满射。

根据 $T = L(G)$ 的构造，对于所有 $x, y \in \mathcal{O}$,

$$L(G)(x, y) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \bigoplus_{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{O}^m} (G(x, x_1) \otimes \ldots \otimes G(x_m, y)),$$

并且特别地， $G(x, y) = F(x, y)$ 是 $T(x, y)$ 中的一个因子。这意味着，对于所有的 $E \in$ C(k)，都存在一个包含 Map($E, F(x, y)$) $= F_{(x,y)}(E) \to$ Map($E, T(x, y)$)。利用同伦的定义，很容易看出

纤维可知，对于所有 dg-范畴 T'，$\mathrm{Sing}(T')^{(x,y)} = \mathrm{Map}(-, T'(x,y))$。综上可得，态射 $\mathrm{Sing}(T)^{(x,y)} = \mathrm{Map}(-, T(x,y)) \to F_{(x,y)} = \mathrm{Map}(-, F(x,y))$ 是一个分裂满射，因此我们证明了所要的结果。

态射 $\mathrm{Sing}(T) \to F$ 是一个 dg-Segal 满射，我们的工作也就完成了。

Q.E.D.

现在让我们处理超覆盖结果。

定理 4.6.8。令 $F \in \mathbf{dg}\text{-}\mathbf{Segal}$ 为一个满足 *dg-Segal* 条件的函子，并令 $\mathcal{O} = \pi_0(F(k))$。则存在一个单纯对象 T_*，其属于 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}_{\mathcal{O}}$，使得 $F_* = \mathrm{Sing}(T_*)$，以及一个态射 $F_* \to F$，使得 $F_* \to F$ 是 $\mathbf{dg}\text{-}\mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$ 中的 *dg-Segal* 超覆盖。

证明。同样，这一构造几乎与定理 4.4.6 的构造完全相同，因此我们不会展开太多细节。我们将通过归纳法构造超覆盖，证明对于所有 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个具有 F 的固定对象的 n-截断 dg-Segal 超覆盖，其中每个层级都属于 Sing 的像。

- $n = 0$ 由引理 4.6.7 可知成立。存在一个具有固定对象 $T \in \mathbf{dg}\text{-}\mathbf{cat}_{\mathcal{O}}$ 的 dg-范畴，使得 $\mathrm{Sing}(T) \to F$ 是一个 dg-Segal 满射，并且它生成一个 0-截断的 dg-Segal 超覆盖。
- $n \in \mathbb{N}$。根据归纳假设，存在一个 n-截断的 dg-Segal 超覆盖 F，记为 $\mathrm{Sing}(T_*) \to F$。我们来构造一个 $n+1$-截断的超覆盖 F，也将其记为 $\mathrm{Sing}(T_*) \to F$。由于该构造不会改变前 n 项，因此这种记号不会产生歧义。

  我们定义 $V_* = \mathrm{sk}_{n+1}(\mathrm{cosk}_n \mathrm{Sing}(T_*))$。这个单纯集合是 $n+1$-截断的，但项 $n+1$ 不一定属于 Sing 的像。再次由引理 4.6.7 可知，存在一个自由 dg-范畴 A，其对象为 $\mathcal{O}$，并且存在一个态射 $\mathrm{Sing}(A) \to V_{n+1}$，它是一个 dg-Segal 满射。我们将这个 $n+1$-截断的 dg-Segal 超覆盖定义为对所有 $i \le n$ 而言的 $\mathrm{Sing}(T_i)$，并且

  $$\mathrm{Sing}(T_{n+1}) = \mathrm{Sing}(A) \coprod \mathrm{Sing}(T_i) = \mathrm{Sing}(A \coprod T_i)$$

  对于 $n+1$。这是可能的，因为 Sing 与有限余积交换。

  使用与定理 4.4.6 中相同的态射，我们在 $\mathbf{dg}\text{-}\mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$ 中得到一个单纯对象。现在我们只需证明，对于所有 $i \le n+1$，$\mathrm{Sing}(T_i) \to \mathrm{Sing}(T_*)^{\partial \Delta^i}$ 是一个 dg-Segal 满射；根据构造，这立即归结为证明

  $$\mathrm{Sing}(T_{n+1}) = \mathrm{Sing}(A) \coprod \mathrm{Sing}(T_i) \to V_{n+1}$$

  在 $\mathbf{dg}-\mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$ 中是一个 dg-Segal 满射，或者等价地，对于所有 x、$y \in \mathcal{O}$，$\mathrm{Sing}(T_{n+1})^{(x,y)} = \mathrm{Map}(-, T_{n+1}(x,y)) \to V_{n+1(x,y)}$ 是一个分裂满射。

我们构造了 $F_* \to F$ 一个具有固定对象的 dg-Segal 超覆盖，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，存在一个有限型自由 dg-范畴 T_n，满足 $\mathrm{Sing}(T_n) = F_n$。现在，我们已在定理 4.5.6 中证明 Sing 是一个全忠实函子。因此，单纯对象 F_* 中的每个态射都来自 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}_{\mathcal{O}}$ 中的一个态射，并且存在一个单纯对象 $T_* \in \mathbf{dg}-\mathbf{cat}_{\mathcal{O}}$，使得 $\mathrm{Sing}(T_*) = F_*$。我们的证明完成了。

Q.E.D.

现在我们已经构造出了超覆盖 $F_* \to F$，证明已进入最后阶段。实际上，我们只需证明，对于所有 $F \in \mathbf{dg}-\mathbf{Segal}$，都存在一个 dg-范畴 T，使得 F 与 $\mathrm{Sing}(T)$ DK-等价，而我们恰好有一个完美的候选对象可以做到这一点。

记号 4.6.9. 设 $F \in \mathbf{dg}\text{–}\mathbf{Segal}$ 是一个满足 *dg-Segal* 条件的函子。设 $\mathrm{Sing}(T_*) = F_* \to F$ 是一个具有固定对象的 *dg-Segal* 超覆盖，如定理 *4.6.8* 中所构造。我们称 T 为单纯对象 T_* 的同伦余极限。换言之，我们定义

$$T = \mathrm{hocolim}(T_i).$$

现在我们需要证明 $\mathrm{Sing}(T) \to F$ 是一个 DK-等价。为此，我们将使用两个更容易证明的 DK-等价：$\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)) \to \mathrm{Sing}(\mathrm{hocolim}(T_i)) = \mathrm{Sing}(T)$ 和 $\mathrm{hocolim}(\mathrm{Sing}(T_i)) \to F$。

引理 4.6.10. 设 $F_* \to F$ 是一个 $\mathbf{dg} - \mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$ 超覆盖，其中 $\mathcal{O} = \pi_0(F(k))$ 按之前的方式构造。那么，对于所有 $x, y \in \mathcal{O}$，增广单纯复形 $T_*(x,y) \to F(x,y)$ 是$\mathbf{C}(\mathbf{k})$中的一个分裂超覆盖。

证明。 这由 dg-Segal 超覆盖的定义可知。

Q.E.D.

命题 4.6.11. 设 $F_* \to F$ 是按定理 *4.6.8* 中的方式构造的 *dg-Segal* 超覆盖。那么， F_* 的同伦余极限在 $\mathbf{dg} - \mathbf{Segal}_{\mathcal{O}}$ 中与 F *DK*-等价。

证明。 对此的证明与引理 4.5.5 中的证明非常相似。事实上，为了证明某个对象是 DK-等价，我们需要满足两个条件：首先，态射

$$[\mathrm{hocolim}(F_i)] \to [F]$$

是本质满的。但该超覆盖的构造使其具有固定对象 $\pi_0(F(k))$，因此这一条件由构造得到验证。

这就只剩下第二个条件。固定 $x, y \in \mathcal{O}$。我们是否有

$$(\mathrm{hocolim}\, F_i)_{(x,y)} \to F_{(x,y)}$$

是拟等价？根据定义，$F_{i,(x,y)} = \mathrm{Map}(-, T_i(x,y))$ 和 $F_{(x,y)} = \mathrm{Map}(-, F(x,y))$，因此我们可以将该条件改写为考察是否

$$\mathrm{hocolim}\, \mathrm{Map}(-, T_i(x,y)) \to \mathrm{Map}(-, F(x,y))$$

是拟等价。根据引理 4.6.10，我们知道 $T_*(x,y) \to F(x,y)$ 是复形的分裂超覆盖，因此对于所有 $n \in \mathbb{N}$, $T_n(x,y) \to T_*^{\partial \Delta^n}(x,y)$ 都是分裂满射，从而对于所有 $E \in \mathbf{C}(\mathbf{k})$，态射

$$\pi_0(\mathrm{Map}(E, T_n(x,y))) \to \pi_0(\mathrm{Map}(E, T_*(x,y)^{\partial \Delta^n})) \simeq \pi_0(\mathrm{Map}(E, T_*(x,y))^{\partial \Delta^n})$$

是一个满态射。这意味着 $\mathrm{Map}(E, T_*(x,y)) \to \mathrm{Map}(E, F(x,y))$ 是单纯集合的超覆盖，并且根据命题 4.4.2，我们有一个拟等价

$$\mathrm{hocolim}\, \mathrm{Map}(-, T_i(x,y)) \simeq \mathrm{Map}(-, F(x,y)).$$

因此，态射 $\mathrm{hocolim}(F_i) \to F$ 是一个 DK-等价，我们的证明到此完成。

Q.E.D.

与 dg-范畴的情形一样，我们已经证明，同伦余极限与 F 是 DK-等价的，但仅限于固定对象。不过，如果要使用这一结果，我们需要确认它在 $\mathbf{dg}\text{–}\mathbf{Segal}$ 中确实成立。

命题 4.6.12。 设 F 是一个 *dg-Segal* 空间， $F_* \to F$ 是按照定理 *4.6.8* 构造的 *dg-Segal* 超覆盖。那么 F_* 的同伦余极限在 $\mathbf{dg}\text{–}\mathbf{Segal}$ 中与 F *DK*-等价。

证明。 这个证明几乎与命题 4.4.14 中的证明完全相同，因此我们不会在细节上花太多时间。与那里一样，超覆盖的同伦余极限与 F DK-等价，但仅限于固定对象。因此，我们将证明遗忘函子Φ : dg $-$Segal$_{\mathcal{O}} \to$ dg $-$Segal 与这些同伦余极限可交换。将显然的遗忘函子记为 Ξ : dg $-$ Segal$_{\mathcal{O}} \to \coprod \underline{k}$/dg $-$ Segal。

对于所有 $G \in$ dg $-$Segal，我们都有一个如下形式的态射

$$\mathrm{Map}(\Phi(F), G) \to \mathrm{Map}(\coprod \underline{k}, G) \simeq \prod \mathrm{Map}(\underline{k}, G).$$

通过取这个态射的纤 维，并对 hocolim F_i 做同样的处理，我们得到如下图表 :

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{映射}(F, G) & \longrightarrow & \text{映射}(\Xi(F)\ G) & \longrightarrow & \text{映射}(\Phi(F)\ G) & \longrightarrow & \prod \text{映射}(\underline{k}, G) \\
\downarrow \sim & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow = \\
\text{同伦极限 映射}(F_i, G) & \longrightarrow & \text{同伦极限 映射}(\Xi(F_i)\ G) & \longrightarrow & \text{同伦极限 映射}(\Phi(F_i)\ G) & \longrightarrow & \prod \text{映射}(\underline{k}, G)
\end{array}$$

如果我们能证明 t 是弱等价，我们就完成了。为此，我们来证明是全忠实的 .

我们有一个伴随 Ξ : Ho(dg $-$ Segal$_{\mathcal{O}}$) $\rightleftharpoons$ Ho($\coprod \underline{k}$/dg $-$ Segal) : Γ 其中右伴随 Γ 满足：对于所有 $H \in \coprod \underline{k}$/ dg $-$ Segal 和 $L \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$， $\Gamma(H)(L)$ 都是以下同伦拉回

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(F)(L) & \longrightarrow & F(L) \\
\downarrow & \ulcorner h & \downarrow \\
\coprod_{\mathcal{O}_L} F(k) & \longrightarrow & \coprod_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}
\end{array}$$

其中是的对象集。显然，按此方式构造后，Id。于是是全忠实的，因此 Map(,)是弱等价。根据二取三条件，是弱等价，因此与余极限交换。由命题 4.6.11，我们知道 hocolim() 在 dg Segal 中与 DK-等价，这意味着在 dg Segal 中，hocolim() 与之间也存在 DK-等价。证明完毕。证毕。

现在来看看 Sing(T_i) $\to$ Sing(T)。

引理 4.6.13. 设 $F_* \to F$ 是如前所构造的 *dg-Segal* 超覆盖，设 T_* 是$\mathbf{dg-cat}_{\mathcal{O}}$ 中的单纯对象，满足 $\mathcal{O} = \pi_0(F(k))$，且$\mathrm{Sing}(T_*) = F_*$，并且 $T =$同伦余极限 T_i。那么增广单纯对象 $T_* \to T$ 是 *dg*-范畴的 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$-超覆盖。

证明。 由于我们在此固定了对象，根据引理 4.4.10，若对于所有 x、$y \in \mathcal{O}$，增广对象$T_*(x, y) \to T(x, y)$ 是复形的分裂超覆盖，那么 $T_* \to T$ 就是 dg- 范畴的超覆盖，证明即告完成。

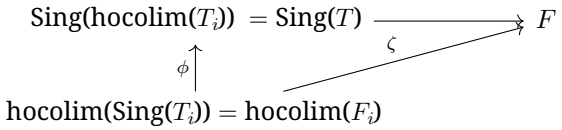
固定 x、$y \in \mathcal{O}$。根据引理 4.6.10， $T_*(x, y) \to F(x, y)$ 是一个分裂超覆盖。但由于它是一个分裂超覆盖，根据引理 4.4.11，我们知道 $T(x, y) =$同伦余极限($T_i(x, y)$) $\simeq F(x, y)$。因此，增广对象$T_*(x, y) \to T(x, y)$ 是 C(k) 上的分裂超覆盖，从而 $T_* \to T$ 是 dg-范畴上的超覆盖，证明即告完成。

Q.E.D.

现在我们只需把所有内容整合起来。

定理 4.6.14。 设 F 是一个满足 *dg-Segal* 条件的函子。则存在一个 *dg*-范畴T，使得态射 $\mathrm{Sing}(T) \to F$ 是一个 *DK*-等价。

证明。 令 Sing(T_*) $= F_* \to F$ 为按照定理 4.6.8 构造的 dg-Segal 超覆盖。于是我们得到如下形式的图表：



我们已经证明，相应的增广对象 $T_* \to T$ 是 dg-范畴的超覆盖；根据引理 4.5.5，态射 ϕ 是一个 DK-等价。我们还证明了 hocolim(F_i) $\to F$ 也是一个 DK-等价，因此根据注记 4.3.20，这意味着我们的态射 Sing(T) $\to F$ 也是一个 DK-等价。至此，我们完成了证明。

Q.E.D.

这样就完成了。

定理 4.6.15。 假设假设 *4.3.22* 成立。那么，如果我们在 函子$^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}$，$\mathbf{sSet})$ 上取完备 *dg-Segal* 模型结构，则函子 $\mathrm{Sing} : \mathbf{dg} - \text{范畴} \to \mathbf{dg} - \mathbf{Segal_c}$ 是本质满的。因此存在如下形式的范畴等价

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{dg} - \mathbf{cat}) \to \mathrm{Ho}(\mathbf{dg} - \mathbf{Segal_c}).$$

第5章

未来工作

“星期日（他们余生的第一天）”—
TerryPratchett，Neil Gaiman，《好兆头》

现在，我们已经讨论完完全解决的结果，是时候着手处理仍在进行中的结果，以及我们认为从更广泛的意义上来看值得关注的前景了。

5.1 完备 dg-Segal 空间与 DK-等价

我们在上一章看到，本文的主要结果依赖于一个假设。现在让我们在此重申这一假设。

假设5.1.1 (假设 4.3.22)。 设 $f\colon F \to G$ 是两个满足 *dg-Segal* 条件的函子之间的一个态射。那么， f 是 *DK*-等价，当且仅当它是完备 *dg-Segal* 模型结构中的弱等价。

现在，这并不是一个新奇或令人意外的条件。事实上，类似的情形见于[Rez01，定理 7.7，证明见第 14] 节：在经典情形下，完全 Segal 模型结构中的弱等价恰好是完全 Segal 空间之间的 Dwyer-Kan 等价。在那篇论文中，作者借助$\widehat{\ }$完备化函子，确立了 Dwyer-Kan 等价与完全 Segal 弱等价之间的这一对应关系；对于每个 Segal 空间 W，都存在一个映射 $i_W\colon W \to W$，满足以下性质：

$\widehat{\ }$1. 完备化 W 是一个完全 Segal 空间。

2. 完备化映射 i_W 是完全 Segal 模型结构中的弱等价 re.

3. 完备化映射 i_W 是一个 Dwyer-Kan 等价。

借助这样的完备化映射，作者将问题从判断 Segal 空间之间的 Dwyer-Kan 等价 $f\colon W \to W'$ 是否是完全 Segal 模型结构中的弱等价，转化为判断其完备化 f 是否为弱等价；而一些相对直接的论证便可证明该定理中的当且仅当结论。

这个证明的主要问题在于如何构造上文提到的完备化函子。显然，简单地进行纤维化替换就足以满足条件 1 和 2，但无法满足条件 3。相反，作者通过定义一个特定的单纯空间 $E(m)$（对所有 $m \in \mathbb{N}$）并计算，来构造他们的完全 Segal 空间

$$\widehat{W}_n = diag([m] \to \mathrm{Map}(E(m), W^{F(n)})) = diag([m] \to (W^{E(m)})_n).$$

我们预计，证明我们的假设大致会采用这种思路。遗憾的是，在我们的情形下，构造不会如此顺利：Rezk 使用直积来定义指数对象，但如果说 dg-范畴的幺半结构有什么众所周知的性质，那就是它与其模型结构不相容（见 [Toë11]：对象 $\Delta_k(1,0,1)$ 在 dg-范畴的模型范畴中是余纤维的，但很容易证明 $\Delta_k(1,0,1) \otimes \Delta_k(1,0,1)$ 并非如此）。我们将不得不定义自己的幺半结构版本。

让我们从头开始。我们已经看到，我们有线性化伴随，$j_!: \mathrm{Fun}(\Delta^{op}, \mathrm{sSet}) \rightleftharpoons \mathrm{Fun}^{\mathbb{S}}(c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}^{op}, \mathrm{sSet}) : j^*$，并且定义了 $E_k = j_!(E)$。在这个新的背景下，这将是复现我们的 $E(m)$ 的最佳候选。

注记 5.1.2. 注意！在 *Rezk* 的情形中，E 是一个有两个对象且它们之间存在同构的范畴的神经，$0\tilde{\to}1$。但在我们的情形中，其对应结论并不成立：

$$E_k \neq \mathrm{Sing}((0\tilde{\to}1) \otimes k).$$

对此我们应当心怀感激：事实上，$\mathrm{Sing}((0\tilde{\to}1) \otimes k) = \mathrm{Sing}(k)$，所以若 E_k 与它相等，就意味着完备 *dg-Segal* 模型结构实际上与 *dg-Segal* 模型结构完全相同！

定义 5.1.3. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$E_k(n) = \mathbb{L}j_!(0\tilde{\to}1\tilde{\to}\ldots\tilde{\to}n).$$

仿照 [Rez01]，的例子，我们希望将微分分次完备化函子定义如下：

定义 5.1.4. 设 X 是一个 *dg-Segal* 空间。我们称**……的完备化** X，并用 X 表示形如以下形式的完备 *dg-Segal* 空间

$$\hat{X} = \mathrm{hocolim}([i] \to X^{E_k(i)}).$$

注记 5.1.5. 请读者注意，如果定义正确，那么它在遗忘函子 j^* 下的像将给出经典 *Segal* 空间中 $j^*(X)$ 的完备化。

这里的问题在于，我们需要定义这个指数对象，这就要求我们定义张量积。对于所有 $L \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$，我们有

$$X^{E_k(n)}(L) \simeq \mathrm{Map}(\mathrm{Sing}(L) \otimes E_k(n), X).$$

但是 $\mathrm{Sing}(L) \otimes E_k(n)$ 是什么意思呢？实际上，即使 $E_k(n)$ 本身并不具有某个 $T \in \mathbf{dg} - \text{范畴的 } \mathrm{Sing}(T)$ 这种形式，我们仍可将其写为 $E_k(n) =$ 同伦余极限 $\mathrm{Sing}(L_i)$，其中 $L_i \in c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 都成立。因此，从技术上讲，我们可以将这个张量积写作

$$\mathrm{Sing}(L) \otimes E_k(n) = \mathrm{hocolim}\, \mathrm{Sing}(L) \otimes \mathrm{Sing}(L_i).$$

现在，我们首先想到的是将其写成 $\mathrm{Sing}(L \otimes L_i)$；但 $L \otimes L_i$ 不再是有限型自由 dg-范畴了。或许我们可以重复这一过程，将 $L \otimes L_i$ 写成另一个K_*的同伦余极限？我们将拭目以待。

备注 5.1.6。需要注意的是，如果这种方法成功（我们看不出它为何会失败），我们不仅完成了定理的证明，还定义了一个与模型结构相容的幺半结构，该结构定义在 $\mathbf{dg} - \mathbf{Segal}_{\mathbf{c}}$ 上，并由此为 *dg*-范畴范畴赋予一种可能的幺半模型结构。

5.2 线性单纯形范畴

有限型自由 dg-范畴很遗憾并非我们首次尝试构造 dg-范畴模型。事实上，我们最初希望得到的对象更接近于我们在定义 Segal 空间时所用的单纯形范畴。不过，我们想采用的方法并不适用于它们，这就是我们改用自由 dg-范畴的原因；但我们并未放弃让它重回视野的希望，因此在这里介绍线性单纯形范畴。

5.2.1 初步构造

在本文中，我们使用了许多不同版本的 dg-范畴，它们大致都是“具有有限个对象，且对象之间的态射为 $k[s]$”的某种形式。例如，在讨论 Tabuada 关于 dg $-$cat 的余纤维生成模型结构时，我们在 [Tab10], 中构造了一系列形如 $\Delta_k(1,s,1)$ 的对象，对所有 $s\in\mathbb{Z}$ 都成立；它们是具有两个对象的 dg-范畴，且 $k[s]$ 中的上链复形在次数 s 上为 k。我们还使用了线性化函子，它给出 $\Delta_k(n,0,1)$，即具有 n 个对象、且 k 是 i 与 $i+1$ 之间的态射的 dg-范畴，对所有 $0\leq i\leq n-1$ 都成立。

现在我们将进一步展开这些定义，并构造作为新线性单纯形范畴之对象的内容。

定义 5.2.1. 固定 $n\in\mathbb{N}$ 自然数，并设 $s\in\mathbb{Z}^n$ 和 $d\in\mathbb{N}^n$。我们称 $\Delta_k(n,s,d)$ 为一个 *dg*-范畴，它由以下数据组成：

- 一个由 $n+1$ 个对象组成的集合，为清晰起见，我们将它们记作 $0,\ldots,n$。
- 对于所有 $0\leq i-1<i\leq n$，都有一个复形 $\mathrm{Hom}(i-1,i)$ 集中在次数 s_i，其中它是 k^{d_i}，即除了次数 s_i外处处为零的复形。换言之，对于 $0\leq i<j\leq n$，复形$\mathrm{Hom}(i,j)$ 具有如下形式

$$\mathrm{Hom}(i,j)=\otimes_{i<k\leq j}\mathrm{Hom}(k-1,k).$$

换言之，*dg*-范畴 $\Delta_k(n,s,d)$ 如下：

$$k\circlearrowright 0\xrightarrow{k^{d_1}[s_1]}\underset{k}{1}\xrightarrow{k^{d_2}[s_2]}\cdots\longrightarrow\underset{k}{n-1}\xrightarrow{k^{d_n}[s_n]}n\circlearrowright k$$

记号 5.2.2. 我们用 $\Delta_k(0)$ 或 k 表示只有一个对象、且其自同态复形为 k 的 *dg*-范畴 $\Delta_k(0,s,d)$。提醒读者，这个 *dg*-范畴是张量积的单位元。

定义 5.2.3. 我们称**线性单纯形范畴**为 Δ_k，并将其记为 Δ_k。它是 *dg*-范畴范畴 $\mathbf{dg}-\mathbf{cat}$ 的全子范畴，其对象为 *dg*-范畴 $\Delta_k(n,s,d)$，其中 $n\in\mathbb{N}$、$s\in\mathbb{Z}^n$ 和 $d\in\mathbb{N}^n$ 取遍所有可能值。

Δ_k 中对象的一个直接优势是：在 dg $-$cat 中，计算从 $\Delta_k(n,s,d)$ 到一般 dg-范畴 T 的态射集，要比计算从一个一般 dg-范畴到另一个一般 dg-范畴的态射集容易得多。

命题 *5.2.4.* 设 T 是 *dg* $-$*cat* 中的一个对象，且 $\Delta_k(n,s,d)$ 属于 Δ_k。令 $\phi_*:\mathit{Hom}(\Delta_k(n,s,d)\ T)\to\mathit{Hom}(\coprod\Delta_k(0)\ T)$ 为由包含 $\phi:\coprod_{n+1}\Delta_k(0)\to\Delta_k(n,s,d)$ 诱导的态射，其中我们将 $\Delta_k(0)$ 的每个副本映到 $\Delta_k(n,s,d)$ 中的不同对象。于是有以下同构：

- 从 $\Delta_k(0)$ 到 T的态射集合与 T中的对象集同构，即 $\mathrm{Hom}(\Delta_k(0)\ T)\simeq\mathrm{Obj}(T)$。换句话说，给定一个态射 $\Delta_k(0)\to T$ 等价于在 T中固定一个点。
- ϕ 的纤维为

$$\phi_*^{-1}(t)\simeq\prod\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(\mathbf{k})}(k^{d_i}[s_i],T(t_{i-1},t_i))\simeq\prod(Z^{s_i}(\mathrm{Hom}_T(t_{i-1},t_i)))^{d_i},$$

其中，$Z^{s_i}(\mathit{Hom}_T(t_{i-1},t_i))$ 是 $\mathit{Hom}(t_{i-1},t_i)$ 在次数 s_i 上的上循环集合，也就是说，是满足 $d(a)=0$ 的对象集合$a\in\mathit{Hom}(t_{i-1},t_i)^{s_i}$。换句话说，如果我们固定 $n+1$ 个点 $T,t_0,\ldots,t_n$，那么描述集合 $\mathit{Hom}(\Delta_k(n,s,d)\ T)$ 就归结为：对所有 $0<i\leq n$，描述上链复形 $T(t_{i-1},t_i)$ 在次数 s_i 上的上循环集合。

证明。我们从 $\mathrm{Hom}(\Delta_k(0)\ T)\ \simeq \mathrm{Obj}(T)$ 开始。设 $f\colon\ \Delta_k(0)\ \to T$ 是 $\mathrm{Hom}(\Delta_k(0)\ T)$ 中的一个对象。给出这样的态射等价于给出 T （0 的像）中的一个对象，以及 T （ $k = \mathrm{Hom}(0,0)$ 的像）中的一个态射。我们将如下定义这个同构

$$F : \mathrm{Hom}(\Delta_k(0), T) \to \mathrm{Obj}(T)$$

$$f \mapsto f(0).$$

满射性显然。唯一需要检查的是， F 实际上是单射：也就是说，固定 T中的一个点 $t \in T$后，$\mathrm{Hom}(0,0) = k \to \mathrm{Hom}(t,t)$中只有一个可能的态射。设 $f\colon\ \Delta_k(0)\ \to T$是一个 dg-函子，满足 $F(f) = t$。由于它是 dg $-$范畴中的态射，我们知道图表

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{e_0} & \mathrm{Hom}(0,0) = k \\ & \searrow^{e_t} & \downarrow f \\ & & \mathrm{Hom}(t,t) \end{array}$$

是交换的。特别是，这意味着 $\mathrm{Hom}(0,0) = k$ 中恒等态射的像保持不变，而这就确定了整个态射 f。我们知道，固定一个对象 $t \in T$ 后，$\mathrm{Hom}(0,0) \to \mathrm{Hom}(t,t)$中只有一个可能的态射，因此函子 F是单射。

函子 F 是一个同构，并且 $\Delta_k(0) \simeq \mathrm{Obj}(T)$。特别地，给出一个从 $\Delta_k(0)$到 T 的态射，等价于固定 T中的一个点。

现在来讨论纤维，首先从第一个同构开始。根据 ϕ 的定义，并结合此证明的最后一部分，考察纤维 ϕ_*^{-1} 等价于固定 $n+1$ 个对象 $t_0, \ldots, t_n$ 于 T 中，然后考察态射 $f\colon\ \Delta_k(n,s,d) \to T$，使得对所有 $0 \le i \le n$，都有 $f(i) = t_i$。

$$\phi_*^{-1} \simeq \{f \in \mathrm{Hom}(\Delta_k(n,s,d), T) /\ f(i) = t_i\ \forall i \in \mathrm{Obj}(\Delta_k(n,s,d))\}.$$

我们已经固定了 $\Delta_k(n,s,d)$ 中所有对象的像。这个集合完全由这些固定对象之间的上链复形态射决定。但我们知道，对于所有 $1 \le i \le n$， $\Delta_k(n,s,d)$ 中对象的态射完全由 $i-1$ 和 i 之间的态射决定。因此我们得到以下同构：

$$\phi_*^{-1} \simeq \{(f_i)_{1\le i\le n} /\ f_i : \Delta_k(n,s,d)(i-1,i) = k^{d_i}[s_i] \to T(t_{i-1}, t_i)\} \simeq \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{C(k)}}(k^{d_i}[s_i], T(t_{i-1}, t_i)).$$

我们已经证明了第一个同构，从而将这些 dg-范畴之间态射集合的计算归结为复形态射的计算。不过还可以更简单一些。现在来处理第二个同构。为便于阅读，取一个上链复形 $A \in \mathbf{C(k)}$，并证明

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C(k)}}(k^{d_i}[s_i], A) \simeq Z^{s_i}(A)^{d_i}.$$

从 $k^{d_i}[s_i]$ 到 A 的复形态射具有如下形式

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k^{d_i} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{s_i}} & & \downarrow & & \\ \ldots & \longrightarrow & A^{s_i-1} & \longrightarrow & A^{s_i} & \longrightarrow & A^{s_i+1} & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

我们很容易看出，这个态射完全由 f_{s_i} 决定。根据复形态射和余循环的定义，我们于是有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C(k)}}(k^{d_i}[s_i], A) \simeq \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}}(k^{d_i}, A^{s_i}) /\ d \circ f = 0\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}}(k^{d_i}, Z^{s_i}(A)).$$

我们剩下唯一要做的就是证明 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}}(k^{d_i}, Z^{s_i}(A)) \simeq Z^{s_i}(A)^{d_i}$。我们知道，$k^{d_i}$ 是一个自由的 k-模，其基由 d_i 个生成元 e_1、.....、e_{d_i} 构成。我们定义一个态射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}}(k^{d_i}, Z^{s_i}(A)) \to Z^{s_i}(A)^{d_i}$$

$$f \mapsto (f(e_1), \ldots, f(e_{d_i})).$$

这是代数中的一个经典结果：该映射是双射。

我们已经构造出了这些同构

$$\phi_*^{-1}(x) \simeq \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{C(k)}}(k^{d_i}[s_i], T(x_{i-1}, x_i)) \simeq \prod (Z^{s_i}(\mathrm{Hom}_T(x_{i-1}, x_i)))^{d_i},$$

至此，我们完成了这个证明。

Q.E.D.

我们已经知道每个 dg-范畴都是纤维的，但 Δ_k 中的对象也是余纤维的。首先来处理一个计算引理。

引理 5.2.5。设 $g: A \to B$ 是 $\mathbf{dg}$ $-$ 范畴中的一个平凡纤维化，设 $s_i \in \mathbb{Z}$ 和 $x_{i-1}, x_i \in \mathrm{Obj}(A)$ 是 A 中的两个对象。那么诱导的集合态射

$$Z^{s_i}(A(x_{i-1}, x_i)) \to Z^{s_i}(B(g(x_{i-1}), g(x_i)))$$

是满射。

证明。这只是一个图追逐的问题。令 $\alpha \in Z^{s_i}(B(g(x_{i-1}) g(x_i)))$。由于 g 是纤维化，特别是它在态射复形上满射，因此存在 $\beta \in A(x_{i-1}, x_i)$，但它不一定是余循环。同时，我们知道 g 是弱等价，因此上同调群之间存在一个同构 $H^{s_i}(A(x_{i-1}, x_i)) \simeq H^{s_i}(B(g(x_{i-1}) g(x_i)))$，这意味着存在一个 $\beta' \in Z^{s_i}(A(x_{i-1}, x_i))$，使得 $g(\beta')$ 与 α 属于同一个等价类，

$$g(\beta') - \alpha = g(\beta') - g(\beta) = g(\beta' - \beta) \in \mathrm{Im} d_{B,i}.$$

于是，存在一个 $\gamma \in B^{s_i-1}(g(x_{i-1}) g(x_i))$，使得 $d(\gamma) = g(\beta - \beta')$。另一方面，再次利用 g 的满射性，我们有一个 $\gamma' \in A^{s_i-1}(x_{i-1}, x_i)$，使得 $g(\gamma') = \gamma$，因此 $d(g(\gamma')) = g(\beta - \beta')$。根据 g 的线性结构，我们有 $g(\beta' - d(\gamma')) = g(\beta) = \alpha$，因此 $\beta' - d(\gamma')$ 是 α 在 $Z^{s_i}(A(x_{i-1}, x_i))$ 中的原像。

因此，该态射是满射，我们的证明也就完成了。

Q.E.D.

推论 5.2.6。Δ_k 中的所有对象在$\mathbf{dg}$ $-$**ca**上的模型结构中都是余纤维的 $\mathbf{t}$.

证明。$\Delta_k(0)$的情形是平凡的：由定理 3.4.9可知，$\emptyset \to \Delta_k(0)$是一个生成余纤维化，因此特别是一个余纤维化。dg-范畴 $\Delta_k(0)$是余纤维的。

设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $s \in \mathbb{Z}^n$, $d \in \mathbb{N}^n$。我们要证明 $\Delta_k(n, s, d)$ 是余纤维的。为此，我们将利用余纤维化的描述：它是一种对所有平凡纤维化都具有左提升性质的态射。设 $g: A \to B$ 是 dg $-$cat 的模型结构中的一个平凡纤维化，并设 $f: \Delta_k(n, s, d) \to B$ 是一个 dg-态射。我们要为这个交换方形找到一个提升：

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow g \\ \Delta_k(n,s,d) & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

由于 $\emptyset$ 是 dg –cat 中的始对象，这个提升的存在等价于以下条件：对于每个平凡纤维化 $g\colon A \to B$ 以及每个 $f\colon \Delta_k(n,s,d) \to B$，都存在一个经由 g 的 f 的分解；也就是说，存在一个态射 $h\colon \Delta_k(n,s,d) \to A$，使得 $f = g \circ h$。而这又等价于要求

$$g_* : \mathrm{Hom}(\Delta_k(n,s,d), A) \to \mathrm{Hom}(\Delta_k(n,s,d), B)$$

是满射。

我们知道，这样的态射在对象上是满射。因此，我们可以固定 $n+1$ 对象于 $A, x_0, \ldots, x_n \in A$。固定对象后，我们便可使用命题 5.2.4 中的结果：问题归结为证明

$$\prod_{x_{i-1},x_i \in A} Z^{s_i}(A(x_{i-1},x_i))^{d_i} \to \prod_{x_{i-1},x_i \in A} Z^{s_i}(B(g(x_{i-1}),g(x_i)))^{d_i}$$

是满射。由于我们对同一组指标族取乘积和幂，证明这个态射是满射，等价于要求态射

$$Z^{s_i}(A(x_{i-1},x_i)) \to Z^{s_i}(B(g(x_{i-1}),g(x_i)))$$

是满射。但我们已在引理 5.2.5 中证明了这一点。

态射 $g_*\colon Z^{s_i}(A(x_{i-1},x_i)) \to Z^{s_i}(B(g(x_{i-1}),g(x_i)))$ 是满射。态射 $\emptyset \to \Delta_k(n,s,d)$ 是余纤维化，因此 $\Delta_k(n,s,d)$ 是余纤维的，我们的证明也就完成了。

Q.E.D.

关于态射集的计算并非我们在这里所需的一切。事实上，我们将在构造单纯预层范畴时使用映射空间，因此，如果能得到一个类似命题 5.2.4、但针对映射空间的结果，将会很有帮助。幸运的是，我们确实能得到这样的结果，不过在此之前还需要几个初步结果。

引理 5.2.7。设 $n \in \mathbb{N}$、$s \in \mathbb{Z}^n$ 和 $d \in \mathbb{N}^n$。态射 $\phi\colon \coprod_n \Delta_k(0) \to \Delta_k(n,s,d)$ 是 dg –范畴范畴的模型结构中的余纤维化。

证明。再次证明 ϕ 是余纤维化时，我们利用这样一个事实：它是余纤维化，当且仅当 ϕ 对所有平凡纤维化都具有左提升性质。这一次，我们无法幸运地让始对象充当左上角，但仍可以将这一性质视为某种满射性条件。事实上，ϕ 具有左提升性质，当且仅当对于所有 $g\colon A \to B$ 平凡纤维化，态射

$$g'_* : \mathrm{Hom}(\Delta_k(n,s,d), A) \to \mathrm{Hom}(\coprod k, A) \times_{\mathrm{Hom}(\coprod k, B)} \mathrm{Hom}(\Delta_k(n,s,d), B)$$

是满射。

我们想用命题 5.2.4 来计算这些 Hom，但我们只知道如何计算固定对象之间的 $\mathrm{Hom}(\Delta_k(n,s,d), B)$。因此，我们必须对所有可能的 $n+1$ 个点的选取取余积。这样便得到以下同构：

$$\mathrm{Hom}(\coprod k, A) \times_{\mathrm{Hom}(\coprod k, B)} \mathrm{Hom}(\Delta_k(n,s,d), B) \simeq \mathrm{Obj}(A)^{n+1} \times_{\mathrm{Obj}(B)^{n+1}} \coprod_{\mathrm{Obj}(B)^{n+1}} \prod Z^{s_i}(B(x_{i-1},x_i))^{d_i}$$

$$\simeq \coprod_{\mathrm{Obj}(B)^{n+1}} \prod Z^{s_i}(B(x_i,x_{i+1}))^{d_i}.$$

我们已将问题归结为证明

$$\coprod_{\mathrm{Obj}(A)^{n+1}} \prod Z^{s_i}(A(x_{i-1},x_i))^{d_i} \to \coprod_{\mathrm{Obj}(B)^{n+1}} \prod Z^{s_i}(B(g(x_{i-1}),g(x_i)))^{d_i}$$

是满射。我们再次可以忽略其中的积和余积，并将它们去掉，进一步简化问题：最终要回答的问题是，对于所有 g： $A \to B$ 平凡余纤维化，余循环上的诱导态射是否

$$Z^{s_i}(A(x_i, x_{i+1})) \to Z^{s_i}(B(g(x_i), g(x_{i+1})))$$

是满射。但这恰好是引理 5.2.5 的结论，因此我们得到了所需结果。态射ϕ： $\coprod_n \Delta_k(0) \to \Delta_k(n, s, d)$ 是一个余纤维化，至此我们完成了证明。

Q.E.D.

5.2.2 映射的刻画

引理 5.2.8。设 T 是一个 *dg*-范畴。设 $n \in \mathbb{N}$、 $s \in \mathbb{Z}^n$ 和 $d \in \mathbb{N}^n$。存在如下形式的单纯集合的同伦拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(n,s,d), T) & \longrightarrow & * \\ \downarrow{\scriptstyle U'} & \ulcorner h & \downarrow \\ \mathrm{Map}_{\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(n,s,d), T) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathrm{Map}_{\mathbf{dg-cat}}(\coprod_{n+1} k, T) \end{array}$$

其中 ϕ^* 是由上文的 ϕ： $\coprod_{n+1} k \to \Delta_k(n,\ s,\ d)$ 诱导的态射，而 U' 则由遗忘函子 U： $\coprod_{n+1} k/\mathbf{dg}$ $-$范畴 $\to \mathbf{dg}$ $-$范畴诱导。

特别地，映射$\coprod k/\mathbf{dg-cat}(\Delta_k(n,\ s,\ d)\ T)$是 ϕ^* 的同伦纤维。

证明。取 $C_*(T)$ 为 $\coprod k/\mathsf{dg}$ $-\mathsf{cat}$ 中 T 的一个单纯框架。由于 U 是右 Quillen 伴随，像 $U(C_*(T))$ 是 $U(T)$ 在 dg $-\mathsf{cat}$ 中的一个单纯框架。略去记号上的区别，我们仍将 $U(C_*(T))$ 记作 $C_*(T)$。我们已经证明 $k = \Delta_k(0)$ 和 $\Delta_k(n, s, d)$ 都是余纤维的，因此不需要取余纤维替换。作出这些选择后，引理中的图表可以改写为：存在如下形式的一个同伦拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k\coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(n,s,d), C_*(T)) & \longrightarrow & * \\ \downarrow{\scriptstyle U'} & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(n,s,d), C_*(T)) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{dg-cat}}(k\coprod k, C_*(T)). \end{array}$$

单纯集合 $\mathrm{Hom}_{\coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(n, s, d)\ C_*(T))$ 实际上就是 ϕ^* 的纤维。但这里我们要求的是一个同伦纤维，而不只是纤维。为此，我们将使用 sSet 的适当性。根据推论 3.2.38，我们知道，在右适当模型范畴中，若有一个图表 $X \to Z \leftarrow Y$，且其中这两个箭头至少有一个是纤维化，那么拉回自然弱等价于同伦拉回。我们已在引理 5.2.7 中证明，态射 ϕ: $\coprod_n \Delta_k(0) \to \Delta_k(n, s, d)$ 是余纤维化；根据命题 3.2.55，若 ϕ 是余纤维化，则态射 ϕ^* 是纤维化。因此，我们有一个沿纤维化的拉回。由 sSet 的右适当性可知，$\mathrm{Hom}_{k\coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(n, s, d)\ C_*(T))$ 是 ϕ^* 沿一个点的同伦拉回。由于所有 dg-范畴都是纤维的，为了得到同伦纤维，我们无需对这个对象作纤维化替换。对象 $\mathrm{Hom}_{k\coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(n, s, d)\ C_*(T))$ 是 ϕ^* 上方一个点的同伦纤维，结论得证。证明完毕。

证毕

命题 5.2.9. 设 T是一个 *dg*-范畴，且 $\Delta_k(n, s, d)$ 属于 Δ_k。令 ϕ_**:* $Hom(\Delta_k(n, s, d)\ T) \to Hom(\coprod \Delta_k(0)\ T)$ 为由包含 ϕ*:* $\coprod_{n+1} \Delta_k(0) \to \Delta_k(n, s, d)$ 诱导的态射，其中我们将 $\Delta_k(0)$ 的每个副本映到 $\Delta_k(n, s, d)$ 中的不同对象。于是，在 *sSet* 中有以下弱等价：

• 从 $\coprod \Delta_k(0)$ 到 T 的映射空间弱等价于 $n+1$ 个 $F(\Delta_k(0)\ T)$ 的神经的笛卡尔积；这里的范畴由拟可表 T^{op}-模构成，其态射仅包含弱等价。换言之，

$$\mathrm{Map}(\coprod \Delta_k(0), T) \simeq |T| \times \ldots \times |T| = \times_{n+1} N(F(\Delta_k(0), T)).$$

• 令 $x \in \mathrm{Obj}(T)^{n+1}$ 为一个由对象组成的 $n+1$)-元组。对于带有 $n+1$ 固定对象的 *dg*-范畴范畴中，从 $\Delta_k(n,s,d)$ 到 (T,x) 的映射空间，与上 $1 \leq i \leq n$ 从 $k^{d_i}[s_i]$ 到 $T(x_{i-1}, x_i)$ 的映射空间的笛卡尔积同胚，其中映射空间取自上链复形范畴。换言之，

$$\mathrm{Map}_{\coprod k/\mathbf{dg-cat}}((\Delta_k(n,s,d)),(T,x)) \simeq \prod_i \mathrm{Map}_{\mathbf{C(k)}}(k^{d_i}[s_i], T(x_{i-1}, x_i)).$$

证明。 第一个弱等价直接由定理 3.4.38 得出。事实上，该结果表明：如果我们有两个 dg-范畴，在此处即为 k和 T，那么单纯集合 Map(k,T) 与由拟可表 $k \otimes T^{op}$-模构成的范畴的神经弱等价，其中态射为等价。但 k 是张量积的单位元，因此 $F(k,T)$ 同构于由拟可表 T^{op}-模构成的范畴，并带有适当的态射。笛卡尔积是平凡的。

接下来，我们将针对 $n=1$ 证明这一点。事实上，推理过程保持不变，而且写起来更简单。在这种情况下，我们定义一个 Quillen 伴随

$$\mathbf{C}(\mathbf{k}) \underset{\beta}{\overset{\xi}{\rightleftarrows}} k \coprod k/\mathbf{dg-cat}$$

$$E \longmapsto \Delta_k(1,E)$$

$$T(x_1,x_2) \longmapsfrom (T,x_1,x_2)$$

其中， $\Delta_k(1,E)$ 表示一个有两个对象的 dg-范畴， k 是自同态的上链复形，而 E是这两个对象之间态射的复形。特别地， $\xi(k^d[s]) = \Delta_k(1,s,d)$。
取 $C_*(T)$ 为 $k \coprod k/\mathrm{dg}-\mathrm{cat}$ 中的一个单纯框架。由于 β是右 Quillen 函子，上链复形 $\beta(C_*(T))$ 仍然是一个单纯框架。我们已在推论 5.2.7 中证明所有 Δ_k 都是余纤维的，并在推论 3.4.10 中证明所有 $\beta(\Delta_k(1,s,d) = k^d[s]$ 也都是余纤维的。根据伴随的定义，我们有

$$\text{映射}_{\mathbf{C(k)}}(k^d[s], T) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C(k)}}(k^d[s], \beta(C_*(T))) \simeq \mathrm{Hom}_{k \coprod k/\mathbf{dg-范畴}}(\Delta_k(1,s,d)\ C_*(T)) = \text{映射}_{k \coprod k/\mathbf{dg-范畴}}(\Delta_k(1,s,d)\ T)$$

我们得到了弱等价，至此便完成了。

Q.E.D.

最后，这个结果为我们提供了一种使用 Δ_k 中的元素来刻画 dg $-$范畴中的弱等价的方法。事实上，我们甚至不需要 Δ_k 中的全部对象：只需考虑仅有两个对象且次数为零的那些对象即可。

定理 5.2.10. 设 T和 T'是两个 *dg*-范畴，且 $f\colon\ T \to T'$是它们之间的一个 *dg*-函子。那么， f是 **dg** $-$范畴 中的弱等价，当且仅当诱导态射

$$\mathrm{Map}(\Delta_k(0), f) : \mathrm{Map}_{\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(0), T) \to \mathrm{Map}_{\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(0), T')$$

$$\forall s \in \mathbb{Z}, \text{映射}(\Delta_k(1,s,1)\ f) : \text{映射}_{\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(1,s,1)\ T) \to \text{映射}_{\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(1,s,1)\ T')$$

是 **sSet** 中的弱等价。

证明。一个方向显然成立。根据命题 3.2.56，若 Y是一个纤维对象，则 Map$(-, Y)$ 是一个右 Quillen 函子，因而它保持纤维对象之间的弱等价。但在 dg $-$范畴中，每个对象都是纤维对象，因此若 f是一个弱等价，则 Map$(\Delta_k(0)\ f)$ 和 Map$(\Delta_k(1, s, 1)\ f)$ 都是弱等价。

现在来证明另一个方向。假设对所有$s \in \mathbb{Z}$，Map$(\Delta_k(0)\ f)$和Map$(\Delta_k(1, s, 1)\ f)$都是 sSet 中的弱等价，并证明这足以说明原来的 dg-函子f 是弱等价。dg $-$cat 中的 dg-函子是弱等价，当且仅当它准本质满且拟全忠实。

dg-函子 f是准本质满的，当且仅当诱导映射 $[f]:\ [T] \to [T']$ 是本质满的。这等价于证明同伦范畴的同构类之间的映射($[T]$ / ≅) $\to$) $[T']$ / ≅)是满射。我们假设映射 Map(k, f) : Map$(k, T) \to$ Map(k, T') 是 sSet 中的弱等价。根据 sSet 中弱等价的定义，这意味着对所有 $i \in \mathbb{N}$ 以及所有点 $x \in T$，诱导态射 π_i(Map$(k, f)\ x)$ 都是同构。特别地，当 $i = 0$时，它是同构。但我们在推论 3.4.39 中已经看到，集合 $[k, T] \simeq \pi_0$(Map(k, T) $x)$与 $[T]$中同构的同构类集合是同构的。因此我们得到映射

$$([T] \,/\, \cong) \simeq \pi_0(\mathrm{Map}(k, T), x) \to \pi_0(\mathrm{Map}(k, T'), f(x)) \simeq ([T'] \,/\, \cong)$$

不仅是满射，而且是同构。dg-函子 f 是准本质满的。

若对所有 x、$y \in T$，诱导态射 $T(x, y) \to T'(f(x)\ f(y))$ 在 C(k) 中是弱等价，则 dg-函子 f 是拟全忠实的。也就是说，若要证明 f 是拟全忠实的，我们需要证明，对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 以及所有 x、$y \in T$，诱导态射 $H^i(f)$: $H^i(T(x, y)) \to H^i(T'(f(x)\ f(y)))$ 是群的同构。我们已在命题 5.2.8 中证明，存在一个纤维化 $E =$ Map$(\Delta_k(1, s, 1)\ T) \to B =$ Map$(k \coprod k, T)$，其同伦纤维为 $F =$ Map$_{k \coprod k/}$dg$-$cat$(\Delta_k(1, s, 1)\ T)$。这给出了如下形式的长正合列

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(F, x) \longrightarrow \pi_n(E, x) \longrightarrow \pi_n(B, x) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow \pi_1(E, x) \longrightarrow \pi_1(B, x) \longrightarrow \pi_0(F, x)$$

以及一个与下式同形式的映射：$E' =$ Map$(\Delta_k(1, s, 1)\ T') \to B' =$ Map$(k \coprod k, T')$，其纤维为$F' =$ Map$_{k \coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(1, s, 1)\ T')$。利用态射 Map$(\Delta_k(1, s, 1)\ f)$ 和 Map(k, f)，我们可以诱导出如下形式的复形态射

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & \pi_n(F, x) & \longrightarrow & \pi_n(E, x) & \longrightarrow & \pi_n(B, x) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(F, x) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & \pi_n(F', x) & \longrightarrow & \pi_n(E', x) & \longrightarrow & \pi_n(B', x) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(F', x) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

根据单纯集合中的弱等价的定义，对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，态射 π_i(Map$((1, s, 1)\ f)\ x)$ 和 π_i(Map$(k, f)\ x)$ 都是同构。我们有一个长正合列的态射，其中每三个中有两个是同构。根据五引理，这意味着对于所有 $i \geq 1$，π_i (Map$_{k \coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(1, s, 1)\ f)\ x)$ 也是同构。但我们已经在命题 5.2.9 中计算了单纯集合 Map$_{k \coprod k/\mathbf{dg-cat}}($ $\Delta_k(n, s, d)\ T)$；我们得到

$$\mathrm{Map}_{k \coprod k/\mathbf{dg-cat}}((\Delta_k(1, s, 1), (0, 1)), (T, (x_0, x_1))) \simeq \mathrm{Map}_{\mathbf{C(k)}}(k\,[s], T(x_0, x_1)).$$

我们知道，对于所有 $i \geq 0$,

$$\pi_i(\mathrm{Map}_{\mathbf{C(k)}}(k\,[s], T(x_0, x_1)), x) \simeq H^{-i-s}(T(x_0, x_1)),$$

So 如果我们把这些同构并列起来，那么对于所有 $s \in \mathbb{Z}$ 和所有 $i \geq 1$，都有 t

$$H^{-i-s}(T(x_0,x_1)) \simeq \pi_i(\text{映射}_{k\coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(1,s,1)\ T)\ x) \xrightarrow{\sim} \cdots$$

$$\longrightarrow \pi_i(\mathrm{Map}_{k\coprod k/\mathbf{dg-cat}}(\Delta_k(1,s,1),T'),f(x)) \simeq H^{-i-s}(T'(f(x_0),f(x_1)))$$

态射 $f\colon T\to T'$ 诱导了形如 H^{-i-s}的上同调群之间的同构。由于对于每个 $s\in\mathbb{Z}$都有这样的同构，因此通过改变 s，我们得到每个次数上的上同调群同构。态射 f 是拟全忠实的。

态射 $f\colon T\to T'$ 是 dg $-$ 范畴中的弱等价，我们就此完成了。

Q.E.D.

5.2.3 预期结果

就在这一刻，我们意识到无法将第 4.4 节中的结果用于Δ_k。事实上，定理 4.4.6 的条件过于严格：线性单纯形范畴对有限余积不封闭。不过，不能按我们目前的方式使用超覆盖结果，并不意味着我们无法另辟蹊径。事实上，自由 dg-范畴中的态射复形之间本来就几乎没有关联，因此考虑将完备 dg-Segal 空间改写成从 Δ_k 到 sSet 的某种单纯函子，并非太大的跨越。

假设 5.2.11。 存在一个全子范畴，它与函子$^{\mathbb{S}}(\Delta_k^{op}$，$\mathbf{sSet})$ 等价于$\mathbf{dg}\ -\mathbf{Segal_c}$。

5.3 其他可能的前景

尽管前两节是这项工作最显而易见、最直接的前景，但并非仅有这些。这里我们再提出一些其他可能的应用和问题。

5.3.1 dg-范畴的自同构

在其论文 [Toë05], Toën 的结尾，他利用关于完全 Segal 空间的结果，计算了 ∞-范畴的自同构群，结果发现该群只有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其中唯一的非恒等自同构是对偶化。我们可以尝试对 dg- $-$范畴做同样的事情。

事实上，尝试将我们的构造用于此处是合理的：如果我们把它看作一种“通过生成元与关系给出的表示”，其中自由 dg-范畴 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ （或者，如果我们已在上一节证明了该假设，则为 Δ_k）构成生成元，而我们描述的弱等价则是完备 dg-范畴上的条件，那么通常的做法是通过考察从 $c\mathcal{L}_{\mathbb{S}}$ 到 C 的态射（这些态射将关系变为弱等价），来定义从 dg- $-$范畴到另一个模型范畴 C 的态射。这种方法适用于任何范畴；尤其是，我们可以借此考察 dg- $-$范畴的自同构。

遗憾的是，在我们的情形中，dg $-$范畴范畴的自同构群不会像 ∞-范畴的自同构群那么简单。当然，它会包含 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，因为对偶性仍然是一个可逆态射，能将 dg-范畴变为 dg-范畴，但这还不够。既然我们研究的是 k-线性范畴，那么环 k 的自同构会包含在自同构群中，也就不足为奇了，或许还会包含其他一些群。

探索 $Aut(\mathrm{dg}-\mathrm{cat})$ 的高阶同伦群会是什么样，也很有意思：我们预计霍赫希尔德同调会在某个点出现。

5.3.2 超覆盖定义

正如任何认真阅读的读者都会注意到的，尽管定义不同， M_0- 超覆盖与 dg-Segal 超覆盖的构造遵循完全相同的结构。同样，定义或许并不相同，但遵循相同的模式：我们定义某种涉及 Map 函子的满态射，然后要求对所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_n : A_n \to A^{\partial \Delta^n}$$

就是这类满态射。这并不是我们在此定义的超覆盖所特有的性质。在定义 4.4.1 中，我们已经在单纯集合中的超覆盖情形下见过类似的情况；在 [Lur09]Lurie 将 ∞-Top 定义为：一个增广单纯对象，使得对于所有 n， Φ_n 都是一个有效满射。面对如此多相似的定义，自然会产生一个问题：是否可以找到一个能够将所有这些定义统一起来的一般定义?

参考文献

[AG15] D. Arinkin 和 D. Gaitsgory。《相干层的奇异支撑与几何朗兰兹猜想》。《数学精选》（新系列），21(1):1–199，2015年。[Bac20] Hugo V. Bacard。《Segal 富集范畴及其应用》。《范畴论及其应用》，35:论文第33号，1227–1267，2020年。[Ber07a] Julia E. Bergner。《单纯范畴范畴上的一个模型范畴结构》。《美国数学会汇刊》，359(5):2043–2058，2007年。[Ber07b] Julia E. Bergner。《同伦论的三种模型》。《拓扑学》，46(4):397–436，2007年。[BM13] Clemens Berger 和 Ieke Moerdijk。《富化范畴的同伦论》。《季刊数学杂志》，64(3):805–846，2013年。[BSP21] Clark Barwick 和 Christopher Schommer-Pries。《高阶范畴理论的唯一性》。《美国数学会杂志》，34(4):1011–1058，2021年。[BV73] J. M. Boardman 和 R. M. Vogt。《拓扑空间上的同伦不变代数结构》。《数学讲义》丛书，第347卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1973年。[Coh16]Lee Cohn。《微分分次范畴是 k线性稳定 ∞范畴》。见 https://arxiv.org/abs/1308.2587，版本日期：2016 年 9 月 12 日。[DHI04] Daniel Dugger 、 Sharon Hollander 和 Daniel C. Isaksen。《超覆盖与单纯预层》。《剑桥哲学学会数学论文集》，136(1):9–51，2004年。[DI04] Daniel Dugger 和 Daniel C. Isaksen。《拓扑超覆盖与 $\mathbb{A}^1$实现》。《数学杂志》，246(4):667–689，2004年。[DK80a] W. G. Dwyer 和 D. M. Kan。《同伦代数中的函数复形》。《拓扑学》，19(4):427–440，1980年。[DK80b] W. G. Dwyer 和 D. M. Kan。《范畴的单纯局部化》。《纯粹与应用代数杂志》，17(3):267–284，1980年。[DKS89] W. G. Dwyer、D. M. Kan 和 J. H. Smith。《同伦交换图及其实现》。《纯粹与应用代数杂志》，57(1):5–24，1989年。[Dug01] Daniel Dugger。《通用同伦理论》。《数学进展》，164(1):144–176，2001年。[GJ09] Paul G. Goerss 和 John F. Jardine。《单纯同伦论》。《现代 Birkhäuser 经典著作》。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2009年。1999年版重印 [MR1711612]。[GR17a] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。《导出代数几何研究》第一卷：对应与对偶性。《数学调查与专著》丛书第221卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。

[GR17b] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。《导出代数几何研究》第二卷：变形、李理论与形式几何。《数学调查与专著》丛书第221卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017年。[Hir03] Philip S. Hirschhorn。《模型范畴及其局部化》。《数学调查与专著》丛书第99卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003年。[Hov99] Mark Hovey。《模型范畴》。《数学调查与专著》丛书第63卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999年。[HS01]André Hirschowitz 和 Carlos Simpson。《n-层的下降》。见 https://arxiv.org/abs/math/9807049，版本日期：2001年3月13日。[Joy02] A. Joyal。《拟范畴与Kan复形》。第175卷，第207–222页，2002年。纪念马克斯·凯利教授70岁生日专辑。[JT07] André Joyal 和 Myles Tierney。《拟范畴与Segal 空间》。载于《代数、几何与数理物理中的范畴》，《当代数学》第431卷，第277–326页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2007年。[Kel65] G. M. Kelly。《诱导零同调映射的链映射》。《剑桥哲学学会论文集》，61:847–854，1965年。[Kel06] Bernhard Keller。《关于微分分次范畴》。载于《国际数学家大会论文集》第二卷，第151–190页。欧洲数学会，苏黎世，2006年。[Low22]Wendy Lowen。《丰富化脉络构造》。录像见 https://ihp-keller-2022.sciencesconf.org/，于2022年9月5日举行的巴黎代数会议。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论》。《数学年刊研究》第170卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。见 http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf，版本日期：2017年9月18日。[Mer22]Arne Mertens。《Templicial对象：幺半范畴中的单纯对象》。见 https://hdl.handle.net/10067/1903840151162165141，2022年。[ML20] Arne Mertens 和 Wendy Lowen。《作为templicial模的线性拟范畴》。见 https://arxiv.org/abs/2005.04778，版本日期：2020年8月18日。[Qui67] Daniel G. Quillen。《同伦代数》。《数学讲义》丛书，第43号。施普林格出版社，柏林—纽约，1967年。[Ras20]Nima Rasekh。《高阶范畴讲义》。见 http://guests.mpim-bonn.mpg.de/rasekh/Higher_Categories_EPFL.pdf，版本日期：2020年春。[Rez01] Charles Rezk。《同伦论的同伦理论模型》。《美国数学会汇刊》，353(3):973–1007，2001年。[RV22] Emily Riehl 和 Dominic Verity。《范畴论要义》。《剑桥高等数学研究》丛书第194卷。剑桥大学出版社，剑桥，2022年。[Tab05]Gonçalo Tabuada。《dg-范畴上的Quillen模型范畴结构》。《巴黎科学院数学报告》，340(1):15–19，2005年。

[Tab10] Gonçalo Tabuada. 微分分次范畴的局部化对与 Drinfeld 微分分次商的同伦论。《同调与同伦应用》，12(1):187–219，2010年。[Toë05]Bertrand Toën. 迈向高阶范畴理论的公理化。$K\text{-}Theory$，34(3):233–263，2005年。[Toë07] Bertrand Toën. dg-范畴的同伦论与导出莫里塔理论。《数学发明》，167(3):615–667，2007年。[Toë11] Bertrand Toën. 微分分次范畴讲义。载于代数与拓扑 K-理论，第2008卷，《数学讲义》，第243–302页。施普林格，柏林，2011年。[Toë14] Bertrand Toën. 导出代数几何。《欧洲数学会数学科学综述》，1(2):153–240，2014年。[TV05] Bertrand Toën 和 Gabriele Vezzosi. 同伦代数几何 I：托普斯理论。《数学进展》，193(2):257–372，2005年。[TV15] Bertrand Toën 和 Gabriele Vezzosi. 陈特征、等变迹与导出代数几何。《数学精选》（新系列），21(2):449–554，2015年。