arXiv:2302.00435v1 [math.AP] 1 Feb 2023

¨量子薛定谔群的尖锐端点 L^p 估计

ZHIJIE FAN、GUIXIANG HONG 和 LIANG WANG

摘要。本文建立了定义在一般测度空间上的薛定谔群的尖锐端点 L^p 估计。这些空间可能不具备良好的度量，但允许存在满足纯代数假设的次马尔可夫半群。我们证明中的一个关键要素是，通过构造一种抽象的 P-度量形式来编码某种底层度量和位置，引入并研究一种新的非交换高消去 BMO 空间。这为任意冯·诺依曼代数上的薛定谔群理论提供了首个形式，并可应用于许多模型，包括与定义在倍增度量空间上、满足纯高斯上界的非负自伴算子相关的薛定谔群、量子欧几里得空间上的标准薛定谔群、矩阵代数，以及具有有限维余循环的群冯诺依曼代数。

目录

1. 引言 2 1.1. 背景与动机 2 1.2. 主要结果 4 1.3. 应用 8 1.4. 记号与论文结构 9 2. P-度量与非交换 BMO 空间 10 2.1. P-度量 10 2.2. 半群 BMO $_{\mathcal{S}}$ 11 2.3. 度量型 BMO$_{\mathcal{Q}}$, $_{M}$ 12 2.4. 算子值权 13 2.5. 代数、解析、拓扑及算子条件 14 3. 定理 1.1 的证明 23 3.1. $L_\infty \to$ BMO 有界性 23 3.2. L^p有界性 27 4. 应用 30 4.1. 算子值情形 30 4.2. 量子欧几里得空间 36 4.3. 矩阵代数 39 4.4. 群冯诺依曼代数 41 参考文献 47

日期：2023年2月2日。2010年数学主题分类：42B37、35J10、47F05。关键词和短语：尖锐估计、薛定谔群、非交换 L^p 空间、P-度量、高消去 BMO 空间。

1. 引言

1.1. 背景与动机。薛定谔方程是量子力学中的基本方程。记 Δ 为欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 上的拉普拉斯算子，由 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ 给出，则薛定谔方程初值问题的解

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

初值为 $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ 的解可表示为

$$u(x,t) = e^{-it\Delta} f(x).$$

由 H¨ormander 的结果 [50] 可知，解算子族 $(e^{-it\Delta})_{t\in\mathbb{R}}$（也称为薛定谔群）仅当 $p = 2$ 时才在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界。对于一般的 $1 < p < \infty$，基于此前富有启发性的工作 [4, 61, 78], , Miyachi [66, 67] 证明算子 $e^{-it\Delta}$ 从索об列夫空间 $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ 到 $L_p(\mathbb{R}^n)$ 有界，其中 $s \geq \sigma_p := n|1/p - 1/2|$，且最优界为 $C(1 + |t|)^{\sigma_p}$（另见 [32]，该结果由 Fefferman 和 Stein 得出）。等价地，算子 $e^{-it\Delta}(I - \Delta)^{-s}$ 在 $L_p(\mathbb{R}^n)$ 上有界。此结果被称为端点 L_p 估计，因为当 $0 < s < \sigma_p$ 时，这种映射性质并不成立。该结果的证明严重依赖 Hardy 空间理论，以及对傅里叶乘子 $e^{it|\cdot|^2}$（算子 $e^{-it\Delta}$ 的符号）的傅里叶变换估计。

受偏微分方程和几何分析中更多应用的推动，与广义半群（或等价地说，广义拉普拉斯算子）相关的调和分析，例如拉普拉斯-贝尔特拉米算子、散度型算子和薛定谔算子等，在过去二十年里迅速发展（参见 [1, 27, 28, 45] 及其中的参考文献）。尤其是，在过去十年间，与一大类自伴算子 L 相关的薛定谔群 e^{itL} 的 L_p-正则性问题受到广泛关注。设 L 是 $L_2(X)$ 上的非负自伴算子，其中 X 是一个度量测度空间，配备距离函数 d 和测度 μ，并满足倍增性质：

$$\mu(B(x,\lambda r)) \leq C\lambda^n \mu(B(x,r)) \tag{1.2}$$

对于某个常数 C 和 n，它们与 $\lambda \geq 1$、$r > 0$ 及 $x \in X$ 无关。这里我们用 $B(x,r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的球。使上述不等式成立的最小 n 称为 X 的维数。根据谱理论，将薛定谔方程 (1.1) 中的 $-\Delta$ 替换为 L，且初值 $f \in L_2(X)$ 时，其解可表示为

$$u(x,t) = e^{itL} f(x).$$

经过多次艰苦尝试后， [3, 5, 9, 17, 51, 52, 70], Chen–Duong–Li–Yan [12] 为一大类L_p建立了尖锐端点正则性估计e^{itL}。具体而言，他们利用 Littlewood-Paley 不等式以及 Fefferman-Stein 锐极大函数的一种变体证明：如果与L相关的热核$p_t(x,y)$ 满足L 阶m高斯上界

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\mu(B(x,t^{1/m}))} \exp\left(-c\left(\frac{d(x,y)^m}{t}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right) \tag{GE$_m$}$$

对于某些常数 m ≥ 2 以及 C、c > 0（它们与 t > 0 和 x、y ∈ X 无关），那么对于任意 1 < p < ∞,

$$\|e^{itL}(I+L)^{-s}f\|_{L_p(X)} \le C(1+|t|)^{\sigma_p}\|f\|_{L_p(X)}, \text{ for any } s \ge \sigma_p.$$

另请参见 [6, 11, 12, 13, 30] 以了解更多进展。

另一方面，受算子代数、非交换鞅不等式和量子信息论的启发，已有若干关于量子半群相关调和分析的基础性研究（例$^{-tL}$）$_{t\ge0}$（例如，参见 [33, 54, 58, 59, 63]）。此外，这部分非交换调和分析在群代数上的傅里叶分析中发挥着重要作用（例如，参见 [55, 56, 72]）。然而，关于薛定谔群（例^{itL}）$_{t\in\mathbb{R}}$——量子半群向虚时间的解析延拓——在真正的非交换测度空间上的研究，现有文献似乎尚无相关结果。其背后的原因可能是，傅里叶变换、类似于（GE$_m$）的核估计、Hardy空间理论以及锐极大函数方法等关键工具在非交换情形下尚不可用，或没有完美的对应形式。

本文的主要任务是研究固定 t 时 e^{itL} 的映射性质，从而为一般非交换测度空间上的下列 Schr¨odinger 方程的解提供 L$_p$-正则性估计：

$$\begin{cases} i\partial_t u(t) + Lu(t) = 0, \ t > 0, \\ u(0) = f \in L_2(\mathcal{M}), \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{M}$ 是一个配备正规半有限忠实迹 τ 的半有限冯·诺依曼代数，且 L 是作用于 $L_2(\mathcal{M})$ 上的非负自伴算子，非交换 L_2 空间定义在 $\mathcal{M}$上。关于非交换积分理论中的更多术语，请参阅 [74] 。值得一提的是，L_p-正则性估计是 Schr¨odinger 方程（1.1）解的正则性问题中最重要的估计之一，而将其推广到非交换情形，可视为研究后续相关问题的起点，包括非交换局部平滑估计和非交换 Schr¨odinger 最大不等式；即使回到交换情形，这两者也都是现代调和分析的核心课题（例如参见 [23, 24, 34, 75]）。

为了实现我们的目标，我们首先注意到，即使在欧几里得情形下，目标算子 (I + L)$^{-\sigma_p}$e^{itL} 也是一种超出 Calder´on-Zygmund 框架的强奇异积分算子（例如参见[7, 10, 14]）。过去二十年来，非交换奇异积分算子理论取得了许多重大进展 [38, 48, 49, 53, 55, 57, 65, 71]。在这些成果中，我们特别想强调 Junge–Mei–Parcet–Xia 的开创性工作 [57],：他们首次在代数框架下引入了 Calder´on-Zygmund 理论的非交换形式。具体而言，在缺乏良好度量的情况下，他们证明了代数 Calder´on-Zygmund 算子在半有限冯诺依曼代数上的 L$_p$-有界性，其中该代数允许一个仅满足纯代数假设的马尔可夫半群。这一结果涵盖了经典情形和非交换情形中的许多具体例子。此外，对于几何信息匮乏的测度空间，这一结果也尤其值得关注。

尽管我们的目标算子属于奇异积分算子这一类，但它是超出 Calder´on-Zygmund 框架的强型算子，这意味着 Calder´on-Zygmund 理论无法直接应用于该算子。相反，我们需要挖掘 e^{itL} 所蕴含的额外振荡信息，并更细致地处理目标算子的奇异性。受代数 Calder´on-Zygmund 理论建立的启发，我们将引入第一种 Schr¨odinger 群理论形式，使其在纯代数框架下适用于一般的半有限冯诺依曼代数。

1.2. 主要结果。测度空间 $\mathcal{M}$ 上的半群 $\mathcal{S} = (S_t)_{t\geq 0}$ 是一族算子 $S_t\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，满足 $S_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 且 $S_t S_s = S_{t+s}$，其中任意 $t, s \geq 0$。若其一致有界并满足以下性质，则称其为有界半群:

(i) 每个 S_t 都是弱-$*$ 连续的完全正映射；(ii) 每个 S_t 都是自伴的，具体而言，

$$\tau(S_t(f)g) = \tau(fS_t(g)), \quad \text{for all } f, g \in \mathcal{M} \cap L_1(\mathcal{M}); \tag{1.4}$$

(iii) 映射 $t \to S_t$ 是逐点弱-$*$ 连续映射。

若有界半群 $\mathcal{S}$ 中的每个 S_t 都是压缩映射，则称其为次马尔可夫半群。此外，若次马尔可夫半群 $\mathcal{S}$ 满足额外的保单位性质，即 $S_t(1) = 1$，则称其为马尔可夫半群。除非另有说明，本文均假设底层非交换测度空间 $(\mathcal{M}, \tau)$ 配备了有界半群 $\mathcal{S} = (S_t)_{t\geq 0}$。注意，$\mathcal{S}$ 存在一个无穷小负生成元

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{S_t(f) - f}{t}$$

定义在 $\mathrm{dom}(A) = \cup_{1\leq p\leq\infty} \mathrm{dom}_p(A)$ 上，其中 $\mathrm{dom}_p(A)$ 定义为

$$dom_p(A) = \left\{ f \in L_p(\mathcal{M}) : \lim_{t\to 0} \frac{S_t(f) - f}{t} \text{ converges in } L_p(\mathcal{M}) \right\}.$$

容易验证，对于任意 $s > 0$ 以及 $f \in L_p(\mathcal{M})$，都有 $\frac{1}{s}\int_0^s S_t(f)\,dt \in \mathrm{dom}_p(A)$，这意味着当 $p < \infty$ 时，$\mathrm{dom}_p(A)$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中稠密；当 $p = \infty$ 时，它在 $\mathcal{M}$ 中弱-$*$ 稠密。记 A_p 为 A 在 $\mathrm{dom}_p(A)$ 上的限制。由 (1.4) 可知，$L := -A$ 是作用于 $L_2(\mathcal{M})$ 上的非负自伴算子。根据谱定理，对于任意有界博雷尔函数 $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$，可以定义一个 $L_2(\mathcal{M})$-有界算子 $F(L)$，其定义为

$$F(L) = \int_0^\infty F(\lambda)\,dE_L(\lambda),$$

其中 $E_L(\lambda)$ 是支集位于 L 的谱上的投影值测度。通过这一谱分解，非交换薛定谔方程¨（1.3）的解可表示为

$$u(t) = e^{itL} f, \text{ for any } t > 0.$$

为了尽可能广泛地建立代数薛定谔群理论¨，由于非交换性以及缺乏几何概念，我们会遇到许多困难。据我们所知，即便在欧几里得情形下，文献中也只有两种方法可以建立薛定谔群的L_p 估计。第一种方法是直接证明薛定谔群的L_p有界性，这在很大程度上依赖于锐极大函数的L_p有界性[12]。另一种方法是建立

目标算子在适当 Hardy 空间上的$H^1 \to L_1$有界性$e^{itL}(I+L)^{-n/2}$，首先利用 Hardy 空间的原子（或分子）分解 [11]，然后通过复插值结合平凡的L_2有界性。然而，在一般的非交换情形下，这些方法并不适用。为克服这些困难，我们的策略是直接建立$L_\infty \to BMO$有界性$e^{itL}(I+L)^{-n(1+iy)/2}$在适当 BMO空间上的有界性，而不借助其与相应 Hardy 空间之间的对偶性；即便在最经典的情形下，这也是一种全新的证明。该策略的实施可分为三个步骤：

步骤 1：构造一个“P-度量”，并证明相应的度量型 BMO 空间可以嵌入半群 BMO 空间。

我们将引入一种称为 P-度量的概念，它概括了 $(\mathcal{M},\tau)$ 中某种底层度量及位置。这个概念是对 [57]，中引入的马尔可夫度量的修改，但它包含了 $(\mathcal{M},\tau)$ 中底层度量的某些额外“位置”信息，因此我们称之为 P-度量。它由一个族确定

$$\mathcal{Q} = \{(R_{j,t}, \sigma_{j,t}) : j \in \mathbb{N}, t > 0\},$$

其中每个 $R_{j,t}$： $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$都是正规完全正幺映射，满足 $R_{j,t}(f) = f$，其中 $f \in \ker A_\infty$，即半群 $\mathcal{S}$ 的不动点子空间，而 $\sigma_{j,t}$ 是冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 中的元素，使得对于某个 $m \geq 2$，下列估计成立：

(i) 半群主导条件：$S_t(|\xi|^2) \leq \sigma_{j,t}^* R_j, m\sqrt{t}(|\xi|^2)\sigma_{j,t}, \forall t > 0$和 $\xi \in \mathcal{M}$；(ii) 平均支配条件： $\left\|R_{j,t}(|\xi|^2)\right\|_{\mathcal{M}} \lesssim \left\|R_j(|\xi|^2)\right\|_{\mathcal{M}}, \forall j \in \mathbb{N}$，$t > 0$和 $\xi \in \mathcal{M}$；(iii) 度量可积性条件：$k_{\mathcal{Q}} := \sup_{t>0} \left\| \sum_{j\geq 0} \sigma_{j,t}^* R_{j,t}(|\xi|^2) R_{j,t}(|\xi|^2) \sigma_{j,t} \right\|_{\mathcal{M}}^{1/2} < \infty$。

下文中，为简化记号，我们令 $R_t(f) := R_{0,t}(f)$，对任意 $f \in \mathcal{M}$。通过在具体例子中构造具体的 P-度量，我们将在第 2.1 节和第 4 节进一步说明促使我们作出这一定义的动机。

Let

$$\|f\|_{BMO_{\mathcal{S}}^c(\mathcal{M})} := \sup_{t>0} \left\| S_t |(I - S_t) f|^2 \right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}$$

以及 $\|f\|_{BMO_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})} := \max\{\|f\|_{BMO_{\mathcal{S}}^c(\mathcal{M})}, \|f^*\|_{BMO_{\mathcal{S}}^c(\mathcal{M})}\}$。受[54, 57, 64], 半群型 BMO 空间的启发，$BMO_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})$ 被定义为 $\mathcal{M}$ 在由 $\mathcal{S}$ 确定的某个希尔伯特模直和中的弱-$*$ 闭包（详见第2.2节）。如果 $\mathcal{S}$ 是一个允许马尔可夫膨胀的马尔可夫半群，则 $BMO_{\mathcal{S}}(M)$ 与 $L_p(\mathcal{M})$ 插值（见第3.2节）。给定与该半群相关的 P-度量以及 $M \in \mathbb{Z}_+$，我们如下定义 $f \in \mathcal{M}$ 的度量型 BMO（半）范数：

$$\|f\|_{BMO_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})} = \max\{\|f\|_{BMO_{\mathcal{Q}}^c(\mathcal{M})}, \|f^*\|_{BMO_{\mathcal{Q}}^c(\mathcal{M})}\},$$

$$\|f\|_{BMO_{\mathcal{Q}}^c(\mathcal{M})} := \sup_{t>0} \left\| R_{\sqrt[m]{t}} |(I - S_t) f|^2 \right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}.$$

那么不难看出 $BMO_{\mathcal{Q}}^c(\mathcal{M}) \subset BMO_{\mathcal{S}}^c(\mathcal{M})$（详见引理 2.2 ）。

步骤 2：为 L 提供合适的算子条件，使度量型 BMO 空间与高消去度量型 BMO 空间相一致。

为了确保我们抽象框架中的所有定义都有明确意义，我们将预先作出如下假设：对于任意将 $[0,\infty)$ 映射到 $\mathbb{C}$、且任意阶导数均有界的函数 F，谱乘子 $F(L): \mathcal{A}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ 存在某个弱-$*$ 稠密子代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$，使得对于所有 $1 \le p < \infty$，$\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中稠密。正文中将会看到，对于许多非交换模型，这一假设显然成立；而在我们将要讨论的半交换情形下，该假设可以放宽。

受最初源自一些经典思想的启发 [45, 46], ，本文将引入一种非交换高消去 BMO 空间，这一空间此前尚未见于非交换分析领域的文献。给定与该半群相关的 P-度量以及 $M \in \mathbb{Z}_+$，我们定义 M阶度量型 BMO（半）范数$f \in \mathcal{M}$ 如下：

$$\|f\|_{BMO_{Q,M}(\mathcal{M})} = \max\{\|f\|_{BMO^c_{Q,M}(\mathcal{M})}, \|f^*\|_{BMO^c_{Q,M}(\mathcal{M})}\},$$

$$\|f\|_{BMO^c_{Q,M}(\mathcal{M})} := \sup_{t>0} \left\| R_{\sqrt[m]{t}} |(I - S_t)^M f|^2 \right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}.$$

我们将证明，在适当的代数、解析和拓扑条件下（将在步骤 3 中进一步说明），对任意 $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$，

$$\|f\|_{BMO_{Q,1}(\mathcal{M})} \simeq \|f\|_{BMO_{Q,M}(\mathcal{M})}.$$

这一自改进性质对于建立与各种类型算子相关的谱乘子定理至关重要（例如 H¨ormander 型谱乘子 [26], 薛定谔群乘子 [12]），因为它赋予 BMO 函数在低频处更强的消去性质。

步骤 3：为 L 提供适当的算子条件，以建立高消去度量型 BMO 空间上的 $L_\infty \to$ BMO 有界性。

受引入马尔可夫度量这一思路的启发，P-度量概念背后的交换情形思路同样是寻找半群热核的逐点上界 $\mathcal{S}$，使得 S_t 能够被一族特定代数球（其半径为 $2_{j_m}\sqrt{t}$）上的平均算子 $R_{j,m\sqrt{t}}$ 之和所控制。在非交换情形下，映射 R_t（分别为 $R_{j,t}$）必须是关于某些投影 q_t（分别为 $q_{j,t}$）的平均。此时要全面解释这一概念过于技术化。不过，读者或许可以先关注作者给出的一个非平凡模型例子：

$$R_t f = \Big((id\otimes\tau)(q_t)\Big)^{-\frac{1}{2}} (id\otimes\tau)(q_t(1\otimes f)q_t)\Big((id\otimes\tau)(q_t)\Big)^{-\frac{1}{2}}$$

对于之后确定的某个递增投影族 $q := \{q_t\}_{t\ge 0} \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$。

与经典的薛定谔群理论和代数 Calderón-Zygmund 理论一样，为了与底层的（非交换）测度紧密联系，需要对 P-度量施加一些额外但恰当的条件（这些条件将分为代数条件、解析条件和拓扑条件）。此处我们只想指出，所施加的代数条件与代数 Calderón-Zygmund 理论中的条件非常相似，它们

是非交换性所固有的，在交换情形下则显然成立。解析条件给出了一个强倍增条件；在度量测度空间的情形下，该条件等价于倍增条件（1.2）（见第 4.1 节），但在一般框架下比倍增条件更强，因为它能够反映额外的覆盖性质。对于上一段提到的模型例子，强倍增条件指出存在常数 $C,n > 0, D \geq 0$，使得对于任意$r_1 \geq r_2 \geq r_3$ 以及 $f \in \mathcal{M}$,

$$\left\|(id\otimes\tau)\left(\left|(1\otimes f)q_{r_1}(id\otimes\tau)(q_{r_3})^{-\frac{1}{2}}\right|^2\right)\right\|_{\mathcal{M}} \leq C\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^D\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^n\left\|(id\otimes\tau)\left(\left|(1\otimes f)q_{r_2}(id\otimes\tau)(q_{r_2})^{-\frac{1}{2}}\right|^2\right)\right\|_{\mathcal{M}}.$$

In p特别地，取 f $= 1$ 和 $r_1 = r_2$, 时，这意味着倍增条件 :

$$\left\|\left((id\otimes\tau)(q_{r_3})\right)^{-\frac{1}{2}}\left((id\otimes\tau)(q_{r_1})\right)\left((id\otimes\tau)(q_{r_3})\right)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\mathcal{M}} \leq C\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^n.$$

相反，使上述不等式成立的最小常数 $n = n_q$ 称为 $\mathcal{M}$ 的 P-度量维数。结合 q 的适当取值，当 $\mathcal{M} = L_\infty(X)$ 时，它可追溯到 X 的齐性维数。拓扑条件为投影和放大映射提供了某种自然的连续性。

接下来，我们对 L施加算子条件。在模型例子中，我们的算子条件只是一个L_2-高斯估计，可将其视为高斯上界（GE$_m$）的‘积分型’替代，其表述如下：

存在常数 C、$c > 0$ 和 $m \geq 2$，使得对于任意 $t > 0$、$k \geq 1$、$0 < r_1 \leq r_2$ 以及 $f \in \mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}&\left\|(id\otimes\tau)\left|(id\otimes S_t)(fb_{k,r_2})q_{r_1}\left((id\otimes\tau)(q_{r_1})\right)^{-\frac{1}{2}}\right|^2\right\|_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq CE_k\left(-c\left(\frac{r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left\|(id\otimes\tau)\left|fb_{k,r_2}\left((id\otimes\tau)(q_{\max\{r_1,t^{1/m}\}})\right)^{-\frac{1}{2}}\right|^2\right\|_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{1.5}$$

其中

$$b_{k,r} = \begin{cases} q_{2r}, & \text{if } k = 1,\\ q_{2^k r} - q_{2^{k-1}r}, & \text{if } k \geq 2,\end{cases}$$

$$E_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 1,\\ \exp(2^{\frac{mk}{m-1}}x), & \text{if } k \geq 2.\end{cases}$$

在条件（2）中，$b_{k,r}$ 和 q_r 分别充当关于半径为 $2^k r$ 的代数环域和半径为 r的代数球的指标。在欧几里得情形下，该条件是（GE$_m$）的一个简单推论（更多细节请参见第 4.1 节）。在上文中，我们仅针对特殊的放大代数模型 $\mathcal{M}\bar{\otimes}\mathcal{M}$表述了条件，但我们的常规条件还将包括许多不同于该模型的其他放大代数，具体内容将在第 2.5节中说明。在这些更一般的条件下，我们的主要结果可表述如下。

定理 1.1. 设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个配备有有界半群 $\mathcal{S} = (e^{-tL})_{t\geq 0}$ 的半有限冯诺依曼代数，其关联的 P-度量 Q 满足我们的代数、解析和拓扑假设。那么存在常数 $C = C(n) > 0$，使得对于任意 f $\in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$,

$$\left\|e^{itL}(I+L)^{-s}f\right\|_{BMO_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})} \leq C(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}, \text{ for } s \geq \frac{n}{2}.$$

此外，如果 $\mathcal{S}$ 是一个具有马尔可夫膨胀的马尔可夫半群，那么对于任意 $1 < p < \infty$，

$$\left\| e^{itL}(I+L)^{-s} f \right\|_{L_p(\mathcal{M})} \le C(1+|t|)^{\sigma_p} \|f\|_{L_p(\mathcal{M})}, \text{ for } s \ge \sigma_p = n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|.$$

注 1.2. 定理 1.1 在以下意义下是尖锐的：在所施加的条件下，上界对 t 的依赖以及 s 所需的最小正则性均无法改进，这一点可由引言开头提到的经典例子 $L = -\Delta$ 看出。需要注意的是，在我们的框架下，不能期望对所有冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 和所有生成元 L都证明该估计是尖锐的。一个典型的反例是取 $\mathcal{M}$ 和 L 分别为 L_∞-空间上的海森堡群及其相应的次拉普拉斯算子。在这种情况下，阈值维数应为拓扑维数，而非齐性维数 [14]。

1.3. 应用。通过验证主定理的所有代数、解析、拓扑及算子条件（并作一些细微修改），我们将看到主要结果如何适用于各种具有特定 P-度量的具体冯·诺依曼代数。下面列出这些模型。

例 A. 倍增度量空间

在这个交换模型中，$\mathcal{M} = L_\infty(X)$ 中，我们将看到，我们的代数理论可恢复 Chen–Duong–Li–Yan 得到的结果（另请参见备注4.4中的更多评论）。换言之，在假设L^p在$(I + L)^{-\sigma_p} e^{itL}$ 有界的基础上，结合标准的复插值论证（例如参见$L_\infty \to BMO_L$ 有界性（参见 [11, 第 4]节）可为 (L 是$L_2(X)$ 上满足高斯上界（GE_m）的非负自伴算子。

例 B. 算子值情形

作为矩阵值调和分析的推广，算子值（半交换）调和分析已成为一个活跃的研究领域（例如参见 [47, 49, 60, 63, 71]及其中的参考文献）。算子值模型或许是最简单的非交换模型，但由于非交换性，通常需要革命性的论证方法才能开展分析。为说明我们在该模型上的应用，设 X 是一个维数为 n、配有距离函数 d 和非负 Borel 倍增测度 μ 的倍增度量空间。此外，设 $\mathcal{M}$ 是配备正规半有限忠实迹 τ 的半有限冯诺依曼代数，且 $\mathcal{N} = L_\infty(X) \bar{\otimes} \mathcal{M}$ 是配备张量迹 $R \otimes \tau$的冯·诺依曼代数张量积。另外，设 L 是 $L_2(X)$ 上的非负自伴算子。若与 L 关联的热核非负、满足高斯上界（GE_m），且生成的马尔可夫半群具有马尔可夫膨胀，则可应用我们的代数理论，证明当 $s \ge n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ 时，$(id_{\mathcal{N}} + L \otimes id_{\mathcal{M}})^{-s} e^{it(L \otimes id_{\mathcal{M}})}$ 的 L^p 有界性（更多细节见定理 4.3，更多评论见备注 4.5）。有许多具体的生成元满足我们的所有假设，例如 Δ_N 上的 Neumann 拉普拉斯算子（分别为 $\Delta_{N_\pm}$）（分别作用于 $\mathbb{R}^n$（分别为 $\mathbb{R}^n_\pm$））、[21], 配备 Dunkl 测度 [29], 的 Δ_{Dunkl} Dunkl 算子 $\mathbb{R}^N$，以及 Δ_g 定义在具有非负里奇曲率的 n 维完备黎曼流形上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子 [19, 第 5]节。

示例 C. 量子欧几里得空间

量子欧几里得空间（也称莫亚尔空间）是非交换几何的典型代数之一。Groenewold 等许多学者最初提出了这类空间 [40]，Moyal 也参与其中 [68],，旨在研究相空间中的量子力学。此外，这类空间的空间坐标彼此不可交换，是一种几何空间，已频繁出现在数理物理的多个分支中 [22],，包括弦理论 [77] 和非交换场论[69]。

近年来，量子欧几里得空间上的调和分析多个分支取得了许多突破，例如奇异积分理论 [38], 函数空间理论 [38, 82] 以及量子可微性 [62]。为说明我们在该空间上的应用，令 $\mathcal{R}_\Theta$ 为一个与反对称实值 $n \times n$ 矩阵相关联的量子欧几里得空间 Θ。记 Δ_Θ 为其上的自然量子拉普拉斯算子（详情参见第 4.2 节）。那么，我们的代数理论可用于建立 $L_p(\mathcal{R}_\Theta)$-有界性（$id_{\mathcal{R}_\Theta} - \Delta_\Theta$）$^{-s} e^{-it\Delta_\Theta}$ for$s \geq n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$（见定理4.6）。

例 D. 矩阵代数

记 $L_{B(\ell_2)}$ 为由 $B(l_2)$ 上的卷积型马尔可夫半群所诱导的非负无穷小生成元，其定义如下：

$$S_t\Big(\sum_{m,k} a_{m,k} e_{m,k}\Big) = \sum_{m,k} e^{-t|m-k|^2} a_{m,k} e_{m,k},$$

其中 $e_{m,k}$ 是 $B(l_2)$ 的矩阵单位。随后，我们的代数理论可用于证明 $(id_{B(\ell_2)} + L_{B(\ell_2)})^{-1/2} e^{itL_{B(\ell_2)}}$ 在 $s \geq \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ 时的 S_p-有界性（见定理 4.7），其中 S_p 表示希尔伯特空间 l_2 上的 Schatten-p 类。

示例 E. 群 von Neumann 代数

群冯诺伊曼代数上的傅里叶乘子研究可追溯至 Haarerup 关于自由群 [41] 的开创性工作。傅里叶乘子是借助逼近性质 [16, 20, 41, 44] 揭示这些代数几何结构的有效工具。值得注意的是，过去十年间，群冯诺伊曼代数上的傅里叶乘子 L_p-理论取得了丰硕成果（例如参见 [8, 15, 37, 55, 56]）。特别地，通过研究 $L_\infty \to BMO$ 端点不等式，Junge–Mei–Parcet [55] 在带有有限维余循环的离散群冯诺伊曼代数上，建立了具有最优光滑性条件的 L_p H¨ormander-Mihlin 乘子定理。为说明我们在这些代数上的应用，令 $\mathcal{L}(G)$ 为配备 n 维余循环的离散群 G 的群冯诺伊曼代数。于是，我们的代数理论可用于得到当 $s \geq n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|$ 时，具有乘子函数 $e^{it\psi(g)}(1 + \psi(g))^{-s}$ 的傅里叶乘子算子在 $L_p(\mathcal{L}(G))$ 上的有界性（见定理 4.11），其中 $\psi: G \to \mathbb{R}_+$ 是 G 上的长度函数。这为定理 D] 中的一个特定径向傅里叶乘子提供了另一种证明（另见定理 4.11 证明的第一段）。

1.4. 记号与论文结构。我们用 $A \lesssim B$ 表示存在某个常数 C，使得 $A \leq CB$ > 0；用 $A \simeq B$ 表示 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$。

本文结构如下。在第2节中，我们首先介绍 P-度量的概念，然后说明齐性空间中的度量如何与之相适应。其次，我们介绍非交换的

*M*阶半群 BMO 空间及其相关的度量型 BMO 空间，并证明二者之间的一个嵌入定理。第三，我们回顾算子值权的一些基本概念。最后，我们以最一般的形式表述代数条件、分析条件和算子条件，并在这些假设下建立低阶度量 BMO 空间与高阶度量 BMO 空间之间的联系。在第3节中，我们给出定理1.1的证明。在第4节中，我们通过在不同情形下验证所提出的条件，给出定理1.1 的若干应用。

2. P-度量与非交换 BMO 空间

2.1. P-度量。本小节将进一步阐释引言中介绍的 P-度量。下文将看到，对于交换模型情形，P-度量这一概念很容易理解。我们通过在 $L_\infty(X)$ 上构造一个 P-度量，来说明这一点；这里考虑更一般的冯·诺伊曼代数 $L_\infty(X)$。为此，设 ξ 是 X 上的有界复值函数。那么它满足以下半群主控关系

$$\int_X p_t(x,y)|\xi(y)|^2 d\mu(y) \le C\sum_{j\ge 0}\frac{\mu(B(x,2^j t^{1/m}))}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\exp(-c2^{\frac{jm}{m-1}})\fint_{B(x,2^j t^{1/m})}|\xi(y)|^2 d\mu(y)$$

其中 C、$c>0$ 与 $x\in X$ 和 $t>0$无关。这里用到了如下事实：当 $j=1,2$ 时，$\exp(-c2^{\frac{jm}{m-1}})\simeq 1$。这意味着 $R_{j,t}\xi(x)$ 是 $L_\infty(X)$ 在球 $B(x,2^j t)$ 上的平均值。接下来注意到，$B(x,2^j t^{1/m})$ 可以由至多 c^{jn} 个半径为 $t^{1/m}$ 且有限重叠的球覆盖。为简便起见，我们将这些球记为 $B_{j,1}(x,t^{1/m})$、$\cdots$、$B_{j,d_{j,n}}(x,t^{1/m})$，其中 $d_{j,n}\le c^{jn}$。这样的覆盖并不唯一，但我们固定选取一种覆盖。于是，对任意 $j\ge 0$ 和 $t>0$，以下平均主控不等式成立：

$$\begin{aligned}\left\|\fint_{B(x,2^j t^{1/m})}|\xi(y)|^2 d\mu(y)\right\|_{L_\infty(X)} &\le \left\|\sum_{\ell=1}^{d_{j,n}}\frac{\mu(B_{j,\ell}(x,t^{1/m}))}{\mu(B(x,2^j t^{1/m}))}\fint_{B_{j,\ell}(x,t^{1/m})}|\xi(y)|^2 d\mu(y)\right\|_{L_\infty(X)}\\ &\le \left\|\sum_{\ell=1}^{d_{j,n}}\frac{\mu(B_{j,\ell}(x,t^{1/m}))}{\mu(B(x,2^j t^{1/m}))}\right\|_{L_\infty(X)}\left\|\fint_{B(x,t^{1/m})}|\xi(y)|^2 d\mu(y)\right\|_{L_\infty(X)}\\ &\le C\left\|\fint_{B(x,t^{1/m})}|\xi(y)|^2 d\mu(y)\right\|_{L_\infty(X)}.\end{aligned}$$

如果我们选择

$$|\sigma_{j,t}(x)|^2 = C\frac{\mu(B(x,2^j t^{1/m}))}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\exp(-c2^{\frac{jm}{m-1}}),$$

那么根据倍增条件（1.2），

$$k_Q = C\left\|\sum_{j\ge 0}\frac{\mu(B(x,2^j t^{1/m}))}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\exp(-c2^{\frac{jm}{m-1}})\right\|_{L_\infty(X)}^{1/2} \le C\left(\sum_{j\ge 0}2^{jn}\exp(-c2^{\frac{jm}{m-1}})\right)^{1/2}<\infty,$$

这验证了条件 (i)-(iii)，并由此完成了 $L_\infty(X)$ 上 P-度量的构造。

2.2. 半群 $\mathrm{BMO}_{\mathcal{S}}$。给定 $M \in \mathbb{Z}_+$ 以及非交换测度空间 $(\mathcal{M},\tau)$，并设 B-次马尔可夫半群 $\mathcal{S}=(S_t)_{t\geq 0}$ 作用于 $(\mathcal{M},\tau)$，我们将 $f \in \mathcal{M}$的半群 $\mathrm{BMO}_{\mathcal{S},M}(\mathcal{M})$ 半范数定义为

$$\|f\|_{BMO_{\mathcal{S},M}(\mathcal{M})} := \max\left\{\|f\|_{BMO^r_{\mathcal{S},M}(\mathcal{M})}, \|f\|_{BMO^c_{\mathcal{S},M}(\mathcal{M})}\right\},$$

其中列 BMO 半范数定义为

$$\|f\|_{BMO^c_{\mathcal{S},M}(\mathcal{M})} := \sup_{t>0} \left\| S_t|(I-S_t)^M f|^2 \right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}$$

行 BMO 半范数定义为 $\|f\|_{BMO^r_{\mathcal{S}},M(\mathcal{M})} := \|f^*\|_{BMO^c_{\mathcal{S}},M(\mathcal{M})}$。为简便起见，我们记 $\mathrm{BMO}^\dagger_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}) := \mathrm{BMO}^\dagger_{\mathcal{S}},1(\mathcal{M})$ 和 $\mathrm{BMO}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}) := \mathrm{BMO}_{\mathcal{S}},1(\mathcal{M})$，其中 $\dagger \in \{c, r\}$。这里我们称$\|\cdot\|_{BMO_{\mathcal{S}}、M}(\mathcal{M})$ 和 $\|\cdot\|_{BMO^\dagger_{\mathcal{S}},M(\mathcal{M})}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的半范数，因为可以证明如下引理:

引理 2.1. 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是两个冯·诺依曼代数，T 是一个从 $\mathcal{N}$到 $\mathcal{M}$的正线性算子。那么 $\|\cdot\|_Z$ 是 $\mathcal{N}$上的半范数，其中 $\|x\|_Z := \|T(x^*x)\|_{\mathcal{M}}^{1/2}$。

证明。设 ϕ是 $\mathcal{M}$上的一个态。对于任意 $x, y \in \mathcal{N}$，定义 $\tilde{\phi}(x,y) := \phi(T(x^*y))$，于是可以轻易推出以下柯西-施瓦茨不等式:

$$|\tilde{\phi}(x,y)|^2 \leq \tilde{\phi}(x,x)\tilde{\phi}(y,y), \tag{2.1}$$

这意味着 $\tilde{\phi}(x+y, x+y)^{1/2} \leq \tilde{\phi}(x,x)^{1/2} + \tilde{\phi}(y,y)^{1/2}$。因此，

$$\|x+y\|_Z = \sup_{\phi \text{ is a state}} \phi(T((x+y)^*(x+y)))^{1/2} \leq \|x\|_Z + \|y\|_Z,$$

这意味着所需的结果。 □

对半范数 $\|\cdot\|_{BMO^c_{\mathcal{S}}的零空间取商后，\ M(\mathcal{M})}$ 在 $\mathcal{M}$上得到一个赋范向量空间，记为 $\left(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{BMO^c_{\mathcal{S},M(\mathcal{M})}}\right)$。现在，我们需要参照 [36, 54, 57]，利用希尔伯特模的概念（见 [73]），关于某个适当的拓扑完备化该空间。

给定一个从 $\mathcal{M}$到 $\mathcal{M}$的完全正映射 S_t，可以如下构造希尔伯特模 $\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}$: 令 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{S_t}$ 为 $\mathcal{M}$-值内积，其定义在 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}$上，并由下式给出

$$\left\langle \sum_i a_i \otimes b_i, \sum_j c_j \otimes d_j \right\rangle_{S_t} := \sum_{i,j} b_i^* S_t(a_i^* c_j) d_j$$

对于 $a_i、b_i、c_j、d_j \in \mathcal{M}$，我们考虑由 $\mathcal{M}$-值内积在 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}$上确定的半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}}$

$$\|x\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}} := \|\langle x,x\rangle_{S_t}^{1/2}\|_{\mathcal{M}}.$$

将半范数的零空间商掉后，我们得到一个记作$\left(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}}\right)$的赋范向量空间，而 $\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}$ 表示 $\left(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}}\right)$关于强算子拓扑的完备化，即使 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{M}$上的映射连续的最粗拓扑

$$x \to \tau(a\langle x,x\rangle_{S_t})$$

关于所有 $a, \in L_1(\mathcal{M})$ 连续。

设 $\mathrm{u}:\left(\mathcal{M},\|\cdot\|_{BMO^c_{S,M}(\mathcal{M})}\right)\to \mathrm{L}_{t>0}\,\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}$为由下式给出的等距映射:

$$u(x):=\left((I-S_t)^M x)\otimes 1\right)_{t>0}.$$

那么，列BMO空间 $BMO^c_{S,M}(\mathcal{M})$ 定义为 $*$中 $u(\mathcal{M})$ 的弱闭包，所在空间为 $\bigoplus_{t>0}\mathcal{M}\bar{\otimes}_{S_t}\mathcal{M}$，详见 [57] 。$BMO^r_{S,M}(\mathcal{M})$ 定义为由其伴随属于 $BMO^c_{S,M}(\mathcal{M})$ 的元素构成的空间。而 $BMO_{S,M}(\mathcal{M})$ 定义为行 BMO 空间与列 BMO 空间的交集。

2.3. 度量型 $BMO_{Q,M}$。 受 [57], 启发，我们为冯·诺依曼代数引入一种合适的度量型 BMO 空间，并将其与第 2.2 节定义的半群型 BMO 空间联系起来。给定作用于 $(\mathcal{M},\tau)$ 上的有界半群 $\mathcal{S}=(\mathrm{S}_t)_{t\geq 0}$，考虑第 2.1 节中给出的 P-度量 $Q=\{(\mathrm{R}_{j,t},\sigma_{j,t}):\mathrm{j}\in\mathbb{N},\mathrm{t}>0\}$。对于任意 $\mathrm{M}\in\mathbb{Z}_+$，我们将 $\mathrm{f}\in\mathcal{M}$ 的半群 $\mathrm{BMO}_{Q,M}(\mathcal{M})$ 半范数定义为

$$\|f\|_{BMO_{Q,M}(\mathcal{M})}=\max\left\{\|f\|_{BMO^c_{Q,M}(\mathcal{M})},\|f\|_{BMO^r_{Q,M}(\mathcal{M})}\right\},$$

其中，列 BMO 半范数定义为

$$\|f\|_{BMO^c_{Q,M}(\mathcal{M})}:=\sup_{t>0}\left\|R_{\sqrt[m]{t}}|(I-S_t)^M f|^2\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}}$$

行 BMO 半范数定义为 $\|f\|_{BMO^r_{Q,M}(\mathcal{M})}:=\|f^*\|_{BMO^c_{Q,M}(\mathcal{M})}$。为简便起见，我们记 $\mathrm{BMO}^\dagger_Q(\mathcal{M}):=\mathrm{BMO}^\dagger_{Q,1}(\mathcal{M})$，$\mathrm{BMO}_Q(\mathcal{M}):=\mathrm{BMO}_{Q,1}(\mathcal{M})$，其中 $\dagger\in\{\mathrm{c},\mathrm{r}\}$。

借助 P-度量，对于配备半群 $\{\mathrm{S}_t\}_{t\geq 0}$ 的经典模型 $\mathrm{L}_\infty(\mathrm{X})$，其中 L 是非负自伴算子，且其关联热核满足 (GE_m)，其度量型 BMO 空间由下式确定

$$\|f\|_{BMO_Q}:=\sup_{t\geq 0}\left(\sup_{y\in X}\fint_{B(y,\sqrt[m]{t})}|(I-S_t)f(x)|^2dx\right)^{1/2},$$

这诱导出$BMO_L(X)$ 空间，该空间在 [27, 28, 45]中讨论。

接下来，回顾 P-度量定义中常数 k_Q 的取值，我们证明对于任意 $\mathrm{M}\in\mathbb{Z}_+$，$\mathrm{BMO}_{Q,M}$ 嵌入 $\mathrm{BMO}_{S,M}$。

引理 2.2。设 $(\mathcal{M},\tau)$ 是一个配备有界半群$\mathcal{S}=(\mathrm{S}_t)_{t\geq 0}$和 P-度量 $Q=\{(\mathrm{R}_{j,t},\sigma_{j,t}):\mathrm{j}\in\mathbb{N},\mathrm{t}>0\}$ 的非交换测度空间。那么，对于任意 $\mathrm{M}\in\mathbb{Z}_+$和 $\mathrm{f}\in\mathcal{M}$,

$$\|f\|_{BMO^c_{S,M}}\lesssim k_Q\|f\|_{BMO^c_{Q,M}}.$$

证明。 根据第 2.1 节中 P-度量的定义，可得

$$\begin{aligned}
\|f\|_{BMO^c_{S,M}}&=\sup_{t>0}\left\|S_t|(I-S_t)^M f|^2\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}}\\
&\leq\sup_{t>0}\left\|\sum_{j\geq 0}\sigma^*_{j,t}R_{j,\sqrt[m]{t}}(|(I-S_t)^M f|^2)\sigma_{j,t}\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}}\\
&\leq\sup_{t>0}\left\|\sum_{j\geq 0}|\sigma_{j,t}|^2\left\|R_{j,\sqrt[m]{t}}(|(I-S_t)^M f|^2)\right\|_{\mathcal{M}}\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}}\\
&\leq\sup_{t>0}\left\|\sum_{j\geq 0}|\sigma_{j,t}|^2\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}}\sup_{t>0}\left\|R_{\sqrt[m]{t}}(|(I-S_t)^M f|^2)\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

$$\lesssim k_Q \|f\|_{BMO^c_{Q,\mathcal{M}}}.$$

引理 2.2 的证明到此结束。 □

2.4. 算子值权。 本小节汇集了算子值权的定义和基本性质，见 [42, 43]（另见 [57] 中的总结）。

c 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺依曼代数，则扩展正部 $\mathcal{M}_+$ 是由所有下半连续映射 $m : \mathcal{M}_{*,+} \to [0,\infty]$ 组成的集合，这些映射满足线性律：对于 $a, b \geq 0$ 和 $f, g \in \mathcal{M}_{*,+}$，有

$$m(af + bg) = am(f) + bm(g).$$

扩展正部对加法、数乘、递增极限以及由共轭映射定义的运算封闭，其中 $x \mapsto a^*xa$，对任意 $a \in \mathcal{M}$成立。显然， $\mathcal{M}_+$ 属于 $\mathcal{M}_+$。还要回顾的是，当 $\mathcal{M}$ 是阿贝尔的时，确实有 $\mathcal{M} \simeq L_\infty(\Omega, \mu)$，其中 (Ω, μ) 是某个测度空间。此外，在这种情况下，扩展正部对应于 Ω 上取值于 $[0,\infty]$ 的 μ-可测函数集合（模去零测集）。

算子值权可视为“无界条件期望”。关于这一概念，最简单的非平凡例子可能是偏迹 $E_{\mathcal{M}} = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$，其中 $\mathcal{A}$ 是半有限非有限冯·诺依曼代数。一般而言，算子值权是从冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}$ 到冯·诺依曼子代数 $d\mathcal{M}$的一种广义条件期望。具体来说，它是从 $\mathcal{N}_+$ 到 $\mathcal{M}_+$ 的线性映射，并满足

$$E_{\mathcal{M}}(a^* f a) = a^* E_{\mathcal{M}}(f) a \tag{2.2}$$

对所有 $a \in \mathcal{M}$均成立。当 $E_{\mathcal{M}}$ 满足如下条件时，称其为正规：对于 $\mathcal{N}_+$中的有界 α α递增网 (f_α)，有 $\sup E_{\mathcal{M}}(f_\alpha) = E_{\mathcal{M}}(\sup f_\alpha)$。

注意，当 $\mathcal{M} = \mathbb{C}$时，算子值权 $E_{\mathcal{M}}$ 成为 $\mathcal{N}$上的普通权。类比普通权，我们考虑

$$L^c_\infty(\mathcal{N}; E_{\mathcal{M}}) = \left\{ f \in \mathcal{N} : \|E_{\mathcal{M}}(f^* f)\|_{\mathcal{M}} < \infty \right\}$$

赋予自然（半）范数

$$\|f\|_{L^c_\infty(\mathcal{N};E_{\mathcal{M}})} := \|E_{\mathcal{M}}(f^* f)\|^{1/2}_{\mathcal{M}}.$$

注意，在 $E_{\mathcal{M}} = \mathrm{tr}_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$且 $\mathcal{N} = \mathcal{A}\bar{\otimes}\mathcal{M}$的情形下，$L^c_\infty(\mathcal{N}; E_{\mathcal{M}})$成为取值于希尔伯特空间的非交换 L_∞ 空间 $L^c_2(\mathcal{A})\bar{\otimes}\mathcal{M}$ （见 [57]），其定义见 [58]。

通过将 $\mathcal{M}$ 识别为 $B(L_2(\mathcal{M}))$ 的冯·诺依曼子代数，然后应用不等式（2.1），可得到以下等价的（半）范数

$$\|f\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} = \sup_{\|b\|_{L_2(\mathcal{M})}=1} \tau(b^* E_\rho(|f|^2) b)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.3}$$

这是一种处理方法 这是处理下一小节中定义的强算子拓扑的有效工具 .

令 $\mathcal{N}_{E_{\mathcal{M}}}$为 $f_1^* f_2$（其中 $f_1, f_2 \in L^c_\infty(\mathcal{N}; E_{\mathcal{M}})$）的线性张成。则有以下性质：

(i) $\mathcal{N}_{E_{\mathcal{M}}}$=span$\{f \in \mathcal{N}_+ : \|E_{\mathcal{M}} f\| < \infty\}$; (ii) $L^c_\infty(\mathcal{N}; E_{\mathcal{M}})$ 和 $\mathcal{N}_{E_{\mathcal{M}}}$ 是 $\mathcal{M}$上的双边模;

(iii) $E_{\mathcal{M}}$ 具有唯一的线性延拓 $E_{\mathcal{M}}$： $\mathcal{N}_{E_{\mathcal{M}}} \to \mathcal{M}$，满足双模性。也就是说，对于任意 $f \in \mathcal{N}_{E_{\mathcal{M}}}$ 和 $a、b \in \mathcal{M}$,

$$E_{\mathcal{M}}(afb) = aE_{\mathcal{M}}(f)b.$$

2.5. 代数、解析、拓扑及算子条件。 下文中，我们假设完全正幺映射 R_r 来自第2节 Q 中定义的 P-度量 2.1 具有如下形式：

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\rho_j} \mathcal{N}_\rho \xrightarrow{E_\rho} \rho_1(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}$$

$$R_r f = E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} E_\rho(q_r \rho_2(f) q_r) E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

其中， $\rho_1, \rho_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{N}_\rho$ 是映入某个冯·诺依曼代数$\mathcal{N}_\rho$ 的幺单射 $*$-同态，而映射 E_ρ : $\mathcal{N}_\rho \to \rho_1(\mathcal{M})$ 是第 2.4 节中定义的正规算子值权。元素 q_r 是关于 $\mathcal{N}_\rho$ 中 r 的递增投影，并满足稍后将给出的一些性质。特别地，我们假设 q_r 和 $q_r \mathcal{N}_\rho q_r$ 属于 E_ρ 的定义域，从而使我们关于 $R_r f$ 的公式有意义。我们的模型给出了 P-度量的一种相当一般的形式，其中包括此前讨论的热半群的 P-度量。事实上，在模型情形下，可以取 $\mathcal{N}_\rho = L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，其中 $\rho_1(f)(x, y) = f(x)$，且 $\rho_2(f)(x, y) = f(y)$。令 E_ρ 为关于变量 y 在 $\mathbb{R}^n$ 上的积分，并令 $q_r = \chi_{B(x,r)}(y)$。于是可以直接验证，我们从 (2.4) 得到热半群对应的 R_r。注意，在此情形下，q_r 再现了 $\mathbb{R}^n$中的所有欧几里得球。

现在我们对 P-度量建立一些初步的代数、解析和拓扑条件。令 $C^\infty b$ 表示从 $[0, \infty)$ 映射到 $\mathbb{C}$、且任意阶导数均有界的有界函数空间；我们施加一项先验假设：对于任意 $F \in C^\infty b$，谱乘子 $F(L) : \mathcal{A}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ 属于某个弱-$*$ 稠密子代数 $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$，并且对于任意 $1 < p < \infty$， $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ 在 $L_p(\mathcal{M})$ 中稠密。正如我们在引言中所提到的，上述假设并非关键条件。对于经典情形 $\mathcal{M} = L_\infty(\mathbb{R}^n)$，其中 $L = -\Delta$ 且 $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，这一点很容易看出。为简便起见，下文将 $V_\rho = L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; E_\rho) + \rho_2(\mathcal{A}_{\mathcal{M}})$ 记作 $\mathcal{L}(X)$，它表示由线性空间 X 上的所有线性算子组成的空间。假设对于任意 $F \in C^\infty b$，存在一个同态 π: $\{F(L)\}_{F \in C^\infty_b} \subset B(L_2(\mathcal{M})) \to \mathcal{L}(V_\rho)$，使得下述交织等式成立：对于任意 $F \in C^\infty b$,

$$\pi(F(L)) \circ \rho_2 = \rho_2 \circ F(L) \text{ on } \mathcal{A}_{\mathcal{M}}. \tag{2.5}$$

代数条件

(ALi) E_ρ 的 Q 单调性

$$E_\rho(b_{k,r} |\xi|^2 b_{k,r}) \le E_\rho(|\xi|^2)$$

对于任意 $k \ge 1$ 和 $\xi \in \mathcal{N}_\rho$，其中

$$b_{k,r} = \begin{cases} q_{2r}, & \text{if } k = 1, \\ q_{2^k r} - q_{2^{k-1} r}, & \text{if } k \ge 2, \end{cases}$$

由式（2.4_r）中的单位元确定的每个投影

(ALii) $\pi(\mathrm{F}(\mathrm{L}))$ 的右模性

$$\pi(F(L))(\eta E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}}) = (\pi(F(L))(\eta))\, E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}}$$

对所有 $\eta \in \mathrm{L}^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; \mathrm{E}\rho)$、$\mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty{}_b$ 和 $\mathrm{r} > 0$。

注 2.3. 我们将在下文看到，在经典理论中，所有代数条件都平凡成立。第一个条件实质上是说，对正函数在“球”或“环域”上的积分总是小于其在整个空间上的积分；而第二个条件则表示，可以将 $|\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{r})|^{-1/2}$ 从定义 F(L) 的依赖于 y 的积分中提出来。此外，第一个条件还表明，投影需要具备一定程度的交换性。特别地，我们将频繁使用以下不等式：对于任意 $\mathrm{a} \in \mathcal{N}_\rho$、$\mathrm{b} \in \mathcal{M}$ 和 $\mathrm{r} > 0$,

$$\|aq_r b\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \le \|ab\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \tag{2.6}$$

上述不等式可由算子值权的性质（2.2）结合条件 (ALi) 推导如下:

$$E_\rho(b^* q_r |a|^2 q_r b) = b^* E_\rho(q_r |a|^2 q_r) b \le b^* E_\rho(|a|^2) b = E_\rho(b^* |a|^2 b).$$

拓扑条件

定义 2.4. 设 $\{\mathrm{f}_k\}_k \subset \mathrm{L}^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; \mathrm{E}\rho)$ 且 $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; \mathrm{E}\rho)$。若对于任意 $\mathrm{b} \in \mathrm{L}_2(\mathcal{M})$，都有

$$\lim_{k\to\infty} \tau\Big(b^* E_\rho((f_k - f)^*(f_k - f)) b\Big) = 0.$$

(Ti) q_r 的连续性

q_s 收敛到 1，意即对任意 $\mathrm{r} > 0$、$\mathrm{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{f} \in \mathrm{V}\rho$,

$$\pi(F(L))(f q_s) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} \to \pi(F(L))(f) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} \text{ in the strong operator topology.}$$

(Tii) π 的连续性

若 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \mathrm{F}_k \to \mathrm{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 逐点成立且 $\sup \|\mathrm{F}_k\|_\infty < +\infty$，则对任意 $\mathrm{r} > 0$ 和 $\mathrm{f} \in \mathrm{V}\rho_k$,

$$\pi(F_k(L))(f) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} \to \pi(F(L))(f) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} \text{ in the strong operator topology.}$$

算子条件

(Oi) 有界性条件

$$\|\pi(F(L))\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)\to L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \le \|F\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$$

对所有 $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty{}_b$。

(Oii) L_2-高斯估计

存在 常数 C、$\mathrm{c} > 0$ 和 $\mathrm{m} \ge 2$ 使得对于任意 $\mathrm{t} > 0$、$\mathrm{k} \ge 1$、$\mathrm{r}_2 \ge \mathrm{r}_1$ 以及 $\mathrm{f} \in \mathcal{N}_\rho$,

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\pi(e^{-tL})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C E_k \left(-c\left(\frac{r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho(q_{\max\{r_1, t^{1/m}\}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中

$$E_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 1, \\ \exp(2^{\frac{mk}{m-1}}x), & \text{if } k \geq 2. \end{cases}$$

注 2.5. 我们将在第 4 节看到，对于一般冯·诺依曼代数，由于缺少良好的度量，L_2-高斯条件是点态高斯估计（GE$_m$）的一种合适替代。

解析条件

(ANi) 强倍增条件

T存在常数 C,n >0, D ≥ 0，使得对于任意 $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ 和 f $\in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ ，

$$\left\| E_\rho\left(\left| \rho_2(f) q_{r_1} E_\rho(q_{r_3})^{-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \right\|_{\mathcal{M}} \leq C \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^D \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^n \left\| E_\rho\left(\left| \rho_2(f) q_{r_2} E_\rho(q_{r_2})^{-\frac{1}{2}} \right|^2 \right) \right\|_{\mathcal{M}}.$$

注 2.6. 由于一般度量空间中缺少点态和位置的概念，无法进行覆盖操作。因此，在此条件下，我们应用能量不等式来揭示底层空间上的某种“覆盖现象”。更多细节可见最后一节中的应用。此外，我们想指出，通过选择参数 f $=1$ 和 $r_1 = r_2,$ ，此条件可推出以下倍增不等式：对于任意 $r_1 \geq r_2,$ ，存在常数 C, n >0 ，使得

$$E_\rho(q_{r_2})^{-\frac{1}{2}} E_\rho(q_{r_1}) E_\rho(q_{r_2})^{-\frac{1}{2}} \leq C \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n. \tag{2.8}$$

使上述不等式成立的最小常数 $n = n_q$ 称为 $\mathcal{M}$ 的 P-度量维数。

- 注：在第2.5 节和3.1节中，除非另有说明，我们假设所有条件均如上所述。

引理 2.7。 存在常数 C >0 ，使得对于任意 t >0、r >0 以及 f $\in L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; E_\rho)$,

$$\left\| \pi(e^{-tL})(f) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; E_\rho)} \leq C \left\| f E_\rho(q_{\max\{r,t^{1/m}\}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; E_\rho)}.$$

证明。由等式（2.3），

$$\text{LHS} = \sup_{\|b\|_{L_2(\mathcal{M})}=1} \left| \tau\left(b^* E_\rho(|(\pi(e^{-tL})(f) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}})|^2) b \right) \right|^{1/2}. \tag{2.9}$$

应用引理2.1，可知对于任意$N > 0$,

$$\begin{aligned} &\left| \tau\left(b^* E_\rho(|(\pi(e^{-tL})(f) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}})|^2) b \right) \right|^{1/2} \\ &\leq \left| \tau\left(b^* E_\rho(|(\pi(e^{-tL})(f(1 - q_{2^{N+1}\max\{r,t^{1/m}\}})) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}})|^2) b \right) \right|^{1/2} \\ &+ \sum_{k=1}^{N} \left| \tau\left(b^* E_\rho(|(\pi(e^{-tL})(f b_{k,\max\{r,t^{1/m}\}}) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}})|^2) b \right) \right|^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

根据不等式 (2.9) 和 (2.10，结合拓扑条件 (Ti)，可以很容易得出

$$\left\| \pi(e^{-tL})(f) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; E_\rho)} \leq \sum_{k \geq 1} \left\| \left(\pi(e^{-tL})(f b_{k,\max\{r,t^{1/m}\}}) \right) q_r E_\rho(q_r)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho; E_\rho)}. \tag{2.11}$$

应用算子条件 (Oii) 和代数条件 (ALi)，可以看出

$$\begin{aligned}
&\text{RHS of (2.11)}\\
&\le C\sum_{k\ge1}E_k(-c)\Big\|fb_{k,\max\{r,t^{1/m}\}}E_\rho(q_{\max\{r,t^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\
&= C\sum_{k\ge1}E_k(-c)\Big\|E_\rho(q_{\max\{r,t^{1/m}\}})^{-\frac12}E_\rho(b_{k,\max\{r,t^{1/m}\}}|f|^2b_{k,\max\{r,t^{1/m}\}})E_\rho(q_{\max\{r,t^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}\\
&\le C\sum_{k\ge1}E_k(-c)\Big\|E_\rho(q_{\max\{r,t^{1/m}\}})^{-\frac12}E_\rho(|f|^2)E_\rho(q_{\max\{r,t^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{\mathcal{M}}^{\frac12}\\
&\le C\Big\|fE_\rho(q_{\max\{r,t^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}.
\end{aligned}$$

引理 2.7 的证明到此结束。 □

我们需要使用下面这个版本的 Phragmen-Lindel¨ 定理（参见 [18, 引理 9]）。

引理 2.8。假设 F 是定义在 $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}z > 0\}$ 上的解析函数，并满足

$$|F(z)| \le a_1(\mathrm{Re}z)^{-b_1},$$
$$|F(t)| \le a_1 t^{-b_1}\exp(-a_2t^{-b_2}),$$

对于某个 $a_1, a_2 > 0, b_1 \ge 0, b_2 \in (0,1]$ 与 $z \in \mathbb{C}_+$ 和 $t > 0$ 无关）。那么对于任意 $z \in \mathbb{C}_+$,

$$|F(z)| \le a_1 2^{b_1}(\mathrm{Re}z)^{-b_1}\exp\Big(-\frac{a_2b_2}{2}|z|^{-b_2-1}\mathrm{Re}z\Big).$$

现在我们应用 Phragmén–Lindel¨of 定理，将 L_2-高斯估计从 $\mathbb{R}$ 传递到 $\mathbb{C}_+$。

引理 2.9。 存在常数 $C > 0$，使得对于任意 $z \in \mathbb{C}_+$、$k \ge 1$、$0 < r_1 \le r_2$ 和 $f \in \mathcal{N}_\rho$,

$$\begin{aligned}
&\Big\|\big(\pi(e^{-zL})(fb_{k,r_2})\big)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\
&\le CE_k\left(-c\left(\frac{r_2}{|z|^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\cos\theta\right)\Big\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{\max\{r_1,(\mathrm{Re}z)^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)},
\end{aligned}\tag{2.12}$$

其中 $\theta = \arccos$ 实部z比|z| 。

证明。 我们首先考虑 $k = 1$这种情形的证明。为此，注意到映射 π 是一个同态，我们应用引理 2.7 以及右模条件 (ALii)，并结合有界性条件 (Oi)，得出对于任意 $z \in \mathbb{C}_+$、$r_1 \ge 0$ 和 $f \in L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E\rho)$,

$$\begin{aligned}
\Big\|\big(\pi(e^{-zL})(f)\big)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} &= \Big\|\big(\pi(e^{-\frac{\mathrm{Re}z}{2}L})\pi(e^{-(z-\frac{\mathrm{Re}z}{2})L})(f)\big)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\
&\le C\Big\|\big(\pi(e^{-(z-\frac{\mathrm{Re}z}{2})L})(f)\big)E_\rho(q_{\max\{r_1,(\frac{\mathrm{Re}z}{2})^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\
&= C\Big\|\pi(e^{-(z-\frac{\mathrm{Re}z}{2})L})(fE_\rho(q_{\max\{r_1,(\frac{\mathrm{Re}z}{2})^{1/m}\}})^{-\frac12})\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\
&\le C\Big\|fE_\rho(q_{\max\{r_1,(\frac{\mathrm{Re}z}{2})^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\
&\le C\Big\|fE_\rho(q_{\max\{r_1,(\mathrm{Re}z)^{1/m}\}})^{-\frac12}\Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)},
\end{aligned}\tag{2.13}$$

其中，在最后一个不等式中，我们应用 $L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E\rho)$ 的定义以及倍增不等式 (2.8)，消去了 $(\frac{\mathrm{Re}z}{2})^{1/m}$ 中无关紧要的因子 $_{1\ 2}$，从而得到 $\mathrm{k}\ =1$ 时所需的估计。

为得到 $\mathrm{k}\ \geq 2$ 情形下所需的估计，令 ϕ 为 $\mathcal{M}$ 的一个态，并令 $\tilde{\phi}$ 为从 $\mathrm{L}^c_\infty \times \mathrm{L}^c_\infty$ 到 $\mathbb{C}$ 的线性˜ ˜泛函，由 $\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})\ =\phi(\mathrm{E}\rho(\mathrm{x}^*\mathrm{y}))$ 给出。取 $\mathrm{y}\ \in \mathrm{L}^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;\mathrm{E}\rho)$，使得 $\phi(\mathrm{y},\mathrm{y})\ =1$。对任意 $\mathrm{R}\ >0$，定义右半平面 $\mathbb{C}_+$ 上的解析函数

$$F(z) := e^{-Rz}\tilde{\phi}\left(\left(\pi(e^{-zL})(fb_{k,r_2})\right)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}},y\right). \tag{2.14}$$

由不等式（2.1）和（2.13），可知对任意 $z\ \in\mathbb{C}_+$,

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leq e^{-R\mathrm{Re}z}\tilde{\phi}\left(\left(\pi(e^{-zL})(fb_{k,r_2})\right)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}},\left(\pi(e^{-zL})(fb_{k,r_2})\right)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}\right)^{1/2}\\ &\leq e^{-R\mathrm{Re}z}\left\|\left(\pi(e^{-zL})(fb_{k,r_2})\right)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &\leq Ce^{-R\mathrm{Re}z}\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{\max\{r_1,(\mathrm{Re}z)^{1/m}\}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)},\end{aligned}$$

结合 $L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E\rho)$ 的定义以及倍增不等式（2.8），可得以下一对不等式

$$|F(z)| \leq C\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \tag{2.15}$$

and

$$|F(z)| \leq Ce^{-R\mathrm{Re}z}\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{(\mathrm{Re}z)^{1/m}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \tag{2.16}$$

接下来，由（2.16）和倍增不等式（2.8），可得

$$\begin{aligned}|F(z)| &\leq Ce^{-R\mathrm{Re}z}\left\|E_\rho(q_{(\mathrm{Re}z)^{1/m}})^{-\frac{1}{2}}E_\rho(q_{R^{-1/m}})E_\rho(q_{(\mathrm{Re}z)^{1/m}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{2}}\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{R^{-1/m}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &\leq Ce^{-R\mathrm{Re}z}\left(1+\frac{1}{(R\mathrm{Re}z)^{1/m}}\right)^{\frac{n}{2}}\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{R^{-1/m}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &\leq C(R\mathrm{Re}z)^{-\frac{n}{2m}}\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{R^{-1/m}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

另一方面 nd，对于任意 $s\ >0$，由不等式 (2.1) 和 L_2-高斯估计 (Oii)，我们有 e

$$|F(s)| \leq Ce^{-Rs}\exp\left(-c\left(\frac{2^kr_2}{s^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{\max\{r_1,s^{1/m}\}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}, \tag{2.18}$$

由此，再结合 $L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E\rho)$ 的定义和倍增不等式（2.8），可得以下两个不等式

$$|F(s)| \leq C\exp\left(-c\left(\frac{2^kr_2}{s^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \tag{2.19}$$

and

$$|F(s)| \leq Ce^{-Rs}\exp\left(-c\left(\frac{2^kr_2}{s^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{s^{1/m}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \tag{2.20}$$

接下来，由（2.20）和倍增不等式（2.8），可得

$$|F(s)| \le C(Rs)^{-\frac{n}{2m}} \exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{s^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho (q_{R^{-1/m}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \tag{2.21}$$

应用 Phragm´en-Lindel¨of定理 2.8 于不等式 (2.15) 和 (2.19，我们得出

$$|F(z)| \le C \exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{|z|^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}} \cos\theta\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho (q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}.$$

由于 F 依赖于 R，而常数 C 与 R 和 z 无关，因此我们选择 R = (Rez)$^{-1}$，得到

$$\begin{aligned} &\left|\tilde{\phi}\left(\left(\pi(e^{-zL})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E_\rho (q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}, y\right)\right| \\ &\le C \exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{|z|^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}} \cos\theta\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho (q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

再次应用 Phragm´en-Lindel¨of定理 2.8 于不等式 (2.17) 和 (2.21，我们推得

$$|F(z)| \le C R^{-\frac{n}{2m}} (\mathrm{Re} z)^{-\frac{n}{2m}} \exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{|z|^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}} \cos\theta\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho (q_{R^{-1/m}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \tag{2.23}$$

再次选择 R = (Rez)$^{-1}$，得到

$$\begin{aligned} &\left|\tilde{\phi}\left(\left(\pi(e^{-zL})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E_\rho (q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}, y\right)\right| \\ &\le C \exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{|z|^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}} \cos\theta\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho (q_{(\mathrm{Re} z)^{1/m}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

继续之前，回顾不等式 (2.1，对于 $x \in L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E\rho)$,

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho,E_\rho)} = \|E_\rho(x^*x)\|^{1/2}_{\mathcal{M}} &= \sup_{\phi \text{ is a state}} \phi(E_\rho(x^*x))^{1/2} \\ &= \sup_{\phi \text{ is a state}} \tilde{\phi}(x,x)^{1/2} \\ &= \sup_{\phi \text{ is a state}} \sup_{\tilde{\phi}(y,y)=1} |\tilde{\phi}(x,y)|. \end{aligned}$$

将 x替换为 $\left(\pi(e^{-zL})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}$代入上述不等式中，再利用不等式 (2.22) 和 (2.24，我们推得

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\pi(e^{-zL})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E_\rho (q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C \exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{|z|^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}} \cos\theta\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho (q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \end{aligned} \tag{2.25}$$

并且

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\pi(e^{-zL})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E_\rho (q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C \exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{|z|^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}} \cos\theta\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho (q_{(\mathrm{Re} z)^{1/m}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

这意味着估计式（2.12）。至此，引理2.9的证明结束。 □

接下来，我们定义 f 的 Besov 型范数为

$$\|F\|_{B^N} := \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{F}(\tau)|(1+|\tau|)^N d\tau,$$

其中 F 表示 f 的傅里叶变换。容易验证

$$\|FG\|_{B^N} \le \|F\|_{B^N}\|G\|_{B^N}.$$

此外，对于任意 R >0，我们将给定函数 F 的 R-伸缩记为 δ_RF(x) := F(Rx)。

引理 2.10. 存在常数 C >0，使得对于任意 R >0、k $\ge 2, 0 < r_1 \le r_2$ 和 f $\in \mathcal{N}_\rho$,

$$\begin{aligned} &\left\| (\pi(F(L))(f q_{2r_2}))\, q_{r_1} E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C\|\delta_R F\|_{B^0} \left\| f q_{2r_2} E_\rho(q_{\max\{r_1,R^{-1/m}\}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \end{aligned} \tag{2.27}$$

and

$$\begin{aligned} &\left\| (\pi(F(L))(f b_{k,r_2}))\, q_{r_1} E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C(\sqrt[m]{R}2^k r_2)^{-N}\|\delta_R F\|_{B^N} \left\| f b_{k,r_2} E_\rho(q_{\max\{r_1,R^{-1/m}\}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \end{aligned} \tag{2.28}$$

对于所有满足 suppF $\subset$ [–R、R] 的光滑函数 F。

证明。令 G(λ) = F(Rλ)e$^{\lambda}$。我们应用傅里叶反演公式

$$F(L) = G(L/R)e^{-L/R} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{(i\tau-1)R^{-1}L}\hat{G}(\tau)d\tau$$

以及放大映射 π t 的线性性，并结合拓扑条件 (Tii)，得到

$$\pi(F(L))(f)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \pi(e^{(i\tau-1)R^{-1}L})(f)q_{r_1}E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}}\hat{G}(\tau)d\tau, \tag{2.29}$$

其中反常积分在强算子拓扑下收敛。

接下来，我们应用引理2.9 并取$z = (1-i\tau)R^{-1} \in \mathbb{C}_+$，推得存在常数$C$，$c > 0$，使得对任意 $\tau \in \mathbb{R}$，$k \ge 1$，$R > 0$，$0 < r_1 \le r_2$ 以及$f \in \mathcal{N}_\rho$,

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\pi(e^{(i\tau-1)R^{-1}L})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C E_k\left(-c\left(\frac{\sqrt[m]{R}r_2}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right) \left\| f b_{k,r_2} E_\rho(q_{\max\{r_1,R^{-1/m}\}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

结合等式（2.3）和（2.29），可得

$$\begin{aligned} &\left\| (\pi(F(L))(f b_{k,r_2}))\, q_{r_1} E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C\int_{\mathbb{R}} \left\| \left(\pi(e^{(i\tau-1)R^{-1}L})(f b_{k,r_2})\right) q_{r_1} E_\rho(q_{r_1})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} |\hat{G}(\tau)|d\tau \\ &\le C\int_{\mathbb{R}} E_k\left(-c\left(\frac{\sqrt[m]{R}r_2}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)|\hat{G}(\tau)|d\tau \left\| f b_{k,r_2} E_\rho(q_{\max\{r_1,R^{-1/m}\}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

注意，最后一项由以下项控制

$$C\|G\|_{B^0}\left\|fq_{2r_2}E_\rho(q_{\max\{r_1,R^{-1/m}\}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}$$

若 k = 1且

$$C(\sqrt[m]{R}2^k r_2)^{-N}\|G\|_{B^N}\left\|fb_{k,r_2}E_\rho(q_{\max\{r_1,R^{-1/m}\}})^{-\frac{1}{2}}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}$$

若 k ≥ 2。为继续证明，注意到 suppF ⊂ [−R,R]，因此 suppF(R·) ⊂ [−1, 1]。于是，取函数 $\psi \in C_c^\infty$，使得 supp$\psi \subset [-2,2]$ 且 $\psi(\lambda) = 1$ 对 $\lambda \in [-1,1]$成立，我们有

$$G(\lambda) = F(R\lambda)e^\lambda = F(R\lambda)\psi(\lambda)e^\lambda,$$

这意味着

$$\|G\|_{B^N} \le C\|\delta_R F\|_{B^N}\|\psi(\lambda)e^\lambda\|_{B^N} \le C\|\delta_R F\|_{B^N}. \tag{2.32}$$

这就完成了引理2.10的证明。 □

命题 2.11. 对任意 M ∈ $\mathbb{Z}_+$ 且对所有 f ∈ $\mathcal{A}_\mathcal{M}$,

$$\|f\|_{BMO^c_{Q,1}} \simeq \|f\|_{BMO^c_{Q,M}}, \tag{2.33}$$

其中隐含常数取决于 M。

证明。我们首先证明，对于任意 f ∈ $\mathcal{A}_\mathcal{M}$,

$$\|f\|_{BMO^c_{Q,2}} \lesssim \|f\|_{BMO^c_{Q,1}}. \tag{2.34}$$

为证明这一点，我们应用 Kadison-Schwarz不等式和引理 2.2 得到

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &\le \sup_{t>0}\left\|R\sqrt[m]{t}|(I-e^{-tL})f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M} + \sup_{t>0}\left\|R\sqrt[m]{t}|e^{-tL}(I-e^{-tL})f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M} \\
&\le \sup_{t>0}\left\|R\sqrt[m]{t}|(I-e^{-tL})f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M} + \sup_{t>0}\left\|e^{-tL}(I-e^{-tL})f\right\|_\mathcal{M} \\
&\lesssim \sup_{t>0}\left\|R\sqrt[m]{t}|(I-e^{-tL})f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M} + \sup_{t>0}\left\|e^{-tL}|(I-e^{-tL})f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M} \\
&\lesssim \sup_{t>0}\left\|R\sqrt[m]{t}|(I-e^{-tL})f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

这就完成了不等式（2.34）的证明。对 $M \ge 1$ 进行归纳，可得

$$\|f\|_{BMO^c_{Q,M}} \lesssim \|f\|_{BMO^c_{Q,1}},$$

其中隐含常数取决于 M。

接下来需要证明上述不等式的逆向结论。首先，对于任意 M ≥ 2，我们注意到

$$\begin{aligned}
I &= (I-e^{-tL})^{M-1} + (I-(I-e^{-tL})^{M-1}) \\
&= (I-e^{-tL})^{M-1} + \sum_{k=1}^{M-1}(-1)^k\frac{(M-1)!}{k!(M-1-k)!}e^{-ktL}.
\end{aligned}$$

Then

$$\left\|R\sqrt[m]{t}|(I-e^{-tL})f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M} \le \left\|R\sqrt[m]{t}|(I-e^{-tL})^M f|^2\right\|^{1/2}_\mathcal{M}$$

$$+\sum_{k=1}^{M-1}\frac{(M-1)!}{k!(M-1-k)!}\left\|R_{\sqrt[m]{t}}|e^{-ktL}(I-e^{-tL})f|^2\right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}.$$

这意味着，只需证明对于任意 $1\le k\le M-1$,

$$\sup_{t>0}\left\|R_{\sqrt[m]{t}}|e^{-ktL}(I-e^{-tL})f|^2\right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}\lesssim\sup_{t>0}\left\|R_{\sqrt[m]{t}}|(I-e^{-tL})^M f|^2\right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}. \tag{2.35}$$

为证明这一点，我们首先选取 Φ 为支集包含于 $[1/2,2]$ 的光滑截断函数，使得

$$\int_0^\infty \Phi(s\lambda)(I-e^{-s\lambda})^M\frac{ds}{s}=1,\ \text{for } \lambda>0.$$

这一点与拓扑条件 (Tii) 一起意味着

$$\begin{aligned}&\pi(e^{-ktL}(I-e^{-tL}))(\rho_2(f))q_{\sqrt[m]{t}}E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac12}\\&=\int_0^\infty\pi\Big(e^{-ktL}(I-e^{-tL})\Phi(sL)(I-e^{-sL})^M\Big)(\rho_2(f))q_{\sqrt[m]{t}}E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac12}\frac{ds}{s},\end{aligned} \tag{2.36}$$

其中反常积分在强算子拓扑下收敛。这一点与交织等式 (2.5) 及公式 (2.3) 一起意味着

$$\begin{aligned}&\left\|R_{\sqrt[m]{t}}|e^{-ktL}(I-e^{-tL})f|^2\right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}\\&=\left\|\pi(e^{-ktL}(I-e^{-tL}))(\rho_2(f))q_{\sqrt[m]{t}}E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac12}\right\|_{L_\infty^c(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\&\le\int_0^\infty\left\|\pi\left(e^{-ktL}(I-e^{-tL})\Phi(sL)(I-e^{-sL})^M\right)(\rho_2(f))q_{\sqrt[m]{t}}E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac12}\right\|_{L_\infty^c(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\frac{ds}{s}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

接下来，令 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的支集包含于 $\psi\in[1/8,4]$，且 $\psi(\lambda)=1$ 对于 $\lambda\in[1/2,2]$。为简单起见，我们记

$$F_{k,t,s}(\lambda):=e^{-kt\lambda}(I-e^{-t\lambda})\Phi(s\lambda),$$

满足：对任意 $N\ge0$，存在常数 $C=C_N>0$，使得

$$\begin{aligned}\|\delta_{s^{-1}}F_{k,t,s}\|_{B^N}&\le\left\|e^{-\frac{kt\lambda}{s}}(1-e^{-\frac{t\lambda}{s}})\Phi(\lambda)\right\|_{C^{N+2}}\\&\le\left\|e^{-\frac{kt\lambda}{s}}\Phi(\lambda)\right\|_{C^{N+2}}\left\|(1-e^{-\frac{t\lambda}{s}})\psi(\lambda)\right\|_{C^{N+2}}\\&\le C_N\min\left\{\left(\frac{t}{s}\right)^{-N},\left(\frac{t}{s}\right)\right\},\end{aligned} \tag{2.38}$$

其中 C^N 是由所有 N 阶可微函数组成的空间，并赋予如下范数：

$$\|f\|_{C^N}:=\sum_{k=1}^N\left\|\frac{d^k}{dx^k}f\right\|_{L_\infty}.$$

根据不等式（2.37），

$$\begin{aligned}\left\|R_{\sqrt[m]{t}}|e^{-ktL}(I-e^{-tL})f|^2\right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}&\le\int_0^t\left\|\Big(\pi(F_{k,t,s}(L))\rho_2((I-e^{-sL})^Mf)\Big)q_{\sqrt[m]{t}}E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac12}\right\|_{L_\infty^c(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\frac{ds}{s}\\&\quad+\int_t^\infty\left\|\Big(\pi(F_{k,t,s}(L))\rho_2((I-e^{-sL})^Mf)\Big)q_{\sqrt[m]{t}}E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac12}\right\|_{L_\infty^c(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\frac{ds}{s}\\&=:\mathrm{I}+\mathrm{II}.\end{aligned}$$

为了估计项 I，我们按照（2.11）的估计方法，然后应用引理 2.10 得出

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\le \int_0^t \sum_{j\ge 1} \left\| \left(\pi(F_{k,t,s}(L))(\rho_2((I-e^{-sL})^M f) b_{j,\sqrt[m]{t}}\right) q_{\sqrt[m]{t}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \int_0^t \sum_{j\ge 1} 2^{-jN} \|\delta_{s^{-1}} F_{k,t,s}\|_{B^N} \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) b_{j,\sqrt[m]{t}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \int_0^t \sum_{j\ge 1} 2^{-jN} \left(\frac{t}{s}\right)^{-N} \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) b_{j,\sqrt[m]{t}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

结合强倍增条件 (ANi)，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &\le C \int_0^t \sum_{j\ge 1} 2^{-jN} \left(\frac{t}{s}\right)^{-N} \left(\frac{2^j \sqrt[m]{t}}{\sqrt[m]{s}}\right)^{\frac{D}{2}} 2^{\frac{jn}{2}} \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) q_{\sqrt[m]{s}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{s}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{N-\frac{D}{2m}} \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) q_{\sqrt[m]{s}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{s}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \sup_{s>0} \left\| R_{\sqrt[m]{s}} |(I-e^{-sL})^M f|^2 \right\|_{\mathcal{M}}^{1/2},
\end{aligned}$$

其中，取 N 为充分大的常数。

为估计第 II 项，我们沿用式 (2.11) 的估计，然后应用引理 2.10 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\le \int_t^\infty \sum_{j\ge 1} \left\| \left(\pi(F_{k,t,s}(L))(\rho_2((I-e^{-sL})^M f) b_{j,\sqrt[m]{s}}\right) q_{\sqrt[m]{t}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{t}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \int_t^\infty \sum_{j\ge 1} 2^{-jN} \|\delta_{s^{-1}} F_{k,t,s}\|_{B^N} \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) b_{j,\sqrt[m]{s}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{s}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \int_t^\infty \sum_{j\ge 1} 2^{-jN} \left(\frac{t}{s}\right) \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) b_{j,\sqrt[m]{s}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{s}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

结合强倍增条件 (ANi)，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &\le C \int_t^\infty \sum_{j\ge 1} 2^{-j(N-\frac{n}{2}-\frac{D}{2})} \left(\frac{t}{s}\right) \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) q_{\sqrt[m]{s}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{s}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \int_t^\infty \left(\frac{t}{s}\right) \left\| \rho_2((I-e^{-sL})^M f) q_{\sqrt[m]{s}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{s}})^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \frac{ds}{s} \\
&\le C \sup_{s>0} \left\| R_{\sqrt[m]{s}} |(I-e^{-sL})^M f|^2 \right\|_{\mathcal{M}}^{1/2},
\end{aligned}$$

其中，取 N 为充分大的常数。

结合第 I 项和第 II 项的估计，命题 2.11的证明 □

3. 定理证明 1.1

3.1. $L_\infty \to BMO$ 有界性。在本小节中，我们将证明定理 1.1的第一个结论。为后续的复插值，我们将给出一个更强的论证

在相同条件下。也就是说，我们将证明存在一个常数 C ＞0，它与 t ＞0 和 y ∈ℝ 无关，使得

$$\left\|e^{itL}(I+L)^{-s(1+iy)}f\right\|_{BMO_S(\mathcal{M})} \le C(1+|y|)^{s+3}(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}, \text{ for } s \ge n/2. \tag{3.1}$$

那么，定理1.1 的第一个结论可直接通过选取$y = 0$得到。

首先，我们将运用一个简单的论证，将证明简化为列 BMO 估计。为此，我们假设 $e^{itL}(I+L)^{-s(1+iy)}$：$\mathcal{A}_{\mathcal{M}} \to \mathrm{BMO}^c_S(\mathcal{M})$ 有界于 $C(1+|y|)^{s+1}(1+|t|)^{n/2}$，其中常数 C ＞0 与 t ∈ℝ无关。注意到

$$(e^{itL}(I+L)^{-s(1+iy)}f)^* = e^{-itL}(I+L)^{-s(1-iy)}f^*,$$

then

$$\begin{aligned}\left\|e^{itL}(I+L)^{-s(1+iy)}f\right\|_{BMO^r_S(\mathcal{M})} &= \left\|e^{-itL}(I+L)^{-s(1-iy)}f^*\right\|_{BMO^c_S(\mathcal{M})}\\ &\le C(1+|y|)^{s+1}(1+|t|)^{n/2}\|f^*\|_{\mathcal{M}}\\ &\le C(1+|y|)^{s+1}(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

结合引理2.11，可知只需证明 $e^{itL}(I+L)^{-s(1+iy)}$ 的列 BMO 估计：证明对于给定的一个较大的正M，存在常数$C > 0$与t 无关，使得对于任意$f \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$,

$$\|F(L)f\|_{BMO^c_{Q,M}(\mathcal{M})} \le C(1+|y|)^{s+1}(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}, \tag{3.2}$$

为简便起见，我们记 $F(u) = e^{itu}(1+u)^{-s(1+iy)}$。

为证明这一点，回顾一下 ρ_2 是一个 $*$-同态，从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}_\rho$，应用等式（2.5）以及算子值权的性质，可得

$$\begin{aligned}\left\|R_{\sqrt[m]{\lambda}}|(I-e^{-\lambda L})^M F(L)f|^2\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}} &= \left\|\left(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L))(\rho_2(f))\right) q_{\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &\le \left\|\left(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L))(\rho_2(f)q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})\right) q_{\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &+ \left\|\left(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L))(\rho_2(f)(1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}))\right) q_{\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &=: \mathrm{I} + \mathrm{II}.\end{aligned}$$

为了估计项 I，应用不等式（2.6）以及条件 (ALii)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \left\|\left(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L))(\rho_2(f)q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})\right) q_{\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &\le \left\|\left(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L))(\rho_2(f)q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})\right) E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &= \left\|\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L))(\rho_2(f)q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12})\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}.\end{aligned}$$

接下来，我们应用条件 (Oi) 和 (ANi) 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &\le \left\|\rho_2(f)q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}\\ &\le \left\|E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} E_\rho(q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}) E_\rho(q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}\right\|^{1/2}_{\mathcal{M}}\|f\|_{\mathcal{M}}\\ &\le C(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

为了估计第 II 项，我们令 ϕ 为 $\mathbb{R}$ 上的非负 C_c^∞ 函数，使得 $\mathrm{supp}\phi \subset (1/4, 1)$，并且

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-\ell}u) = 1, \quad \text{for any } u > 0.$$

为简便起见，我们令 $\phi_\ell(u) = \phi(2^{-\ell}u)$。取 $\nu_0 \in \mathbb{Z}_+$ 使得

$$\begin{cases} 4 \le 2^{\nu_0 - \ell(m-1)/m}\sqrt[m]{\lambda} < 8, & \text{if } 2^{-\ell(m-1)/m}\sqrt[m]{\lambda} < 1, \\ \nu_0 = 2, & \text{if } 2^{-\ell(m-1)/m}\sqrt[m]{\lambda} \ge 1. \end{cases}$$

注意，若 $2^{\ell(m-1)/m} < {}_m\sqrt{\lambda}$，则有

$$q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}} = q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}} q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}.$$

结合类似于估计(2.37)和(2.11)的方法来处理无穷和的收敛性，可得

$$\begin{aligned} (3.3)\quad \mathrm{II} &\le \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \Big\| \Big(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L)\phi_\ell(L))(\rho_2(f)(1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}))\Big) q_{\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le \sum_{\ell:2^{\ell(m-1)/m}>\sqrt[m]{\lambda}} \Big\| \Big(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L)\phi_\ell(L))(\rho_2(f)((1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}))\Big) \times \\ &\qquad \times q_{\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\quad + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \sum_{\nu\ge\nu_0} \Big\| \Big(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L)\phi_\ell(L))(\rho_2(f) b_{\nu,(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})\Big) q_{\sqrt[m]{\lambda}} E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &=: \mathrm{(a)} + \mathrm{(b)}. \end{aligned}$$

对于第 (a) 项，我们注意到函数 $F_\ell(u) := (1-e^{-\lambda u})^M F(u)\phi_\ell(u)$ 满足

$$\|F_\ell\|_\infty \le C \min\{1, (2^\ell\lambda)^M\} \min\{1, 2^{-\ell s}\} \le C \min\{1, (2^\ell\lambda)^M\} 2^{-\ell n/2}.$$

结合不等式(2.6)以及条件(ALii)和(Oi)，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{(a)} &\le \sum_{\ell:2^{\ell(m-1)/m}>\sqrt[m]{\lambda}} \Big\| \Big(\pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L)\phi_\ell(L))(\rho_2(f)((1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}))\Big) E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &= \sum_{\ell:2^{\ell(m-1)/m}>\sqrt[m]{\lambda}} \Big\| \pi((I-e^{-\lambda L})^M F(L)\phi_\ell(L))(\rho_2(f)((1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}) E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12}) \Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ &\le C \sum_{\ell:2^{\ell(m-1)/m}>\sqrt[m]{\lambda}} \min\{1, (2^\ell\lambda)^M\} 2^{-\ell n/2} \Big\| \rho_2(f)((1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}) E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)} \\ (3.4)\quad &\le C \sum_{\ell:2^{\ell(m-1)/m}>\sqrt[m]{\lambda}} \min\{1, (2^\ell\lambda)^M\} 2^{-\ell n/2} \Big\| E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} E_\rho((1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}) E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{\mathcal{M}}^{1/2} \|f\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

接下来，由倍增不等式（2.8）和 ν_0 的定义可知，若 $2^{\ell(m-1)/m} > {}_m\sqrt{\lambda}$，则

$$\begin{aligned} &\Big\| E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} E_\rho((1-q_{4(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}})q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}) E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{\mathcal{M}}^{1/2} \\ &\le C \Big\| E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} E_\rho(q_{2^{\nu_0}(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}) E_\rho (q_{\sqrt[m]{\lambda}})^{-\frac12} \Big\|_{\mathcal{M}}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\le C(1+|t|)^{n/2}2^{\frac{\nu_0 n}{2}}$$
$$\le C(1+|t|)^{n/2}(2^{\ell(m-1)/m}(\sqrt[m]{\lambda})^{-1})^{n/2}.$$

将上述不等式代入（3.4），我们得出

$$\text{(a)} \le C(1+|t|)^{n/2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\min\{1,(2^\ell\lambda)^M\}(2^\ell\lambda)^{-\frac{n}{2m}}\|f\|_{\mathcal{M}}.$$
$$\le C(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}.$$

对于项 (b)，应用引理2.10 可得

$$\text{(b)} \le \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\ge\nu_0}(2^{\ell/m}2^\nu(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda})^{-N}\|\delta_{2^\ell}(F_\ell)\|_{B^N}\left\|\rho_2(f)b_{\nu,(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}E_\rho(q\sqrt[m]{\lambda})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}. \tag{3.5}$$

接下来，我们断言

$$\|\delta_{2^\ell}(F_\ell)\|_{B^N} \le C\max\{1,2^{(N-n/2)\ell}\}(1+|y|)^{s+1}(1+|t|)^N\min\{1,(2^\ell\lambda)^M\}. \tag{3.6}$$

为证明这一点，令 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的支集包含于 $\psi\in[1/8,2]$，且对 $u\in[1/4,1]$，有 $\psi(u)=1$。于是，对任意 $l\in\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\|\delta_{2^\ell}(F_\ell)\|_{B^N} &= \|\phi(\cdot)(1-e^{2^\ell\lambda\cdot})^M F(2^\ell\cdot)\|_{B^N}\\ &\le \|\psi(\cdot)(1-e^{2^\ell\lambda\cdot})^M(1+2^\ell\cdot)^{-isy}\|_{B^N}\|\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot)\|_{B^N}\\ &\le \|\psi(\cdot)(1-e^{2^\ell\lambda\cdot})^M(1+2^\ell\cdot)^{-isy}\|_{C^{N+2}}\|\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot)\|_{B^N}\\ &\le C(1+|y|)^{N+2}\min\{1,(2^\ell\lambda)^M\}\|\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot)\|_{B^N},\end{aligned}$$

其中记 $G(u):=(1+u)^{-s}e^{itu}$。

来估计 $\|\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot)\|_{B^N}$。由 $\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot)$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}(\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot))$ 可得

$$\mathcal{F}(\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot))(\tau)=\int_{\mathbb{R}}\phi(u)\frac{e^{i(2^\ell t-\tau)u}}{(1+2^\ell u)^s}du.$$

利用分部积分可得，对任意 $a\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(\phi(\cdot)G(2^\ell\cdot))(\tau)| &\le C_N\min\{1,2^{-\ell s}\}(1+|2^\ell t-\tau|)^{-a}\\ &\le C_N\min\{1,2^{-\ell n/2}\}(1+|2^\ell t-\tau|)^{-a},\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}\|\phi(u)G(2^\ell u)\|_{B^N} &\le C\min\{1,2^{-\ell n/2}\}\int_{\mathbb{R}}(1+|2^\ell t-\tau|)^{-s}(1+|2^\ell t-\tau|)^N d\tau\\ &\le C\max\{1,2^{(N-n/2)\ell}\}(1+|t|)^N.\end{aligned}$$

综合这些估计，我们完成了对（3.6）的证明。

现在，选取 $N=s+\frac12$ 使得 $N>n/2$，将（3.6）代入（3.5），然后应用倍增不等式（2.8），可得

$$\text{(b)} \le C(1+|y|)^{s+3}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\ge\nu_0}(2^{\ell/m}2^\nu\sqrt[m]{\lambda})^{-N}\max\{1,2^{(N-s)\ell}\}\min\{1,(2^\ell\lambda)^M\}$$
$$\times\left\|\rho_2(f)b_{\nu,(1+|t|)\sqrt[m]{\lambda}}E_\rho(q\sqrt[m]{\lambda})^{-\frac12}\right\|_{L^c_\infty(\mathcal{N}_\rho;E_\rho)}$$

$$\le C(1+|y|)^{s+3}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\ge\nu_0}(2^{\ell/m}2^{\nu}\sqrt[m]{\lambda})^{-N}\max\{1,2^{(N-s)\ell}\}\min\{1,(2^{\ell}\lambda)^{M}\}$$

$$\times\left\|E_\rho(q\sqrt[m]{\lambda})^{-\frac12}E_\rho(q_{2^\nu(1+|t|)}\sqrt[m]{\lambda})E_\rho(q\sqrt[m]{\lambda})^{-\frac12}\right\|_{\mathcal{M}}^{1/2}\|f\|_{\mathcal{M}}$$

$$\le C(1+|y|)^{s+3}(1+|t|)^{n/2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{\nu\ge\nu_0}2^{-\nu(N-n/2)}(2^{\ell/m}\sqrt[m]{\lambda})^{-N}\max\{1,2^{(N-s)\ell}\}\min\{1,(2^{\ell}\lambda)^{M}\}\|f\|_{\mathcal{M}}. \tag{3.7}$$

根据 $\nu_0\ge 0$的定义，我们可推得

$$\begin{aligned}(\mathrm{b}) &\le C(1+|y|)^{s+3}(1+|t|)^{n/2}\sum_{\ell>0}(2^{-\ell(m-1)/m}\sqrt[m]{\lambda})^{N-n/2}(2^{\ell/m}\sqrt[m]{\lambda})^{-N}2^{(N-s)\ell}\min\{1,(2^{\ell}\lambda)^{M}\}\|f\|_{\mathcal{M}}\\ &+C(1+|y|)^{s+2}(1+|t|)^{n/2}\sum_{\ell\le 0}(2^{\ell}\lambda)^{-\frac{N}{m}}\min\{1,(2^{\ell}\lambda)^{M}\}\|f\|_{\mathcal{M}}\\ &\le C(1+|y|)^{s+3}(1+|t|)^{n/2}\sum_{\ell>0}(2^{\ell}\lambda)^{-\frac{n}{2m}}\min\{1,(2^{\ell}\lambda)^{M}\}\|f\|_{\mathcal{M}}\\ &+C(1+|y|)^{s+3}(1+|t|)^{n/2}\sum_{\ell\le 0}(2^{\ell}\lambda)^{-\frac{N}{m}}\min\{1,(2^{\ell}\lambda)^{M}\}\|f\|_{\mathcal{M}}\\ &\le C(1+|y|)^{s+3}(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}\tag{3.8}$$

结合 (a) 和 (b) 的估计，我们推得

$$\mathrm{II}\le C(1+|y|)^{s+3}(1+|t|)^{n/2}\|f\|_{\mathcal{M}}.$$

因此，定理 1.1 第一条陈述的证明至此完成。

3.2. L^p 有界性。 在证明主定理剩余部分之前，我们先回顾 [2, 第 4] 节中的复插值。插值对 (X_0,X_1) 是两个可连续嵌入到某个拓扑向量空间中的巴拿赫空间 X。考虑和空间 X_0+X_1 以及交空间 $X_0\cap X_1$,，它们是赋予如下范数的巴拿赫空间

$$\|x\|_{X_0+X_1}:=\inf\{\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1}:x=x_0+x_1,x_0\in X_1,x_1\in X_1\}$$
$$\|x\|_{X_0\cap X_1}:=\max\{\|x\|_{X_0},\|x\|_{X_1}\}.$$

令 $S=\{z\in\mathbb{C}:0<\mathrm{Re}\,z<1\}$ 表示复平面中的开条带，S 表示其闭包 $\bar{S}=\{z\in\mathbb{C}:0\le\mathrm{Re}\,z\le 1\}$。令 $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ 表示所有取值于 X_0+X_1 且满足以下条件的函数 f 的族：

(1) f 在 S 上有界且连续，并在 S 上解析；(2) 对所有 $t\in\mathbb{R}$，$f(it)\in X_0$ 且 $f(1+it)\in X_1$；(3) 当 $|t|\to\infty$ 时，$\|f(it)\|_{X_0}$、$\|f(1+it)\|_{X_1}$ 趋于 0。

则 $\mathcal{F}(X_0,X_1)$ 是一个赋范的巴拿赫空间，其范数定义为

$$\|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)}:=\max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(it)\|_{X_0},\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(1+it)\|_{X_1}\right\}.$$

对于 $0\le\theta\le 1$，我们定义子空间 $[X_0,X_1]_\theta$，它是 X_0+X_1，的子空间，由所有满足以下条件的 $x\in X_0+X_1$ 组成：存在某个 $f\in\mathcal{F}(X_0,X_1)$，使得 $f(\theta)=x$；并且 $[X_0,X_1]_\theta$ 是赋范为下式的巴拿赫空间

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}=\inf\{\|f\|_{\mathcal{F}}:f(\theta)=x,f\in\mathcal{F}(X_0,X_1)\}.$$

令 $\mathcal{D}(X_0, X_1)$ 为 $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ 的子空间，它由具有如下形式的函数组成：$f(z) = \sum_{\ell=1}^{m} g_\ell(z)x_\ell$，其中每个 $x_\ell \in X_0 \cap X_1$，且每个 $g_\ell(z)$ 都是标量函数，在 S 上连续、在 S 上解析，并且在无穷远处趋于零。我们将使用以下引理，该引理在 [79] 中已得到证明：

引理 3.1. 对任意 $0 < \theta < 1$，$X_0 \cap X_1$ 在 $[X_0, X_1]_\theta$ 中稠密。此外，对任意 $x \in X_0 \cap X_1$，

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(X_0,X_1)} : f(\theta) = x, f \in \mathcal{D}(X_0, X_1)\}.$$

在本小节的后续内容中，我们假设半群 $(S_t)_{t\geq 0}$ 是一个拥有马尔可夫膨胀的马尔可夫半群（具体定义见 [54, 57] ）。我们将看到，这些假设仅用于保证可用的 L^p–插值理论（见引理3.2），但要最小化关于 $(S_t)_{t\geq 0}$ 的假设，使 L^p–插值理论成立，仍然是一个具有挑战性的问题。

注意，对于 $1 < p \leq \infty$，

$$\ker(A_p) := \{f \in dom_p(A), Af = 0\} = \{f \in L_p(\mathcal{M}), S_t f = f, \forall t > 0\}.$$

此外，在 $(S_t)_{t\geq 0}$ 的马尔可夫假设下，容易证明 $(S_t)_{t\geq 0}$ 保迹，并且 $BMO_{\mathcal{S}}^{\dagger}(\mathcal{M})$ 的零空间是不动点空间 $\ker A_\infty$。现在令 $L_p^0(\mathcal{M})$ 表示由下式给出的 $L_p(\mathcal{M})$ 的补子空间

$$L_p^0(\mathcal{M}) := L_p(\mathcal{M})/\ker(A_p) = \{f \in L_p(\mathcal{M}), \lim_{t\to\infty} S_t f = 0\}.$$

这里的极限是相对于 $L_p(\mathcal{M})$ 范数而言的，其中 $1 < p < \infty$，而当 $p = \infty$ 时，极限是相对于弱拓扑而言的。回顾 [54, 59]，存在如下典范分解$L_p(\mathcal{M})$，其中 $1 < p < \infty$：

$$L_p(\mathcal{M}) = \ker(A_p) \oplus L_p^0(\mathcal{M}). \tag{3.9}$$

对于任意 $1 < p < \infty$，令 P_p 为从 $L_p(\mathcal{M})$ 到 $\ker(A_p)$ 的压缩正投影。根据平均遍历定理，对于任意 $x \in L_p(\mathcal{M})$，$P_p(x)$ 可写为遍历平均的 L_p 极限，具体如下：

$$M_s(x) := \frac{1}{s}\int_0^s S_t(x)dt.$$

注意，对于两个不同的 p、q，P_p 和 P_q 在 $\ker(A_p) \cap \ker(A_q)$ 上一致，因此我们可以将这些 P_p 记作 P。

以下插值结果已在 [54] 中得到证明。

引理 3.2。假设 $(S_t)_{t\geq 0}$ 是一个存在马尔可夫膨胀的马尔可夫半群，对于任意$2 < p < \infty$，有

$$[L_2^0(\mathcal{M}), BMO_{\mathcal{S}}(\mathcal{M})]_{1-2/p} = L_p^0(\mathcal{M}).$$

现在我们给出主定理第二个断言的证明。

L_p 有界性的证明：由对偶性和稠密性论证，只需证明当 $2 < p < \infty$ 时，我们有

$$\left\|e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}f\right\|_{L_p(\mathcal{M})} \leq C(1+|t|)^{\sigma_p}\|f\|_{L_p(\mathcal{M})}, \text{ for } s \geq \frac{n}{2}$$

且对所有 $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ 成立。注意，若 $x \in \ker A_p$，则有 $e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}x = x$。设 P 是从 $L_p(\mathcal{M})$ 到 $\ker A_p$ 的投影，则对任意 $f \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$，我们有

$$P(e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}f) = e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}P(f) = P(f).$$

因此，

$$\begin{aligned}\left\|e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}f\right\|_{L_p(\mathcal{M})} &\le \left\|P(e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}f)\right\|_{L_p(\mathcal{M})} + \left\|(I-P)e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}(f)\right\|_{L_p(\mathcal{M})} \\ &= \|P(f)\|_{L_p(\mathcal{M})} + \left\|(I-P)e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}(f)\right\|_{L_p^0(\mathcal{M})} \\ &\le \|f\|_{L_p(\mathcal{M})} + \left\|(I-P)e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}(f)\right\|_{L_p^0(\mathcal{M})}.\end{aligned}$$

接下来，只需证明

$$\left\|(I-P)e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}(f)\right\|_{L_p^0(\mathcal{M})} \le C(1+|t|)^{\sigma_p}\|f\|_{L_p(\mathcal{M})}, \text{ for } s \ge \frac{n}{2}. \tag{3.10}$$

我们将使用复插值论证来证明估计式（3.10）。为此，设$f \in \mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ 且 $\|f\|_{L_p(\mathcal{M})} = 1$，则由引理 3.1，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 $F \in \mathcal{D}(L_2(\mathcal{M}), \mathcal{A}_{\mathcal{M}})$，使得 $F(1-2/p) = f$ 并且

$$\|F\|_{\mathcal{F}(L_2(\mathcal{M}),\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{M}}})} \le \|f\|_{[L_2(\mathcal{M}),\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{M}}}]_{1-2/p}} + \epsilon \le \|f\|_{L_p(\mathcal{M})} + \epsilon = 1 + \epsilon,$$

其中，我们将 $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ 在 L_∞ 范数下的闭包记为 $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{M}}}$，而在第二个不等式中我们使用了嵌入

$$L_p(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}_{\mathcal{M}} \subset [L_2(\mathcal{M}), \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{M}}}]_{1-2/p}.$$

接下来，我们定义

$$T(z) := e^{z^2}(1+|t|)^{-nz/2}(I-P)e^{itL}(I+L)^{-sz}(F(z)).$$

回顾一下，对于任意 $x \in L_\infty(\mathcal{M})$，若 $Px \in \ker A_\infty$，则有 $\|Px\|_{BMO_S(\mathcal{M})} = 0$。因此，由不等式（3.1），当 $z = 1+iy$，$y \in \mathbb{R}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|T(1+iy)\|_{BMO_S(\mathcal{M})} &\le e^{1-y^2}(1+|t|)^{-n/2}\left\|e^{itL}(I+L)^{-s(1+iy)}(F(1+iy))\right\|_{BMO_S(\mathcal{M})} \\ &\le C\|F(1+iy)\|_{L_\infty(\mathcal{M})}.\end{aligned}$$

此外，当 $z = iy$，$y \in \mathbb{R}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|T(iy)\|_{L_2^0(\mathcal{M})} &= \left\|e^{-y^2}(1+|t|)^{-iny/2}(I-P)e^{itL}(I+L)^{-iys}(F(iy))\right\|_{L_2^0(\mathcal{M})} \\ &\le C\left\|(I-P)e^{itL}(I+L)^{-iys}(F(iy))\right\|_{L_2^0(\mathcal{M})} \\ &\le C\left\|e^{itL}(I+L)^{-iys}(F(iy))\right\|_{L_2(\mathcal{M})} \\ &\le C\|F(iy)\|_{L_2(\mathcal{M})}.\end{aligned}$$

因此，$T \in \mathcal{F}(L_2^0(\mathcal{M}), BMO_S(\mathcal{M}))$，并且

$$\|T\|_{\mathcal{F}(L_2^0(\mathcal{M}),BMO_S(\mathcal{M}))} \le C\|F\|_{\mathcal{F}(L_2(\mathcal{M}),\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{M}}})} \le C(1+\varepsilon). \tag{3.11}$$

注意

$$(I-P)e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}(F(1-2/p)) = e^{-(1-2/p)^2}(1+|t|)^{\sigma_p}T(1-2/p).$$

结合引理3.2，可得

$$\begin{aligned}\left\|(I-P)e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}(f)\right\|_{L^0_p(\mathcal{M})} &= \left\|(I-P)e^{itL}(I+L)^{-s(1-2/p)}(f)\right\|_{[L^0_2(\mathcal{M}),BMO_S(\mathcal{M})]_{1-2/p}}\\ &\le e^{-(1-2/p)^2}(1+|t|)^{\sigma_p}\|T\|_{\mathcal{F}(L^0_2(\mathcal{M}),BMO_S(\mathcal{M}))}\\ &\le C(1+|t|)^{\sigma_p}(1+\epsilon).\end{aligned}$$

令 $\epsilon \to 0$，我们得到（3.10）。因此，我们主定理第二个陈述的证明完成。□

4. 应用

4.1. 算子值情形。在本小节中，我们运用代数方法研究算子值情形下的 Schr¨odinger 群，这为研究量子欧几里得空间、矩阵代数和群冯诺依曼代数上的 Schr¨odinger 群打开了一扇大门。

设（X，d，μ）是一个倍增度量空间，并满足倍增条件（1.2）。由此可知，存在$C > 0$ 和 $0 \le D \le n$ 使得

$$\mu(B(y,r)) \le C\left(1+\frac{d(x,y)}{r}\right)^D \mu(B(x,r)) \tag{4.1}$$

与 x，$y \in X$ 及 $r > 0$无关。事实上，在欧几里得情形下，等式（4.1）显然成立，其中$D = 0$；而在抽象情形下，由于度量 $D = n$ 的三角不等式与倍增条件（d 1.2）相结合，等式（）也直接成立。

现在假设 L 是作用在 $L_2(X)$ 上的非负自伴算子，且其对应的热核满足 (GEm)。估计式 (GE$_m$) 对许多（次）椭圆微分阶微分算子都成立（例如参见 [12, 19, 25, 39, 70, 81] 及其中的参考文献）。

设 $\mathcal{M}$ 是一个配备正规半有限忠实迹τ的半有限冯·诺依曼代数。那么 $\hat{\mathcal{S}} = (e^{-tL} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}})$ 称为半交换热半群。记 $\hat{L} = L \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}\hat{}$ 为 S 的生成元。接下来，考虑本质有界算子值函数 $f : X \to \mathcal{M}$ 所构成的代数，并配备迹

$$\mathrm{Trace}(f) = \int_X \tau(f(x))d\mu(x).$$

注意，其弱-$*$ 闭包 $\mathcal{N} = L_\infty(X)\bar{\otimes}\mathcal{M}$ 是一个冯·诺依曼代数。现在令 $Q = \{(R_{j,t}, \sigma_{j,t}) : j \in \mathbb{N}, t > 0\}$ 为与原有界半群 $\mathcal{S} = \{e^{-tL}\}_{t\ge 0}$ 在 $L_\infty(X)$ 上相关联的 P- 度量，该度量在第 2.1 节中显式构造。我们在本小节中假设，对任意 $x, y \in X$，$p_t(x, y) \ge 0$，以确保半群 $\mathcal{S}$满足正性假设；于是 Q满足半群主控和平均支配条件的算子值推广。因此，通过与 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 及 $\mathbf{1}_{\mathcal{M}}$进行张量化，Q 可扩展为 $\mathcal{N}$ 中的 P-度量 $Q_{\mathcal{N}}$，其显式表达式为

$$Q_{\mathcal{N}} = \{(R_{j,t} \otimes id_{\mathcal{M}}, \sigma_{j,t} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{M}}) : j \in \mathbb{N}, t > 0\}.$$

在给出应用之前，我们先建立两个辅助引理。为简便起见，对于任意 $x, y \in X$，我们令 $f_x(y) := f(x, y)$。

引理 4.1. 设 T 是 $L_2(X)$ 上的有界线性算子，则对于任意 $f \in L_2^c(X) \bar{\otimes} \mathcal{N}$,

$$\left\| \left(\int_X |(T \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x)(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \right\|_{\mathcal{N}} \leq \|T\|_{L_2(X) \to L_2(X)} \left\| \left(\int_X |f(x,y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \right\|_{\mathcal{N}}. \tag{4.2}$$

证明。这个引理对专家而言可能是众所周知的，但我们未能找到确切的参考文献。为求完整起见，我们在此给出证明。

首先，利用嵌入 $\mathcal{N} \subset B(l_2(\mathcal{N}))$，可得

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\int_X |(T \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x)(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \right\|_{\mathcal{N}} \\
&= \sup_{\|h\|_{L_2(\mathcal{N})} \leq 1} \left(\int_X \int_X \tau \left(|((T \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x)(y))h(x)|^2 \right) d\mu(y) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{\|h\|_{L_2(\mathcal{N})} \leq 1} \left(\int_X \int_X \tau \left(|(T \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x h(x))(y))|^2 \right) d\mu(y) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|T \otimes id_{\mathcal{M}}\|_{L_2(\mathcal{N}) \to L_2(\mathcal{N})} \sup_{\|h\|_{L_2(\mathcal{N})} \leq 1} \left(\int_X \int_X \tau \left(|f(x,y)h(x)|^2 \right) d\mu(y) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

接下来，回顾这样一个事实：标量值 L^2-空间上的每个有界线性算子 T，都可以扩张为希尔伯特空间值 L^2-空间上的有界算子，即

$$\|T \otimes id_{\mathcal{M}}\|_{L_2(\mathcal{N}) \to L_2(\mathcal{N})} \leq \|T\|_{L_2(X) \to L_2(X)}. \tag{4.4}$$

结合不等式（4.3）和（4.4），引理 4.1的证明即告完成。 □

引理 4.2。设 $T \in B(L_2(X))$ 且 $\{T_k\}_k \subset B(L_2(X))$，满足 $\sup \|T_k\|_{B(L_2(X))} < +\infty$，并且 $T_k \to T$ k在 $B(L_2(X))$ 的强算子拓扑下收敛。那么对于任意 $f \in L_2^c(X) \bar{\otimes} \mathcal{N}$ 和 $x \in X$,

(1) $\int_{R^x} |(T \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x \chi_{B(x,s)^c})(y)|^2 d\mu(y) \to 0$，当 $s \to \infty$ 时；

(2) $\int_{R^x} |((T_k - T) \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x)(y)|^2 d\mu(y) \to 0$，当 $k \to \infty$ 时，

在 $B(L_2(\mathcal{M}))$ 的强算子拓扑中。

证明。为证明 (1)，根据 $B(L_2(\mathcal{M}))$ 的强算子拓扑定义，只需验证对任意 $b \in L_2(\mathcal{M})$,

$$\lim_{s \to \infty} \tau \left(\int_X |(T \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x \chi_{B(x,s)^c} b)(y)|^2 d\mu(y) \right) = 0.$$

然而，这可以 通过控制收敛定理结合不等式 (4.4) 验证 .

为证明 (2)，我们首先注意到，这些条件意味着 $T_k \otimes id_{\mathcal{M}}$ 在 $B(L_2(\mathcal{N}))$ 的强算子拓扑中收敛到 $T \otimes id_{\mathcal{M}}$。因此，对任意 $b \in L_2(\mathcal{M})$,

$$\lim_{k \to \infty} \tau \left(\int_X |((T_k - T) \otimes id_{\mathcal{M}})(f_x b)(y)|^2 d\mu(y) \right) = 0.$$

这证明了 (2)，并完成了引理4.2的证明。 □

那么，将我们的主定理应用于算子值情形，可表述如下。

定理 4.3. 假设 (X, d, μ) 是一个 n 维倍增度量空间。设 L 是 $L_2(X)$ 上的一个非负自伴算子，且其对应的热核 $p_t(x, y)$ 满足高斯上界 (GE_m)，并且对任意 $x, y \in X$，$p_t(x, y) \geq 0$。那么，存在一个常数 $C = C(n, m) > 0$，与 t 无关，使得对任意 $f \in L_\infty(\mathcal{N}) \cap (L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{M}))$,

$$\left\| (id_{\mathcal{N}} + \hat{L})^{-s} e^{it\hat{L}} f \right\|_{BMO_{\hat{S}}(\mathcal{N})} \leq C(1 + |t|)^{n/2} \|f\|_{\mathcal{N}}, \text{ for } s \geq \frac{n}{2}. \tag{4.5}$$

此外，如果 additionally $\mathcal{S} = \{e^{-tL}\}$ 具有马尔可夫膨胀，那么对于任意 $1 < p < \infty$，存在常数 $C = C(n, m, p) > 0$，其独立于 t，使得

$$\left\| (id_{\mathcal{N}} + \hat{L})^{-s} e^{it\hat{L}} f \right\|_{L_p(\mathcal{N})} \leq C(1 + |t|)^{\sigma_p} \|f\|_{L_p(\mathcal{N})}, \text{ for } s \geq \sigma_p = n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|. \tag{4.6}$$

证明。 我们将看到，定理 1.1 中施加的所有条件在特殊情形 $X = \mathbb{R}^n$和 $L = -\Delta$下均成立。随后，从更高层次的视角对其中部分条件作一些细微修改，我们便可将这一特殊模型的结果推广到更一般的情形，正如定理 4.3中所表述的那样。

首先，我们注意到，假设 $p_t(x, y) \geq 0$ 对任意 $x, y \in X$ 均成立，意味着 e^{-tL} 是一个正映射。接下来，考虑由 ω_1, ω_2 定义的两个映射：对于任意 $x, y \in X$ 以及任意博雷尔可测函数 f，有 $\omega_1(f)(x, y) = f(x)$ 和 $\omega_2(f)(x, y) = f(y)$。定义 $\rho_j = \omega_j \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$，$j = 1, 2$。于是，$\rho_1, \rho_2 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_\rho = L_\infty(X \times X) \bar{\otimes} \mathcal{M}$是单射 $*$-同态。此外，ρ_1, ρ_2 是从 $L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{M})$ 到 $L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{N})$ 的映射。

现在，对于 $\mathbb{R}$ 上任意有界的博雷尔可测函数 F，定义放大的谱乘子$\pi(F(\hat{L}))$，使得 $\pi(F(\hat{L})) := \mathrm{id}_{L_\infty(X)} \otimes F(\hat{L})$。于是显然，$\pi(F(\hat{L})) : L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{N}) \to L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{N})$ 满足 $\pi(F(\hat{L})) \circ \rho_2 = \rho_2 \circ F(\hat{L})$，作用于 $\mathcal{A}_{\mathcal{N}} = L_\infty(\mathcal{N}) \cap (L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{M}))$。接下来，取 $E_\rho = \mathrm{id}_{L_\infty(X)} \otimes_R X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$，并令 q_r为投影 $\chi_{B(x,r)} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{M}}$。对于最经典的模型 $L = -\Delta$ 和 $X = \mathbb{R}^n$，先验假设显然成立，其中 $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ 选为一个较小的子代数 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \bar{\otimes} \mathcal{S}_{\mathcal{M}} \subset L_\infty(\mathcal{N}) \cap (L_2^c(\mathbb{R}^n) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{M}))$。这里，$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$是 $\mathcal{M}$ 中所有有限支撑正元素的线性张成（见 [74]）。对于定理中表述的一般情形，我们注意到，先验假设可以放宽为以下更灵活的条件：对于任意有界博雷尔可测函数 $F : [0, \infty) \to \mathbb{C}$，谱乘子 $F(\hat{L})$ 在 $L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{M})$ 上有界。该条件是引理 4.1 的直接推论，其中 f 选为与 $x-$ 变量无关。在此条件下，$f \mapsto \rho_2(F(\hat{L}) f)$ 和 $f \mapsto R_r(F(\hat{L}) f)$ 是 $L_2^c(X) \bar{\otimes} L_\infty(\mathcal{M})$ 上定义良好的算子，因此，定理 1.1 的证明完全遵循此前给出的证明。

代数条件 (ALi) 和 (ALii) 是交换性的直接结果。现在我们验证解析条件 (ANi)，在此情形下它可以精确表述为

$$\left\| \frac{1}{\mu(B(x, r_3))} \int_{B(x,r_1)} |f(y)|^2 d\mu(y) \right\|_{\mathcal{N}} \leq C \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^D \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^n \left\| \frac{1}{\mu(B(x, r_2))} \int_{B(x,r_2)} |f(y)|^2 d\mu(y) \right\|_{\mathcal{N}} \tag{4.7}$$

对于任意 $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ 以及 $f \in \mathcal{N}$。为验证这一点，我们注意到 $B(x, r_1)$ 最多可以被 $c(\frac{1}{r_2})^n{}_r$ 个半径为 r_2 的球覆盖。我们将这些球记为 $B(x_1, r_2), \cdots, B(x_{d_n}, r_2)$，其中 $d^n \lesssim (\frac{r_1}{r_2})^n$。根据

不等式 (4.1)，对于任意 $1 \le l \le d_n$,

$$\mu(B(x_\ell, r_2)) \le C\mu(B(x, r_2))\left(1 + \frac{d(x_\ell, x)}{r_2}\right)^D \le C\mu(B(x, r_2))\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^D.$$

综合这些事实可得不等式（4.7）。

为验证算子条件，我们首先注意到，有界性条件 (Oi) 等价于

$$\left\|\left(\int_X |F(\hat{L})f_x(y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\right\|_{\mathcal{N}} \le \|F\|_\infty \left\|\left(\int_X |f(x,y)|^2 d\mu(y)\right)^{1/2}\right\|_{\mathcal{N}}, \tag{4.8}$$

但这可由谱定理轻易推出（例如参见[83]），再结合不等式（4.2）。

有界性条件 (Oii) 等价于：对任意 $t > 0$、$k \ge 1$, $0 < r_1 \le r_2$，以及 $f \in L_\infty(X) \otimes L_\infty(\mathcal{N})$,

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\fint_{B(x,r_1)} |e^{-t\hat{L}}(\chi_{U_k(B(x,r_2))}f_x)(y)|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathcal{N}}\\ &\le CE_k\left(-c\left(\frac{r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left\|\left(\frac{1}{\mu(B(x, \max\{r_1, t^{1/m}\}))}\int_{U_k(B(x,r_2))} |f(x,y)|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathcal{N}}\end{aligned} \tag{4.9}$$

对某些常数 C、$c > 0$ 和 $m \ge 2$，其中记 $U_1(B) := 2B$ 和 $U_k(B) := 2^k B \backslash 2^{k-1}B$（$k \ge 2$时）。

情形 1：若 $r_1 \ge t^{1/m}$，则在 4.9）中，$k = 1$ 的估计可直接由谱定理推出（例如参见 [83]）。对于 $k \ge 2$的情形，我们应用对 L 所作的假设，得到

$$\begin{aligned}&\left(\fint_{B(x,r_1)} |e^{-t\hat{L}}(\chi_{U_k(B(x,r_2))}f_x)(y)|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\fint_{B(x,r_1)} \left|\int_{U_k(B(x,r_2))} p_t(y,w)f(x,w)d\mu(w)\right|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \left(\fint_{B(x,r_1)}\int_{U_k(B(x,r_2))} |p_t(y,w)|^2 d\mu(w)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{U_k(B(x,r_2))} |f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le C\left(\fint_{B(x,r_1)}\int_{U_k(B(x,r_2))} \left|\frac{1}{\mu(B(y,t^{1/m}))}\exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\right|^2 d\mu(w)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{U_k(B(x,r_2))} |f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

继续利用不等式（4.1），

$$\frac{1}{\mu(B(y,t^{1/m}))} \le \frac{C}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\left(1 + \frac{d(x,y)}{t^{1/m}}\right)^D \le \frac{C}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\left(1 + \frac{2^k r_2}{t^{1/m}}\right)^D. \tag{4.11}$$

注意，非倍增因子 $(1+2^k r_1^{1/m})^D t$ 可以吸收到（4.10）右端的指数项中。因此，有

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{B(x,r_1)} |e^{-t\hat{L}}(\chi_{U_k(B(x,r_2))}f_x)(y)|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\frac{\mu(U_k(B(x,r_2)))^{1/2}}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left(\int_{U_k(B(x,r_2))}|f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\frac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))^{1/2}}\left(1+\frac{2^k r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left(\int_{U_k(B(x,r_2))}|f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\frac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))^{1/2}}\exp\left(-c\left(\frac{2^k r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\left(\int_{U_k(B(x,r_2))}|f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

根据倍增条件（1.2），

$$\frac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))^{1/2}} \le \frac{C}{\mu(B(x,r_1))^{1/2}}\left(1+\frac{r_1}{t^{1/m}}\right)^{\frac{n}{2}} \le \frac{C}{\mu(B(x,r_1))^{1/2}}\left(1+\frac{2^k r_2}{t^{1/m}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

注意到额外项 $(1+2^k r_1^{1/m})^{\frac{n}{2}} t$ 可以吸收到右端的指数项中（4.12），由此可得本情形下的（4.9）。

情形 2：若 $r_1 \le t^{1/m}$，则注意到，当 4.12) 仍然成立，其中 $k \ge 2$，证明方法相同。因此，只需证明 $k = 1$的情形。为此，我们将证明分为两个子情形。

子情形 1：若 $2r_2 \le t^{1/m}$，则应用对 L 的假设可得

$$\begin{aligned}
&\left(\fint_{B(x,r_1)} |e^{-t\hat{L}}(\chi_{B(x,2r_2)}f_x)(y)|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\fint_{B(x,r_1)}\left(\int_{B(x,2r_2)}\frac{1}{\mu(B(y,t^{1/m}))^2}d\mu(w)\right)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(x,2r_2)}|f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

根据不等式（4.1）并利用条件$r_1 \le t^{1/m}$，可知

$$\frac{1}{\mu(B(y,t^{1/m}))} \le \frac{C}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\left(1+\frac{d(x,y)}{t^{1/m}}\right)^D \le \frac{C}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\left(1+\frac{r_1}{t^{1/m}}\right)^D \le \frac{C}{\mu(B(x,t^{1/m}))}. \qquad (4.14)$$

于是根据 H¨older 不等式，式 (4.13) 的右端可估计如下。

$$\begin{aligned}
\text{RHS of (4.13)} &\le C\frac{\mu(B(x,2r_2))^{1/2}}{\mu(B(x,t^{1/m}))^{1/2}}\left(\frac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\int_{B(x,2r_2)}|f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\frac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\int_{B(x,2r_2)}|f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

子情形 2：如果 $2r_2 \ge t^{1/m}$，那么我们选择 $k_0 \in \mathbb{Z}_+$，使得

$$2^{k_0-1}t^{1/m} \le 2r_2 < 2^{k_0}t^{1/m}$$

并应用对 L 所作的假设以及不等式（4.14）可得

$$
\begin{aligned}
&\left(\fint_{B(x,r_1)} |e^{-t\hat{L}}(\chi_{B(x,2r_2)}f_x)(y)|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\left(\fint_{B(x,r_1)} \left|\int_{B(x,2r_2)} p_t(y,w)f(x,w)d\mu(w)\right|^2 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\fint_{B(x,r_1)}\int_{B(x,2r_2)} |p_t(y,w)|^2 d\mu(w)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(x,2r_2)} |f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\fint_{B(x,r_1)}\int_{B(x,2r_2)} \left|\frac{1}{\mu(B(y,t^{1/m}))}\exp\left(-c\left(\frac{d(y,w)}{t^{1/m}}\right)^{\frac{m}{m-1}}\right)\right|^2 d\mu(w)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(x,2r_2)} |f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\sum_{j=1}^{k_0}\fint_{B(x,r_1)}\int_{U_j(B(x,t^{1/m}))\cap B(x,2r_2)} \left|\frac{E_j(-c)}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\right|^2 d\mu(w)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B(x,2r_2)} |f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\sum_{j=1}^{k_0} E_j(-c)\frac{\mu(B(x,2^j t^{1/m}))^{1/2}}{\mu(B(x,t^{1/m}))^{1/2}}\right)\left(\frac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\int_{B(x,2r_2)} |f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C\left(\frac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))}\int_{B(x,2r_2)} |f(x,w)|^2 d\mu(w)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

结合两种情形下的估计，我们推出不等式（4.9）。

最后，我们来讨论拓扑条件 (Ti) 和 (Tii)。注意，在定理1.1的证明中，假设 (Ti) 仅用于保证三角不等式成立：对于任意 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 和 $s > 0$,

$$
\left\|\fint_{B(x,r)} |F(\hat{L})f_x(y)|^2 d\mu(y)\right\|_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}} \le \sum_{k\ge 1}\left\|\fint_{B(x,r)} |F(\hat{L})(\chi_{U_k(B(x,s))}f_x)(y)|^2 d\mu(y)\right\|_{\mathcal{N}}^{\frac{1}{2}},
$$

而假设 (Tii) 仅用于保证 (2.31)、(2.37) 和 (3.3) 成立。然而，利用 $\mathcal{N}$ 的张量分离性质，并将 $\mathcal{M}$视为 $B(L_2(\mathcal{M}))$ 的冯·诺依曼子代数，再应用引理 4.2，即可轻松验证这些不等式。

定理 4.3的证明至此结束。 □

注 4.4. 结合现有的 L^p-插值定理，定理 4.3 可视为对先前两个结果的推广。首先注意，热核的正性假设仅用于确保 BMO_S 和 BMO_Q 是（半）赋范空间，且 $Q_{\mathcal{N}}$ 在 $\mathcal{N}$中是一个 P-度量。然而，在 $\mathcal{M} = \mathbb{C}$的情形下，无需这一假设，这些结论便显然成立，因此定理 4.3 可归结为 [12], 的经典结果；该结果证明了在 (GE_m) 条件下，薛定谔群具有锐端点 L^p有界性。其次，在 $X = \mathbb{R}^n$ 和 $L = -\Delta$的情形下，上述定理可归结为 [63, 定理 6.4] 的 n 维类似结果。

注 4.5。 受经典结果 [12], 启发，我们可以预期，定理 4.3的第二个结论中的正则性假设可以去除。要做到这一点，需要针对满足非负自伴算子

（GE$_m$）的算子值 BMO 空间的插值定理，这将在后续论文 [31]中讨论。现阶段我们仅指出，仍有大量具体例子满足定理 4.3所施加的所有假设。这一点很容易看出：在交换或半交换冯诺依曼代数上，若马尔可夫半群是扩散型的，则它具有正则性（见 [57, 注 1。4]）。特别地，定理 4.3 适用于以下生成元 L:

(1) Neumann 拉普拉斯算子 Δ_N 在 $\mathbb{R}^n$ (例如参见[21])；(2) Neumann 拉普拉斯算子 $\Delta_{N_\pm}$ 在 $\mathbb{R}^n_\pm$ (例如参见 [21])；(3) 邓克尔拉普拉斯算子 Δ_{Dunkl} 在 $\mathbb{R}^N$ 配备 Dunkl 测度$d\omega$ (例如参见[29])；(4) 拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ_g 在 n维完备黎曼流形 (M,g) 上，且具有非负里奇曲率（例如参见 [19, 第 5]节）。

4.2. 量子欧几里得空间。本小节中，我们运用代数方法研究量子欧几里得空间中的 Schr¨odinger 群。

本小节开头，我们回顾量子欧几里得空间中的一些概念和定义。量子欧几里得空间有几种不同的定义（见 [35, 38,57, 62]）。我们采用 [38, 第 1] 节中的定义（另见 [57, 第 4.3]节）。首先，令 Θ 为一个反对称的 $\mathbb{R}$ 值 $n\times n$ 矩阵，其中 $n \geq 1$。A_Θ 定义为由一族 $\{u_j(s)\}^n{}_{j=1}$ 强连续单参数酉群生成的通用 C*代数，这些群关于 $s \in \mathbb{R}$ 满足以下 Θ交换关系

$$u_j(s)u_k(t) = e^{2\pi i\Theta_{jk}st}u_k(t)u_j(s).$$

对于 $\Theta = 0$，根据斯通定理，可以取 $u_j(s) = \exp(2\pi is\langle e_j, \cdot\rangle)$，并令 A_Θ为由 $\mathbb{R}^n$ 上所有有界连续函数构成的空间。一般而言，对于任意 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$，我们定义酉算子 $\lambda_\Theta(\xi) = u_1(\xi_1)u_2(\xi_2)\cdots u_n(\xi_n)$。接下来，$E_\Theta$ 定义为 A_Θ 中 $\lambda_\Theta(L_1(\mathbb{R}^n))$ 的闭包，其中

$$f = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_\Theta(\xi)\lambda_\Theta(\xi)d\xi.$$

注意，若 $\Theta = 0$，则 $E_\Theta = C_0(\mathbb{R}^n)$。定义

$$\tau_\Theta(f) = \tau_\Theta\left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_\Theta(\xi)\lambda_\Theta(\xi)d\xi\right) = \hat{f}_\Theta(0),$$

ˆ其中 f_Θ 是一个从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathbb{C}$ 的可积光滑函数。τ_Θ 可延拓为 E_Θ 上的正规半有限忠实迹。令 $\mathcal{R}_\Theta$ 为由 E_Θ 生成的冯·诺依曼代数（即 E_Θ 的双交换子），其作用于 τ_Θ 的 GNS表示中。$\mathcal{R}_\Theta$ 称为与 Θ 相关联的量子欧几里得空间。注意，若 $\Theta = 0$，则 $\mathcal{R}_\Theta = L_\infty(\mathbb{R}^n)$。考虑一个正规单射 $*$-同态

$$\sigma_\Theta : \mathcal{R}_\Theta \ni \lambda_\Theta(\xi) \mapsto \exp_\xi \otimes\lambda_\Theta(\xi) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta,$$

其中 $\exp_\xi$表示傅里叶特征 $\exp(2\pi i\langle\xi, \cdot\rangle)$。现在我们令 $\mathcal{S}_\Theta = \{f \in \mathcal{R}_\Theta : \check{f}_\Theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$为量子施瓦茨类，它是 $\mathcal{R}_\Theta$ 中的弱-$*$ 稠密子代数，并且对所有 $p > 0$ ([38, 命题 1.13])，都在 $L_p(\mathcal{M})$ 中稠密。

我们的首要目标是修改 [57] 中的论证，为量子欧几里得空间构造一个自然的 P-度量。首先，我们回顾热半群 $\{H_t\}_{t\geq 0} = \{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$，它可以表示如下

$$H_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{-t|\xi|^2} \exp_\xi(x) d\xi. \tag{4.15}$$

这会在 $\mathcal{R}_\Theta$ 上诱导出一个由下式确定的正则半群 $\mathcal{S} = \{S_{\Theta,t}\}_{t\geq 0}$

$$\sigma_\Theta \circ S_{\Theta,t} = (H_t \otimes id_{\mathcal{R}_\Theta}) \circ \sigma_\Theta. \tag{4.16}$$

$S_{\Theta,t}$ 给出 $\mathcal{R}_\Theta$ 上的一个马尔可夫半群，其形式上作用为

$$S_{\Theta,t}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_\Theta(\xi) e^{-t|\xi|^2} \lambda_\Theta(\xi) d\xi.$$

回忆一下，$S_{\Theta,t}$ 存在一个无穷小负生成元

$$\Delta_\Theta f = \lim_{t\to 0} \frac{S_{\Theta,t}(f) - f}{t} = -4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_\Theta(\xi)|\xi|^2 \lambda_\Theta(\xi) d\xi.$$

或者，也可以通过二阶偏 Θ导数来定义 Δ_Θ。为说明这一点，对于$1 \leq j \leq n$，将第 j 个一阶偏 Θ导数 $\partial_{\Theta,j}$ 定义为下述映射的线性延拓

$$\partial_{\Theta,j}(\lambda_\Theta(\xi)) = 2\pi i \xi_j \lambda_\Theta(\xi)$$

在量子施瓦茨类 $\mathcal{S}_\Theta$上。于是容易看出 $\Delta_\Theta = \sum^n{}_{j=1} \partial^2_{\Theta,j}$.

回顾第 4.1 节，半交换扩张 $H_t \otimes id_{\mathcal{R}_\Theta}$ 满足以下半群主控关系

$$(H_t \otimes id_{\mathcal{R}_\Theta})(|\xi|^2) \leq \sum_{j\geq 0} 2^{jn} \exp(-c2^{2j})(R_{j,\sqrt{t}} \otimes id_{\mathcal{R}_\Theta})(|\xi|^2), \text{ for any } \xi \in L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta, \tag{4.17}$$

以及度量可积性条件和平均支配条件。于是可以在 $\mathcal{R}_\Theta$ 上构造一个 P-度量。为此，令 $B(r) := B(0, r)$，并考虑投影 $q_r = \chi_{B(r)} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{R}_\Theta}$。定义完全正幺映射

$$R_{\Theta,j,r}(f) = \frac{1}{|B(2^j r)|} \int_{B(2^j r)} \sigma_\Theta(f)(x) dx = \frac{1}{|B(2^j r)|} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\chi}_{B(2^j r)}(\xi) \hat{f}_\Theta(\xi) \lambda_\Theta(\xi) d\xi.$$

则$R_{\Theta,\ r} := R_{\Theta,\ 0,\ r}$ 具有（2.4）的形式，其中 $\rho_1 = \mathbf{1} \otimes \cdot$，$\rho_2 = \sigma_\Theta$，$E_\rho = \int \otimes id_{\mathcal{R}_\Theta}$，并且 q_r 是投影 $\chi_{B(r)} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{R}_\Theta}$。容易验证

$$\sigma_\Theta \circ R_{\Theta,j,r} = (R_{j,r} \otimes id_{\mathcal{R}_\Theta}) \circ \sigma_\Theta \tag{4.18}$$

并且 $R_{\Theta,\ j,\ r} f = f$对任意 f 属于 $BMO^c_{\mathcal{S}}(\mathcal{R}_\Theta)$-半范数的零空间。注意，在（ ξ替换为 $\sigma_\Theta(f)$ 后，将其代入（4.17）中的某个 $f \in \mathcal{R}_\Theta$，再利用交织恒等式（4.16）和（4.18），可得半群主控

$$S_{\Theta,t}(|\xi|^2) \leq C \sum_{j\geq 0} 2^{jn} \exp(-c2^{2j}) R_{\Theta,j,\sqrt{t}}(|\xi|^2) \tag{4.19}$$

对所有 $\xi \in \mathcal{R}_\Theta$ 均成立。

现在我们声称，对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$，均有

$$\left\| \fint_{B(x_0,r)} |\sigma_\Theta(f)(x)|^2 dx \right\|_{\mathcal{R}_\Theta} \le \left\| \fint_{B(0,r)} |\sigma_\Theta(f)(x)|^2 dx \right\|_{\mathcal{R}_\Theta}. \tag{4.20}$$

事实上，由于 σ_Θ 是一个单射 $*$-同态：$\mathcal{R}_\Theta \to L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta$，因此有

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \left\| \sigma_\Theta\left(\fint_{B(0,r)} |\sigma_\Theta(f)(x)|^2 dx \right)(x_0) \right\|_{\mathcal{R}_\Theta} \\ &\le \left\| \sigma_\Theta\left(\fint_{B(0,r)} |\sigma_\Theta(f)(x)|^2 dx \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta} \le \left\| \fint_{B(0,r)} |\sigma_\Theta(f)(x)|^2 dx \right\|_{\mathcal{R}_\Theta}. \end{aligned}$$

接下来，注意到 $B(2^j\sqrt{t})$ 至多可以用 2^{jn} 个半径为 $\sqrt{t}$ 且具有有限重叠的球覆盖。为简便起见，我们将这些球记为 $B_{j,1}(\sqrt{t}), \cdots, B_{j,d_{j,n}}(\sqrt{t})$，其中 $d_{j,n} \lesssim 2^{jn}$。这样的覆盖并不唯一，但我们选取一种满足 $B_{j,\ell}(y,r) = B_{j,1}(r) + y$ 的覆盖。于是，对任意 $j \ge 0$ 和 $t > 0$，以下平均主控不等式成立：

$$\begin{aligned} \left\| \fint_{B(0,2^j\sqrt{t})} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta} &\le 2^{-jn} \sum_{\ell=1}^{d_{j,n}} \left\| \fint_{B_{j,\ell}(\sqrt{t})} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta} \\ &\le C \left\| \fint_{B(\sqrt{t})} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta}. \end{aligned}$$

因此，

$$\mathcal{Q}_\Theta = \left\{ \left(R_{\Theta,j,t}, 2^{jn/2} \exp(-c2^{2j}) \cdot \mathbf{1}_{\mathcal{R}_\Theta} \right) : j \in \mathbb{N}, t > 0 \right\}$$

是 $\mathcal{R}_\Theta$ 的一个 P-度量。

定理 1.1 应用于量子欧几里得空间时，可表述如下。

定理 4.6. 对任意反对称的 $\mathbb{R}$ 值 $n\times n$ 矩阵 Θ，存在常数 $C = C(n) > 0$，该常数与 t 和 Θ 无关，使得

$$\left\| (id_{\mathcal{R}_\Theta} - \Delta_\Theta)^{-s} e^{-it\Delta_\Theta} f \right\|_{BMO_S(\mathcal{R}_\Theta)} \le C(1+|t|)^{n/2} \|f\|_{\mathcal{R}_\Theta}, \text{ for } s \ge \frac{n}{2}.$$

此外，对任意 $1 < p < \infty$，存在常数 $C = C(n,p) > 0$，该常数与 t 和 Θ 无关，使得

$$\left\| (id_{\mathcal{R}_\Theta} - \Delta_\Theta)^{-s} e^{-it\Delta_\Theta} f \right\|_{L_p(\mathcal{R}_\Theta)} \le C(1+|t|)^{\sigma_p} \|f\|_{L_p(\mathcal{R}_\Theta)}, \text{ for } s \ge \sigma_p = n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right|.$$

证明。由于 σ_Θ 是一个单射 $*$-同态：$\mathcal{R}_\Theta \to L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta$，该定理可通过以下方式证明：利用转移技巧，将 n维情形类比推广至 [63, 定理 6。4] 不过，我们将在此通过代数方法给出一种不同的证明。

我们将验证定理1.1所要求的代数、解析、拓扑及算子条件，于是结论便直接成立。另见 [57, 注 1。4] 其中讨论了关于半群正则性假设的说明。首先，我们在定理 $\mathcal{M} = \mathcal{R}_\Theta$，$\mathcal{N}_\rho = L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta$ 中选取 1.1，然后考虑两个 $*$-同态 ρ_1, ρ_2：$\mathcal{R}_\Theta \to \mathcal{N}_\rho = L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta$，它们分别定义为 $\rho_1(f) = \mathbf{1} \otimes f$ 和 $\rho_2(f) = \sigma_\Theta(f)$。此外，对于任意函数 $F \in C^\infty_b$，定义

放大的谱乘子 $\pi(F(-\Delta_\Theta))$由 $\pi(F(-\Delta_\Theta)) := F(-\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\Theta})$给出，那么直接可见，$\pi(F(-\Delta_\Theta)) : L_2^c(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta \to L_2^c(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta$ 满足

$$\pi(F(-\Delta_\Theta)) \circ \rho_2 = \rho_2 \circ F(-\Delta_\Theta) \text{ on } \mathcal{S}_\Theta.$$

接下来，取 $E_\rho = R \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\Theta}$，并令 q_r 为投影 $\chi_{B(r)} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{R}_\Theta}$，则代数条件 (ALi)-(ALii) 可直接由交换性推出。

现在，我们通过证明以下结论来验证解析条件 (ANi)：

$$\left\| \frac{1}{|B(r_3)|} \int_{B(r_1)} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta} \le C \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^n \left\| \frac{1}{|B(r_2)|} \int_{B(r_2)} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta}$$

对于任意 $r_1 \ge r_2 \ge r_3$ 和 $f \in \mathcal{R}_\Theta$。为验证这一点，我们回顾一下，$B(r_1)$ 至多可被 $c(r_2^{-1})^n r$ 个球覆盖。将这些球记为 $B(x_1, r_2)$、$\cdots$、$B(x_{d_n}, r_2)$，其中 $d^n \lesssim (\frac{r_1}{r_2})^n$。于是由 (4.20)，

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{|B(r_3)|} \int_{B(r_1)} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta} &\le C \sum_{\ell=1}^{d_n} \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^n \left\| \frac{1}{|B(x_\ell, r_2)|} \int_{B(x_\ell, r_2)} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta} \\ &\le C \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^n \left\| \frac{1}{|B(r_2)|} \int_{B(r_2)} |\sigma_\Theta(f)(y)|^2 dy \right\|_{\mathcal{R}_\Theta}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

请注意，在此情形下，条件 (Oi)、(Oii) 分别是 (4.8) 和 (4.9) 的特例，其中我们取 $\mathcal{M} = \mathcal{R}_\Theta$、$X = \mathbb{R}^n$ 和 $L = -\Delta$。注意到 $\sigma_\Theta(\mathcal{S}_\Theta) \subset L_2^c(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}\mathcal{R}_\Theta$ ([38,命题 B.3])，因此，拓扑条件 (Ti) 和 (Tii) 可直接由引理 4.2 得出，其中 T、$\mathcal{M}$ 和 X 分别取为 $F(-\Delta)$、$\mathcal{R}_\Theta$ 和 $\mathbb{R}^n$。回顾 $S_{\Theta,t}$ 是一个正则马尔可夫半群 ([57])，至此我们结束定理 4.6 的证明。□

4.3. 矩阵代数。本小节中，我们将代数方法应用于研究矩阵代数 $B(l_2)$ 中的 Schr¨odinger 群。

给定 $A = \sum_{m,k} a_{m,k} e_{m,k} \in B(l_2)$，定义 $B(l_2)$ 上一个卷积型马尔可夫半群 by

$$S_t(A) = \sum_{m,k} e^{-t|m-k|^2} a_{m,k} e_{m,k}.$$

回顾一下，S_t 具有一个无穷小非负生成元

$$L_{B(\ell_2)} A = -\lim_{t\to 0} \frac{S_t(A) - A}{t} = \sum_{m,k} |m-k|^2 a_{m,k} e_{m,k}.$$

考虑一个单射 $*$-同态 $u : B(l_2) \to L_\infty(\mathbb{R})\bar{\otimes}B(l_2)$，其定义为

$$u(A)(y) = \sum_{m,k} a_{m,k} e^{2\pi i(m-k)y} e_{m,k}.$$

令 $\{H_t\}_{t\ge 0} = \{e^{t\Delta}\}_{t\ge 0}$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的热半群，定义见（4.15）。于是显然可知$\mathcal{S} = (S_t)_{t\ge 0}$ 是通过转移与 $\{H_t\}_{t\ge 0}$ 相伴的正则半群

$$u \circ S_t = (H_t \otimes id_{B(\ell_2)}) \circ u. \tag{4.22}$$

F对任意 $j \ge 0$ 和 $t > 0$，在 $B(l_2)$ 上定义完全正幺映射 $\mathcal{R}_{j,t}$ 如下：

$$\mathcal{R}_{j,t}(A) := \fint_{B(2^j t)} u(A)(y) dy.$$

那么， $\mathcal{R}_t := \mathcal{R}_{0,\,t}$ 具有如下形式 (2.4)，其中 $\rho_1 = \mathbf{1} \otimes \cdot$, $\rho_2 = \mathrm{u}$, $\mathrm{E}_\rho = \mathrm{R} \otimes \mathrm{id}_{B(\ell_2)}$，且 q_r 是投影 $\chi_{B(r)} \otimes \mathbf{1}_{B(\ell_2)}$。容易验证

$$u \circ \mathcal{R}_{j,t} = (R_{j,t} \otimes id_{B(\ell_2)}) \circ u. \tag{4.23}$$

利用这个等式，可以采用估计（4.19）和（4.20）的方法，从而得出半群主控

$$S_t(|\xi|^2) \le \sum_{j\ge 0} 2^j \exp(-c2^{2j}) \mathcal{R}_{j,\sqrt{t}}(|\xi|^2)$$

对所有 $\xi \in \mathrm{B}(\mathrm{l}_2)$，以及平均支配条件：对于任意 $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\mathrm{r} > 0$，有

$$\left\| \fint_{B(x_0,r)} |u(A)(x)|^2 dx \right\|_{B(\ell_2)} \le \left\| \fint_{B(r)} |u(A)(x)|^2 dx \right\|_{B(\ell_2)}.$$

因此，

$$\mathcal{Q}_{B(\ell_2)} = \left\{ \left(\mathcal{R}_{j,t}, 2^{j/2} \exp(-c2^{2j}) \otimes \mathbf{1}_{B(\ell_2)} \right) : j \in \mathbb{N}, t > 0 \right\}$$

是 $\mathrm{B}(\mathrm{l}_2)$ 上的一个 P-度量。

记 S_p 为希尔伯特空间 l_2, 上的 Schatten-p类，即 $\mathrm{S}^p = L^p(B(\mathrm{l}_2))$。那么，应用于矩阵代数的定理1.1 可表述如下。

定理 4.7。存在一个与 $\mathrm{t} > 0$ 无关的常数 C，使得

$$\left\| (id_{B(\ell_2)} + L_{B(\ell_2)})^{-s} e^{itL_{B(\ell_2)}} A \right\|_{BMO^c_S(B(\ell_2))} \le C(1+|t|)^{1/2} \|A\|_{B(\ell_2)}, \text{ for } s \ge \frac{1}{2}. \tag{4.24}$$

此外，对于任意 $1 < \mathrm{p} < \infty$，存在一个与 $\mathrm{t}_p > 0$ 无关的常数 C，使得

$$\left\| (id_{B(\ell_2)} + L_{B(\ell_2)})^{-s} e^{itL_{B(\ell_2)}} A \right\|_{S_p} \le C(1+|t|)^{|1/2-1/p|} \|A\|_{S_p}, \text{ for } s \ge \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right|. \tag{4.25}$$

证明。本定理的证明与定理 4.6 的证明类似。我们将通过为 $\mathrm{B}(\mathrm{l}_2)$ 提供一个代数骨架来修改该证明。首先，在定理 1.1 中取 $\mathcal{M} = \mathrm{B}(\mathrm{l}_2)$、$\mathcal{N}_\rho = \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}) \bar{\otimes} \mathrm{B}(\mathrm{l}_2)$，然后考虑两个 $*$-同态 ρ_1、$\rho_2 : \mathrm{B}(\mathrm{l}_2) \to \mathcal{N}_\rho = \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}) \bar{\otimes} \mathrm{B}(\mathrm{l}_2)$，它们分别定义为 $\rho_1(\mathrm{A}) = \mathbf{1}_{B(\ell_2)} \otimes \mathrm{A}$ 和 $\rho_2(\mathrm{A}) = \mathrm{u}(\mathrm{A})$。此外，对于任意函数 $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty \mathrm{b}$，定义放大的谱乘子 $\pi(\mathrm{F}(\mathrm{L}_{B(\ell_2)}))$ 为 $\pi(\mathrm{F}(\mathrm{L}_{B(\ell_2)})) := \mathrm{F}(-\Delta \otimes \mathrm{id}_{B(\ell_2)})$，于是直接可见，$\pi(\mathrm{F}(\mathrm{L}_{B(\ell_2)})) : \mathrm{V}_\rho \to \mathrm{V}_\rho$ 满足

$$\pi(F(L_{B(\ell_2)})) \circ \rho_2 = \rho_2 \circ F(L_{B(\ell_2)}) \text{ on } \mathcal{A}_{B(\ell_2)},$$

其中

$$\mathcal{A}_{B(\ell_2)} = \left\{ x \in B(\ell_2) : x = \sum_{m\in I, k\in J} a_{m,k} e_{m,k}, \text{ for some finite index sets } I, J \right\}.$$

接下来，选取 $E_\rho = \otimes id_{B(\ell_2)}$ 并令 q_r 为投影 $\chi_{B(r)} \otimes id_{B(\ell_2)}$，则代数条件 (ALi)-(ALii) 可直接由交换性推出，并且可以仿照验证 (4.21) 的过程来验证条件 (ANi)。注意，在这种情况下，条件 (Oi)、(Oii) 分别是 (4.8) 和 (4.9) 的特例，其中选取 $\mathcal{M} = B(\mathrm{l}_2), X = \mathbb{R}$ 和 $L = -\Delta$。

注意到 $u(\mathcal{A}_{B(\ell_2)}) \not\subseteq L_2^c(\mathbb{R}^n) \bar{\otimes} B(\mathrm{l}_2)$。因此，为了验证拓扑条件 (Ti) 和 (Tii)，根据引理 4.2，取 T, $\mathcal{M}$, X 和 x 分别为 $F(-\Delta)$, $B(\mathrm{l}_2)$, $\mathbb{R}$ 和 0 后，剩下的工作是

验证对于任意 A = P m,k a m,k e m,k ∈ $\mathcal{A}_{B(\ell_2)}$，任意 b ∈ S 2，以及任意满足 F j → F 点态成立且 sup ||F j||∞ < +∞ 的施瓦茨函数 F j, F，j

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{Tr}\left(b^* \int_{B(0,r)} \left| (F(-\Delta)\otimes id_{B(\ell_2)}) \Big(\sum_{m,k} a_{m,k} e^{i(m-k)\cdot} \chi_{B(0,s)^c}(\cdot) e_{m,k} \Big)(y) \right|^2 dy b \right) = 0 \tag{4.26}$$

and

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{Tr}\left(b^* \int_{B(0,r)} \left| ((F_j(-\Delta) - F(-\Delta)) \otimes id_{B(\ell_2)}) \Big(\sum_{m,k} a_{m,k} e^{i(m-k)\cdot} e_{m,k} \Big)(y) \right|^2 dy b \right) = 0. \tag{4.27}$$

为证明 (4.26)，我们应用控制收敛定理，得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left(b^* \int_{B(0,r)} \left| (F(-\Delta)\otimes id_{B(\ell_2)}) \Big(e^{i(m-k)\cdot} \chi_{B(0,s)^c}(\cdot) e_{m,k} \Big)(y) \right|^2 dy b \right) \\
&= \int_{B(0,r)} \left| F(-\Delta) \Big(e^{i(m-k)\cdot} \chi_{B(0,s)^c}(\cdot) \Big)(y) \right|^2 \mathrm{Tr}(b^* e_{k,k} b) dy \\
&\le \int_{B(0,r)} \left(\int_{B(0,s)^c} |\mathcal{F}^{-1}(F(|\cdot|^2))(y-z)| dz \right)^2 dy \|b\|_{S_2}^2 \to 0, \text{ as } s \to \infty,
\end{aligned}$$

这里我们采用记号 $\mathcal{F}^{-1}$ 表示某个适当函数的傅里叶逆变换。为证明 (4.27)，直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left(b^* \int_{B(0,r)} \left| ((F_j(-\Delta) - F(-\Delta)) \otimes id_{B(\ell_2)}) \Big(e^{i(m-k)\cdot} e_{m,k} \Big)(y) \right|^2 dy b \right) \\
&= r |(F_j - F)(|m-k|^2)|^2 \tau(b^* e_{k,k} b) \to 0, \text{ as } j \to \infty.
\end{aligned}$$

因此，所有条件均已验证。为了得到 L^p 有界性结论，只需注意到半群 $\mathcal{S}_t$ 是正规的（见 [57]）。定理 4.7的证明至此完成。□

4.4. 群冯·诺依曼代数。本小节中，我们将代数方法应用于研究配备有限维余循环的群冯·诺依曼代数中的 Schr¨odinger 群。

本小节开头，我们从 [55] 收集一些关于群冯·诺依曼代数上傅里叶乘子的基本概念和性质。设 G 是一个离散群，λ : G →B(l$_2$(G)) 是其左正则表示，定义为 λ(g)δ$_h$ = δ$_{gh}$，其中每个 δ$_g$ 在 g 处取值 1，在其他地方取值 0，从而 (δ$_g$)$_{g\in G}$ 构成 l$_2$(G) 的典范基。记 $\mathcal{L}$(G) 为其群冯·诺依曼代数，它定义为 λ(C$_c$(G)) 在 B(l$_2$(G)) 的弱算子拓扑下的闭包。设 τ$_G$ 是 $\mathcal{L}$(G) 上的标准归一化迹，定义为

$$\tau_G(f) = \langle \delta_e, f\delta_e \rangle$$

对于 f ∈ $\mathcal{L}$(G)，其中 e 表示 G 的单位元。注意，任意 f ∈ $\mathcal{L}$(G) 都有傅里叶级数展开

$$\sum_{g\in G} \hat{f}(g)\lambda(g), \text{ with } \hat{f}(g) = \tau_G(f\lambda(g^{-1})) \text{ such that } \tau_G(f) = \hat{f}(e).$$

记 $L^p(G) = L^p(\mathcal{L}(G), \tau_G)$ 为非交换测度空间 $(\mathcal{L}(G), \tau_G)$ 上的 L^p 空间，其范数为

$$\|f\|_{L_p(\hat{G})} = \left\| \sum_{g\in G} \hat{f}(g)\lambda(g) \right\|_p = \left(\tau_G \left[\left| \sum_{g\in G} \hat{f}(g)\lambda(g) \right|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}}.$$

对于任意 $m : G \to \mathbb{R}$，$\mathcal{L}(G)$ 上的傅里叶乘子定义为

$$T_m : \sum_{g\in G} \hat{f}(g)\lambda(g) \mapsto \sum_{g\in G} m(g)\hat{f}(g)\lambda(g).$$

请注意，在 $G = \mathbb{Z}^n$ 的情况下，这对应于 n 维环面上的傅里叶乘子。

设 $(\mathcal{H}, a, b)$ 是 G 的一个仿射表示，它是实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的正交表示 $a : G \to O(\mathcal{H})$，并配有一个映射 $b : G \to \mathcal{H}$，满足余循环律

$$b(gh) = a_g(b(h)) + b(g).$$

给定一个仿射表示 $(\mathcal{H}, a, b)$，若函数 $\psi(g) = \langle b(g), b(g)\rangle_{\mathcal{H}}$ 满足以下三个性质，则称其为长度：

(1) 消失性质：$\psi(e) = 0$；(2) 对称性：$\psi(g) = \psi(g^{-1})$，对任意 $g \in G$；(3) 条件负定性：$\sum_{g,h\in G} \bar{\beta}_g\beta_h\psi(g^{-1}h) \le 0$，若 $\sum_{g\in G} \beta_g = 0$。

反过来，由舍恩贝格定理 [76] 可知，任意长度 ψ 都确定一个精确的仿射表示（$\mathcal{H}_\psi, a_\psi, b_\psi$），使得 $\psi(g) = \langle b_\psi(g), b_\psi(g)\rangle_{\mathcal{H}_\psi}$。在本小节中，我们始终假设 $\dim\mathcal{H}_\psi = n$。注意，在此假设下，可以找到一个线性等距映射 $T : \mathcal{H}_\psi \to \mathbb{R}^n$、一个正交表示 $\tilde{a} : G \to O(\mathbb{R}^n)$，其定义为 $\tilde{a}_g(x) := T\,\alpha_g(T^{-1}x)$，以及一个映射 $b : G \to \mathbb{R}^n$，定义为 $b(g) = T(b(g))$，它满足余循环律 $b(gh) = \tilde{a}_g(b(h)) + b(g)$。因此，$(\mathbb{R}^n, \tilde{a}, b)$ 也是 G 的一个仿射表示，并且对任意 $g \in G$，都满足 $\psi(g) = \langle b(g), b(g)\rangle_{\mathbb{R}^n}$。下文中，为简便起见，我们将滥用记号 $(\mathbb{R}^n, a, b)$ 来表示 G 的一个仿射表示。

设 $\psi : G \to \mathbb{R}_+$ 是某个离散群 G 上的任意长度，则半群 $S_{\psi,t} : \lambda(g) \mapsto \exp(-t\psi(g))\lambda(g)$ 的无穷小生成元是由映射 $L_\psi(\lambda(g)) = \psi(g)\lambda(g)$ 确定的。记作 $\mathcal{S}_\psi = \{S_{\psi,t}\}_{t\ge 0}$。注意，任意 ψ-径向傅里叶乘子 $T_{m\circ\psi}$ 都属于形如 $m(L_\psi)$ 的谱算子这一类。

定义一个作用 $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(L_\infty(\mathbb{R}^n))$，使得 $\alpha_g(e^{2\pi i\langle\xi,\cdot\rangle}) = e^{2\pi i\langle a_g(\xi),\cdot\rangle}$，显然它保持迹。接着考虑两个 $*$-表示

$$\rho : L_\infty(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \sum_{h\in G} \alpha_{h^{-1}}(f) \otimes e_{h,h} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(\ell_2(G)),$$

$$\Lambda : G \ni g \mapsto \sum_{h\in G} \mathbf{1} \otimes e_{gh,h} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(\ell_2(G)),$$

其中 $e_{g,h}$ 是 $B(l_2(G))$ 的矩阵单位。现在我们回顾 [55, 第2节。1]（另见 [80]）中的交叉积代数 $L_\infty(\mathbb{R}^n) \rtimes_\alpha G$ 的概念，它定义为 $L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(l_2(G))$ 中由 $\rho(L_\infty(\mathbb{R}^n))$ 和 $\Lambda(G)$ 生成的 $*$- 代数的弱算子闭包。交叉积代数 $L_\infty(\mathbb{R}^n) \rtimes_\alpha G$ 可通过映射 $\rho \rtimes \Lambda$ 嵌入 $L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(l_2(G))$。为说明这一点，我们

形式上将 $L_\infty(\mathbb{R}^n) \rtimes_\alpha G$ 的一个一般元素写作 $\sum_{g\in G} f_g \rtimes_\alpha \lambda(g)$，其中 $f_g \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$，然后注意到

$$\begin{aligned}(\rho \rtimes \Lambda)\left(\sum_{g\in G} f_g \rtimes_\alpha \lambda(g)\right) &= \sum_{g\in G} \rho(f_g)\Lambda(g) \\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h,\gamma\in G} (\alpha_{h^{-1}}(f_g)\otimes e_{h,h})(\mathbf{1}\otimes e_{g\gamma,\gamma})\right) \\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} \alpha_{h^{-1}}(f_g)\otimes e_{h,g^{-1}h}\right) \\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} \alpha_{(gh)^{-1}}(f_g)\otimes e_{gh,h}\right).\end{aligned}$$

考虑由下式给出的正规 $*$-同态

$$\pi_1 : \mathcal{L}(G) \ni \lambda(g) \mapsto e^{2\pi i\langle b(g),\cdot\rangle} \rtimes_\alpha \lambda(g) \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \rtimes_\alpha G.$$

于是显然，$\eta_2 := (\rho\rtimes\Lambda)\circ\pi_1$ 是正规单射 $*$-同态：$\mathcal{L}(G) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(l_2(G))$，可表示为

$$\eta_2(\lambda(g)) = \sum_{h\in G} e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g),\cdot\rangle}\otimes e_{gh,h}.$$

对于任意 $j \geq 0$ 和 $t > 0$，我们定义完全正幺映射 $\mathscr{R}_{j,t}$，其作用于 $\mathcal{L}(G)$，定义如下

$$\mathscr{R}_{j,t}(f) := \fint_{B(2^j t)} \eta_2(f)(y)dy,\ f \in \mathcal{L}(G).$$

由于 $a_g \in O(\mathbb{R}^n)$，可以验证，对于任意 $\lambda(g) \in \mathcal{L}(G)$，

$$\mathscr{R}_{j,t}(\lambda(g)) = C_{g,2^j t}\sum_{h\in G} \mathbf{1}\otimes e_{gh,h} \in \eta_1(\mathcal{L}(G)) \simeq \mathcal{L}(G),$$

其中 $C_{g,r} := \fint_{B(r)} e^{2\pi i\langle b(g),y\rangle} dy$，且 η_1 是由下式定义的单射 $*$-同态

$$\eta_1 : \mathcal{L}(G) \ni \lambda(g) \mapsto \sum_{h\in G} \mathbf{1}\otimes e_{gh,h} \in B(\ell_2(G)).$$

那么 $\mathscr{R}_t := \mathscr{R}_{0,t}$ 具有以下形式（2.4），其中 $\rho_j = \eta_j$，$j = 1, 2$，$E_\rho = R\otimes id_{B(\ell_2(G))}$，且 q_r 是投影 $\chi_{B(r)}\otimes \mathbf{1}_{B(\ell_2(G))}$。为避免混淆，我们通过考虑以下对象来区分 $\mathcal{L}(G)$ 与 $\eta_1(\mathcal{L}(G))$

$$\tilde{\mathscr{R}}_{j,t}(\lambda(g)) := C_{g,2^j t}\lambda(g),\ \text{for any } \lambda(g) \in \mathcal{L}(G).$$

现在我们建立两个有用的交织不等式。

引理 4.8。对于任意的 $j \geq 0$ 和 $t > 0$，有以下等式。

$$\eta_2 \circ \tilde{\mathscr{R}}_{j,t} = (R_{j,t}\otimes id_{B(\ell_2(G))})\circ\eta_2.$$

证明。首先注意，对于任意 $\lambda(g) \in \mathcal{L}(G)$，

$$(R_{j,t}\otimes id_{B(\ell_2(G))})\circ\eta_2(\lambda(g))(x) = \fint_{B(x,2^j t)} \sum_{h\in G} e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g),y\rangle}\otimes e_{gh,h}dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h\in G} \fint_{B(2^j t)} e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g),y\rangle} dy e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g),x\rangle} \otimes e_{gh,h} \\
&= \fint_{B(2^j t)} e^{2\pi i\langle b(g),y\rangle} dy \eta_2(\lambda(g))(x) \\
&= \eta_2 \circ \tilde{\mathscr{R}}_{j,t}(\lambda(g)).
\end{aligned}
$$

引理的证明至此完成4.8。 □

将 $\mathcal{A}_G$ 记为 $\mathcal{L}(G)$中三角多项式的代数。也就是说,

$$
\mathcal{A}_G := \left\{ \sum_{g\in A} c_g \lambda(g) : \ c_g \in \mathbb{C}, A \subset G \text{ finite} \right\}.
$$

引理 4.9. 对任意有界博雷尔函数 F，等式成立:

$$
\eta_2 \circ F(L_\psi) = (F(-\Delta \otimes id_{B(\ell_2(G))})) \circ \eta_2 \quad \text{on } \mathcal{A}_G.
$$

证明. 注意，对于任意 $\lambda(g) \in \mathcal{L}(G)$,

$$
\begin{aligned}
(F(-\Delta \otimes id_{B(\ell_2(G))})) \circ \eta_2(\lambda(g)) &= (F(-\Delta) \otimes id_{B(\ell_2(G))}) \left(\sum_{h\in G} e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g),\cdot\rangle} \otimes e_{gh,h} \right) \\
&= \left(\sum_{h\in G} F(|a_{(gh)^{-1}} b(g)|^2) e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g),\cdot\rangle} \otimes e_{gh,h} \right) \\
&= \left(\sum_{h\in G} F(\psi(g)) e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g),\cdot\rangle} \otimes e_{gh,h} \right) \\
&= \eta_2 \circ F(L_\psi)(\lambda(g)).
\end{aligned}
$$

引理的证明到此结束4.9。 □

注意，s 反交换扩张 $H_t \otimes id_{B(\ell_2(G))}$ 满足对任意 $\xi \in L_\infty(\mathbb{R}^n) \bar{\otimes} B(l_2(G))$,

$$
(H_t \otimes id_{B(\ell_2(G))})(|\xi|^2) \le C \sum_{j\ge 0} 2^{jn} \exp(-c2^{2j}) (R_{j,\sqrt{t}} \otimes id_{B(\ell_2(G))})(|\xi|^2).
$$

结合引理 4.8 和 4.9，可推出对任意 $\xi \in \mathcal{L}(G)$,

$$
S_{\psi,t}(|\xi|^2) \le C \sum_{j\ge 0} 2^{jn} \exp(-c2^{2j}) \tilde{\mathscr{R}}_{j,\sqrt{t}}(|\xi|^2).
$$

回想一下，$B(2^j\sqrt{t})$可由球 $B_{j,1}(\sqrt{t}), \ldots, B_{j,d_{j,n}}(\sqrt{t})$ 覆盖，因此我们推得

$$
\mathscr{R}_{j,\sqrt{t}}(|\xi|^2) \le C 2^{-jn} \sum_{\ell=1}^{d_{j,n}} \fint_{B_{j,\ell}(\sqrt{t})} \eta_2(|\xi|^2)(y) dy \tag{4.28}
$$

对于一个 所有 $\xi \in \mathcal{L}(G)$，其中 $d_{j,n} \lesssim 2^{jn}$。现在我们验证平均支配条件 .

引理 4.10. 对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$、$r > 0$ 和 $f \in \mathcal{A}_G$，有

$$
\left\| \int_{B(x_0,r)} |\eta_2(f)(x)|^2 dx \right\|_{B(\ell_2(G))} \le \left\| \int_{B(r)} |\eta_2(f)(x)|^2 dx \right\|_{B(\ell_2(G))}.
$$

证明. 注意，对于任意的 $f = \sum_{g\in A} c_g \lambda(g) \in \mathcal{A}_G$,

$$\left\| \int_{B(x_0,r)} |\eta_2(f)(x)|^2 dx \right\|_{B(\ell_2(G))} = \left\| \int_{B(0,r)} \left| \sum_{g\in A}\sum_{h\in G} c_g e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}} b(g), x+x_0\rangle} \otimes e_{gh,h} \right|^2 dx \right\|_{B(\ell_2(G))}$$
$$= \left\| \int_{B(0,r)} \left| \sum_{g\in A}\sum_{h\in G} c_{gh^{-1}} e^{2\pi i\langle a_{g^{-1}} b(gh^{-1}), x+x_0\rangle} \otimes e_{g,h} \right|^2 dx \right\|_{B(\ell_2(G))} = \mathrm{RHS}.$$

继续考虑映射

$$\zeta : B(\ell_2(G)) \ni \sum_{g,h\in G} a_{g,h} \otimes e_{g,h} \mapsto \sum_{g,h\in G} e^{2\pi i\langle a_{g^{-1}} b(gh^{-1}),\cdot\rangle} a_{g,h} \otimes e_{g,h} \in L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(\ell_2(G)).$$

回忆一下，$(\mathbb{R}^n, a, b)$ 满足余循环律 $b(gh) = a_g(b(h)) + b(g)$，由此可推得 ζ 是一个单射 $*$-同态：$B(l_2(G)) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(l_2(G))$。因此，

$$\mathrm{RHS} = \left\| \zeta\left(\int_{B(0,r)} \left| \sum_{g\in A}\sum_{h\in G} c_{gh^{-1}} e^{2\pi i\langle a_{g^{-1}} b(gh^{-1}), x\rangle} \otimes e_{g,h} \right|^2 dx \right)(x_0) \right\|_{B(\ell_2(G))}$$
$$\le \left\| \zeta\left(\int_{B(0,r)} \left| \sum_{g\in A}\sum_{h\in G} c_{gh^{-1}} e^{2\pi i\langle a_{g^{-1}} b(gh^{-1}), x\rangle} \otimes e_{g,h} \right|^2 dx \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(\ell_2(G))}$$
$$\le \left\| \int_{B(0,r)} \left| \sum_{g\in A}\sum_{h\in G} c_{gh^{-1}} e^{2\pi i\langle a_{g^{-1}} b(gh^{-1}), x\rangle} \otimes e_{g,h} \right|^2 dx \right\|_{B(\ell_2(G))} = \left\| \int_{B(r)} |\eta_2(f)(x)|^2 dx \right\|_{B(\ell_2(G))}.$$

引理的证明至此结束4.10。 □

现在应用不等式（4.28）和引理4.10 可推得

$$\left\| \tilde{\mathscr{R}}_{j,t}(|\xi|^2) \right\|_{\mathcal{L}(G)} = \left\| \mathscr{R}_{j,t}(|\xi|^2) \right\|_{B(\ell_2(G))}$$
$$\le C2^{-jn} \sum_{\ell=1}^{d_{j,n}} \left\| \fint_{B_{j,\ell}(t)} \eta_2(|\xi|^2)(y)dy \right\|_{B(\ell_2(G))}$$
$$= C2^{-jn} \sum_{\ell=1}^{d_{j,n}} \left\| \fint_{B_{j,\ell}(t)} |\eta_2(\xi)(y)|^2 dy \right\|_{B(\ell_2(G))}$$
$$\le C\left\| \mathscr{R}_{\sqrt{t}}(|\xi|^2) \right\|_{B(\ell_2(G))} = C\left\| \tilde{\mathscr{R}}_{\sqrt{t}}(|\xi|^2) \right\|_{\mathcal{L}(G)}.$$

因此，

$$Q_{\mathcal{L}(G)} = \left\{ \left(\tilde{\mathscr{R}}_{j,t}, 2^{jn/2} \exp(-c2^{2j}) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{L}(G)} \right) : j \in \mathbb{N}, t > 0 \right\}$$

是 $\mathcal{L}(G)$ 的一个 P-度量。

The定理1.1 应用于群冯诺依曼代数时，可表述如下。

定理 4.11. 设 G 为一个配备任意长度 $\psi : G \to \mathbb{R}_+$ 且满足 $\dim\mathcal{H}_\psi = n < \infty$ 的离散群。对于任意 $s \ge 0$，令 $T_{m_s} : \sum_g \hat{f}(g)\lambda(g) \mapsto \sum_g m_s(\psi(g))\hat{f}(g)\lambda(g)$，其中 $m_s(\psi(g)) = e^{it\psi(g)}(1+\psi(g))^{-s}$。那么存在一个常数 $C = C(n) > 0$，它与 t 无关，使得

$$\left\| T_{m_s}(f) \right\|_{BMO_{S_\psi}(\mathcal{L}(G))} \le C(1+|t|)^{n/2} \|f\|_{\mathcal{L}(G)}, \text{ for } s \ge \frac{n}{2}. \tag{4.29}$$

此外，对于任意 $1 < p < \infty$，存在一个常数 $C = C(n, p) > 0$，它与 t 无关，使得

$$\left\|T_{m_s}(f)\right\|_{L_p(\hat{G})} \le C(1+|t|)^{\sigma_p}\|f\|_{L_p(\hat{G})}, \text{ for } s \ge \sigma_p = n\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|. \tag{4.30}$$

证明。该定理可由一条一般原理证明，该原理见 [55, 定理 D], 它建立了 $L_\infty(\mathbb{R}^n) \to BMO(\mathbb{R}^n)$ 上径向傅里叶乘子的有界性与 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{L}(G) \to BMO(S\psi)$ 上离散群 von Neumann 代数中径向傅里叶乘子的有界性之间的联系 $\mathcal{L}(G)$，其中 $\dim\mathcal{H}_\psi = n$。不过，我们将在此通过代数方法给出另一种证明。

为了证明 T_{m_s} 的 BMO有界性，我们将对定理 4.6 中的证明作出修改，为 $\mathcal{L}(G)$ 提供一个代数骨架。首先，我们在定理 1.1 中选取 $\mathcal{M} = \mathcal{L}(G)$、$\mathcal{N}_\rho = L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(l_2(G))$，然后考虑由 $\rho_1(\lambda(g)) = P_{h\in G} 1\otimes e_{gh}$ 和 $\rho_2(\lambda(g)) = \eta_2(\lambda(g))$ 分别定义的两个 $*$-同态 ρ_1, ρ_2：$\mathcal{L}(G) \to \mathcal{N}_\rho = L_\infty(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(l_2(G))$。此外，对于任意函数 $F \in C^\infty_b$，定义放大的谱乘子 $\pi(F(L_\psi))$ 为 $\pi(F(L_\psi)) := F(-\Delta\otimes id_{B(\ell_2(G))})$，于是显然可得 $\pi(F(L_\psi)) : V_\rho \to V_\rho$ 满足

$$\pi(F(L_\psi))\circ\rho_2 = \rho_2\circ F(L_\psi) \text{ on } \mathcal{A}_G.$$

接下来，取 $E_\rho = R\otimes id_{B(\ell_2(G))}$，$q_r$ 为投影 $\chi_{B(r)}\otimes id_{B(\ell_2(G))}$。那么，代数条件 (ALi)-(ALii) 由交换性推出，并且可以遵循验证 (4.21) 的类似步骤来验证条件 (ANi)。注意，在此情形下，条件 (Oi)、(Oii) 分别是 (4.8) 和 (4.9) 的特例，其中我们取 $\mathcal{M} = B(l_2(G))$、$X = \mathbb{R}^n$ 和 $L = -\Delta$。

注意，$\eta_2(\mathcal{L}(G)) \not\subseteq L_2^c(\mathbb{R}^n)\bar{\otimes}B(l_2(G))$。因此，为了验证拓扑条件 (Ti) 和 (Tii)，根据引理 4.2，取 T、$\mathcal{M}$、X 和 x 分别为 $F(-\Delta)$、$B(l_2(G))$、$\mathbb{R}^n$ 和 0，只需验证：对于任意 $f = P_g c_g\lambda(g) \in \mathcal{A}_G$、任意 $\kappa \in S_2(l_2(G))$，以及任意满足 $F_j \to F$ 逐点成立且 $\sup_j \|F_j\|_\infty < +\infty$ 有界的施瓦茨函数 F_j、F，

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{Tr}\left(\kappa^* \int_{B(0,r)} \left|(F(-\Delta)\otimes id_{B(\ell_2(G))})\Big(\sum_{g\in A}\sum_{h\in G} c_g e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}}b(g),\cdot\rangle}\chi_{B(0,s)^c}(\cdot)\otimes e_{gh,h}\Big)(y)\right|^2 dy\kappa\right) = 0 \tag{4.31}$$

and

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{Tr}\left(\kappa^* \int_{B(0,r)} \left|((F_j(-\Delta)-F(-\Delta))\otimes id_{B(\ell_2(G))})\Big(\sum_{\substack{g\in A\\ h\in G}} c_g e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}}b(g),\cdot\rangle}\otimes e_{gh,h}\Big)(y)\right|^2 dy\kappa\right) = 0. \tag{4.32}$$

为证明（4.31），由控制收敛定理，对于任意 $\kappa = P_{k,\ell} c_{k,\ell} e_{k,\ell} \in \mathcal{A}_{B(\ell_2(G))}$，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left(\kappa^* \int_{B(0,r)} \left|(F(-\Delta)\otimes id_{B(\ell_2(G))})\Big(\sum_{h\in G} e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}}b(g),\cdot\rangle}\chi_{B(0,s)^c}(\cdot)\otimes e_{gh,h}\Big)(y)\right|^2 dy\kappa\right)\\
&= \mathrm{Tr}\left(\kappa^* \int_{B(0,r)} \sum_{h\in G} \left|F(-\Delta)(e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}}b(g),\cdot\rangle}\chi_{B(0,s)^c}(\cdot))(y)\right|^2 e_{h,h} dy\kappa\right)\\
&= \int_{B(0,r)} \sum_{k,\ell} |c_{k,\ell}|^2 \left(\int_{B(0,s)^c} \mathcal{F}^{-1}(F(|\cdot|^2))(y-z)e^{2\pi i\langle a_{(g\ell)^{-1}}b(g),z\rangle} dz\right)^2 dy \to 0, \text{ as } s\to\infty.
\end{aligned}$$

这与 $\mathcal{A}_{B(\ell_2(G))}$ 在 $S_2(l_2(G))$ 的稠密性结合起来，推出了式（4.31）。

为证明式（4.32），直接计算可得

$$\mathrm{Tr}\Big(\kappa^{*}\int_{B(0,r)}\Big|((F_j(-\Delta)-F(-\Delta))\otimes id_{B(\ell_2(G))})\Big(\sum_{h\in G}e^{2\pi i\langle a_{(gh)^{-1}}b(g),\cdot\rangle}\otimes e_{gh,h}\Big)(y)\Big|^2 dy\kappa\Big)$$
$$=r^n\sum_{k,\ell}|c_{k,\ell}|^2\big|(F_j-F)(|\psi(g)|^2)\big|^2\to 0,\ \text{as } j\to\infty.$$

因此，所有条件均已验证。为了得到L^p 有界性结论，只需注意到半群$\mathcal{S}_\psi$ 是正则的（参见[55]）。至此，定理4.11的证明结束。□

致谢：
作者得　　到国家自然科学基金资助（编号：12071355）　　.

参考文献

[1] P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh 和 Ph. Tchamitchian. $\mathbb{R}^n$上二阶椭圆算子的 Kato 平方根问题的解。《数学年刊》(2), 156(2):633–654,2002. 2[2]J. Bergh 和 J. L¨ofstr¨om. 插值空间：引言。数学科学基础丛书，第 223 卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1976. 27[3] S. Blunck. Schr¨odinger 群的广义高斯估计和黎斯平均。《澳大利亚数学学会杂志》，82(2):149–162, 2007. 2[4] P. Brenner. L^p 和 $L_{p,\alpha}$中系统的柯西问题。《Arkiv för Matematik》，11:75–101, 1973. 2[5] T.A. Bui, P. D'Ancona 和 F. Nicola. 齐次型空间上 Schr^p odinger 群的尖锐 L 估计。《伊比利亚美洲数学杂志》，36(2):455–484, 2020. 2[6] T.A. Bui, X.T. Duong, Q. Hong 和 G. Hu. 关于埃尔米特算子分数次幂的 Schr¨odinger 群。2022. 即将发表于《国际数学研究通知》3[7] T.A. Bui, Q. Hong 和 G. Hu. 分层李群上振荡乘子的有界性。《几何分析杂志》，32(8):第 222 号论文，20 页，2022. 3[8] L. Cadilhac, J.M. Conde-Alonso 和 J. Parcet. 群代数中的谱乘子与非交换 Calder´on-Zygmund 理论。《纯粹与应用数学杂志》(9), 163:450–472, 2022. 9[9] G. Carron, T. Coulhon 和 E. Ouhabaz. 高斯估计与黎斯平均的 L^p有界性。《演化方程杂志》，2(3):299–317, 2002. 2[10] S. Chanillo. 强奇异卷积算子的加权范数不等式。美国数学会会刊, 281(1):77–107, 1984. 3[11] P. Chen, X. T. Duong, J. Li 和 L. Yan. Hardy 空间上 Schr¨odinger 群的尖锐端点估计。预印本见 https://arxiv.org/abs/1902.08875, 2019. 3, 5, 8[12] P. Chen, X. T. Duong, J. Li 和 L. Yan. Schr^p odinger 群的尖锐端点 L 估计。《数学年刊》，378(1- 2):667–702, 2020. 2, 3, 4, 6, 30, 35[13] P. Chen, X.T. Duong, Z. Fan, J. Li 和 L. Yan. 满足热核具有泊松型估计的算子在 L^p 空间上的 Schr¨odinger 方程。《日本数学会杂志》，74(1):285–331, 2022. 3[14] P. Ciatti 和 J. Wright. 分层群上的强奇异积分。（英文摘要）《调和分析的几何方面》，施普林格 INdAM 丛书第 45 卷。施普林格，查姆，2021. 3, 8[15] J.M. Conde-Alonso, A. Gonz´alez-P´erez, J. Parcet 和 E. Tablete. 李群冯诺依曼代数上的 H¨ormander-Mikhlin 判据。预印本见 https://arxiv.org/abs/2201.08740, 2022. 9[16] M. Cowling 和 U. Haagerup. 实秩一单李群的傅里叶代数的完全有界乘子。《数学发明》，96(3):507–549, 1989. 9[17] P. D'Ancona 和 F. Nicola. Schr^p odinger 群的尖锐 L 估计。《伊比利亚美洲数学杂志》，32(3):1019–1038, 2016. 2[18] E. B. Davies. 具有可测系数的一致椭圆算子。《泛函分析杂志》，132(1):141–169, 1995. 17

[19] E.B. Davies. 热核与谱理论，剑桥数学丛书第 92 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990. 8, 30, 36[20] J. De Canni`ere 和 U. Haagerup. 若干简单李群及其离散子群的傅里叶代数的乘子。《美国数学杂志》，107(2):455–500, 1985. 9[21] D. Deng, X.T. Duong, A. Sikora 和 L. Yan. 经典BMO与算子相关的BMO空间的比较及其应用。《伊比利亚美洲数学杂志》，24(1):267–296, 2008. 8, 36[22] M.R. Douglas 和 N.A. Nekrasov. 非交换场论。《现代物理评论》，73(4):977–1029, 2001. 9[23] X. Du, L. Guth 和 X. Li. $\mathbb{R}^2$上的尖锐 Schr¨odinger 极大估计。《数学年刊》(2), 186(2):607–640, 2017. 3[24] X. Du 和 R. Zhang. 高维 Schr¨odinger 极大函数的尖锐 L^2 估计。《数学年刊》(2), 189(3):837–861, 2019. 3[25] X.T. Duong 和 A. McIntosh. 不规则区域上具有非光滑核的奇异积分算子。《伊比利亚美洲数学杂志》，15(2):233–265, 1999. 30[26] X.T. Duong, A. Sikora 和 L. Yan. 加权范数不等式、高斯界与尖锐谱乘子。《泛函分析杂志》，260(4):1106–1131, 2011. 6[27] X.T. Duong 和 L. Yan. 与具有热核界的算子相关的 Hardy 空间与 BMO 空间的对偶性。《美国数学会杂志》，18(4):943–973, 2005. 2, 12[28] X.T. Duong 和 L. Yan. 新型 BMO 函数空间、John–Nirenberg不等式、插值及其应用。《纯粹与应用数学通讯》，58(10):1375–1420, 2005. 2, 12[29]J. Dziuba´nski 和 A. Hejna. Dunkl变换的 H¨ormander 乘子定理。《泛函分析杂志》，277(7):2133–2159, 2019. 8, 36[30] Z. Fan. 通过广义高斯估计得到的 Schr¨odinger 群的弱型 (p, p) 界。《数学分析与应用杂志》，495(2):第 124766 号论文，19 页，2021. 3[31] Z. Fan, G. Hong 和 W. Wang. 与非负自伴算子相关的算子值Hardy空间和BMO空间。准备中，2022. 36[32] C. Fefferman 和 E. M. Stein. 多变量 H^p 空间。《数学学报》，129(3-4):137–193, 1972. 2[33] T. Ferguson, T. Mei 和 B. Simanek. BMO 上半群生成元的 H^∞-演算。《数学进展》，347:408–441, 2019. 3[34] S. Gan, C. Oh 和 S. Wu. 关于分数 Schr¨odinger 方程局部平滑估计的一则注记。《泛函分析杂志》，283(5):第 109558 号论文, 36 页，2022. 3[35] L. Gao, M. Junge 和 E. Mcdonald. 带有非交换导数的量子欧几里得空间。预印本见 https://arxiv.org/abs/1908.07775, 2019. 36[36] A. Gonz´alez-P´erez. 通过半群和 Riesz变换刻画的 H¨older 类。《数学杂志》，301(3):3245–3284,2022. 11[37] A. Gonz´alez-P´erez, M. Junge 和 J. Parcet. 通过 Sobolev维数刻画群代数中的光滑傅里叶乘子。《法国高等师范学校科学年刊》(4), 50(4):879–925, 2017. 9[38] A. Gonz´alez-P´erez, M. Junge 和 J. Parcet. 量子欧几里得空间中的奇异积分。《美国数学会回忆录》，272(1334):xiii+90, 2021. 3, 9, 36, 39[39] A. Grigor'yan. 热核与流形上的分析，AMS/IP高级数学研究丛书第 47 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯；国际出版社，马萨诸塞州波士顿，2009. 30[40] H. J. Groenewold. 关于初等量子力学原理。《Physica》，12:405–460, 1946. 9[41] U. Haagerup. 一个具有度量逼近性质的非核 C^*-代数的例子。《数学发明》，50(3):279–293, 1978/79. 9[42] U. Haagerup. 冯·诺依曼代数中的算子值权。I。《泛函分析杂志》，32(2):175–206, 1979. 13[43] U. Haagerup. 冯·诺依曼代数中的算子值权。II。《泛函分析杂志》，33(3):339–361, 1979. 13[44] U. Haagerup 和 T. de Laat. 不具有逼近性质的简单李群。《杜克数学杂志》，162(5):925–964, 2013. 9[45] S. Hofmann, G. Lu, D. Mitrea, M. Mitrea 和 L. Yan. 满足 Davies–Gaffney估计的非负自伴算子相关的 Hardy 空间。《美国数学会回忆录》，214(1007):vi+78, 2011. 2, 6, 12[46] S. Hofmann 和 S. Mayboroda. 与散度型椭圆算子相关的 Hardy 空间和 BMO 空间。《数学年刊》，344(1):37–116, 2009. 6[47] G. Hong, X. Lai 和 B. Xu. 作用于非交换 L^p空间的极大奇异积分算子。预印本见 https://arxiv.org/abs/2009.03827, 即将发表于《数学年刊》，2020. 8[48] G. Hong, L.D. L´opez-S´anchez, J.M. Martell 和 J. Parcet. 与矩阵值核相关的 Calder´on-Zygmund 算子。《国际数学研究通知》(5):1221–1252, 2014. 3

[49] G. Hong 和 B. Xu. 遍历理论中平方函数的非交换弱型 (1, 1) 估计。《泛函分析杂志》，280(9)：论文编号 108959，29 页，2021 年。3, 8[50] L. H¨ormander. L^p 空间中平移不变算子的估计。《数学学报》，104：93–140，1960 年。2[51] A. Jensen 和 S. Nakamura. Schr¨odinger 算子的函数在 L^p空间与 Besov 空间之间的映射性质。载于《谱与散射理论及其应用》，《纯数学高级研究》第 23 卷，第 187–209 页。日本数学会，东京，1994 年。2[52] A. Jensen 和 S. Nakamura. Schr^{p}ödinger 算子的函数的 L¨映射性质及其在散射理论中的应用。《日本数学会杂志》，47(2)：253–273，1995 年。2[53] M. Junge 和 T. Mei. 非交换 Riesz变换——一种概率方法。《美国数学杂志》，132(3)：611–680，2010 年。3[54] M. Junge 和 T. Mei. 与算子半群相关的 BMO 空间。《数学年刊》，352(3)：691–743，2012 年。3, 5, 11, 28[55] M. Junge、T. Mei 和 J. Parcet. 群冯诺依曼代数上的光滑傅里叶乘子。《几何与泛函分析》，24(6)：1913–1980，2014 年。3, 9, 41, 42, 46, 47[56] M. Junge、T. Mei 和 J. Parcet. 非交换 Riesz变换——无维数界与傅里叶乘子。《欧洲数学学会杂志》（JEMS），20(3)：529–595，2018 年。3, 9[57] M. Junge、T. Mei、J. Parcet 和 R. Xia. 代数 Calder´on-Zygmund 理论。《数学进展》，376：论文编号 107443，72 页，2021 年。3, 5, 6, 11, 12, 13, 28, 36, 37, 38, 39, 41[58] M. Junge、C. Le Merdy 和 Q. Xu. 非交换 L^∞ 空间上的 H^p泛函演算与平方函数。《Ast´érisque》，(305)：vi+138，2006 年。3, 13[59] M. Junge 和 Q. Xu. 非交换极大遍历定理。《美国数学会杂志》，20(2)：385–439，2007 年。3, 28[60]X. Lai. 粗糙核的非交换极大算子。预印本见 https://arxiv.org/abs/1912.09063，即将在《Analysis & PDE》发表，2022 年。8[61] E. Lanconelli. Schr^{p}ödinger 方程柯西问题解在 L^n(R¨) 中的估计。《意大利数学联合会通报》（第 4 辑），1：591–607，1968 年。2[62] E. McDonald、F. Sukochev 和 X. Xiong. 非交换欧几里得空间上的量子可微性。《数学物理通讯》，379(2)：491–542，2020 年。9, 36[63] T. Mei. 算子值 Hardy 空间。《美国数学会回忆录》，188(881)：vi+64，2007 年。3, 8, 35, 38[64] T. Mei. 与算子半群相关的帐篷空间。《泛函分析杂志》，255(12)：3356–3406，2008 年。5[65] T. Mei 和 J. Parcet. 奇异积分的伪局部化与非交换 Littlewood-Paley 不等式。《国际数学研究通知》，(8)：1433–1487，2009 年。3[66] A. Miyachi. 关于 H^p(R^n) 的某些傅里叶乘子。《东京大学理学部纪要 IA 数学》，27(1)：157–179，1980 年。2[67] A. Miyachi. 关于某些奇异 Fourier 乘子。《东京大学理学部纪要 IA 数学》，28(2)：267–315，1981 年。2[68] J. E. Moyal. 作为统计理论的量子力学。《剑桥哲学学会会刊》，45：99–124，1949 年。9[69] N. Nekrasov 和 A. Schwarz. 非交换 R^4, 上的瞬子与 (2, 0) 超共形六维理论。《数学物理通讯》，198(3)：689–703，1998 年。9[70] E.M. Ouhabaz. 区域上的热方程分析，《伦敦数学学会专著丛书》第 31 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2005 年。2, 30[71] J. Parcet. 奇异积分的伪局部化与非交换 Calder´on-Zygmund 理论。《泛函分析杂志》，256(2)：509–593，2009 年。3, 8[72] J. Parcet、E. Ricard 和 M. de la Salle. SL_n(R) 中的傅里叶乘子。《杜克数学杂志》，171(6)：1235–1297，2022 年。3[73] W.L. Paschke. B*代数上的内积模。《美国数学会会刊》，182：443–468，1973 年。11[74] G. Pisier 和 Q. Xu. 非交换 L^p 空间。《巴拿赫空间几何手册》，第 1459–1517 页，2003 年。3, 32[75] K.M. Rogers 和 A. Seeger. Schr¨odinger 方程的端点极大估计与平滑估计。《莱茵应用数学杂志》，640：47–66，2010 年。3[76] I. J. Schoenberg. 度量空间与完全单调函数。《数学年刊》（第 2 辑），39(4)：811–841，1938 年。42[77] N. Seiberg 和 E. Witten. 弦理论与非交换几何。《高能物理杂志》，(9)：论文 32，93 页，1999 年。9[78] S. Sj¨ostrand. 关于 Schr¨odinger 方程解的黎斯平均。《比萨高等师范学院科学纪要》（第 3 辑），24：331–348，1970 年。2

[79] J.D. Stafney. 插值空间上算子的谱。美国数学会会刊，144：333–349，1969 年。28[80] M. Takesaki. 算子代数理论. II，《数学科学百科全书》第 125 卷，数学科学百科全书。施普林格出版社，柏林，2003 年。算子代数与非交换几何，第 6 卷。42[81] N.Th. Varopoulos、L. Saloff-Coste 和 T. Coulhon.群上的分析与几何，《剑桥数学丛书》第 100 卷，剑桥数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1992 年。30[82] X. Xiong、Q. Xu 和 Z. Yin. 量子环面上的 Sobolev、Besov 和 Triebel-Lizorkin 空间。《美国数学会回忆录》，252(1203)：vi+118，2018 年。9[83] K. Yosida. 泛函分析，《数学科学基础丛书》第 123 卷，数学科学基础丛书 *[数学科学基本原理]*。施普林格出版社，柏林—纽约，第六版，1980 年。33

Zhijie Fan，武汉大学数学系，电子邮箱：
ZhijieFan@whu.edu.cn

Guixiang Hong，武汉大学数学系，电子邮箱：
guixiang.hong@whu.edu.cn

Liang Wang，武汉大学数学系，电子邮箱：
wlmath@whu.edu.cn