arXiv:2302.00446v2 [math.QA] 6 Jul 2023

李环面与扩张仿射李代数的切瓦利对合

SAEID AZAM、MEHDI IZADI FARHADI

Abstract. 对于无限维单李代数和仿射 Kac-Moody 李代数，切瓦利对合是模理论的重要组成部分。为建立扩张仿射李代数的模理论，我们研究李环面和扩张仿射李代数中“切瓦利对合”的存在性。我们首先探讨如何将无中心核上的切瓦利对合（该无中心核具有无中心李环面的特征）提升至核，再提升至整个扩张仿射李代数。随后，我们通过依赖类型的论证，证明无中心李环面中切瓦利对合的存在性。

1. 引言

本研究的主要目标是探究扩张仿射李代数（EALAs）中切瓦利对合的存在性。扩张仿射李代数是一类大多为无限维的李代数，是有限维李代数和仿射李代数类别的推广。过去几十年来，这一类李代数一直受到深入研究。有关扩张仿射李代数基本结构理论的介绍，感兴趣的读者可参阅 [AABGP97]和 [Neh11]。

本工作是 [AFI22] 的延续，该文开创了扩张仿射李代数的模理论这一概念。所谓模理论，是指将 C. Chevalley 针对有限维复单李代数提出的开创性方法推广到更高零度情形。该方法提供了一个框架，使研究能够从复数推广到任意正特征域，进而得到 Chevalley 群。这一方法的主要组成部分是切瓦利对合和 Chevalley 基。粗略地说，利用一个在嘉当子代数上作用为负恒等映射的切瓦利对合，可以构造一个 Chevalley 基，其 $\mathbb{Z}$-张成空间为底复李代数提供一个 $\mathbb{Z}$-形式（整形式）。然后，将所得的 $\mathbb{Z}$-形式与

2010 *Mathematics Subject Classification.* 17B67, 17B65, 19C99, 20G44, 22E65.
*Key words and phrases. Extended affine Lie algebra, Lie torus, Chevalley involution, Chevalley basis, multiloop algebra.*本研究基于伊朗国家科学基金会（INSF）资助的项目（编号：4001480）。本研究部分工作在 IPM-伊斯法罕分部完成。

任意正特征域作张量积，便可得到一个与 Chevalley 基的选取无关的模李代数。随后，可为相应的万有包络代数构造整形式，这对于 Chevalley 群的表示论至关重要，参见 [Kos66] 和 [Hum72]。

切瓦利对合的存在性是模理论中的一个焦点。直观地说，这类对合使我们能够将某些子代数中局部成立的论证提升为整体成立的论证。在 [AFI22], 中，作者假设所考虑的扩张仿射李代数具有切瓦利对合，并据此为其核构造了一个 $\mathbb{Z}$-形式。在有限理论和仿射理论中，这类对合的存在性由 Serre 型表示得到保证。然而，对于一般的扩张仿射李代数，情况完全不明朗。在本文中，我们研究（温和的）扩张仿射李代数的切瓦利对合的存在性。

H. Garland 通过为非扭仿射李代数提供切瓦利基，并给出相应包络代数的整形式及其显式 $\mathbb{Z}$-基，将整形式理论扩展到了非扭仿射李代数。他还构造了与非扭仿射李代数的标准表示相关联的切瓦利群，参见 [Gar78], [Gar80]。在 [Mit85], 中，D. Mitzman 采用依类型的方法，为与扭仿射李代数对应的万有包络代数给出了一个 $\mathbb{Z}$-基。针对所有 Kac-Moody 李代数这一类构造 $\mathbb{Z}$-形式，则归功于 J. Tits [Tit81],[Tit82]。

我们回顾一下，扩张仿射李代数是一个三元组 $(E, (\cdot,\cdot)\ \mathcal{H})$，由复李代数 E、E 的嘉当子代数 $\mathcal{H}$，以及定义在 E 上的对称不变非退化双线性形式 $(\cdot,\cdot)$ 构成，并满足某些自然公理，参见定义 2.1.1。令 R 为相对于 $\mathcal{H}$ 的 E 的根集。于是有 $R = R^\times \cup R^0$，其中 $R^\times$ 是 E 的“非各向同性”根集，而 R^0 是 E 的“各向同性根”集。为了说明我们研究 E 的切瓦利对合时所采用的策略，我们需要先回顾几个术语。按定义， E 的“核” E_c 是由非各向同性根空间 E_α, $\alpha \in R^\times$ 生成的 E 的子代数。无中心核 E_{cc} 是商李代数 $E_c/Z(E_c)$，其中 $Z(E_c)$ 是 E_c 的中心。众所周知，无中心核在扩张仿射李代数的分类与实现以及该理论的其他方面都发挥着核心作用，参见 [AG01]。无中心核的特征是它是一个“无中心李环面”，参见定义 2.2.1。无中心李环面由 Y. Yoshii [Yos06] 定义。简言之，扩张仿射李代数的无中心核是一个无中心李环面。反过来，从无中心李环面 $\mathcal{L}$ 出发，E. Neher [Neh04a] 给出了一种规定的方法来

构造一个无中心核为 $\mathcal{L}$ 的扩张仿射李代数。我们在此简要介绍这一构造。

设 $\mathcal{L}$ 是一个无中心李环面，配备对称、不变且非退化的形式 $(\cdot,\cdot)$；参见 [Yos06，定理 5.2]。设 D 是 $\mathcal{L}$ 的斜质心导子 SCDer($\mathcal{L}$) 的一个“容许子代数”，而 $D^{gr\star}$ 是其分次对偶，通过逆变作用视为一个 D-模。详情参见 2.3.6 和定义 2.4.2。设 κ 是 D 上的一个“仿射余循环”，参见 2.4.1。考虑向量空间 $E = E(\mathcal{L}, D, \kappa) = \mathcal{L} \oplus D^{gr\star} \oplus D$。于是，可在 E 上赋予一个自然的李括号，它由 $\mathcal{L}$ 上的李括号、D 上的交换子括号、D 在 $D^{gr\star}$ 上的作用、D 作为导子对 $\mathcal{L}$ 的自然作用、仿射余循环 κ，以及由 D 和 $(\cdot,\cdot)$ 引入的一个复杂 2-余循环所诱导；参见 2.4.5。还可在 E 上赋予一个双线性形式 $(\cdot,\cdot)$，它由 $\mathcal{L}$ 上的形式以及 D 与 $D^{gr\star}$. 的对偶配对（取 $\mathcal{H} = \mathcal{L}_0^0 \oplus D^{0\star} \oplus D^0$）所诱导。根据 [Neh04a，定理 16]，$(E, (\cdot,\cdot)\ \mathcal{H})$ 是一个具有 $E_c = \mathcal{L} \oplus D^{gr\star}$ 的扩张仿射李代数；反过来，任意扩张仿射李代数都与某个 $E(\mathcal{L}, D, \kappa)$ 分次同构，其中 $\mathcal{L}$ 是某个无中心李环面，D 是某个容许子代数，κ 是一个仿射余循环。

现在我们回到扩张仿射李代数 $E(\mathcal{L}, D, \kappa)$ 是否存在切瓦利对合这一问题。首先，假设 $\mathcal{L}$ 配备了这样的对合 τ，见定义 3.1.1。我们以自然的方式将 τ 扩张为向量空间 $\mathcal{L} \oplus \text{End}(\mathcal{L})^\star \oplus \text{End}(\mathcal{L})$ 上的对合 $\bar{\tau}$。于是，作为李代数，$\bar{\tau}$ 限制为 $\mathcal{L} \oplus \text{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star} \oplus \text{SCDer}(\mathcal{L})$ 上的对合 $\bar{\tau}$。现在的问题是，$\bar{\tau}$ 是否保持容许子代数 D 及其分次对偶。一般而言答案是否定的，见例 3.2.5(ii)。为更清楚地了解这一情形，我们令 $D_\tau := \bar{\tau}(D)$，并定义双线性映射κ_τ: $D_\tau \times D_\tau \to (D_\tau^0)^\star$，其定义为 $\kappa_\tau = \bar{\tau} \circ \kappa \circ (\bar{\tau} \times \bar{\tau})$。事实证明，$D_\tau$ 是 SCDer($\mathcal{L}$) 的一个容许子代数，而 κ_τ 是 D_τ 上的仿射余循环，见引理 3.2.1。因此，$\mathcal{L}$ 的切瓦利对合 τ 导出一个李代数同构$\bar{\tau}$，将 $E(\mathcal{L}, D, \kappa)$ 映到 $E^\tau := E(\mathcal{L}, D_\tau, \kappa_\tau)$ 上，并将 E 的核映到 E^τ 的核。此外，若 D 是 τ-不变的，即 $D_\tau = D$，那么 $\bar{\tau}$ 限制为 E_c 的切瓦利对合。进一步地，如果有序对 (D, κ) 是 τ-不变的，也就是说 $(D_\tau, \kappa_\tau) = (D, \kappa)$，那么 $\bar{\tau}$ 限制为 E 的切瓦利对合，见定理 3.3.2。在引理 3.2.4 中，我们给出了容许子代数 D 为 τ-不变的充要条件。事实证明，特殊情形 $D = D^0$ 或 $D = \text{SCDer}(\mathcal{L})$ 都是 τ-不变的，因此保证了 E_c 上存在对合 $\bar{\tau}$。据我们所知，这两种情形涵盖了文献中出现的所有扩张仿射李代数的具体例子，见注 3.3.4；但不包括我们在例 3.2.5 中构造的那些例子。“哪些仿射余循环是不变的？”这个问题更为微妙，因为我们没有足够的例子，而且对仿射余循环的了解有限。幸运的是，

已知的例子对于 $\mathcal{L}$ 的任意切瓦利对合 τ 都是 τ-不变的，见注释 3.3.4(ii)。

现在我们讨论约化型无中心李环面是否存在切瓦利对合。幸运的是，由于 [BGK96],[BGKN95], [Yos00]和 [AG01] 的研究，约化型无中心李环面的结构和坐标代数已得到非常深入的理解。事实上，根据类型的不同，无中心李环面 $\mathcal{L}$可由一个含幺代数赋予坐标化，该代数可以是约旦代数、替代代数或结合代数，见第 4 节。在单边情形中，类型 $A_\ell(\ell \geq 3)$、 A_2 和 A_1 分别可利用 $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$、$\mathfrak{psl}_3$和蒂茨-坎托尔-科赫（TKK）构造得到，而类型 D、E 则是非扭无中心李环面。在非单边情形中，类型 $B_\ell(\ell \geq 3)$、 F_4 和G_2 可利用广义蒂茨构造得到，而类型 $C_\ell(\ell \geq 2)$可利用蒂茨-坎托-科赫构造得到，见第 5 节。因此，我们首先证明 $\mathcal{L}$ 的坐标代数具有一个预切瓦利对合，即存在一个反转分次的对合，见第 4 节。接着，我们根据类型采用相应的方法，证明该对合可提升为相应张量结构、 $\mathfrak{sl}_{\ell+1}$ 结构、 $\mathfrak{psl}_3$ 结构、TKK 结构或广义蒂茨结构的切瓦利对合。由此解决了所研究无中心李环面存在切瓦利对合的问题，见定理 4.0.2 和 5.0.1。上述结果涵盖了第 2–5 节的内容。

在第 6 节中，我们讨论在其中心上有限生成的李环面（fgc 李环面）存在切瓦利对合的问题。任何类型不同于 A_ℓ 的无中心李环面都是 fgc 的，且任何此类代数都是多环代数；详情和定义见第 6 节。在第 6.2 小节中，我们考察多环代数是否存在切瓦利对合。

最后，我们提到，对合的研究与对合李代数的紧实形式的研究密切相关。在[Gao96] 中，作者采用统一的方法，研究单连通型有限根系分级的对合李代数。

2. 预备知识

除非另有说明，本文中的所有向量空间和代数均定义在复数域 $\mathbb{K}$ 上。若 S 是群的一个子集，我们用 $\langle S\rangle$ 表示由 S 生成的子群。此外，本文中 $\mathcal{A}_{[n]} = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ 表示在 $\mathbb{K}$ 上以n个变量构成的劳朗多项式代数。

2.1. 扩张仿射李代数。

我们首先回顾“扩张仿射李代数”的定义。由于本文关注的是“驯性”

扩张仿射李代数，定义中包含驯性条件。详情请参阅 [AABGP97] 和 [Neh11]。

定义 2.1.1. 扩张仿射李代数是一个三元组 $(E, (\cdot,\cdot)\ \mathcal{H})$，由一个李代数 E、一个非平凡子代数 $\mathcal{H}$ 以及一个双线性形式 $(\cdot,\cdot): E\times E\to\mathbb{K}$ 构成，并满足以下六条公理:

(A1) $(\cdot,\cdot)$ 在 E 上是不变且非退化的，

(A2) $\mathcal{H}$ 是有限维的，并且有根空间分解 $E=\sum_{\alpha\in\mathcal{H}^\star}E_\alpha$，其中 $E_\alpha=\{x\in E\mid [h,x]=\alpha(h)x$ 对所有 $h\in\mathcal{H}\}$均成立，且 $E_0=\mathcal{H}$.

为给出下一组公理，我们将 E 关于 $\mathcal{H}$ 的根系记为 R，即 $R=\{\alpha\in\mathcal{H}^\star\mid E_\alpha\neq\{0\}\}$。由 (A1)-(A2) 可知，限制在 $\mathcal{H}$ 上的 E 上的形式 $(\cdot,\cdot)$ 是非退化的，因此它可通过 $(\alpha,\beta):=(t_\alpha,t_\beta)$ 转移到 $\mathcal{H}^\star$，其中 $t_\alpha\in\mathcal{H}$ 是满足 $\alpha(h)=(h,t_\alpha)$ 的唯一元素，$h\in\mathcal{H}$。若一个根 α 满足 $(\alpha,\alpha)=0$，则称其为各向同性根，否则称为非各向同性根。我们分别用 R^0 和 $R^\times$ 表示 R 的各向同性根集和非各向同性根集。由 E 的非各向同性根空间生成的子代数 E_c 称为 E 的核。

(A3) 对于 $\alpha\in R^\times$ 和 $x\in E_\alpha$，$\mathrm{ad}(x)$ 在 E上局部幂零。(A4) E 是温和的，即 E_c 在 E 中的中心化子包含于 E_c。(A5) R 在 $\mathcal{H}^\star$ 中的 $\mathbb{Z}$-张成空间是有限秩自由阿贝尔群。(A6) $R^\times$ 是不可分解的，也就是说，若 $R^\times=R_1\cup R_2$ 且 $(R_1,R_2)=0$，则 $R_1=\emptyset$ 或 $R_2=\emptyset$.

2.1.2. 设 $(E, (\cdot,\cdot)\ \mathcal{H})$，或简称 E，是一个根系为 R的扩张仿射李代数。令 $\mathcal{V}=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}R$ 和 $\mathcal{V}^0=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}R^0$。设 $\bar{}:\mathcal{V}\to\bar{\mathcal{V}}:=\mathcal{V}/\mathcal{V}^0$。事实证明，$R$ 在 $\mathcal{V}$ 中的像 R 是 $\mathcal{V}$ 中的不可约有限根系。可以在 $\mathcal{V}$ 中找到 R 的一个同构原像 R，在 $\bar{}$下，使得 R 是其真实张成空间中的不可约有限根系。于是 $R\subseteq\dot{R}+\Lambda$，其中 $\Lambda=\langle R^0\rangle$是秩等于 $\dim\mathcal{V}^0$的自由阿贝尔群。按定义，R（或_E）的类型和秩分别是 R的类型和秩。

商李代数 $E_{cc}:=E_c/Z(E_c)$ 被称为 E 的无中心核，其中这里的 $Z(E_c)$ 表示 E_c 的中心。扩张仿射李代数的大多数结构性质都编码在其无中心核中。扩张仿射李代数的无中心核可刻画为一个“李环面”。

2.2. 李环面。Y. Yoshii 在 [Yos06] 中引入李环面，以刻画扩张仿射李代数；E. Neher 又在 [Neh04b] 中对其进行了进一步研究。这里我们回顾李环面的定义。

设 Λ 是一个有限秩自由阿贝尔群，Δ 是一个有限不可约根系，其根格为 $Q=\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\Delta)$。对于 $\alpha,\ \beta\in\Delta$，$\alpha^\vee$ 是

α 的余根，而 $\langle \beta,\ \alpha^\vee \rangle$ 是相应的嘉当整数。我们用 $\Delta\text{ind} = \{0\} \cup \{\alpha \in \Delta^\times \mid (\alpha/2) \notin \Delta\}$ 表示 Δ 的“不可约”根子系。

定义 2.2.1. 类型为 Δ 的李 Λ-环面是满足以下条件 (LT1)-(LT4) 的 $\mathbb{K}$ 上的李代数 $\mathcal{L}$:
(LT1) $\mathcal{L}$ 是一个 $Q \times \Lambda$-分次李代数;

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{(\alpha,\lambda)\in Q\times\Lambda} \mathcal{L}_\alpha^\lambda \quad \text{with} \quad \mathcal{L}_\alpha^\lambda = 0 \text{ if } \alpha \notin \Delta,$$

and

$$[\mathcal{L}_\alpha^\lambda, \mathcal{L}_\beta^\mu] \subset \mathcal{L}_{\alpha+\beta}^{\lambda+\mu}.$$

(LT2) 对于 $\alpha \in \Delta^\times$ 和 $\lambda \in \Lambda$，有

(i) $\dim\mathcal{L}_\alpha^\lambda \le 1$，若 $\alpha \in \Delta$ 为 ind，则 $\dim \mathcal{L}_\alpha^0 = 1$，(ii) 若 $\dim \mathcal{L}_\alpha^\lambda = 1$，则存在元素 $e_\alpha^\lambda \in \mathcal{L}_\alpha^\lambda$ 和 $f_\alpha^\lambda \in \mathcal{L}_{-\alpha}^{-\lambda}$，使得

$$\mathcal{L}_\alpha^\lambda = \mathbb{K}e_\alpha^\lambda, \quad \mathcal{L}_{-\alpha}^{-\lambda} = \mathbb{K}f_\alpha^\lambda,$$

and

$$[[e_\alpha^\lambda, f_\alpha^\lambda], x_\beta^\mu] = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle x_\beta^\mu$$

对于 $\beta \in \Delta$、$\mu \in \Lambda$、$x_\beta^\mu \in \mathcal{L}_\beta^\mu$.

(LT3) 对于 $\lambda \in \Lambda$，我们有 $\mathcal{L}_0^\lambda = \sum_{\alpha\in\Delta^\times,\ \mu\in\Lambda} [\mathcal{L}_\alpha^\mu, \mathcal{L}_{-\alpha}^{\lambda-\mu}]$。

(LT4) $\Lambda = \langle \text{supp}_\Lambda(\mathcal{L}) \rangle$，其中 $\text{supp}_\Lambda(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \Lambda \mid \mathcal{L}_\alpha^\lambda \neq 0$，对某个 $\alpha \in \Delta\}$ 成立。

若李环面 $\mathcal{L}$ 的中心 $\mathcal{L}$ 平凡，则称其为无中心的；若 $\mathcal{L}$ 上存在一个分次的不变非退化对称双线性型 $(\cdot,\cdot)$，则称其为不变的，也就是说

$$(\mathcal{L}_\alpha^\lambda, \mathcal{L}_\beta^\mu) = 0 \quad \text{unless} \quad (\alpha,\lambda) = (-\beta,-\mu).$$

Λ 的秩称为 $\mathcal{L}$ 的零度。当 Δ 和 Λ 固定时，我们简单地称 $\mathcal{L}$ 为李环面。对于 $\lambda \in \Lambda$ 和 $\alpha \in Q$，我们定义

$$\mathcal{L}^\lambda := \bigoplus_{\alpha\in Q} \mathcal{L}_\alpha^\lambda \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_\alpha := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{L}_\alpha^\lambda,$$

那么 $\mathcal{L} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{L}^\lambda$ 是 Λ-分次的，而 $\mathcal{L} = \bigoplus_{\alpha\in Q} \mathcal{L}_\alpha$ 是 Q-分次的。

2.2.2. 假设 E 是一个根系为 R的扩张仿射李代数。考虑 2.1.2 节中的有限根系 R和自由阿贝尔群 Λ。我们将 R 的类型记为 Δ。以下结果将一个（无中心的）李环面与 E联系起来。

命题 2.2.3. [Neh04a，命题 12][AG01，命题 1.28] E 的核是一个类型为 Δ、具有 $Q\times\Lambda$-分次 $E_c=\bigoplus_{\alpha\in\dot{R},\ \lambda\in\Lambda}(E_c)^\lambda_\alpha$ 的李 Λ-环面，其中 $(E_c)^\lambda_\alpha=E_c\cap E_{\alpha+\lambda}$。特别地，$E_{cc}=E_c/Z(E_c)=\bigoplus_{\alpha\in\dot{R},\ \lambda\in\Lambda}(E_{cc})^\lambda_\alpha$ 是一个类型为 Δ、具有 $(E_{cc})^\lambda_\alpha=\pi((E_c)^\lambda_\alpha)$ 的无中心李 Λ-环面，其中 $\pi:E_c\to E_{cc}$ 是由 $\pi(x)=x+Z(E_c)$ 定义的典范投影。

李环面导子代数的某些子代数在后续内容中发挥着关键作用。

2.3. 质心导子与斜质心导子。我们描述一种构造，它将一个无中心李环面 $\mathcal{L}$ 与一类扩张仿射李代数 $E(\mathcal{L},\mathcal{D},\kappa)$ 相关联，其中 D 是 $\mathcal{L}$ 的导子代数的一个分次子代数，而 κ 是所谓的“仿射余循环”。作为向量空间，我们有 $E(\mathcal{L},D,\kappa)=\mathcal{L}\oplus D^{gr\star}\oplus D$，其中 $D^{gr\star}$ 是 D 的分次对偶。下文将详细描述这一构造。

定义 2.3.1. 任意交换环 R 上李代数 $\mathcal{L}$ 的中心，记作 $\mathsf{Cent}_R(\mathcal{L})$，是所有与 $\mathcal{L}$ 的元素的左乘和右乘相交换的 R-线性端同态 $\mathcal{L}$ 的集合，即

$$\mathrm{Cent}_R(\mathcal{L})=\{\chi\in\mathrm{End}_R(\mathcal{L})\mid\chi([x,y])=[\chi(x),y]=[x,\chi(y)],\forall x,y\in\mathcal{L}\}.$$

于是，对于所有 $x\in\mathcal{L},\chi\in\mathsf{Cent}_R(\mathcal{L})$，$\mathcal{L}$ 可通过 $\chi.x=\chi(x)$ 自然地视为一个在 $\mathsf{Cent}_R(\mathcal{L})$ 上的模。

定义 2.3.2. 如果一个扩张仿射李代数的无中心核是有限生成的，即无中心核作为其中心上的模是有限生成的，则称该扩张仿射李代数为 fgc。

2.3.3. 设 $\mathcal{L}$ 是一个在 $\mathbb{K}$ 上、型为 Δ、零度为 n 的李 Λ-环面。则其中心 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 也是 Λ-分次的；

$$\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^\lambda\quad\text{with}\quad\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^\lambda\le1,$$

其中，对于所有 $\mu\in\Lambda\}$，$\mathsf{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^\lambda=\{\chi\in\mathsf{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})\mid\chi(\mathcal{L}^\mu)\subseteq\mathcal{L}^{\lambda+\mu}$。现在令 $\Gamma=\{\lambda\in\Lambda\mid\mathsf{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^\lambda\neq0\}$。以下来自 [Neh04a] 的结果说明，将 Γ 称为 $\mathcal{L}$ 的质心分次群是合理的。

定理 2.3.4. 设 $\mathcal{L}$ 是一个型为 Δ 的无中心李 Λ-环面。则

(a) Γ 是 Λ的子群，且 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 与群环$\mathbb{K}[\Gamma]$同构，因此也与有限多个变量上的 Laurent 多项式环同构。(b) $\mathcal{L}$ 是自由的 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$-模；若 $\Delta\neq A_\ell$，则 $\mathcal{L}$ 作为 $\mathsf{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$-模具有有限秩。

2.3.5. 设 $\mathcal{L}$ 是一个类型为 Δ 、零度为 n且质心分次群为 Γ的无中心李 Λ-环面。因此，我们可以写成

$$\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) = \bigoplus_{\mu\in\Gamma} \mathbb{K}\chi^{\mu},$$

其中， χ^{μ} 以次数为 μ 的端同态作用于 $\mathcal{L}$ ，且 $\chi^{\mu}\chi^{\nu} = \chi^{\mu+\nu}$。对于任意 $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K})$，定义 $\mathcal{L}$ 的导子 ∂_{θ} 如下:

$$\partial_{\theta}(x^{\lambda}) = \theta(\lambda)x^{\lambda} \text{ for } \lambda \in \Lambda, x^{\lambda} \in \mathcal{L}^{\lambda}.$$

导子 ∂_{θ} 称为 $\mathcal{L}$的次数导子。令

$$\mathcal{D} := \{\partial_{\theta} \mid \theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K})\},$$

为所有次数导子的集合。记

$$\mathrm{CDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) := \mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})\mathcal{D} = \bigoplus_{\mu\in\Gamma} \chi^{\mu}\mathcal{D},$$

称为 $\mathcal{L}$的质心导子。由此可知，$\mathrm{CDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$是 $\mathcal{L}$ 的导子代数 $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$的一个 Γ-分次子代数，且

$$[\chi^{\mu}\partial_{\theta}, \chi^{\nu}\partial_{\psi}] = \chi^{\mu+\nu}(\theta(\nu)\partial_{\psi} - \psi(\mu)\partial_{\theta}). \tag{2.1}$$

2.3.6. 固定 $\mathcal{L}$ 上的一个非退化不变 Λ-分次双线性形式 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$ （见 Yos06, 定理 5.2]）。满足对所有 $x \in \mathcal{L}$都有 $(d(x)\ x)_{\mathcal{L}} = 0$ 的导子 d ，或等价地，满足对所有 $x, y \in \mathcal{L}$都有 $(d(x)\ y) = -(x, d(y))$ 的导子，称为 $\mathcal{L}$的斜导子。令

$$\begin{aligned} \mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) &:= \{d \in \mathrm{CDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) \mid (d(x), x)_L = 0 \text{ for all } x \in \mathcal{L}\} \\ &= \bigoplus_{\mu\in\Gamma} \mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^{\mu} = \bigoplus_{\mu\in\Gamma} \chi^{\mu}\{\partial_{\theta} \in \mathcal{D} \mid \theta(\mu) = 0\}. \end{aligned}$$

那么，$\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 是 $\mathrm{CDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 的一个 Γ-分次子代数，称为 $\mathcal{L}$ 的斜中心导子。注意，$\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^{0} = \mathcal{D}$.

对于 $\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 的一个分次子代数 $D = \sum_{\mu\in\Gamma} D^{\mu}$ ，我们将其分次对偶记作 $D^{gr^{\star}} = \sum_{\mu\in\Gamma}(D^{\mu})^{\star}$ ，其分次为$(D^{gr^{\star}})^{\mu} = (D^{-\mu})^{\star}$，并通过逆变作用将其视为一个 D-模，即

$$(d.\varphi)(d') = \varphi([d', d]) \text{ for } d', d \in D, \varphi \in D^{gr*},$$

其中，对于 $\nu \neq \mu$， $\varphi \in (D^{\mu})^{\star}$ 通过 $\varphi|_{D^{\nu}} = 0$ 被视为 D 上的线性形式。

2.4. 扩张仿射李代数的构造。现在，我们准备从无中心李环面出发，给出扩张仿射李代数的一般构造，参见 [Neh11]。我们先给出以下定义。

2.4.1. 设 $D = \bigoplus_{\mu\in\Gamma} D^\mu$ 是 $\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 的 Γ-分次子代数，且 $\kappa : D \times D \to D^{gr*}$ 是一个双线性映射。假设 D 满足以下两个条件:

(i) 典范求值映射 $\mathrm{ev} : \Lambda \to (D^0)^\star$ 定义为

$$\mathrm{ev}(\lambda)(\partial_\theta) = \theta(\lambda),\ \lambda \in \Lambda,$$

是单射且其像离散。注意，由 (i) 可知， D^0 是 D 的一个 ad-可对角化子代数，其权空间为 D^μ, $\mu \in \Gamma$。我们还注意到 $D^0 \subseteq \mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^0 = \mathcal{D}$。

(ii) κ 是一个分次且不变的“仿射余循环”。这意味着，κ 是一个满足以下条件的双线性映射

$$\kappa(d,d) = 0,\ \ \textstyle\sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \kappa([d_i,d_j],d_k) = \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} d_i \cdot \kappa(d_j,d_k),$$
$$\kappa(D^{\mu_1},D^{\mu_2}) \subseteq (D^{-\mu_1-\mu_2})^\star \ \text{ and } \ \kappa(d_1,d_2)(d_3) = \kappa(d_2,d_3)(d_1),$$
$$\kappa(D^0,D) = 0,$$

对 $d, d_1, d_2, d_3 \in D$ 成立。注意，通过 (i,j,k) $\circlearrowleft$，我们是指 (i,j,k) 是 (1,2,3) 的一个循环置换。

定义 2.4.2. 若 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$ 的子代数 D 满足 2.4.1(i)，则称其为可容许的。

注 2.4.3. 扩张仿射李代数最初定义在复数域上。后来，E. Neher 将这一概念推广到特征零的域上，参见 [Neh04a，定义 11]。在这一一般情形下，典范求值映射的像不一定是离散的。

例 2.4.4. (i) 设 $(\mathcal{U},\mathcal{U}',\Gamma')$ 是一个三元组，由 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{K})$ 的 $\mathbb{K}$-子空间 $\mathcal{U},\mathcal{U}'$ 以及 Γ 的一个子群 Γ' 组成。令

$$(\mathcal{U},\mathcal{U}',\Gamma')_\mu := \begin{cases} \mathcal{U} & \text{if } \mu = 0, \\ \{\theta \in \mathcal{U}' \mid \theta(\mu) = 0\} & \text{if } \mu \in \Gamma' \setminus \{0\}, \\ \{0\} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$D^\mu := \chi^\mu\{\partial_\theta \mid \theta \in (\mathcal{U},\mathcal{U}',\Gamma')_\mu\}, \qquad (\mu \in \Gamma).$$

由 (2.1) 可知

$$D_{(\mathcal{U},\mathcal{U}',\Gamma')} := D^0 \oplus \sum_{0\neq\mu\in\Gamma'} D^\mu$$

是 $\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 的 Γ-分次子代数。

(ii) 注意，如果第 (i) 部分中的 $\mathcal{U}$ 能区分 Λ 中的点，那么求值映射 ev : $\Lambda \to (D^0)^\star = (\{\partial_\theta \mid \theta \in \mathcal{U}\})^\star$ 是单射。此外，若 ev 的像是离散的，则 $D_{(\mathcal{U},\mathcal{U}',\Gamma')}$ 是可容许的。

(iii) 这里给出一个 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{K})$ 的子空间 $\mathcal{U}$，它能分离 Λ 中的点。假设 $\Lambda = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\sigma_i$，则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{K}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{K}\theta_i$，其中$\theta_i(\sigma_j) = \delta_{i,\ j}$。若 $p_1, \ldots, p_n$ 是 $\mathbb{K}$ 中任意一组 $\mathbb{Z}$- 线性无关元素，则一维空间 $\mathbb{K}(p_1\theta_1 + \cdots + p_n\theta_n)$ 能分离 Λ 中的点。

(iv) 设 $\mathcal{U} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{K})$。则 ev : $\Lambda \to \mathcal{D}^\star$ 是离散嵌入。因此，$D_{(\mathcal{U},\mathcal{U}',\Gamma')}$ 是 $\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 的一个容许子代数。特别地，$D_{(\mathcal{U},\mathcal{U},\Gamma)}$ =$\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 和 $D_{(\mathcal{U},\{0\},\{0\})} = \mathcal{D}$ 是 $\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 的容许子代数。

2.4.5. 设 $\mathcal{L}$ 是一个无中心李环面，D 是 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$ 的一个容许子代数，且 κ 是 D 上的一个仿射余循环，见 2.3.6。令

$$E = E(\mathcal{L}, D, \kappa) := \mathcal{L} \oplus D^{gr*} \oplus D$$

为具有如下李括号的李代数

$$\begin{aligned}[x_1 + c_1 + d_1, x_2 + c_2 + d_2] &= ([x_1, x_2]_{\mathcal{L}} + d_1(x_2) - d_2(x_1)) \\ &+ (\sigma_D(x_1, x_2) + d_1.c_2 - d_2.c_1 + \kappa(d_1, d_2)) \\ &+ [d_1, d_2]\end{aligned}$$

其中 x_1、$x_2 \in \mathcal{L}$、c_1、$c_2 \in D^{gr*}$、d_1、$d_2 \in D$，$[\ ,\ ]_{\mathcal{L}}$ 表示 $\mathcal{L}$、$[d_1, d_2] = d_1d_2 - d_2d_1$ 的李括号，而 σ_D : $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to D^{gr*}$ 定义为

$$\sigma_D(x, y)(d) = (d(x)|y) \text{ for all } x, y \in \mathcal{L}, d \in D.$$

事实上，σ_D 是 $\mathcal{L}$ 的一个 2-余循环，其取值于平凡的 $\mathcal{L}$-模 D^{gr*} 中。此外，σ_D 与 $\mathcal{L}$ 和 D^{gr*} 的分次相容。因此，E 具有一个非退化不变对称双线性型 $(\cdot,\cdot)$，定义为

$$(x_1 + c_1 + d_1, x_2 + c_2 + d_2) = (x_1, x_2)_{\mathcal{L}} + c_1(d_2) + c_2(d_1). \tag{2.2}$$

Let

$$H := \mathfrak{h} \oplus (D^0)^\star \oplus D^0, \text{ where } \mathfrak{h} := \mathcal{L}_0^0, \tag{2.3}$$

见定义 2.2.1。于是我们有如下结论。

定理 2.4.6. [Neh04a，定理 16] (a) 在 2.4.5 中构造的代数 $E(\mathcal{L}, D, \kappa)$ 是一个零度为 n 的扩张仿射李代数，其所依据的形式为 (2.2)，嘉当子代数为 (2.3) 中给出的 H。此外，$E_c = \mathcal{L} \oplus D^{gr\star}$。

（b）反过来，设 E 是一个扩张仿射李代数，其无中心核的类型为 (Λ, Δ)。那么存在唯一的容许子代数 $D \subseteq \mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$ 和定义在 D 上的仿射余循环 κ，使得 D 诱导出 $\mathcal{L}$ 的 Λ-分次，并且 $E \cong E(\mathcal{L}, D, \kappa)$。

3. Chevalley 对合与前 Chevalley 对合

我们讨论如何将无中心李环面 $\mathcal{L}$ 上的切瓦利对合提升到扩张仿射李代数 $E(\mathcal{L}, D, \kappa)$ 的可能性，其中 D 是 $\mathcal{L}$ 的斜质心导子的一个容许子代数，而 κ 是一个仿射余循环。设 $\mathcal{L}$ 是定义 2.2.1 中所述的类型为 Δ 的李 Λ- 环面。

3.1. 诱导的前 Chevalley 对合。

我们先给出无中心李环面上切瓦利对合的形式定义。

定义 3.1.1. (i) 我们称 τ 的一个对合（阶为 2 的自同构）为 Λ 分次代数 $\mathcal{A}$ 的预切瓦莱对合，若对所有 $\lambda \in \Lambda.$，都有 $\tau(\mathcal{A}^\lambda) = \mathcal{A}^{-\lambda}$。(ii) 若 $\tau(h) = -h$ 对 $h \in \mathcal{L}_0^0$ 成立，则称 $\mathcal{L}$ 的一个预切瓦莱对合 τ 为切瓦利对合。

引理 3.1.2. 假设 τ 是 $\mathcal{L}$ 的切瓦利对合。那么对 $\alpha \in \Delta$，有 $\tau(\mathcal{L}_\alpha) = \mathcal{L}_{-\alpha}$。

证明。首先考虑 $\mathcal{L}$ 的根分次对 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$，其中 $\mathfrak{g}$ 是由 $\{\mathcal{L}_\alpha^0\}_{\alpha \in \Delta^\times}$ 和 $\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in \Delta^\times} [\mathcal{L}_\alpha^0, \mathcal{L}_{-\alpha}^0]$ 生成的 $\mathcal{L}$ 的子代数。于是

$$\mathcal{L}_\alpha = \{x \in \mathcal{L} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ for } h \in \mathfrak{h}\},$$

对于 $\alpha \in Q$，其中 α 以自然方式视为 $\mathfrak{h}^\star$ 的元素，参见 ABFP09，命题 1.2.2]。注意， $\mathfrak{h} \subseteq \mathcal{L}_0^0$，且由于 $\tau|_{\mathcal{L}_0^0} = -\mathrm{id}$，我们有

$$[h, \tau(x)] = \tau([-h, x]) = -\alpha(h)\tau(x),$$

对于 $\alpha \in Q$、$x \in \mathcal{L}_\alpha$ 和 $h \in \mathfrak{h}$。因此，对于 $\alpha \in Q$， $\tau(\mathcal{L}_\alpha) = \mathcal{L}_{-\alpha}$。 □

注 3.1.3. 假设 τ 是 $\mathcal{L}$ 的预切瓦莱对合。容易看出，对于 $\theta \in$， $\tau\partial_\theta = -\partial_\theta\tau$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K})$。

假设 τ 是 $\mathcal{L}$ 的预切瓦莱对合。我们考虑结合代数自同构（为方便记号，均记为 $\bar{\tau}$），

$$\begin{array}{c} \bar{\tau} : \mathrm{End}(\mathcal{L}) \to \mathrm{End}(\mathcal{L}) \\ \phi \mapsto \tau\phi\tau^{-1} \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{c} \bar{\tau} : \mathrm{End}(\mathcal{L})^\star \to \mathrm{End}(\mathcal{L})^\star \\ \chi \mapsto \bar{\tau}(\chi) : \phi \mapsto \chi(\tau^{-1}\phi\tau) \end{array} \tag{3.1}$$

对于 $\phi \in \mathrm{End}(\mathcal{L})$ 和 $\chi \in \mathrm{End}(\mathcal{L})^\star$。那么 $\bar{\tau}$ 也可以视为作用于 $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})$ 或 $\mathfrak{gl}(\mathcal{L})^\star$ 上的对合。

$\mathcal{L}$ 的 Λ分次在其上诱导出 Λ分次

$$\mathrm{grEnd}(\mathcal{L}) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{End}(\mathcal{L})^\lambda$$

其中

$$\mathrm{End}(\mathcal{L})^\lambda = \{\phi \in \mathrm{End}(\mathcal{L}) \mid \phi(\mathcal{L}^\mu) \subseteq \mathcal{L}^{\lambda+\mu}, \text{ for all } \mu \in \Lambda\}.$$

我们还将 $\mathrm{grEnd}(\mathcal{L})^{gr\star}=\sum_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{End}(\mathcal{L})^{\lambda})^{\star}$ 视为 $\mathrm{grEnd}(\mathcal{L})$ 的分次对偶，并将其看作一个 Λ-分次代数，其中

$$(\mathrm{grEnd}(\mathcal{L})^{gr\star})^{\lambda}=(\mathrm{End}(\mathcal{L})^{-\lambda})^{\star},$$

对于 $\lambda\in\Lambda$。在交换子括号下，所得的 Λ-分次李代数分别记为 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{g}\ell}(\mathcal{L})$ 和 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{g}\ell}(\mathcal{L})^{gr\star}$。

接下来，对于 $\mu\in\Gamma$ 和 $\lambda\in\Lambda$，我们定义

$$c_{\lambda}^{(\mu)}(\chi^{-\mu}\partial_{\theta}):=\theta(\lambda), \tag{3.2}$$

并通过 $c_{\lambda}^{(\mu)}(\chi^{\nu}\partial_{\gamma})=0$ 将其扩展为 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star}$ 中的一个元素，其中 $\nu\neq-\mu$。利用这些事实，我们现在得到以下结果。

引理 3.1.4。设 τ 是 $\mathcal{L}$上的一个预切瓦莱对合，并考虑(3.1)中的自同构 $\bar{\tau}$。

(i) τ-剩余 $tricts\ t$到预 $Chevalley\ involuti$在 gr 上的对合 $\mathrm{End}(\mathcal{L})\ and\ \mathrm{grEnd}(\mathcal{L})^{gr\star}$。(ii) $\bar{\tau}$ 限制为 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 上的预切瓦莱对合。特别地，$\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 有一个基 $\{\chi^{\mu}\mid\mu\in\Gamma\}$ shch，使得 $\bar{\tau}(\chi^{\mu})=\chi^{-\mu},\ \mu\in\Gamma$。

证明。(i) 对于 $\phi\in\mathrm{End}(\mathcal{L})^{\lambda}$，我们有

$$\bar{\tau}(\phi)(\mathcal{L}^{\mu})=\tau\phi\tau^{-1}(\mathcal{L}^{\mu})=\tau\phi(\mathcal{L}^{-\mu})\subseteq\tau(\mathcal{L}^{\lambda-\mu})=\mathcal{L}^{-\lambda+\mu},$$

对所有 $\mu\in\Lambda$，因此 $\bar{\tau}(\phi)\in\mathrm{End}(\mathcal{L})^{-\lambda}$。这说明 $\bar{\tau}$ 是 $\mathrm{grEnd}(\mathcal{L})$ 的预切瓦莱对合。类似地，对所有 $\lambda\in\Lambda$，$\bar{\tau}((\mathrm{End}(\mathcal{L})^{\lambda})^{\star})=(\mathrm{End}(\mathcal{L})^{-\lambda})^{\star}$。因此 $\bar{\tau}$ 是 $\mathrm{grEnd}(\mathcal{L})^{\star}$ 的预切瓦莱对合。

(ii) 设 $\chi\in\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$，则有

$$\tau\chi\tau^{-1}([x,y])=[x,\tau\chi\tau^{-1}(y)]=[\tau\chi\tau^{-1}(x),y],\ \forall x,y\in\mathcal{L}.$$

因此 $\bar{\tau}(\chi)=\tau\chi\tau^{-1}\in\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$。还注意到 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})^{\lambda}=\mathrm{End}(\mathcal{L})^{\lambda}\cap\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$。因此 $\bar{\tau}$ 限制为 $\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 上的预切瓦莱对合。

现在回忆一下，$\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})=\bigoplus_{\mu\in\Gamma}\mathbb{K}\chi^{\mu}$，其中 χ^{μ} 在 $\mathcal{L}$ 上作为次数为 μ 的端同态作用，而 Γ 是 $\mathcal{L}$ 的中心分次群。因此，对某个 $\eta_{\mu}\in\mathbb{K}^{\times}$，$\bar{\tau}(\chi^{\mu})=\eta_{\mu}\chi^{-\mu}$。由于 $\bar{\tau}$ 的阶为 2，$\eta_{\mu}\eta_{-\mu}=1.$。于是对每个 μ，

$$\bar{\tau}(\eta_{\mu}^{\frac{-1}{2}}\chi^{\mu})=\eta_{\mu}\eta_{\mu}^{\frac{-1}{2}}\chi^{-\mu}=\eta_{\mu}^{\frac{1}{2}}\chi^{-\mu}=\eta_{-\mu}^{\frac{-1}{2}}\chi^{-\mu}.$$

$^{-1}$因此，将每个 χ^{μ} 替换为 $\eta_{\mu}^{\overline{2}}\chi^{\mu}$后，我们可以假设 $\bar{\tau}(\chi^{\mu})=\chi^{-\mu}$。 □

利用引理 3.1.4，从现在起我们假设

$$\mathrm{Cent}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})=\sum_{\mu\in\Gamma}\mathbb{K}\chi^{\mu}\ \text{with}\ \bar{\tau}(\chi^{\mu})=\chi^{-\mu}. \tag{3.3}$$

引理 3.1.5. 设 τ 是 $\mathcal{L}$上的预切瓦莱对合，且 $\bar{\tau}$ 如 (3.1) 中所述。

(i) $\bar{\tau}$ 在 $\mathrm{grg}\ell(\mathcal{L})$ 上诱导一个预切瓦莱对合。此外，对于每个 μ 和 θ，$\bar{\tau}(\chi^{\mu}\partial_{\theta})$ $=\chi^{-\mu}\partial_{-\theta}$。特别地，$\bar{\tau}(\chi^{\mu}\mathcal{D})$ $=$ $\chi^{-\mu}\mathcal{D}$, $\mu \in \Gamma$，且 $\bar{\tau}$限制为 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$ 上的一个预切瓦莱对合。

(ii) $\bar{\tau}$ 在 $\mathrm{grg}\ell(\mathcal{L})^{gr\star}$上诱导出预切瓦莱对合。此外，对于每个 μ 和 λ，$\bar{\tau}$ $(c_{\lambda}^{(\mu)})$ $=c_{-\lambda}^{(-\mu)}$。特别地，$\bar{\tau}$ 在 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star}$上限制为预切瓦莱对合。

证明。(i) 对于 $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K})$ 和 $x^{\lambda} \in \mathcal{L}^{\lambda}$，我们有

$$\bar{\tau}(\partial_{\theta})(x^{\lambda}) = \tau\partial_{\theta}\tau(x^{\lambda}) = -\theta(\lambda)\tau^{2}(x^{\lambda}) = \partial_{-\theta}(x^{\lambda}).$$

因此 $\bar{\tau}(\partial_{\theta})$ $=\partial_{-\theta}.$。现在由此及引理 3.1.4 可得结论。

(ii) 可得 $\{c_{\lambda}^{(\mu)} \mid \mu \in \Gamma,\ \lambda \in \Lambda\}$ 张成 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star}$，参见 [Nao10，命题 5.2.4]。现在对任意 θ 和 ν,

$$\bar{\tau}(c_{\lambda}^{(\mu)})(\chi^{\nu}\partial_{\theta}) = c_{\lambda}^{(\mu)}(\bar{\tau}(\chi^{\nu}\partial_{\theta})) = c_{\lambda}^{(\mu)}(\chi^{-\nu}\partial_{-\theta}) = c_{-\lambda}^{(-\mu)}(\chi^{\nu}\partial_{\theta}).$$

因此 $\bar{\tau}(c_{\lambda}^{(\mu)})$ $= c_{-\lambda}^{(-\mu)} \in (\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star})^{-\mu}.$。也就是说，$\bar{\tau}$ 将 $(\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star})^{\mu}$ 映到 $(\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star})^{-\mu}$上，并且 $\bar{\tau}$ 在 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})^{gr\star}$上限制为预切瓦莱对合，作为 $\mathrm{grg}\ell(\mathcal{L})^{gr\star}$的一个子代数。□

注 3.1.6. 设 $D = \sum_{\mu\in\Gamma} D^{\mu}$ 是 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$ 的一个容许子代数，且 $C = D^{gr\star}$。考虑由 (3.2) 给出的映射 $c_{\lambda}^{(\mu)}$、$\mu \in \Gamma$。为简化记号，我们仍将 $c_{\lambda}^{(\mu)}$ 在 $D^{-\mu}$ 上的限制记为 $c_{\lambda}^{(\mu)}$。于是可得 $C^{\mu} =$ 张成 $_{\mathbb{K}}\{c_{\lambda}^{(\mu)} \mid \lambda \in \Lambda\}$。

3.2. 诱导仿射余循环。设 $\mathcal{L}$ 是一个无中心李环面，$D = \bigoplus_{\mu\in\Gamma} D^{\mu}$ 是 $\mathrm{SCDer}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ 的一个容许子代数，且 $\kappa\colon D \times D \to D^{gr*}$ 是一个仿射余循环。假设 τ 是李环面 $\mathcal{L}$ 的一个预切瓦莱对合。令

$$D_{\tau} := \bar{\tau}(D) \quad \text{and} \quad D_{\tau}^{\mu} := \bar{\tau}(D^{\mu}),\ \mu \in \Gamma. \tag{3.4}$$

于是得到自然同一 $\bar{\tau}(D^{gr^{\star}})$ $= D_{\tau}^{gr^{\star}}$ $= \sum_{\mu\in\Gamma} D_{\tau}^{\mu\star}$. 接下来令

$$\begin{aligned} &\kappa_{\tau} : D_{\tau} \times D_{\tau} \to D_{\tau}^{gr^{\star}} \\ &\kappa_{\tau}(\bar{\tau}(d), \bar{\tau}(d')) = \bar{\tau}\kappa(d, d'). \end{aligned} \tag{3.5}$$

引理 3.2.1. (i) D_{τ} 是 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$ 的容许子代数。

(ii) 映射 κ_{τ} 在 D_{τ} 上定义了一个仿射余循环。

证明。(i) 是显然的，因为 $\bar{\tau}(\partial_{\theta})$ $= -\partial_{\theta}$，所以 $D_{\tau}^{0} = D^{0}$.

(ii) 我们首先检验仿射余循环定义中的 $\circlearrowleft$ 部分。对于 d_1、d_2、$d_3 \in D$,

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \kappa_\tau([\bar{\tau}(d_i),\bar{\tau}(d_j)],\bar{\tau}(d_k)) &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \bar{\tau}(\kappa([d_i,d_j],d_k)\\ &= \bar{\tau}(\sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \kappa([d_i,d_j],d_k))\\ &= \bar{\tau}(\sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} d_i\cdot\kappa(d_j,d_k))\\ &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \bar{\tau}(d_i\cdot\kappa(d_j,d_k)).\end{aligned}$$

现在，对于 $d\in D$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \bar{\tau}(d_i\cdot\kappa(d_j,d_k))(d) &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} d_i\cdot\kappa(d_j,d_k)(\tau^{-1}d\tau)\\ &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \kappa(d_j,d_k)([\tau^{-1}d\tau,d_i])\\ &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \kappa(d_j,d_k)(\tau^{-1}[d,\tau d_i\tau^{-1}]\tau)\\ &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \bar{\tau}(\kappa(d_j,d_k))([d,\bar{\tau}(d_i)])\\ &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \bar{\tau}(d_i)\cdot\bar{\tau}(\kappa(d_j,d_k))(d).\end{aligned}$$

因此 $\sum_{(i,\ j,\ k)\ \circlearrowleft}\bar{\tau}(d_i\cdot\kappa(d_j,d_k))=\sum_{(i,\ j,\ k)\ \circlearrowleft}\bar{\tau}(d_i)\cdot\bar{\tau}(\kappa(d_j,d_k))$。结合上一个等式可得

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \kappa_\tau([\bar{\tau}(d_i),\bar{\tau}(d_j)],\bar{\tau}(d_k)) &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \bar{\tau}(d_i)\cdot\bar{\tau}(\kappa(d_j,d_k))\\ &= \sum_{(i,j,k)\circlearrowleft} \bar{\tau}(d_i)\cdot\kappa_\tau(\bar{\tau}(d_j),\bar{\tau}(d_k)),\end{aligned}$$

因此，$\circlearrowleft$ 的证明完成。

接下来，对于 μ_1、$\mu_2\in\Gamma$，由于 $\kappa(D^{-\mu_1},D^{-\mu_2})\subseteq(D^{\mu_1+\mu_2})^\star$，我们有

$$\begin{aligned}\kappa_\tau(D_\tau^{\mu_1},D_\tau^{\mu_2}) &= \kappa_\tau(\bar{\tau}(D^{-\mu_1}),\bar{\tau}(D^{-\mu_2}))\\ &= \bar{\tau}(\kappa(D^{-\mu_1},D^{-\mu_2}))\\ &\subseteq \bar{\tau}((D^{\mu_1+\mu_2})^\star)=(D_\tau^{-\mu_1-\mu_2})^\star.\end{aligned}$$

验证仿射余循环 κ_τ 满足其余性质是显而易见的。□

下文将用到以下概念。

定义 3.2.2. 设 $\mathcal{L}$ 是一个李环面，D 是 SCDer($\mathcal{L}$) 的一个容许子代数，且 κ 是 D 上的一个仿射余循环。若 $D_\tau = D$，则称 D 对 τ 不变；若 $(D_\tau, \kappa_\tau) = (D, \kappa)$，则称这对 (D, κ) 对 τ 不变。

注 3.2.3. 设 D、κ 和 τ 如定义 3.2.2 中所述，并假设 $D = D_\tau$。我们知道，$\kappa = \kappa_\tau$ 当且仅当对任意 d_1、d_2、$d_3 \in D$，

$$\begin{gathered}\bar{\tau}\kappa(d_1, d_2)(d_3) = \kappa(\bar{\tau}(d_1), \bar{\tau}(d_2))(d_3)\\ \Longleftrightarrow\\ \kappa(d_1, d_2)(\bar{\tau}(d_3)) = \kappa(\bar{\tau}(d_1), \bar{\tau}(d_2))(d_3).\end{gathered}$$

于是，由于对所有 μ、ν，$\kappa(D^\mu, D^\nu) \subseteq (D^{-\mu-\nu})^\star$，可得 $\kappa = \kappa_\tau$ 当且仅当

$$\kappa(\chi^\mu\partial_\theta, \chi^\nu\partial_\gamma)(\chi^{-\mu-\nu}\partial_{-\eta}) = \kappa(\chi^{-\mu}\partial_\theta, \chi^{-\nu}\partial_\gamma)(\chi^{\mu+\nu}\partial_\eta),$$

对任意 μ、ν、θ、γ 和 η，若 $\theta(\mu) = \gamma(\nu) = \eta(\mu + \nu) = 0$。

设 $D = \sum_{\mu\in\Gamma} D^\mu$ 是 SCDer($\mathcal{L}$) 的一个容许子代数。我们令

$$\mathcal{U}_D^\mu := \{\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K}) \mid \chi^\mu\partial_\theta \in D^\mu\}. \tag{3.6}$$

引理 3.2.4. SCDer($\mathcal{L}$) 的容许子代数 D 是 τ-不变的，当且仅当对所有 $\mu \in \Gamma$，$\mathcal{U}_D^\mu = \mathcal{U}_D^{-\mu}$。特别地，若 $D = D^0$ 或 $D =$SCDer($\mathcal{L}$)，则 D 是 τ-不变的。

证明. 根据引理 3.1.5(i)，我们有

$$\begin{aligned}\bar{\tau}(D) = D &\iff \bar{\tau}(D^\mu) = D^{-\mu} \text{ for all } \mu \in \Gamma,\\ &\iff \bar{\tau}(\chi^\mu\partial_\theta) = \chi^{-\mu}\partial_{-\theta} \in D^{-\mu} \text{ for all } \mu \in \Gamma,\ \theta \in \mathcal{U}_D^\mu,\\ &\iff \mathcal{U}_D^\mu = \mathcal{U}_D^{-\mu} \text{ for all } \mu \in \Gamma.\end{aligned}$$

□

在下面例子的 (ii) 部分中，我们构造了 SCDer($\mathcal{L}$) 的一类容许子代数，其元素对于任意 τ 都不是 τ-不变的。

例 3.2.5. 假设 $\mathcal{L}$ 是一个无中心李环面，其质心分次群为 $\Gamma \subseteq \Lambda$。

(i) 考虑数对 (D, κ)，其中 D 是容许的，且 κ 是一个仿射余循环。则 $D \cap D_\tau = D^0 + \sum_{\mu\in\Gamma\setminus\{0\}}(D^\mu \cap D_\tau^{-\mu})$ 是容许的，$\kappa + \kappa_\tau$ 是 $D \cap D_\tau$ 上的一个仿射余循环，而 $(D \cap D_\tau, \kappa + \kappa_\tau)$ 是一个 τ-不变数对。

(ii) 设秩为 $\Lambda > 1$。我们固定 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K})$ 的一个子空间三元组 $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_+, \mathcal{U}_-)$。此外，我们固定 $0 \neq \gamma \in \Gamma$，并对 $\mu \in \Gamma$ 令

$$\mathcal{U}^\mu = \begin{cases} \mathcal{U} & \text{if } \mu = 0,\\ \{\theta \in \mathcal{U}_\pm \mid \theta(\mu) = 0\} & \text{if } \mu = \pm\gamma,\\ \{0\} & \text{otherwise,}\end{cases}$$

and

$$D^{\mu} := \chi^{\mu}\{\partial_{\theta} \mid \theta \in \mathcal{U}^{\mu}\}.$$

则 $D := \sum_{\mu\in\Gamma} D^{\mu}$ 是 SCDer($\mathcal{L}$) 的一个 Γ-分次子空间。由 (2.1) 可知, $[D^{\pm\gamma}, D^{\pm\gamma}] = \{0\}$, 因此 D 是一个 Γ-分次子代数。注意, 若取 $\mathcal{U} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K})$, 则 D 是 SCDer($\mathcal{L}$) 的一个可容许子代数, 且对每个 $\mu \in \Gamma$ 都有 $\mathcal{U}_D^{\mu} = \mathcal{U}^{\mu}$, 见 (3.6)。此外, 我们选择 $\mathcal{U}_+$,$\mathcal{U}_-$ 使得 $\mathcal{U}^{\gamma} \neq \mathcal{U}^{-\gamma}$, 例如 $\mathcal{U}_+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{K})$ 且 $\mathcal{U}_- = \{0\}$。根据引理 3.2.4, D 对任意切瓦利对合 τ 都不是 τ-不变的。

3.3. 扩张仿射李代数上的诱导切瓦利对合。我们沿用前几节中的记号和假设。特别地, τ 是李环面 $\mathcal{L}$ 的预切瓦利对合, 而 $\bar{\tau}$ 如（3.1）所述。本小节讨论将 $\bar{\tau}$ 自然扩展到 $\mathcal{L} \oplus$End($\mathcal{L}$) $\oplus$ End($\mathcal{L}$)*, 仍记为 $\bar{\tau}$, 见下文定理 3.3.2。

定义 3.3.1. 假设(E,$(\cdot,\cdot)$ $\mathcal{H}$)是根系为 R的扩张仿射李代数。若李代数 E 上的对合 τ 满足对所有 $h \in \mathcal{H}$都有$\tau(h) = -h$, 则称其为切瓦利对合。

定理 3.3.2. 设 $\mathcal{L}$ 是类型为 Δ的无中心李 Λ环面, D 是SCDer($\mathcal{L}$)的一个容许子代数, 且 κ 是 D上的仿射余循环。设 τ 是 $\mathcal{L}$的预切瓦利对合, 且 $\bar{\tau}$ 是由下式给出的诱导向量空间同构:

$$\begin{aligned}\bar{\tau} : \mathcal{L} \oplus \mathrm{End}(\mathcal{L}) \oplus \mathrm{End}(\mathcal{L})^{\star} &\longrightarrow \mathcal{L} \oplus \mathrm{End}(\mathcal{L}) \oplus \mathrm{End}(\mathcal{L})^{\star} \\ x + \phi + \Psi &\mapsto \tau(x) + \bar{\tau}(\phi) + \bar{\tau}(\Psi),\end{aligned}$$

参见 (3.1)。设 $E = E(\mathcal{L}, D, \kappa)$ 且 $E^{\tau} := E(\mathcal{L}, D_{\tau}, \kappa_{\tau})$。那么

(i) $\bar{\tau}$ 限制为从 $E_c = \mathcal{L} \oplus D^{gr^{\star}}$ 到 $E_c^{\tau} = \mathcal{L} \oplus D_{\tau}^{gr^{\star}}$ 的李代数同构。特别地, 若 D 是 τ-不变的, 则 $\bar{\tau}$ 限制为 E_c 的预切瓦莱对合。

(ii) $\bar{\tau}$ 限制为从 E 到 E^{τ} 的李代数同构。特别地, 若 (D, κ) 是 τ-不变的, 则 $\bar{\tau}$ 限制为 E 的预切瓦莱对合。

此外, 若 τ 是切瓦利对合, 则 $\bar{\tau}$. 也是切瓦利对合

证明。我们首先注意到, 根据引理 3.2.1, E^{τ} 是一个扩张仿射李代数。我们只需证明 $\bar{\tau}$ 是一个李代数同态。设 x_1、 $x_2 \in \mathcal{L}$、c_1、 $c_2 \in C$ 以及 d_1、 $d_2 \in D$。那么

$$\begin{aligned}\bar{\tau}[x_1 + c_1 + d_1, x_2 + c_2 + d_2] =& [\tau(x_1), \tau(x_2)]_{\mathcal{L}} + \tau(d_1(x_2)) - \tau(d_2(x_1)) \\ &+ \bar{\tau}(\sigma_D(x_1, x_2) + \bar{\tau}(d_1.c_2) - \bar{\tau}(d_2.c_1) + \bar{\tau}\kappa(d_1, d_2)) \\ &+ [\bar{\tau}(d_1), \bar{\tau}(d_2)].\end{aligned}$$

现在，$\tau(d_1(x_2)) = \tau d_1\tau^{-1}(\tau(x_2)) = \bar{\tau}(d_1)(\tau(x_2))$。类似地，我们有 $\tau(d_2(x_1)) = \tau d_2\tau^{-1}(\tau(x_1)) = \bar{\tau}(d_2)(\tau(x_1))$。此外，对于 $d \in D$,

$$\begin{aligned}\bar{\tau}\sigma_D(x_1,x_2)(d) &= \sigma_D(x_1,x_2)(\tau^{-1}d\tau)\\ &= (\tau^{-1}d\tau(x_1),x_2)\\ &= (d(\tau(x_1),\tau(x_2))\\ &= \sigma_D(\tau(x_1),\tau(x_2))(d).\end{aligned}$$

因此，$\bar{\tau}\sigma_D(x_1,x_2) = \sigma_D(\tau(x_1)\ \tau(x_2))$。接下来，对于 $d \in D$,

$$\begin{aligned}\bar{\tau}(d_1\cdot c_2)(d) &= d_1\cdot c_2(\tau^{-1}d\tau)\\ &= c_2[\tau^{-1}d\tau, d_1]\\ &= c_2\tau^{-1}[d,\tau d_1\tau^{-1}]\tau\\ &= \bar{\tau}(d_1)\cdot\bar{\tau}(c_2)(d).\end{aligned}$$

因此，$\bar{\tau}(d_1\cdot c_2) = \bar{\tau}(d_1)\cdot\bar{\tau}(c_2)$。此外，对于 $d_1,d_2 \in D$，$\bar{\tau}\kappa(d_1,d_2) = \kappa_\tau(\bar{\tau}(d_1)\ \bar{\tau}(d_2))$。所以，$\bar{\tau}$是从 $E(\mathcal{L},D,\kappa)$ 到 $E(\mathcal{L},D_\tau,\kappa_\tau)$ 的李代数同构。特别地，$\bar{\tau}$ 限制后是从 E_c 到 E_c^τ的李代数同构。

接下来，若 (D,κ) 是 τ-不变的，即 $D = D_\tau$且 $\kappa = \kappa_\tau$，那么显然 $\bar{\tau}$是 E的预切瓦莱对合。特别地，若 D是 τ-不变的，即 $D = D_\tau$，那么 $\bar{\tau}$ 是 E_c 的预切瓦莱对合。陈述的最后一部分现在显而易见。□

推论 3.3.3. 设 $E = E(\mathcal{L},D,\kappa)$，其中 $\mathcal{L}$ 是无中心李环面，且$D = D^0$ 或 $D = \mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$。那么，$\mathcal{L}$ 的任意切瓦利对合都可扩张为 E_c的切瓦利对合。

证明. 由引理 3.2.4 可知，对于 $\mathcal{L}$ 的任意切瓦利对合 τ，D^0 和 $\mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$ 均为 τ-不变，因此由定理 3.3.2 即得结论。□

注 3.3.4。(i) 为了研究扩张仿射李代数的“模理论”概念，在 [AFI22] 中，秩为 > 1 的约化扩张仿射李代数 E 的核配备了一个整结构。事实上，这是通过假设 E_c 配备了一个切瓦利对合来实现的。现在设 $E = E(\mathcal{L},D,\kappa)$，并设无中心李环面 $\mathcal{L}$ 配备了一个切瓦利对合 τ。如果 D 是 τ-不变的，那么定理 3.3.2(i) 保证核存在一个切瓦利对合。推论 3.3.3 讨论了特殊情形 $D = D^0$ 和 $D = \mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$，它们相对于 $\mathcal{L}$ 的任意切瓦利对合 τ 都是 τ- 不变的。文献中许多最有趣的扩张仿射李代数实例都满足推论 3.3.3 的条件。事实上，就扩张仿射李代数的实现而言，据我们所知，文献中没有任何具体实例不满足推论 3.3.3 的条件，除了我们在例 3.2.5 中给出的那个实例之外

。第 5 节将讨论无中心李环面上切瓦利对合的存在性。

(ii) 关于定理 3.3.2，提出一个颇具挑战性的问题：在什么条件下仿射余循环 κ 是 τ-不变的，即 $\kappa_\tau = \kappa$。对此，自然要先考察已知仿射余循环的情形。设 $\mathcal{L} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$，其中 $\mathfrak{g}$ 是单连通型的有限维单李代数， $\mathcal{A}$ 是关于 ν 个变量的劳朗多项式代数，并考虑 $D = \mathrm{SCDer}(\mathcal{L})$。在 [BGK96 的注 3.71] 中，给出了一个非平凡的仿射余循环 κ： $D \times D \to D^{gr\star}$ （另见 [ERM94]）。在 [Kry00 的附录 II 命题 8], 中，证明了对于任意 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Cent}(\mathcal{L}))$， κ 都是 τ-不变的。因此，(D, κ) 是 τ-不变的，定理 3.3.2(ii) 因而适用。

(iii) 在定理 3.3.2 中，假设 D 在 τ 下不变。于是，将对合 $\bar{\tau}$ 限制到 $D \oplus D^{gr\star}$ 上，可得这两个短正合序列

$$0 \to D^{gr\star} \to D \oplus_\kappa D^{gr\star} \to D \to 0,$$

$$0 \to D^{gr\star} \to D \oplus_{\kappa_\tau} D^{gr\star} \to D \to 0,$$

作为由 D-模 $D^{gr\star}$ 扩张 D 的扩张同构；也就是说， κ 和 κ_τ 在 $H^2(D, D^{gr\star})$ 中表示同一个类（见 [Wei94，定理 7.6.3]）。

4. Λ-环面的预切瓦莱对合

Λ-环面的概念源于对李环面的研究。粗略地说，无中心的李 Λ-环面可以构造为一个以 Λ-环面为坐标代数的矩阵李代数。根据类型不同，它是幺结合代数、约旦代数或替代代数。本节首先回顾 Λ-环面的定义。接着，我们综述 Λ-环面的分类结果，并利用这些结果证明任意 Λ-环面都存在预切瓦莱对合。在本节中， Λ 是秩为 n 的自由阿贝尔群；所谓 $\mathbb{K}$ 上的代数，是指 $\mathbb{K}$ 上的幺约旦代数、替代代数或结合代数。假设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 Λ-分次代数，如果存在保持 Λ-分次的代数同构 $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，则称 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 分次同构。

定义 4.0.1. 设 $\mathcal{A} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}^\lambda$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的 Λ-分次代数。若满足以下条件，则称 $\mathcal{A}$ 为 Λ-环面或 n-环面：

(i) 所有 $0 \neq x \in \mathcal{A}^\lambda$ 都可逆，且对所有 $\lambda \in \Lambda$，$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{A}^\lambda \leq 1$;

(ii) $\mathrm{supp}_\Lambda(\mathcal{A})$ 生成 Λ，其中 $\mathrm{supp}_\Lambda(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \Lambda \mid \mathcal{A}^\lambda \neq \{0\}\}$。

若 Λ-环面 $\mathcal{A}$ 是约旦代数、替代代数或结合代数，则分别称$\mathcal{A}$为约旦、替代或结合 Λ-环面（n-环面）。

要为 Λ-环面 $\mathcal{A} = \sum_{\alpha\in\mathrm{supp}(\mathcal{A})} \mathcal{A}^{\lambda}$构造预切瓦莱对合 τ，自然的做法似乎是先为 $\mathcal{A}$,$x^{\lambda} \in \mathcal{A}^{\lambda}$取一个适当的基 $\{x^{\lambda}\}_{\lambda\in\mathrm{supp}(\mathcal{A})}$，再定义 $\tau(x^{\lambda}) = x^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathrm{supp}(\mathcal{A})$。这便给出了一个将 $\mathcal{A}^{\lambda}$ 映到 $\mathcal{A}^{-\lambda}$上的向量空间同构。因此，如果我们证明对于 $\alpha, \beta \in \Lambda$，有 $k(\alpha, \beta) = k(-\alpha, -\beta)$，其中 $x^{\alpha}x^{\beta} = k(\alpha, \beta)$ $x^{\alpha+\beta}$, $k(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^{\times}$.，就能得到 Λ-环面 $\mathcal{A}$的预切瓦莱对合。

定理 4.0.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个约旦、替代或结合的 Λ-环面。那么$\mathcal{A}$存在预切瓦莱对合。

如上所述，为了给出证明，我们需要针对每种情形，选取适当的基，并明确描述代数乘积的结构常数。下文将对此进行说明。于是，下面的命题 4.1.2、4.2.4 和 4.3.4 合起来给出了定理 4.0.2 的证明。

4.1. 量子环面。我们先回顾 [BGK96] 中量子环面的定义。

定义 4.1.1. 设 $\mathbf{q} = (q_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ 是一个满足 $q_{ii} = 1 = q_{ij}q_{ji}$（其中 $1 \le i, j \le n$）的（$n \times n$）矩阵。基于 $\mathbf{q}$ 的量子环面 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}} = \mathbb{K}_{\mathbf{q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ 定义为由 $2n$ 个生成元 $x_1^{\pm 1}$, $\dots, x_n^{\pm 1}$ 生成，并满足定义关系 $x_i x_i^{-1} = 1 = x_i^{-1}x_i$ 和 $x_i x_j = q_{ij}x_j x_i$（其中 $1 \le i$, $j \le n$）的含幺结合代数。当对所有 i, j 都有 $q_{ij} = 1$ 时，$\mathbb{K}_{\mathbf{q}} = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ 就是 $\mathbb{K}$ 上 n 个变量的劳朗多项式代数。设 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 是 Λ 的一个 $\mathbb{Z}$-基。注意，$\mathbb{K}_{\mathbf{q}}$ 是 Λ-分次的，其中 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}} = \sum_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{K}x^{\alpha}$，且对于 $\alpha = \alpha_1\lambda_1 +$

$\cdots + \alpha_n\lambda_n \in \Lambda$, $x^{\alpha} := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$。此 Λ分次使 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}$成为一个结合Λ-环面。当 $n = 2$ 时，矩阵 $\mathbf{q}$ 由唯一的 $q \in \mathbb{K}^{\times}$ 确定，因此在这种情况下，我们将 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}} = \mathbb{K}_q$ 记作 $q \in \mathbb{K}^{\times}$.

命题 4.1.2. 任意结合 Λ-环面都存在一个预切瓦莱对合。

证明。任意结合 Λ-环面都分次同构于某个量子环面 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}} = \sum_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{K}x^{\alpha}$，其中 $\mathbf{q}$ 取某个值。此外，任意交换的结合 Λ-环面都分次同构于 $\mathbb{K}$上 n个变量的劳朗多项式代数，参见 [BGKN95，引理 1.8]。现在很容易看出，赋值 $x_i \mapsto x_i^{-1}$, $1 \le i \le n$为 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}$诱导出一个预切瓦莱对合。□

$\mathcal{A}$ 的反对合是一个二阶反自同构。如果它还保持齐次空间，则称其为 Λ-分次反对合。

注 4.1.3. 设 $\mathbf{q} = (q_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$，其中 $q_{ii} = 1$ 且 $q_{ij} = \pm 1 = q_{ji}$ 对$1 \le i$、$j \le n$成立；设 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{K}^n$，其中 $e_i = \pm 1$对 $1 \le i \le n$成立。则存在唯一的反对合 $\sigma_{\mathbf{e}}$： $\mathbb{K}_{\mathbf{q}} \to \mathbb{K}_{\mathbf{q}}$，使得对$1 \le i \le n$有 $\sigma_{\mathbf{e}}(x_i) = e_i x_i$，称其为由 $\mathbf{e}$ 确定的反对合。此外，$(\mathbb{K}_{\mathbf{q}}, \sigma_{\mathbf{e}})$

称为由 e 和 q 确定的带反对合的量子环面（见[AG01，第 163] 页）。

4.2. 替代环面。注意，任何结合 Λ-环面都是替代 Λ-环面。但结合环面并不能涵盖所有替代环面。最早在 [BGKN95], 中发现的八元数环面，就是一个非结合替代环面的例子。它是通过凯莱-迪克森过程，在劳朗多项式代数上构造的八元数代数。Y. Yoshii 通过一种简单的呈示描述了八元数环面 [Yos08]。

例 4.2.1. 令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{K}$ 上的替代代数，其生成元为$x_i^{\pm 1}, 1 \leq i \leq 3$，定义关系为 $x_i x_i^{-1} = 1 = x_i^{-1} x_i$，对所有 i均成立，$x_i x_j = -x_j x_i$对 $i \neq j$成立，且 $(x_1 x_2) x_3 = -x_1(x_2 x_3)$。对于 $n \geq 3$，令 $\mathbb{O} := \mathcal{C} \otimes \mathbb{K}[x_4^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$，其中 $\mathbb{K}[x_4^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ 是 $\mathbb{K}$ 上关于 $n-3$个变量的劳朗多项式代数。令 ϵ_1,... , ϵ_n 为 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基。那么 $\mathbb{O}$ 是一个替代 $\mathbb{Z}^n$- 环面，称为八元数 n- 环面，其中 $\mathbb{Z}^n$-分次由 $\deg(x_i) = \epsilon_i$给出。

注记 4.2.2. 八元数三环面 $\mathcal{C}$，也称为凯莱环面，有如下更具体的描述 [AF11，例 9.2]:

设 $x \in \mathcal{C}$。那么可以唯一地写成 $x = \sum_\alpha k_\alpha x^\alpha$ 其中 $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) x_3^{\alpha_3}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}^3$ 且 $k_\alpha \in \mathbb{K}$。定义 $\epsilon : \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$，使得 $\epsilon(\alpha, \beta) = \alpha_3\beta_1 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_2\beta_3 + \alpha_2\beta_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1\beta_2$。那么 $\mathcal{C}$ 的乘法规则为

$$x^\alpha x^\beta = (-1)^{\epsilon(\alpha,\beta)} x^{\alpha+\beta}.$$

下面的定理给出了 $\mathbb{K}$ 上替代环面的分类。

定理 4.2.3. [BGKN95，定理 1.25][Yos02，推论 5.13] 在 $\mathbb{K}$ 上的任意替代 Λ-环面都分次同构于量子环面或八元数 n-环面 $\mathbb{O}$。

命题 4.2.4. 设 $\mathcal{A} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}^\lambda$ 是 $\mathbb{K}$ 上的替代 Λ-环面。那么 $\mathcal{A}$ 具有预切瓦莱对合。

证明。由定理 4.2.3，可设 $\mathcal{A} = \mathbb{K}_\mathbf{q}$ 对某个 q 成立，或者 $\mathcal{A} = \mathbb{O}$，即八元数 n-环面。首先，若 $\mathcal{A} = \mathbb{K}_\mathbf{q}$，则由注 4.2.5 (ii) 可证得我们的结论。接下来设 $\mathcal{A} = \mathbb{O} = \mathcal{C} \otimes \mathbb{K}[x_4^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$。那么赋值$x^\alpha \mapsto x^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{Z}^3$ 定义了 $\mathcal{C}$上的一个预切瓦莱对合 τ，因为 $(-1)^{\epsilon(\alpha,\beta)} = (-1)^{\epsilon(-\alpha,-\beta)}$，参见注记 4.2.2。现在我们通过 $x \otimes x^\gamma \mapsto \tau(x) \otimes x^{-\gamma}$将 τ扩展到 $\mathbb{O}$，其中 $x \in \mathcal{C}, x^\gamma = x_4^{\gamma_4} \cdots x_n^{\gamma_n} \in \mathbb{K}[x_4^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$。这定义了 $\mathbb{O}$的一个预切瓦莱对合；证明完毕。□

注 4.2.5。设 $\mathbb{O}=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}\mathbb{O}^\lambda$ 为八元数 n-环面。那么存在 $\mathbb{O}$ 上的一个反对合 σ，使得对所有 $x\in\mathbb{O}^\lambda$ 以及所有 $\lambda\in\mathbb{Z}^n$，$\sigma(x)=\pm x$，参见 [BGKN95，引理 1.20]。它称为 $\mathbb{O}$上的标准反对合。

4.3. Jordan 环面。例 4.3.2 中，我们简要介绍四类 JordanΛ-环面。特别地，我们给出每一类的基 $\{x^\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和乘法规则。更多细节请参见 [Yos00]。

定义 4.3.1。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺交换结合代数，M 是一个左 $\mathcal{A}$-模，且 $f\colon M\times M\to\mathcal{A}$ 是 M上的对称 $\mathcal{A}$-双线性形式。令 $\mathrm{Cliff}(f):=\mathcal{A}1\oplus M$。那么，$\mathrm{Cliff}(f)$ 配备如下乘法后

$$(a1,x)\cdot(b1,y)=ab1+f(x,y)1+ay+bx$$

是一个约旦代数。它称为 f 的 Clifford 约旦代数，或简称为 f 的约旦代数（参见 [McC04]）。

例 4.3.2。（i）首先，设 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}=\mathbb{K}_{\mathbf{q}}[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}]$ 是以量子矩阵 q 为基、具有定义 4.1.1 中所述 Λ-分次的量子环面。现在考虑 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}$ 上的新乘法 $\cdot$，其定义为 $x\cdot y=\frac{1}{2}(xy+yx)$。那么，$(\mathbb{K}_{\mathbf{q}},\cdot)$ 是一个约旦代数，记作 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}^+$，称为 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}$ 的加代数。分次代数 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}^+=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{K}x^\alpha$ 是一个约旦 Λ-环面，并且我们有

$$x^\alpha\cdot x^\beta=\frac{1}{2}\prod_{i<j}q_{ij}^{\alpha_j\beta_i}\left(1+\prod_{i,j}q_{ij}^{\alpha_i\beta_j}\right)x^{\alpha+\beta},\tag{4.1}$$

对于 $\alpha,\beta\in\Lambda$（参见 [Yos00，例 3.2]）。

（ii）假设 $\mathbf{e}=(e_{ij})$ 是一个初等量子矩阵，也就是说，e 是一个量子矩阵，满足对所有 i,j，$e_{ij}=1$ 或 -1。现在令 $\mathbb{K}_{\mathbf{e}}=\mathbb{K}_{\mathbf{e}}[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}]$ 为由 e 确定的量子环面，其具有唯一的对合 $-$，满足对所有 i，$\overline{x_i}=x_i$。那么，对称元的子空间 $H(\mathbb{K}_{\mathbf{e}},-)=\{x\in\mathbb{K}_{\mathbf{e}}\mid\overline{x}=x\}$ 是 $\mathbb{K}_{\mathbf{e}}^+$ 的一个约旦子代数。事实上，Λ-分次代数 $H(\mathbb{K}_{\mathbf{e}},-)=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(\mathbb{K}x^\alpha\cap H(\mathbb{K}_{\mathbf{e}},-))$ 是一个约旦 Λ-环面（参见 [Yos00，例 4.3（2）]）。

(iii) 假设 Λ 的秩为 $n\geq2$，并令 $2\leq m\leq n$。选取自由阿贝尔子群 Λ_m 和 Λ_{n-m}，使得 $\Lambda=\Lambda_m\oplus\Lambda_{n-m}$。令 S 为 Λ_m 中的一个半格。接着令 $\Gamma=2\Lambda_m\oplus\Lambda_{n-m}$，并令 $Z:=\mathbb{K}[\Gamma]=\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathbb{K}z^\gamma$ 为 Γ 在 $\mathbb{K}$ 上的群代数。现在令 I 为 $\{s+2\Lambda_m\mid s\in S\}\setminus\{2\Lambda_m\}$ 的一组陪集代表元。接着令 V 为一个以 $\{t_\epsilon\}_{\epsilon\in I}$ 为基的自由 Z-模，并定义一个 Z-双线性形式 $f\colon V\times V\to Z$，如下：

$$f(t_\epsilon,t_\eta)=\begin{cases}z^{2\epsilon} & \text{if } \epsilon=\eta\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

对所有 ϵ、$\eta \in I$ 均成立。令 $\mathcal{J}_S := Z \oplus V$ 为 f 在 Z 上的约旦代数，见定义 4.3.1。注意，若 $\alpha \in S \oplus \Lambda_{n-m}$，则存在唯一的 $\alpha' \in \Gamma$ 和 $\epsilon_\alpha \in I \cup \{0\}$，使得 $\alpha = \alpha' + \epsilon_\alpha$。令 $t_0 := 1$，并且

$$x^\alpha := \begin{cases} z^{\alpha'} t_{\epsilon_\alpha} & \text{if } \alpha \in S \oplus \Lambda_{n-m} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是 $\mathcal{J}_S = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{K} x^\alpha$。事实上，$\mathcal{J}_S$ 是一个在 $\mathbb{K}$ 上的约旦 Λ-环面，称为由 S 确定的标准克利福德环面。对于 α，$\beta \in S\oplus\Lambda_{n-m}$，乘法规则如下（见 [Yos00，例 5.2）]:

$$x^\alpha x^\beta = \begin{cases} x^{\alpha+\beta} & \text{if } \epsilon_\alpha = \epsilon_b \neq 0 \\ x^{\alpha+\beta} & \text{if } \epsilon_\alpha = 0 \text{ or } \epsilon_\beta = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.2}$$

（iv）假设 Λ 的秩为 $n \geq 3$。令 ω 为本原三次单位根，并令 $w = (w_{ij})$ 为量子 $n \times n$ 矩阵，其中 $w_{12} = \omega$、$w_{21} = \omega^{-1}$，其余所有元素均等于 1。接下来，令 $\mathbb{K}_w = \mathbb{K}_w[u_1^{\pm1}, \ldots, u_n^{\pm1}]$ 为由 w 确定的量子环面。再令 $Z = Z(\mathbb{K}_w)$ 为 $\mathbb{K}_w$ 的中心。于是 $Z = \mathbb{K}[u_1^{\pm3}, u_2^{\pm3}, u_3^{\pm1}, \ldots, u_n^{\pm1}]$。现在考虑在 Z 上的第一蒂茨构造 $\mathbb{A}_t = (\mathbb{K}_w, u_3) = \mathbb{K}_w \oplus \mathbb{K}_w \oplus \mathbb{K}_w$，详细内容见 [Yos00，第 6] 节。接下来，令 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ 为 Λ 的一组基，并令 $\Delta := \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2 + 3\mathbb{Z}\lambda_3 + \mathbb{Z}\lambda_4 + \cdots + \mathbb{Z}\lambda_n$。对 $\delta = \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 + 3\delta_3\lambda_3 + \delta_4\lambda_4 +$ 定义 $\deg(u^\delta = u_1^{\delta_1} u_2^{\delta_2} u_3^{\delta_3} \cdots u_n^{\delta_n}) = \delta$ $\cdots + \delta_n\lambda_n \in \Delta$。这赋予 $\mathbb{K}_w = \bigoplus_{\delta\in\Delta} \mathbb{K} u^\delta$ 一个 Δ-分次。最后，对于 $\alpha = \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n \in \Lambda$，令

$$x^\alpha = \begin{cases} (u^\alpha, 0, 0) & \text{if } \alpha_3 \equiv 0 \pmod 3 \\ (0, u^{\alpha-\lambda_3}, 0) & \text{if } \alpha_3 \equiv 1 \pmod 3 \\ (0, 0, u^{\alpha+\lambda_3}) & \text{if } \alpha_3 \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

那么 $\mathbb{A}_t = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} \mathbb{K} x^\alpha$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 Jordan Λ-环面，称为阿尔伯特环面。对于 (x_0, x_1, x_2)、$(y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{A}_t$，乘法定义如下:

$$\begin{aligned} (x_0, x_1, x_2)(y_0, y_1, y_2) = & (x_0 \cdot y_0 + \overline{x_1 y_2} + \overline{y_1 x_2}, \\ & \overline{x_0} y_1 + \overline{y_0} x_1 + u_3^{-1} x_2 \times y_2, \\ & y_2 \overline{x_0} + x_2 \overline{y_0} + u_3 x_1 \times y_1), \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ $x \times y = x \cdot y - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(x)y - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(y)x + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(x)\mathrm{tr}(y) - \mathrm{tr}(x \cdot y))1$，$\overline{x} = x \times 1$ 对于 $x, y \in \mathbb{K}_w$，而 tr 是中心闭包 $\overline{\mathbb{K}}_w$ 的一般迹。

Y. Yoshii 对特征为 $\neq 2$ 的任意域上的 Jordan 环面进行了分类，参见 [Yos00，定理 2]。以下是 $\mathbb{K}$ 上 Jordan 环面的分类。

定理 4.3.3. [Yos00，推论 7.2] 任意定义在 $\mathbb{K}$ 上的 Jordan Λ-环面都按分次同构于四种 Jordan 环面之一

$$\mathbb{K}_{\mathbf{q}}^+, H(\mathbb{K}_{\mathbf{e}}, -), \mathcal{J}_S, \mathbb{A}_t.$$

命题 4.3.4. 假设 $\mathcal{A}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}^{\lambda}$ 是定义在 $\mathbb{K}$上的 Jordan Λ-环面。那么 $\mathcal{A}$存在一个预切瓦莱对合。

证明。由定理 4.3.3，只需对 Jordan 环面 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}^{+}$, $H(\mathbb{K}_{\mathbf{e}},-)$、$\mathcal{J}_S$ 和 $\mathbb{A}_t$ 证明该结论。因此，设 $\mathcal{A}=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{K}x^{\alpha}$ 是这四类 Jordan Λ-环面之一，$\{x^{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是例 4.3.2 中所述的 $\mathcal{A}$ 的 $\mathbb{K}$-基。我们通过将 $\tau(x^{\alpha})=x^{-\alpha}$ 对所有 $\alpha\in\Lambda$ 的定义作 $\mathbb{K}$-线性延拓，定义 $\tau\colon\mathcal{A}\to\mathcal{A}$。于是 τ 的阶为 2，且对所有 $\alpha\in\Lambda$，$\tau(\mathcal{A}^{\alpha})=\mathcal{A}^{-\alpha}$。接下来只需证明 τ 是 $\mathcal{A}$的自同构。设 $\alpha,\beta\in\Lambda$，则 $x^{\alpha}x^{\beta}=k(\alpha,\beta)x^{\alpha+\beta}$，其中 $k(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}$。对于 $\mathbb{K}_{\mathbf{q}}^{+}$, $H(\mathbb{K}_{\mathbf{e}},-)$ 和 $\mathcal{J}_S$，由乘法规则 4.1 和 4.2 可知，对所有 $\alpha,\beta\in\Lambda$，$k(\alpha,\beta)=k(-\alpha,-\beta)$。现在设 $\mathcal{A}=\mathbb{A}_t$，并设 $u^{\alpha}\in\mathbb{K}_w$。则对某个 $z\in Z=Z(\mathbb{K}_w)$，有 $u^{\alpha}=zu_1^{i_1}u_2^{i_2}$。首先注意，由于 tr 是 Z-线性的，因此 $\mathrm{tr}(u^{\alpha})=z\mathrm{tr}(u_1^{i_1}u_2^{i_2})$。另一方面，若 $i_1\not\equiv 0$ 或 $i_2\not\equiv 0$ (模 3)，则 $\mathrm{tr}(u_1^{i_1}u_2^{i_2})=0$，参见 Yos00，命题 6.7]。因此

$$\mathrm{tr}(u^{-\alpha})=\begin{cases}0 & \text{if } i_1\not\equiv 0 \text{ or } i_2\not\equiv 0 \pmod 3\\ u^{-\alpha}\mathrm{tr}(1) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

鉴于这一事实，现在很容易由 4.3 验证，对所有 $\alpha,\beta\in\Lambda$，$k(\alpha,\beta)=k(-\alpha,-\beta)$。因此，$\tau$是 $\mathcal{A}$ 的一个对合，这就证明了我们的结论。□

5. 无中心 Lie 环面的 Chevalley 对合

众所周知，李环面是根分次 Lie 代数。基于根分次李代数的结构理论，[BM92], [BZ96], 已证明约化型无中心李环面的坐标化定理，参见 [BGK96],[BGKN95], [Yos00] 和 [AG01]。本节将利用这些坐标化定理，研究约化型无中心李环面是否存在 Chevalley 对合。我们将按类型分别论证。

定理 5.0.1. 设 $\mathcal{L}$是一个约化型无中心李环面；若其类型为 A_ℓ, $\ell\geq 2$，则其坐标代数配备有一个 Λ分次反对合。则 $\mathcal{L}$ 存在一个切瓦利对合。

证明见下文命题 5.1.3、5.2.3、5.3.4、5.3.8、5.4.3、5.4.5 和 5.4.7。

5.1. 秩为 >2 的单扭中心无关李环面。假设本节中 Δ 是类型为 A_ℓ ($\ell\geq 3$)、D_ℓ ($\ell\geq 4$) 或 $E_{6,7,8}$ 的有限根系，并令 $Q=Q(\Delta)$ 为 Δ 的根格。对于类型 A_ℓ，我们令

$$\Delta=\{0\}\cup\{\epsilon_i-\epsilon_j\mid 1\leq i\neq j\leq \ell+1\}$$

其中 ϵ_1、……、$\epsilon_{\ell+1}$ 是包含 Δ 的向量空间的一组基。

设 $\mathcal{A}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}^\lambda$ 是一个结合 Λ-环面，$[\mathcal{A},\mathcal{A}]$ 是 $\mathcal{A}$ 中的交换子李代数。这里我们回顾 $\mathcal{A}$ 上特殊线性李代数的定义。

定义 5.1.1。我们用 $M_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 表示由结合的 Λ-环面 $\mathcal{A}$ 中的元素构成的 $(\ell+1)\times(\ell+1)$-矩阵代数，用 $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 表示其关于交换子括号所对应的李代数。我们定义

$$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A}):=\{A\in M_{\ell+1}(\mathcal{A})\mid \mathrm{tr}(A)\in[\mathcal{A},\mathcal{A}]\}$$

它是 $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 的一个李子代数，称为 $\mathcal{A}$ 上的 $(\ell+1)\times(\ell+1)$-特殊线性李代数。当 $\mathcal{A}$ 是交换的时，我们通常将 $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 与 $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{K})\otimes_{\mathbb{K}}\mathcal{A}$ 等同。注意，$M_{\ell+1}(\mathcal{A})$，因此 $\mathfrak{gl}(\mathcal{A})$ 继承了 $\mathcal{A}$ 的 Λ-分次。事实上，我们有 $\mathfrak{gl}_{\ell+1}(\mathcal{A})=\sum_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{gl}_{\ell+1}(\mathcal{A})^\lambda$，其中 $\mathfrak{gl}_{\ell+1}(\mathcal{A})^\lambda=M_{\ell+1}(\mathcal{A}^\lambda)$。最后，$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 是 $\mathfrak{gl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 的一个 Λ-分次子代数。

设 $\mathcal{L}=\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 或 $\mathcal{L}=\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}_{[n]}$，其中 $\mathfrak{g}$ 是类型为 $D_\ell\,(\ell\geq4)$ 或 $E_{6,\ 7,\ 8}$ 的有限维单李代数。那么 $\mathcal{L}$ 是一个 $Q\times\Lambda$-分次李代数。若 $\mathcal{L}=\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$，则

$$\mathcal{L}^\lambda_{\epsilon_i-\epsilon_j}=\mathcal{A}^\lambda E_{ij},\quad \mathcal{L}^\lambda_0=\{\Sigma_{i=1}^{\ell+1}x_iE_{ii}\mid x_i\in\mathcal{A}^\lambda,\Sigma_{i=1}^{\ell+1}x_i\in[\mathcal{A},\mathcal{A}]\},\tag{5.1}$$

对于 $i\neq j$，$\lambda\in\Lambda$，其中 E_{ij} 表示在第 (i,j) 个位置为 1、其余位置为零的矩阵；对于 $\lambda\in\Lambda$，$\beta\in Q\setminus\Delta$，还有 $\mathcal{L}^\lambda_\beta=\{0\}$。另外，若 $\mathcal{L}=\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}_{[n]}$，则

$$\mathcal{L}^\lambda_\alpha=\mathfrak{g}_\alpha\otimes\mathcal{A}^\lambda_{[n]},\quad \mathcal{L}^\lambda_\beta=\{0\},\tag{5.2}$$

对于 $\alpha\in\Delta$，$\beta\in Q\setminus\Delta$，$\lambda\in\Lambda$。事实上，$\mathcal{L}$ 是一个类型为 Δ 的无中心 Λ-环面。此外，S. Berman、Y. Gao 和 Y. Krylyuk 证明了以下坐标化定理。

定理5.1.2。 [BGK96，定理2.65，定理1.37] (i) 任何类型为 $A_\ell\,(\ell\geq3)$ 的无中心李 Λ-环面，都分次同构于 $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个结合 Λ-环面。

(ii) 任意类型为 $D_\ell\ (\ell\geq4)$ 或 $E_{6,\ 7,\ 8}$ 的无中心李 Λ-环均与 $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}_{[n]}$ 分次同构，其中 $\mathfrak{g}$ 分别是类型为 $D_\ell\,(\ell\geq4)$ 或 $E_{6,\ 7,\ 8}$ 的有限维单李代数。

命题 5.1.3. 设 $\mathcal{L}$ 是类型为 A_ℓ、$(\ell\geq3)$、$D_\ell\ (\ell\geq4)$ 或 $E_{6,\ 7,\ 8}$ 的无中心李 Λ-环。此外，对于类型 A_ℓ，假设 $\mathcal{L}$ 的坐标代数带有一个 Λ-分次反对合。则 $\mathcal{L}$ 存在切瓦利对合。

证明。首先，设 $\mathcal{L}$ 是一个类型为 $A_\ell,\ell\geq3$、其坐标代数具有 Λ-分次反对合的无中心 Lie Λ-环面。由定理 5.1.2(i)可知，$\mathcal{L}\cong\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{A}$是 $\mathcal{L}$的坐标代数，是一个结合 Λ-环面

其具有一个 Λ-分次反对合 σ。因此我们可以假设 $\mathcal{L} = \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$。我们考虑 $\mathcal{L} = \sum_{\alpha\in Q}$的 $Q \times \Lambda$-分次, $_{\lambda\in\Lambda}\, \mathcal{L}_\alpha^\lambda$，如 (5.1) 所示。

接下来，令 τ 为 $\mathcal{A}$ 的预切瓦莱对合，见命题 4.1.2。我们定义 $\bar{\tau}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$，使得 $\bar{\tau} := \hat{\tau} \circ \theta$，其中 θ 是 $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 的对合，由下式给出：

$$\theta(A) = -\sigma(A^t), \quad A \in \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A}),$$

其中，对于 $X = (x_{ij}) \in \mathrm{Mat}_\ell(\mathcal{A})$，有 $\sigma(X) := (\sigma(x_{ij}))$；而 $\hat{\tau}$ 是由 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 诱导的 $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 的对合。事实上，$\hat{\tau}$ 可表示为

$$\hat{\tau}(xE_{ij}) = \tau(x)E_{ij}, \quad x \in \mathcal{A},\ 1 \le i, j \le \ell + 1.$$

那么显然，对于 $\lambda \in \Lambda$，有 $\bar{\tau}(\mathcal{L}^\lambda) = \mathcal{L}^{-\lambda}$；对于 $h \in \mathcal{L}_0^0$，有 $\bar{\tau}(h) = -h$。因此，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L} = \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{A})$ 的切瓦利对合。

最后，令 $\mathcal{L}$ 为类型 $\Delta = D_\ell$、$\ell \ge 4$ 或 $\Delta = E_\ell$、$\ell = 6$、7、8 的无中心李 Λ-环面。根据定理 5.1.2(ii)，我们可以假设 $\mathcal{L} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$，其中 $\mathfrak{g}$ 是类型 Δ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{[n]}$ 的有限维单李代数。将上文中的 θ 替换为 $\theta_\mathfrak{g} \otimes 1_\mathcal{A}$，其中 $\theta_\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的切瓦利对合，可知上述讨论对这种情形也成立（对合 $\hat{\tau}$ 可表示为对于 $a \in \mathfrak{g}$ 和 $x \in \mathcal{A}$，有 $\hat{\tau}(a \otimes x) = a \otimes \hat{\tau}(x)$）。□

为了构造交矩阵李代数的紧实形式，Gao96 中的作者引入了分次李代数的一种对合概念，该对合与分次相容，其意义见 Gao96，定义 2。值得一提的是，任何 A 型李环面的切瓦利对合，在视为分次李代数时，都与其分次相容。命题 5.1.3 证明中的对合与 Gao96，例 2 中给出的对合一致，而另一对合则与 Gao96，例 2 中给出的对合一致。

5.2. A 型李环面。我们首先回顾替代代数上的李代数的定义。

设 是一个替代代数，令 和 分别表示 关于 的左乘和右乘。对于 ，令 ，其中 称为由元素 和 确定的内导子。然后，令 为 的张成空间。事实上， 是李代数 Der()（即 的导子代数）的一个理想。

定义 5.2.1. 假设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的替代代数。令

$$\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A}) := (\mathfrak{sl}_3(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{A}) \oplus D_{\mathcal{A},\mathcal{A}}.$$

则 $\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A})$ 在由下式定义的括号运算下构成李代数

$$\begin{aligned}[x\otimes a, y\otimes b] =& [x,y]\otimes \frac{ab+ba}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}(xy)D_{a,b}\\ &+(xy+yx-\frac{2}{3}\mathrm{tr}(xy)I)\otimes\frac{ab-ba}{2},\\ [D_{a,b}, x\otimes c] =& x\otimes D_{a,b}(c) = -[x\otimes c, D_{a,b}],\\ [D_{a,b}, D_{c,d}] =& D_{D_{a,b}(c),d} + D_{c,D_{a,b}(d)},\end{aligned}$$

对于 $a,b,c,d\in\mathcal{A}, x,y\in\mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$，其中 I是单位矩阵，$\mathrm{tr}(x)$表示矩阵 x的迹，参见 [BGKN95，第 2]节。

设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$ 中由对角矩阵构成的嘉当子代数；对于 $i=1$、2、3，令 $\epsilon_i\colon \mathfrak{h}\to\mathbb{K}$ 为到 (i,i) 项的投影。令$\Delta := \{0\}\cup\{\epsilon_i-\epsilon_j \mid 1\le i\neq j\le 3\}$。则 Δ 可实现为类型为 A_2 的根系，其中 $\{\alpha_1=\epsilon_1-\epsilon_2, \alpha_2=\epsilon_2-\epsilon_3\}$ 是 Δ 的一组基。现在令$\mathcal{A}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}^\lambda$ 为一个替代的 Λ-环面，并设 $\mathcal{L}=\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A})$。于是 $\mathcal{L}$ 是一个$Q\times\Lambda$-分次代数，且

$$\mathcal{L}^\lambda_{\epsilon_i-\epsilon_j} = E_{ij}\otimes\mathcal{A}^\lambda,\quad \mathcal{L}^\lambda_\alpha=\{0\},\quad \mathcal{L}^\lambda_0 = (\mathfrak{h}\otimes\mathcal{A}^\lambda)\oplus\sum_{\mu+\nu=\lambda} D_{\mathcal{A}^\mu,\mathcal{A}^\nu}, \tag{5.3}$$

对于 $i\neq j$、$\lambda\in\Lambda$和 $\alpha\in Q\setminus\Delta$，其中 E_{ij}表示在第（i，j）项为 1、其余位置均为 0 的矩阵。事实上，$\mathcal{L}$ 是一个类型为 A_2的无中心 Λ-环面，参见 [BGKN95],[Yos02]。下面的定理确定了类型为 A_2的扩张仿射李代数的坐标代数。

定理5.2.2。 [BGKN95，引理3.25][Yos02，命题6.3] 任意类型为 A_2 的无中心李 Λ-环面都与 $\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A})$分次同构，其中 $\mathcal{A}$ 是一个替代 Λ-环面。

命题5.2.3。设 $\mathcal{L}$是一个类型为 A_2 的无中心 Λ-环面，且其坐标代数配备了一个 Λ-分次反对合。则 $\mathcal{L}$ 具有切瓦利对合。

证明。利用定理5.2.2，只需证明对于 $\mathcal{L}=\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A})$ 存在切瓦利对合，其中 $\mathcal{A}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}^\lambda$ 是带有 Λ-分次反对合 $^-$ 的替代 Λ-环面。首先回顾命题 4.2.4，$\mathcal{A}$ 存在预切瓦莱对合 τ。令 $\bar\tau := \tau\circ^-$。那么 $\bar\tau$ 是 $\mathcal{A}$ 的反自同构。因此，$\bar\tau$ 诱导出一个李代数反自同构 $\hat\tau\colon \mathrm{Der}(\mathcal{A})\to\mathrm{Der}(\mathcal{A})$，定义为 $\hat\tau(D) = \bar\tau D\bar\tau^{-1}$，其中 $D\in\mathrm{Der}(\mathcal{A})$。由于对 $a,b\in\mathcal{A}$，有 $\hat\tau(D_{a,b}) = D_{\tau(\overline{a}),\tau(\overline{b})}$，可知 $\hat\tau$ 限制为 $D_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ 的李代数反自同构。接下来，我们在 $\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A}) = (\mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})\otimes\mathcal{A})\oplus D_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ 上定义 $\tilde\tau$:

$$\tilde\tau(x\otimes a + D_{b,c}) = -x^t\otimes\tau(\overline{a}) + \hat\tau(D_{b,c}),$$

对于 $x \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$ $a, b, c \in \mathcal{A}$，其中 x^t 表示 x 的转置。我们的断言是，$\tilde{\tau}$ 是 $\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A})$ 的切瓦利对合。为此，令 $x, y \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{K})$，且 $a, b \in \mathcal{A}$。那么

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}[x \otimes a, y \otimes b] = &- [x, y]^t \otimes \frac{\tau(\overline{ab + ba})}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}(xy)\hat{\tau}(D_{a,b}) \\ &-(xy + yx - \frac{2}{3}\mathrm{tr}(xy)I)^t \otimes \frac{\tau(\overline{ab - ba})}{2}.\end{aligned}$$

现在我们有

$$\begin{aligned}-[x, y]^t \otimes \frac{\tau(\overline{ab + ba})}{2} =&[x^t, y^t] \otimes \frac{\tau(\overline{a})\tau(\overline{b}) + \tau(\overline{b})\tau(\overline{a})}{2}, \\ \mathrm{tr}(xy)\hat{\tau}(D_{a,b}) =&\mathrm{tr}(x^t y^t) D_{\tau(\overline{a}),\tau(\overline{b})},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&- (xy + yx - \frac{2}{3}\mathrm{tr}(xy)I)^t \otimes \frac{\tau(\overline{ab - ba})}{2} = \\ &(x^t y^t + y^t x^t - \frac{2}{3}\mathrm{tr}(x^t y^t)I) \otimes \frac{\tau(\overline{a})\tau(\overline{b}) - \tau(\overline{b})\tau(\overline{a})}{2}.\end{aligned}$$

因此 $\tilde{\tau}[x \otimes a, y \otimes b] = [\tilde{\tau}(x \otimes a)\ \tilde{\tau}(y \otimes b)]$。由于

$$(\tau(\overline{b}), \tau(\overline{c}), \tau(\overline{a})) = -(\tau(\overline{a}), \tau(\overline{c}), \tau(\overline{b})),\ a, b, c \in \mathcal{A}$$

其中 $(\tau(\overline{b})\ \tau(\overline{c})\ \tau(\overline{a}))$ 是 $\tau(\overline{b})\ \tau(\overline{c})\ \tau(\overline{a})$ 的结合子，由此得到 $\tau(D_{a,b}(c)) = D_{\tau(\overline{a}),\tau(\overline{b})}(\tau(\overline{c}))$。这给出 $\tilde{\tau}[D_{a,b}, x \otimes c] = [\tilde{\tau}(D_{a,b})\ \tilde{\tau}(x \otimes c)]$ 以及 $\tilde{\tau}[D_{a,b}, D_{c,d}] = [\tilde{\tau}(D_{a,b})\ \tilde{\tau}(D_{c,d})]$。因此，$\tilde{\tau}$ 是 $\mathcal{L} = \mathfrak{psl}_3(\mathcal{A})$ 的李代数对合。

要证明 $\tilde{\tau}$ 是预切瓦莱对合，固定 $\lambda \in \Lambda$，则由 (5.3) 得，

$$\mathcal{L}^\lambda = (\mathfrak{h} \otimes \mathcal{A}^\lambda) \oplus \sum_{\mu+\nu=\lambda} D_{\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu} \oplus \left(\bigoplus_{\epsilon_i - \epsilon_j \in \Delta} E_{ij} \otimes \mathcal{A}^\lambda \right).$$

因此 $\tilde{\tau}(\mathcal{L}^\lambda) = \mathcal{L}^{-\lambda}$。此外，我们注意到 $\mathcal{L}_0^0 = (\mathfrak{h} \otimes \mathbb{K}1) \oplus \sum_{\mu \in \Lambda} \mathbb{K} D_{x^\mu, \tau(x^\mu)}$，其中$0 \neq x^\mu \in \mathcal{A}^\mu$。由于 $D_{a,b} + D_{b,a} = 0$ （参见 [BGKN95，第 1] 节）且 $D_{a,b} = D_{-a,-b}$对所有 $a, b \in \mathcal{A}$均成立，因此我们有 $\tilde{\tau}(D_{x^\mu, \tau(x^\mu)}) = D_{\tau(x^\mu)}$ $_{x^\mu} = -D_{x^\mu, \tau(x^\mu)}$。这表明 $\tilde{\tau}_{|_{\mathcal{L}_0^0}} = -\mathrm{id}$。因此，$\tilde{\tau}$ 是 $\mathfrak{psl}_3(\mathcal{A})$ 的切瓦利对合，至此证明完成。□

5.3. $\mathbf{A_1}$ 型和 $\mathbf{C_\ell}$($\ell \geq 2$) 型的无中心李环面。我们首先回顾 [Jac68 第 VIII 章第 5] 节中从约旦代数构造李代数的 Tits-Kantor-Koecher（TKK）构造。我们将 TKK 构造应用于一个 Λ分次约旦代数，以构造 Λ 型和 C_l 型的无中心李环面。

5.3.1.（TKK构造）设 $\mathcal{J}$ 是一个约旦代数，并设 L_x 是作用在 $\mathcal{J}$ 上的算子，其定义为 $L_x y = xy$，其中 x、$y \in \mathcal{J}$。令

$$\mathrm{Instrl}(\mathcal{J}) := L_{\mathcal{J}} \oplus \mathrm{Inder}(\mathcal{J})$$

其中，Inder($\mathcal{J}$) 是内导子 $\{\sum_i [L_{x_i}, L_{y_i}] \mid x_i, y_i \in \mathcal{J}\}$ 所构成的李代数。再结合由下式定义的括号

$$[L_x + C, L_y + D] = [L_x, L_y] + L_{Cy} - L_{Dx} + [C, D],$$

对于 $x, y \in \mathcal{J}, C, D \in$ Inder($\mathcal{J}$)，Instrl($\mathcal{J}$) 是李代数 $\mathfrak{gl}(\mathcal{J})$ 的一个子代数，称为 $\mathcal{J}$ 的内结构李代数。定义 $^-$: Instrl($\mathcal{J}$) $\to$Instrl($\mathcal{J}$)，使其满足 $\overline{L_a + D} = -L_a + D$。它是 Instrl($\mathcal{J}$) 的一个对合。现在令$^-$ $^-$TKK($\mathcal{J}$) := $\mathcal{J} \oplus$ Instrl($\mathcal{J}$) $\oplus \mathcal{J}$，其中 $\mathcal{J}$在线性映射$x \mapsto \bar{x}$下同构于 $\mathcal{J}$。那么，在由下式定义的括号下，TKK($\mathcal{J}$) 是一个李代数，称为 $\mathcal{J}$ 的 TKK李代数

$$\begin{aligned}[x_1 + \bar{y}_1 + E_1, x_2 + \bar{y}_2 + E_2] &= -E_2 x_1 + E_1 x_2 - \overline{E_2 b_1} + \overline{E_1 b_2} \\ &+ x_1 \triangle y_2 - x_2 \triangle y_1 + [E_1, E_2],\end{aligned}$$

$^-$对于 $x_i \in \mathcal{J}, \bar{y}_i \in \mathcal{J}$，以及 $E_i \in$ Instrl($\mathcal{J}$)，其中 $x \triangle y = L_{xy} + [L_x, L_y]$。

设 $\mathcal{J} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{J}^\lambda$ 是一个 Λ-分次约旦代数。那么 TKK($\mathcal{J}$) 是 Λ-分次的，其中

$$\mathrm{TKK}(\mathcal{J})^\lambda = \mathcal{J}^\lambda \oplus \mathrm{Instrl}(\mathcal{J})^\lambda \oplus \overline{\mathcal{J}^\lambda}, \tag{5.4}$$

对于 $\lambda \in \Lambda$，其中 Instrl($\mathcal{J}$)$^\lambda = L_{\mathcal{J}^\lambda} \oplus \sum_{\mu+\nu=\lambda} [L_{\mathcal{J}^\mu}, L_{\mathcal{J}^\nu}]$（更多详情参见[AABGP97，第三章，§2]）。

命题 5.3.2. 假设 $\mathcal{J} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{J}^\lambda$ 是一个带有预切瓦莱对合的 Λ-分次约旦代数。那么 TKK($\mathcal{J}$) 具有一个预切瓦莱对合。

证明. 设 $\tau : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ 是 $\mathcal{J}$ 上的一个预切瓦莱对合。首先注意到，τ 通过 $\hat{\tau}(D) = \tau D \tau^{-1}$（其中$D \in$ Der($\mathcal{J}$)）在 Der($\mathcal{J}$) 上诱导出一个李代数对合 $\hat{\tau}$。现在我们有

$$\hat{\tau}(\sum_i [L_{x_i}, L_{y_i}]) = \sum_i [L_{\tau(x_i)}, L_{\tau(y_i)}],$$

其中 $x_i, y_i \in \mathcal{J}$。因此，$\hat{\tau}$在 Inder($\mathcal{J}$) 上限制为一个李代数对合。接下来，我们将 $\hat{\tau}$ 扩展到 Instrl($\mathcal{J}$)，定义为 $\hat{\tau}(L_x + D) := L_{\tau(x)} + \hat{\tau}(D)$，其中 $x \in \mathcal{J}$且 $D \in$ Inder($\mathcal{J}$)。于是，$\hat{\tau}$ 是 Instrl($\mathcal{J}$) 的李代数对合，因为 $\hat{\tau}(L_{Ex}) = L_{\hat{\tau}(E)(\tau(x))}, x \in \mathcal{J}$，$E \in$ Inder($\mathcal{J}$)。现在我们在 TKK($\mathcal{J}$) 上定义 $\bar{\tau}$，$=_J \oplus$ Instrl($\mathcal{J}$) $\oplus \mathcal{J}$，如下:

$$\bar{\tau}(x + \bar{y} + E) = \overline{\tau(x)} + \tau(y) + \overline{\hat{\tau}(E)},\ x \in \mathcal{J}, \bar{y} \in \bar{\mathcal{J}}, E \in \mathrm{Instrl}(\mathcal{J}). \tag{5.5}$$

为证明 $\bar{\tau}$是 TKK($\mathcal{J}$) 的李代数同态，令 $x_1, x_2 \in \mathcal{J}, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathcal{J}, E_1, E_2 \in$ Instrl($\mathcal{J}$)。于是

$$\begin{aligned}\bar{\tau}[x_1+\bar{y}_1+E_1, x_2+\bar{y}_2+E_2] &= -\overline{\tau(E_2x_1)}+\overline{\tau(E_1x_2)}-\tau(\bar{E}_2y_1)+\tau(\bar{E}_1y_2)\\ &+ \overline{\hat{\tau}(x_1\triangle y_2)}-\overline{\hat{\tau}(x_2\triangle y_1)}+[\overline{\hat{\tau}(E_1)},\overline{\hat{\tau}(E_2)}].\end{aligned}$$

我们有 $\overline{\tau(E_2x_1)} = \hat{\tau}(E_2)\tau(x_1)$。类似地，$\overline{\tau(E_1x_2)} = \hat{\tau}(E_1)\tau(x_2)$ $\tau(E_2y_1) = \hat{\tau}(E_2)\tau(y_1)$，以及 $\tau(E_1y_2) = \hat{\tau}(E_1)\tau(y_2)$。另一方面

$$\begin{aligned}\overline{\hat{\tau}(x_1\triangle y_2)} &= -L_{\tau(x_1y_2)}+[L_{\tau(x_1)}, L_{\tau(y_2)}]\\ &= -(L_{\tau(y_2x_1)}+[L_{\tau(y_2)}, L_{\tau(x_1)}]) = -\tau(y_2)\triangle\tau(x_1).\end{aligned}$$

类似地，$\hat{\tau}(\overline{x_2\triangle y_1}) = -\tau(y_1)\triangle\tau(x_2)$。因此，$\bar{\tau}$是 TKK($\mathcal{J}$) 的一个对合。最后，注意到对于所有 $\lambda \in \Lambda$，$\bar{\tau}$(TKK($\mathcal{J}$)$^\lambda$) = TKK($\mathcal{J}$)$^{-\lambda}$，见 (5.4)。因此，$\bar{\tau}$是 $\mathcal{L} =$ TKK($\mathcal{J}$) 的一个切瓦利对合，这就证明了我们的断言。□

5.3.1. **A_1 型**。设 Δ 是类型为 A_1 的有限根系，即 $\Delta = \{0, \pm\alpha\}$，并令 $Q = \mathbb{Z}\alpha$。

接下来假设 $\mathcal{J} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{J}^\lambda$ 是一个约旦 Λ-环面，见定义 4.0.1。现在令 $\mathcal{L} =$ TKK($\mathcal{J}$)，并令

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{J}, \quad \mathcal{L}_{-\alpha} = \bar{\mathcal{J}}, \quad \mathcal{L}_\beta = \{0\}, \quad \mathcal{L}_0 = \mathrm{Instrl}(\mathcal{J}), \tag{5.6}$$

对于 $\beta \in Q \setminus \Delta$。考察 Λ-分次 (5.4)，则 $\mathcal{L}$ 是 $Q \times \Lambda$-分次的。Y. Yoshii 证明了 $\mathcal{L} =$ TKK($\mathcal{J}$) 是一个类型为 A_1 的无中心李 Λ-环面，见[Yos00]。此外，他还证明了以下结果，并据此确定了类型为 A_1的扩张仿射李代数的坐标代数。

定理 5.3.3. [Yos00，定理 1] 任何类型为 A_1 的无中心李 Λ-环面都分次同构于 TKK($\mathcal{J}$)，其中 $\mathcal{J}$ 是一个约旦 Λ-环面。

命题 5.3.4. 设 $\mathcal{L}$ 是一个类型为 A_1 的无中心 Λ-环面。则 $\mathcal{L}$ 具有一个切瓦利对合。

证明。由定理 5.3.3，我们可以假设 $\mathcal{L} =$ TKK($\mathcal{J}$)，其中 $\mathcal{J}$ 是一个约旦 Λ-环面。现在我们证明 TKK($\mathcal{J}$) 存在切瓦利对合。首先指出，存在一个预切瓦莱对合 $\tau\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$，见命题 4.3.4。然后，由命题 5.3.2，TKK($\mathcal{J}$) 存在由 (5.5) 定义的预切瓦莱对合 $\bar{\tau}$。另请注意，$\mathcal{L}_0^0 = \mathbb{K}L_1 \oplus \sum_{\mu\in\Lambda}\mathbb{K}[L_{x^\mu}, L_{\tau(x^\mu)}] \subseteq$ Instrl($\mathcal{J}$)，其中 $0 \neq x^\mu \in \mathcal{J}^\mu$，见 (5.6)、(5.4)。由于 τ的阶为 2，我们得到 $\bar{\tau}([L_{x^\mu}, L_{\tau(x^\mu)}]) = -[L_{x^\mu}, L_{\tau(x^\mu)}]$。另一方面，$\bar{\tau}(L_1) = \hat{\tau}(L_1) = \overline{-L_1} = -L_1$ 因此我们有 $\bar{\tau}|_{\mathcal{L}_0^0} = -\mathrm{id}$。所以 $\bar{\tau}$是 $\mathcal{L} =$ TKK($\mathcal{J}$) 的切瓦利对合，证明完毕。□

5.3.2. 类型 $\mathsf{C}_\ell(\ell \geq 2)$。假设

$$\Delta = \{0\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i \leq l\} \cup \{\pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq \ell\}$$

是类型为 C_ℓ 的有限根系，并令 $Q = Q(\Delta)$ 为 Δ 的根格。

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的代数，且 σ 是 $\mathcal{A}$ 的一个反对合。对于 $\ell \geq 1$，令

$$H_\ell(\mathcal{A}, \sigma) := \{X \in \mathrm{Mat}_\ell(\mathcal{A}) \mid \sigma(X^t) = X\}$$

其中，对于 $X = (x_{ij}) \in \mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A})$，有 $\sigma(X) := (\sigma(x_{ij}))$。那么，$H_l(\mathcal{A}, \sigma)$ 是 $\mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A})^+$ 的一个子代数，即 $\mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A})$ 的加代数。因此，$H_l(\mathcal{A}, \sigma)$ 是一个乘法为 $X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ 的代数。注意，若 $\mathcal{A}$ 是 Λ 分次的，则 $\mathcal{A}$ 的 Λ 分次在 $H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$ 上诱导出一个 Λ 分次，使得

$$H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)^\lambda = \{X = (x_{ij}) \in \mathrm{Mat}_\ell(\mathcal{A}) \mid x_{ij} \in \mathcal{A}^\lambda, \text{for all } 1 \leq i, j \leq \ell\},$$

对于 $\lambda \in \Lambda$。

引理 5.3.5. (i) 设 $\mathcal{A}$ 是一个带有反对合 σ 的代数，且 τ 是 $\mathcal{A}$ 的一个自同构。若 $\sigma\tau = \tau\sigma$，则 τ 通过 $\tau(X) := (\tau(x_{ij}))$（对于 $X = (x_{ij}) \in H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$）诱导出一个自同构 $\tau : H_\ell(\mathcal{A}, \sigma) \to H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$。

(ii) 考虑带有由满足注 4.1.3 条件的某个 e 和 q 所确定的反对合的量子环面 $(\mathcal{A}, \sigma) = (\mathbb{K}_\mathbf{q}, \sigma_\mathbf{e})$，或考虑带有标准反对合的八元数环面 $(\mathcal{A}, \sigma) = (\mathbb{O}, \sigma)$。那么 $H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$ 存在一个预切瓦莱对合。

证明. (i) 显然，$\tau : \mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A}) \to \mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A})$，其中 $\tau(X) := (\tau(x_{ij}))$ 是 $(\mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A}), \cdot)$ 的一个自同构。由于 $\sigma\tau = \tau\sigma$，我们有 $\sigma(\tau(X)^t) = \sigma(\tau(X^t)) = \tau(\sigma(X^t)) = \tau(X)$。因此，$\tau : \mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A}) \to \mathsf{Mat}_\ell(\mathcal{A})$ 限制为 $H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$ 的一个自同构。

(ii) 根据定理 4.0.2，$\mathcal{A}$ 存在一个预切瓦莱对合 τ。结合注 4.1.3 和注 4.2.5，可以容易地验证 $\sigma\tau = \tau\sigma$。于是由 (i)，$\tau : H_\ell(\mathcal{A}, \sigma) \to H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$ 是一个自同构。此外，对于所有 $\lambda \in \Lambda$，我们有 $\tau(H_l(\mathcal{A}, \sigma)^\lambda) = H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)^{-\lambda}$。因此，$\tau : H_\ell(\mathcal{A}, \sigma) \to H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$ 是一个预切瓦莱对合。□

设 $\mathcal{A}$ 为交换结合代数，M 为左 $\mathcal{A}$-模，且 $f : M \times M \to \mathcal{A}$ 为 M 上的对称 $\mathcal{A}$-双线性形式。令 $\mathsf{RedCliff}(f) := \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \oplus M$。那么，$\mathsf{RedCliff}(f)$ 配以如下乘法

$$(a_1, a_2, x) \cdot (b_1, b_2, y) = \left(a_1 b_1 + f(x, y), a_2 b_2 + f(x, y), \frac{1}{2}(a_1 y + a_2 y + b_1 x + b_2 x)\right)$$

是一个约旦代数。它称为 f 的约化克利福德约旦代数（见 [McC04]）。

现在假设 $\mathcal{A}_{[n]}$ 是以 n 个变量为元的劳朗多项式环，而 $\mathcal{A}_{[n]}^m$ 是以 $v_1, \ldots, v_m$ 为基的自由 $\mathcal{A}_{[n]}$-模。固定 $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathbb{Z}^n$, $m \geq 2$,

使得对于 $i \neq j$, $\tau_1 = 0$ 且 $\tau_i \not\equiv \tau_j$（模 $2\mathbb{Z}^n$）。定义 h: $\mathcal{A}_{[n]}^m \times \mathcal{A}_{[n]}^m \to \mathcal{A}_{[n]}$ 为

$$h\left(\sum_{i=1}^m a_i v_i, \sum_{i=1}^m b_i v_i\right) = \sum_{i=1}^m a_i b_i x^{\tau_i}, \tag{5.7}$$

于是，RedCliff(h) 具有如下 Λ-分次：

$$\deg(x^\lambda, 0, 0) = \deg(0, x^\lambda, 0) = 2\lambda \qquad \text{and} \qquad \deg(0, 0, x^\lambda v_i) = 2\lambda + \tau_i, \tag{5.8}$$

其中 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ 和 $1 \leq i \leq m$ （见 [AG01]）。

引理 5.3.6. 设 h: $\mathcal{A}_{[n]}^m \times \mathcal{A}_{[n]}^m \to \mathcal{A}_{[n]}$ 如 (5.7) 所示。则 RedCliff(h) 存在一个预切瓦莱对合。

证明. 设 τ: RedCliff(h) →RedCliff(h) 是由下式定义的线性映射

$$(x^\lambda, 0, 0) \mapsto (x^{-\lambda}, 0, 0), \quad (0, x^\lambda, 0) \mapsto (0, x^{-\lambda}, 0), \quad (0, 0, x^\lambda v_i) \mapsto (0, 0, x^{-\lambda-\tau_i} v_i),$$

对于 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ 和 $1 \leq i \leq m$。显然，对所有 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, τ(RedCliff(h)$^\lambda$) = RedCliff(h)$^{-\lambda}$。容易验证 τ 是 RedCliff(h) 的自同构。因此, τ 是 RedCliff(h) 的预切瓦莱对合。□

设 $\mathcal{J} = H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$，其中 $(\mathcal{A}, \sigma)$ 如引理 5.3.5(ii) 所述；或者设 $\mathcal{J}$ = RedCliff(h)，其中 h: $\mathcal{A}_{[n]}^m \times \mathcal{A}_{[n]}^m \to \mathcal{A}_{[n]}$ 由 (5.7) 给出。两种情况下，$\mathcal{J}$ 都有一组正交幂等元 $\mathcal{I} = \{e_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$，其和为 1。对于 $H_\ell(\mathcal{A}, \sigma)$, $\mathcal{I}$ 的元素是对角矩阵单位；对于 RedCliff(h)，则为 (1, 0, 0)、(0, 1, 0)。因此, $\mathcal{I}$确定了一个 Peirce 分解$\mathcal{J} = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq \ell} \mathcal{J}_{ij}$，其中

$$\mathcal{J}_{ii} = \{x \in \mathcal{J} \mid e_i \cdot x = x\}, \quad 1 \leq i \leq \ell,$$

and

$$\mathcal{J}_{ij} = \{x \in \mathcal{J} \mid e_i \cdot x = e_j \cdot x = \frac{1}{2}x\}, \quad 1 \leq i \neq j \leq \ell.$$

此分解导出 $\mathcal{L} =$ TKK($\mathcal{J}$) 的一个 Q-分次，使得

$$\mathcal{L}_{\epsilon_i + \epsilon_j} = \mathcal{J}_{ij}, \quad \mathcal{L}_{-\epsilon_i - \epsilon_j} = \overline{\mathcal{J}_{ij}}, \quad 1 \leq i \leq j \leq \ell. \tag{5.9}$$

考虑 Λ-分次 (5.4)，则 $\mathcal{L}$ 是 $Q \times \Lambda$-分次的（[AG01，注 4.88]）。事实上, $\mathcal{L}$ = TKK($\mathcal{J}$) 是一个类型为 $C_\ell(\ell \geq 2)$ 的无中心 Lie Λ-环面，见 [AG01，注 4.89]。此外，B. Allison 和 Y. Gao 证明了以下关于类型 $C_\ell(\ell \geq 2)$ 的坐标化定理。

定理 5.3.7。 [AG01，定理 4.87] 任意无中心的类型为C_ℓ的李 Λ-环面 $\ell \geq 2$ 均分次同构于 TKK($\mathcal{J}$)，其中以下条件之一成立：

(i) $\mathcal{J} = H_\ell(\mathbb{K}_{\mathbf{q}}, \sigma_{\mathbf{e}})$，其中 $(\mathbb{K}_{\mathbf{q}}, \sigma_{\mathbf{e}})$ 是量子环面，其反对合由满足注 4.1.3 条件的某些 e 和 q 确定。

(ii) $\ell = 3$、$n \geq 3$ 和 $\mathcal{J} = H_\ell(\mathbb{O}, \sigma)$，其中 $(\mathbb{O}, \sigma)$ 是带有标准反对合的八元数环面。

(iii) $\ell = 2$ 和 $\mathcal{J} = \mathrm{RedCliff}(h)$，其中 $h:\ \mathcal{A}^m_{[n]} \times \mathcal{A}^m_{[n]} \to \mathcal{A}_{[n]}$ 由 5.7 定义。

命题 5.3.8. 设 $\mathcal{L}$ 是类型为 $C_\ell, \ell \geq 2$ 的无中心的 Λ-环面。则 $\mathcal{L}$具有切瓦利对合。

证明. 我们知道，$\mathcal{L}$ 与 $\mathrm{TKK}(\mathcal{J})$ 分次同构，其中 $\mathcal{J}$如定理 5.3.7 的 (i)、(ii) 或 (iii) 部分所述。在每种情形下，$\mathcal{J}$都有预切瓦莱对合，见引理 5.3.5(ii) 和 5.3.6。于是，由命题 5.3.2，$\mathrm{TKK}(\mathcal{J})$ 有预切瓦莱对合 $\bar{\tau}$，其定义见 (5.5)。因此，为证明我们的断言，只需证明 $\bar{\tau}$在 $\mathrm{TKK}(\mathcal{J})^0_0 = \sum_{\alpha\in\Delta^\times、\ \mu\in\Lambda}[\mathrm{TKK}(\mathcal{J})^\mu_\alpha、\ \mathrm{TKK}(\mathcal{J})^{-\mu}_{-\alpha}]$ $\subset \mathrm{Instrl}(\mathcal{J})$ 上的作用为 $-\mathrm{id}$。注意，对于 $\alpha \in \Delta^\times$，$(\mathrm{TKK}(\mathcal{J})_\alpha) = \mathrm{TKK}(\mathcal{J})_{-\alpha}$，因为 $\bar{\tau}(\mathcal{J}_{ij}) = \overline{\mathcal{J}_{ij}}$，见 (5.9)。因此我们有 $\mathrm{TKK}(\mathcal{J})^0_0 = \sum_{\alpha\in\Delta^\times, \mu\in\Lambda} \mathbb{K}[x^\mu_\alpha, \bar{\tau}(x^\mu_\alpha)],$，其中 $0 \neq x^\mu_\alpha \in \mathrm{TKK}(\mathcal{J})^\mu_\alpha$。由于 $\bar{\tau}$的阶为 2，得到 $\bar{\tau}([x^\mu_\alpha, \bar{\tau}(x^\mu_\alpha)]) = -[x^\mu_\alpha, \bar{\tau}(x^\mu_\alpha)]$。所以 $\bar{\tau}|_{\mathrm{TKK}(\mathcal{J})^0_0} = -\mathrm{id}$，证明完毕。□

5.4. 类型为 $\mathrm{B}_\ell(\ell \geq 3)$、$\mathrm{F}_4$ 和 G_2的无中心李环面。广义蒂茨构造可用于构造类型为 $B_\ell(\ell \geq 3)$、F_4 和 G_2的无中心李环面。这里，我们先回顾广义蒂茨构造（参见[Sch66，第120–127] 页，以及 [Jac71, §10]，其中列有该构造的一些参考文献）。然后我们分为三部分，分别讨论这几种类型。

设 $\mathcal{A}$是一个定义在 $\mathbb{K}$上的含幺交换结合代数。设 $\mathcal{X}$是一个定义在 $\mathcal{A}$上的含幺代数。称一个 $\mathcal{A}$-线性映射 $T: \mathcal{X} \to \mathcal{A}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的归一化迹，若 $T(1) = 1$ 并且

$$T(xx') = T(x'x), \qquad T((xx')x'') = T(x(x'x''))$$

对于 x、x'、$x'' \in \mathcal{X}$。我们用同一个符号 T表示不同代数上的归一化迹。若 T 是 $\mathcal{X}$上的归一化迹，则可以写成

$$\mathcal{X} = \mathcal{A}1 \oplus \mathcal{X}_0$$

其中 $\mathcal{X}_0 = \{x \in \mathcal{X} \mid T(x) = 0\}$。此外，对于 x、$x' \in \mathcal{X}$，有

$$xx' = T(xx')1 + x * x'$$

其中，$x * x'$ 表示 xx' 到 $\mathcal{X}_0$的投影。下文中，我们用 $\mathrm{Der}^0_A(\mathcal{X})$ 表示将 $\mathcal{X}_0$ 映至 $\mathcal{X}_0$的 $\mathcal{X}$ 的 $\mathcal{A}$-导子构成的李子代数。

5.4.1.（广义蒂茨构造）设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的含幺交换结合代数，$\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 分别是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 上带归一化迹的含幺代数。再设 $\mathcal{D}(\mathcal{X})$、$\mathcal{D}(\mathcal{Y})$ 分别是 $\mathrm{Der}^0_A(\mathcal{X})$ 和 $\mathrm{Der}^0_B(\mathcal{Y})$ 的子代数，并假定存在 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$-双线性的斜对称

映射 $(x,x')\to D_{x,x'}$ 和 $(y,y')\to D_{y,y'}$，分别将 $\mathcal{X}_0\times\mathcal{X}_0$ 映入 $\mathcal{D}(\mathcal{X})$、将 $\mathcal{Y}_0\times\mathcal{Y}_0$ 映入$\mathcal{D}(\mathcal{Y})$，并满足

$$[D,D_{x,x'}]=D_{Dx,x'}+D_{x,Dx'},\qquad [E,D_{y,y'}]=D_{Ey,y'}+D_{y,Ey'}$$

对于 $D\in\mathcal{D}(\mathcal{X})$ $x,x'\in\mathcal{X}_0, E\in\mathcal{D}(\mathcal{Y})$ $y,y'\in\mathcal{Y}_0$。设

$$\mathcal{T}(\mathcal{X}/\mathcal{A},\mathcal{Y}/\mathcal{B}):=(\mathcal{D}(\mathcal{X})\otimes\mathcal{B})\oplus(\mathcal{X}_0\otimes\mathcal{Y}_0)\oplus(\mathcal{A}\otimes\mathcal{D}(\mathcal{Y}))$$

作为一个 $\mathbb{K}$-向量空间。那么 $\mathcal{T}(\mathcal{X}/A,\mathcal{Y}/\mathcal{B})$ 是一个定义在 $\mathbb{K}$ 上的代数，其反交换乘法定义为

$$\begin{gathered}
[D\otimes b,D'\otimes b']=[D,D']\otimes bb',\\
[a\otimes E,a'\otimes E']=aa'\otimes[E,E'],\\
[D\otimes b,a\otimes E]=0,\\
[D\otimes b,x\otimes y]=Dx\otimes by=-[x\otimes y,D\otimes b],\\
[a\otimes E,x\otimes y]=ax\otimes Ey=-[x\otimes y,a\otimes E],\\
[x\otimes y,x'\otimes y\prime]=D_{x,x'}\otimes T(yy')+(x*x')\otimes(y*y')+T(xx')\otimes D_{y,y'}
\end{gathered}$$

对于 $D,D'\in\mathcal{D}(\mathcal{X})$ $b,b'\in\mathcal{B},a,a'\in\mathcal{A},E,E'\in\mathcal{D}(\mathcal{Y})$ $x,x'\in\mathcal{X}_0,y,y'\in\mathcal{Y}_0$。如果恰当地选取 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$，那么 $\mathcal{T}(\mathcal{X}/\mathcal{A},\mathcal{Y}/\mathcal{B})$ 将成为一个李代数，参见 BZ96，命题 3.9]。

5.4.1. $\mathrm{B}_\ell(\ell\geq 3)$ 型。假设

$$\Delta=\{0\}\cup\{\pm\epsilon_i\mid 1\leq i\leq\ell\}\cup\{\pm(\epsilon_i\pm\epsilon_j)\mid 1\leq i<j\leq\ell\}$$

是 B_ℓ 型有限根系，其中 $\Delta_{sh}=\{\pm\epsilon_i\mid 1\leq i\leq\ell\}$，且 $\Delta_{lg}=\{\pm(\epsilon_i\pm\epsilon_j)\mid 1\leq i<j\leq\ell\}$ 分别为短根和长根，并令 $Q=Q(\Delta)$ 为 Δ 的根格。

设 $\mathbb{V}$ 是 $\mathbb{K}$ 上一个 $(2\ell+1)$ 维向量空间，其基为 $v_1,\dots,v_{2\ell+1}$，并设 f 是定义在 $\mathbb{V}$ 上的对称双线性型，其定义为

$$f(v_i,v_j)=\begin{cases}1 & \text{if } 1\leq i\leq\ell, j=\ell+i\\ 1 & \text{if } i=j=2\ell+1\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

现在令 $\mathfrak{g}$ 为相对于 f 斜对称的 $\mathbb{V}$ 上端同态所构成的李代数。于是 $\mathfrak{g}$ 是类型为 B_ℓ 的有限维单李代数，其嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 由 $\mathfrak{g}$ 中相对于基 $v_1,\dots,v_{2\ell+1}$ 为对角的元素构成。$\mathfrak{h}$-模 $\mathbb{V}$ 的权集为

$$\{0\}\cup\Delta_{sh}=\{0\}\cup\{\pm\epsilon_i\mid 1\leq i\leq\ell\}$$

其权空间为

$$\mathbb{V}_\alpha = \begin{cases} \mathbb{K}v_i & \text{if } \alpha = \epsilon_i \\ \mathbb{K}v_{\ell+i} & \text{if } \alpha = -\epsilon_i \\ \mathbb{K}v_{2\ell+1} & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

接下来，令 $\mathcal{X} = \mathsf{Cliff}(f) = \mathbb{K}1 \oplus \mathbb{V}$ 为 f 上的 Clifford 约旦代数，参见定义 4.3.1。则 $\mathcal{X}$ 有唯一的归一化迹 T，使得 $\mathcal{X}_0 = \mathbb{V}$，且 $\mathcal{X}_0$ 上的乘积 $*$ 为 0。现在令 $D_{v,v'} = -[L_v, L_{v'}]$，其中 $v, v' \in \mathbb{V}$。这里 L_v 表示由 v 给出的左乘。于是可以将 $\mathfrak{g} = D_{\mathbb{V},\mathbb{V}}$ 视为，其中 $D_{\mathbb{V},\mathbb{V}}$ 是 $\mathbb{K}$ 张成的子空间，其基为 $D_{v,v'}$, $v, v' \in \mathbb{V}$。

接下来，假设 $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{[n]}$ 是由 n 个变量构成的劳朗多项式环，且 $\mathcal{W} = \mathcal{A}_{[n]}^{(m-1)}$ 是以 $w_2, \dots, w_m$ 为基的自由 $\mathcal{A}_{[n]}$-模。固定 $\tau_1, \dots, \tau_m \in \Lambda := \mathbb{Z}^n$, $m \geq 1$, 使得

$$\tau_1 = 0 \quad \text{and} \quad \tau_i \not\equiv \tau_j (\mathrm{mod}\ 2\mathbb{Z}^n) \quad \text{for} \quad i \neq j.$$

定义 $g : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{B}$ 如下

$$g\left(\sum_{i=2}^{m} a_i w_i, \sum_{i=2}^{m} b_i w_i\right) = \sum_{i=2}^{m} a_i b_i x^{\tau_i}. \tag{5.10}$$

设 $\mathcal{Y} = \mathsf{Cliff}(g) = \mathcal{B}1 \oplus \mathcal{W}$ 为 g 在 $\mathbb{K}$上的 Clifford 约旦代数，见定义 4.3.1。则 $\mathcal{Y}$ 有唯一的归一化迹 T，使得 $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{W}$，且 $\mathcal{Y}_0$ 上的乘积 $*$ 为 0。令 $D_{w,w'} = -[L_w, L_{w'}]$，其中 w、$w' \in \mathcal{W}$。

现在考虑

$$\mathcal{L} := \mathcal{T}(\mathrm{Cliff}(f)/\mathbb{K}, \mathrm{Cliff}(g)/\mathcal{B}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathbb{V} \otimes \mathcal{W}) \oplus D_{\mathcal{W},\mathcal{W}}.$$

则 $\mathcal{L}$ 关于 $\mathfrak{h}$有根空间分解 $\mathcal{L} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathcal{L}_\alpha$，其中

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathcal{B} & \text{if } \alpha \in \Delta_{lg} \\ \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathcal{B} + \mathbb{V}_\alpha \otimes \mathcal{W} & \text{if } \alpha \in \Delta_{sh} \\ \mathfrak{h} \otimes \mathcal{B} + \mathbb{V}_0 \otimes \mathcal{W} + D_{\mathcal{W},\mathcal{W}} & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

此外，$\mathcal{Y}$ =Cliff(g) 作为约旦代数具有如下 Λ-分次：

$$\deg(x^\lambda 1) = 2\lambda \qquad \text{and} \qquad \deg(x^\lambda w_i) = 2\lambda + \tau_i,$$

对于 $\lambda \in \Lambda$ 和 $2 \leq i \leq m$ （见 [AG01，命题 5.26]）。这使得 $\mathcal{L}$ 作为李代数具有如下 Λ-分次

$$\mathcal{L}^\lambda = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}^\lambda) \oplus (\mathbb{V} \otimes \mathcal{W}^\lambda) \oplus D^\lambda_{\mathcal{W},\mathcal{W}} \tag{5.11}$$

对于 $\lambda \in \Lambda$，其中 $\mathcal{B}^\lambda = \mathcal{Y}^\lambda \cap \mathcal{B}$、$\mathcal{W}^\lambda = \mathcal{Y}^\lambda \cap \mathcal{W}$和 $D^\lambda_{\mathcal{W},\mathcal{W}} = \sum_{\mu+\nu=\lambda} [L_{\mathcal{W}^\mu}, L_{\mathcal{W}^\nu}]$。那么 $\mathcal{L}$ 是 $Q \times \Lambda$-分次的。现在我们可以陈述由 B. Allison 和 Y. Gao 提出的 $B_\ell(\ell \geq 3)$ 型坐标化定理。

定理 5.4.2. [AG01，定理 5.29] 任意无中心的 Λ-环面型 B_ℓ，$\ell \geq 3$ 都与 $\mathcal{T}(\mathrm{Cliff}(f)/\mathbb{K}, \mathrm{Cliff}(g)/\mathcal{A}_{[n]})$ 分次同构，其中 f 是 $\mathbb{K}$ 上的 $(2\ell+1)$ 维向量空间 $\mathbb{V}$ 上的非退化对称双线性型，且 $g\colon \mathcal{A}_{[n]}^{(m-1)} \times \mathcal{A}_{[n]}^{(m-1)} \to \mathcal{A}_{[n]}$ 由 (5.10) 定义。

命题 5.4.3. 假设 $\mathcal{L}$ 是一个类型为 $B_\ell, \ell \geq 3$ 的无中心 Λ-环面。那么 $\mathcal{L}$ 存在一个切瓦利对合。

证明. 根据定理 5.4.2，只需证明存在一个切瓦利对合，使得

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}(\mathrm{Cliff}(f)/\mathbb{K}, \mathrm{Cliff}(g)/\mathcal{A}_{[n]}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_{[n]}) \oplus (\mathbb{V} \otimes \mathcal{W}) \oplus D_{\mathcal{W},\mathcal{W}}$$

其中 $\mathcal{W} = \mathcal{A}_{[n]}^{(m-1)}$ 和 $f\colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $g\colon \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{A}_{[n]}$ 与定理 5.4.2 中的定义相同。

令 τ : Cliff(g) →Cliff(g) 为由下式给出的线性映射

$$x^\lambda 1 \mapsto x^{-\lambda} 1, \qquad x^\lambda w_i \mapsto x^{-\lambda-\tau_i} w_i$$

对于 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ 和 $2 \leq i \leq m$。容易看出，τ 是 Cliff(g) 的一个预切瓦莱对合。

接下来定义 $\bar{\tau}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$，如下:

$$\bar{\tau}(y \otimes x^\lambda + v \otimes w + D_{w',w''}) = \theta(y) \otimes x^{-\lambda} + \overline{v} \otimes \tau(w) + D_{\tau(w'),\tau(w'')}$$

对于 $y \in \mathfrak{g}$、$\lambda \in \Lambda$、$v \in \mathbb{V}$、w、w'、$w'' \in \mathcal{W}$，其中 $^-\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 是由下式定义的周期为 2 的线性映射

$$\overline{v_i} = v_{l+i}, \ \ i = 1, \ldots, \ell, \qquad \overline{v_{2\ell+1}} = v_{2\ell+1},$$

且 θ 是 $\mathfrak{g}$ 的切瓦利对合。容易验证，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$ 的李代数对合。再考虑 $\mathcal{L}$ 的 Λ-分次 (5.11)，显然对于 $\lambda \in \Lambda$，有 $\bar{\tau}(\mathcal{L}^\lambda) = \mathcal{L}^{-\lambda}$。因此，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$ 上的预切瓦莱对合。

最后，注意 $\mathcal{L}_0^0 = \mathfrak{h} \otimes 1 \oplus D_{\mathcal{W},\mathcal{W}}^0$，其中 $D_{\mathcal{W},\mathcal{W}}^0 = \sum_{\mu \in \Lambda} [L_{\mathcal{W}^\mu}, L_{\mathcal{W}^{-\mu}}]$。于是显然 $\bar{\tau}|_{\mathcal{L}_0^0} = -\mathrm{id}$。因此 $\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$ 的切瓦利对合，证明至此完成。□

5.4.2. F_4型。考虑类型为 F_4的根系 $\Delta = \{0\} \cup \Delta_{sh} \cup \Delta_{lg}$，其中 Δ_{sh} 和 Δ_{lg} 分别为短根和长根，并令 $Q = Q(\Delta)$为 Δ的根格。

令 $\mathbb{J}$为域 $\mathbb{K}$上的阿尔伯特代数，即 $\mathbb{K}$上的 27 维例外单约旦代数，并令 $\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathbb{J})$。则已知 $\mathfrak{g}$ 是 F_4型的有限维单李代数。现在令 T 为 $\mathbb{J}$ 上的通常归一化迹，并且对于 x、$x' \in \mathbb{J}_0$，令 $D_{x,\,x'} = [L_x, L_{x'}]$。于是有 $\mathfrak{g} = D_{\mathbb{J}_0,\,\mathbb{J}_0}$（关于这些事实，参见 [Jac71]和 [Jac68，第 IX 章] ）。

接下来，我们需要根据 [BGKN95]回顾一些替代代数的定义（另见 [AABGP97，例 III.5.5]）。假设 $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{[n]}$ 是 n 个变量的劳朗多项式环。此外，对于满足 $p \leq n$的 $1 \leq p \leq 3$，令

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_{p-1} \oplus t_p \mathcal{A}_{p-1}$$

是由 $\mathcal{A}_{p-1}$ 通过凯莱-迪克森过程并结合 $t_p^2 = x_p$得到的代数。我们还令 T 为 $\mathcal{A}_p$上的归一化迹。注意，最后一个代数$\mathcal{A}_3$ 是八元数环面，见例 4.2.1。

接下来考虑

$$\mathcal{L} := \mathcal{T}(\mathbb{J}/\mathbb{K}, \mathcal{C}/\mathcal{B}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathbb{J}_0 \otimes \mathcal{C}_0) \oplus D_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0}$$

其中 $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{[n]}$、$\mathcal{C} = \mathcal{A}_p$ 对于某个 $0 \leq p \leq 3$ 和 $D_{\mathcal{C}_0,\ \mathcal{C}_0}$ 是内导子的 $\mathbb{K}$-张成空间

$$D_{y,y'} = \frac{1}{4}(L_{[y,y']} - R_{[y,y']} - 3[L_y, R_{y'}])$$

的 $\mathcal{C}$，对于 y、$y' \in \mathcal{C}_0$。令 $\Lambda = \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\lambda_n$，其中 λ_1、.....、λ_n 是 Λ的标准基。则 $\mathcal{L}$ 是如下的 $Q \times \Lambda$-分次李代数：令$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$的嘉当子代数。首先注意，$\mathbb{J}_0$ 是一个不可约的 $\mathfrak{g}$-模[Jac71，第 98] 页，其权集为 $\{0\} \cup \Delta_{sh}$，并且

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{J}_0)_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \in \Delta_{sh} \\ 2 & \text{if } \alpha = 0 \end{cases}$$

其中 $(\mathbb{J}_0)_\alpha$ 是对应于 α [Jac71, §5, §6] 的 $\mathbb{J}_0$ 权空间。于是，$\mathcal{L}$ 关于 $\mathfrak{h}$具有根空间分解 $\mathcal{L} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathcal{L}_\alpha$，其中

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathcal{B} & \text{if } \alpha \in \Delta_{lg} \\ \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathcal{B} + (\mathbb{J}_0)_\alpha \otimes \mathcal{C}_0 & \text{if } \alpha \in \Delta_{sh} \\ \mathfrak{h} \otimes \mathcal{B} + (\mathbb{J}_0)_0 \otimes \mathcal{C}_0 + D_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0} & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

代数 $\mathcal{C}$ 具有唯一的 Λ-分次，使得

$$\deg(t_i) = \lambda_i, 1 \leq i \leq p, \qquad \text{and} \qquad \deg(x_i) = \lambda_i, p+1 \leq i \leq n,$$

参见 [AG01，命题 5.26]。这使得 $\mathcal{L}$ 成为具有如下结构的 Λ-分次李代数：

$$\mathcal{L}^\lambda = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}^\lambda) \oplus (\mathbb{J}_0 \otimes \mathcal{C}_0^\lambda) \oplus D^\lambda_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0} \tag{5.12}$$

对于 $\lambda \in \Lambda$，其中 $\mathcal{B}^\lambda = \mathcal{C}^\lambda \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_0^\lambda = \mathcal{C}^\lambda \cap \mathcal{C}_0$和 $D^\lambda_{\mathcal{C}_0,\ \mathcal{C}_0} = \sum_{\mu+\nu=\lambda} D_{\mathcal{C}_0^\mu,\ \mathcal{C}_0^\nu}$。现在我们可以陈述类型 F_4 的坐标化定理了。

定理 5.4.4. [AG01，定理 5.50] 任何类型为 F_4 的无中心李 Λ-环面都与 $\mathcal{T}(\mathbb{J}/\mathbb{K}, \mathcal{C}/\mathcal{A}_{[n]})$ 分次同构，其中 $\mathbb{J}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的阿尔伯特代数，且对于某个 $0 \leq p \leq 3$, 有 $\mathcal{C} = \mathcal{A}_p$。

命题 5.4.5。假设 $\mathcal{L}$ 是一个类型为 F_4 的无中心 Λ-环面。那么 $\mathcal{L}$ 存在切瓦利对合。

证明。根据定理 5.4.4，我们可以假设

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}(\mathbb{J}/\mathbb{K}, \mathcal{C}/\mathcal{A}_{[n]}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_{[n]}) \oplus (\mathbb{J}_0 \otimes \mathcal{C}_0) \oplus D_{\mathcal{C}_0,\mathcal{C}_0}$$

其中 $\mathbb{J}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的阿尔伯特代数，且 $\mathcal{C} = \mathcal{A}_p$ 对某个 $0 \le p \le 3$成立。

令 $\tau : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p$ 为如下定义的线性映射：

$$t_i \mapsto t_i^{-1}, 1 \le i \le p, \qquad \text{and} \qquad x_i \mapsto x_i^{-1}, p+1 \le i \le n.$$

结合 Λ上的 $\mathcal{A}_p$ -分次的定义方式可知，τ 是 $\mathcal{A}_p$ 的预切瓦莱对合（关于 $\mathcal{A}_3$，见命题 4.2.4）。

接下来，固定 $\mathbb{J}_0$的一组基 $\{a_1, a_2, a_\alpha \mid a_1, a_2 \in (\mathbb{J}_0)_0, a_\alpha \in (\mathbb{J}_0)_\alpha, \alpha \in \Delta_{sh}\}$，并令 $^-: \mathbb{J}_0 \to \mathbb{J}_0$ 为满足下述条件的周期为 2 的线性映射：

$$\overline{a_i} = a_i, i = 1, 2, \qquad \overline{a_\alpha} = a_{-\alpha}.$$

然后定义 $\bar{\tau} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 如下：

$$\bar{\tau}(y \otimes x + a \otimes c + D_{c',c''}) = \theta(y) \otimes \tau(x) + \overline{a} \otimes \tau(c) + D_{\tau(c'),\tau(c'')}$$

对于 $y \in \mathfrak{g}, x \in \mathcal{A}_{[n]}, a \in \mathbb{J}_0, c, c', c'' \in \mathcal{C}_0$，其中 θ是 $\mathfrak{g}$的切瓦利对合。直接可验证，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$的李代数对合。再考虑 $\mathcal{L}$的 Λ-分次 (5.12)，显然有 $\bar{\tau}(\mathcal{L}^\lambda) = \mathcal{L}^{-\lambda}$，其中 $\lambda \in \Lambda$。因此，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$上的预切瓦莱对合。

最后请注意，$\mathcal{L}_0^0 = \mathfrak{h} \otimes 1 \oplus D^0_{\mathcal{C}_0,\ \mathcal{C}_0}$。但是 $D^0_{\mathcal{C}_0,\ \mathcal{C}_0} = \{0\}$，参见 [AABGP97，命题 III.5.35 (d)]。显然，$\bar{\tau}_{|\mathcal{L}_0^0} = {}^-\mathrm{id}$。因此，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$ 的切瓦利对合，由此完成证明。□

5.4.3. $\mathbf{G_2}$型。假设 $\Delta = \{0\} \cup \Delta_{sh} \cup \Delta_{lg}$ 是 G_2 型有限根系，其中 Δ_{sh} 和 Δ_{lg} 分别为短根和长根，并令$Q = Q(\Delta)$为 Δ的根格。

设 $\mathbb{A}$ 为 $\mathbb{K}$上的凯莱代数，即 $\mathbb{K}$上的 8 维单非结合替代代数，并令 $\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathbb{A})$。已知 $\mathfrak{g}$ 是 G_2型有限维单李代数。现在令 T 为 $\mathbb{A}$ 上的通常归一化迹，并且对于 x、$x' \in \mathbb{J}_0$，令

$$D_{x,x'} = \frac{1}{4}(L_{[x,x']} - R_{[x,x']} - 3[L_x, R_{x'}]).$$

于是有$\mathfrak{g} = D_{\mathbb{A}_0,\ \mathbb{A}_0}$（关于这些事实，参见 [Jac71] 和 [Sch66，《第三章》]）。

接下来我们回顾 $\mathcal{J}_p$ 在 $0 \le p \le 3$ 且满足$p \le n$ 时的 Jordan 代数定义（参见 [AABGP97，例 III.5.10]）。令 $\mathcal{J}_0 = \mathcal{A}_{[n]}$ 为变量 $x_1,\dots,x_n$的劳朗多项式代数。令 $\mathcal{J}_1$为以 t_1 为生成元、满足关系 $t_1^3 = x_1$的 $\mathcal{A}_{[n]}$ 上的交换结合代数；令 $\mathcal{J}_2$ 为由t_1、t_2生成、满足关系 $t_1^3 = x_1$、$t_2^3 = x_2$、$t_1 t_2 = e^{2\pi i/3} t_2 t_1$ 的 $\mathcal{A}_{[n]}$ 上的结合代数的加代数。现在令

$$\mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_2 \oplus \mathcal{J}_2 \cdot t_3 \oplus \mathcal{J}_2 \cdot t_3^2$$

为通过 Tits 第一约旦代数构造 [Jac68，第 IX 章]，由 $\mathcal{J}_2$ 得到的约旦代数，其中 $t_3^3 = x_3$。我们还令 T 为 $\mathcal{J}_p$上的归一化迹。需要指出的是，最后一个代数 $\mathcal{J}_3$ 是阿尔伯特环面，参见例 4.3.2(iv)。

接下来考虑

$$\mathcal{L} := \mathcal{T}(\mathbb{A}/\mathbb{K}, \mathcal{J}/\mathcal{B}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathbb{A}_0 \otimes \mathcal{J}_0) \oplus D_{\mathcal{J}_0,\mathcal{J}_0}$$

其中，对于某些 $0 \leq p \leq 3$ 和 $D_{\mathcal{J}_0,\ \mathcal{J}_0}$ 是内导子的 $\mathbb{K}$-张成空间 $D_{y,\ y'} = [L_y, L_{y'}]$ 属于 $\mathcal{J}$，其中 $y,\ y' \in \mathcal{J}_0$。令 $\Lambda = \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\lambda_n$，其中 λ_1，……，λ_n 是 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基。于是，$\mathcal{L}$ 是如下的 $Q \times \Lambda$-分次李代数：令 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数。首先注意到，$\mathbb{A}_0$ 是一个不可约的 $\mathfrak{g}$-模 [Jac71，命题 4]，其权集为 $\{0\} \cup \Delta_{sh}$，且对于所有 $\alpha \in \{0\} \cup \Delta_{sh}$，$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{A}_0)_\alpha = 1$，其中 $(\mathbb{A}_0)_\alpha$ 是 $\mathbb{A}_0$ 中对应于 α [Jac71，§2] 的权空间。于是，关于 $\mathfrak{h}$，$\mathcal{L}$ 具有根空间分解 $\mathcal{L} = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathcal{L}_\alpha$，其中

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{cases} \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathcal{B} & \text{if } \alpha \in \Delta_{lg} \\ \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathcal{B} + (\mathbb{A}_0)_\alpha \otimes \mathcal{J}_0 & \text{if } \alpha \in \Delta_{sh} \\ \mathfrak{h} \otimes \mathcal{B} + (\mathbb{A}_0)_0 \otimes \mathcal{J}_0 + D_{\mathcal{J}_0,\mathcal{J}_0} & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

代数 $\mathcal{J}$ 具有唯一的 Λ-分次，使得

$$\deg(t_i) = \lambda_i, 1 \leq i \leq p, \qquad \text{and} \qquad \deg(x_i) = \lambda_i, p+1 \leq i \leq n,$$

参见 [AG01，命题 5.58]。这给出了李代数的 $\mathcal{L}$ a Λ-分次，其中

$$\mathcal{L}^\lambda = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{B}^\lambda) \oplus (\mathbb{A}_0 \otimes \mathcal{J}_0^\lambda) \oplus D^\lambda_{\mathcal{J}_0,\mathcal{J}_0} \tag{5.13}$$

对于 $\lambda \in \Lambda$，其中 $\mathcal{B}^\lambda = \mathcal{J}^\lambda \cap \mathcal{B}$、$\mathcal{J}_0^\lambda = \mathcal{J}^\lambda \cap \mathcal{J}_0$ 和 $D^\lambda_{\mathcal{J}_0,\ \mathcal{J}_0} = \sum_{\mu+\nu=\lambda}[L_{\mathcal{J}_0^\mu}, L_{\mathcal{J}_0^\nu}]$。于是 $\mathcal{L}$ 是 $Q\times\Lambda$-分次的。现在可以陈述类型 G_2 的坐标化定理，该定理由 B. Allison 和 Y. Gao 提出。

定理 5.4.6。[AG01，定理 5.63]。任意无中心的 Λ-环面李代数，若其类型为 G_2，则与 $\mathcal{T}(\mathbb{A}/\mathbb{K}, \mathcal{J}/\mathcal{A}_{[n]})$ 分次同构，其中 $\mathbb{A}$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的凯莱代数，且对于某个 $0 \leq p \leq 3$，$\mathcal{J} = \mathcal{J}_p$。

命题 5.4.7。假设 $\mathcal{L}$ 是一个类型为 G_2 的无中心 Λ-环面李代数。那么 $\mathcal{L}$ 具有一个切瓦利对合。

证明。根据定理 5.4.6，只需证明存在一个切瓦利对合，适用于

$$\mathcal{L} = \mathcal{T}(\mathbb{A}/\mathbb{K}, \mathcal{J}/\mathcal{A}_{[n]}) = (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_{[n]}) \oplus (\mathbb{A}_0 \otimes \mathcal{J}_0) \oplus D_{\mathcal{J}_0,\mathcal{J}_0}$$

其中 $\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的凯莱代数，且 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_p$ 满足某个 $0 \leq p \leq 3$。

令 $\tau : \mathcal{J}_p \to \mathcal{J}_p$ 为如下定义的线性映射

$$t_i \mapsto t_i^{-1}, 1 \leq i \leq p, \qquad \text{and} \qquad x_i \mapsto x_i^{-1}, p+1 \leq i \leq n.$$

现在很容易看出，τ 是 $\mathcal{J}_p$的预切瓦莱对合。

接下来，固定一组基 $\{a_\alpha \mid a_\alpha \in (\mathbb{A}_0)_\alpha, \alpha \in \{0\} \cup \Delta_{sh}\}$，用于 $\mathbb{A}_0$，并令$^-$: $\mathbb{A}_0 \to \mathbb{A}_0$ 为满足 $\overline{a_\alpha} = a_{-\alpha}$ 的周期为 2 的线性映射。然后定义 $\bar{\tau}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 如下:

$$\bar{\tau}(y \otimes x + a \otimes z + D_{z',z''}) = \theta(y) \otimes \tau(x) + \overline{a} \otimes \tau(z) + D_{\tau(z'),\tau(z'')}$$

对于 $y \in \mathfrak{g}, x \in \mathcal{A}_{[n]}, a \in \mathbb{A}_0, z, z', z'' \in \mathcal{J}_0$，其中 θ 是 $\mathfrak{g}$ 的切瓦利对合。容易验证，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$ 的李代数对合。再考虑 $\mathcal{L}$ 的 Λ-分次 (5.13)，显然对于 $\lambda \in \Lambda$, 有 $\bar{\tau}(\mathcal{L}^\lambda) = \mathcal{L}^{-\lambda}$。因此，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$ 上的预切瓦莱对合。

最后，注意到 $\mathcal{L}_0^0 = \mathfrak{h} \otimes 1 \oplus D^0_{\mathcal{J}_0,\ \mathcal{J}_0}$，但是 $D^0_{\mathcal{J}_0,\ \mathcal{J}_0} = \{0\}$，参见 [AABGP97，命题 III.5.22 (d)]。那么显然 $\bar{\tau}_{|\mathcal{L}_0^0} = -\mathrm{id}$。因此，$\bar{\tau}$ 是 $\mathcal{L}$ 的切瓦利对合，由此完成证明。□

6. 有限生成中心无 Lie 环面的切瓦利对合

本节讨论有限生成中心无 Lie 环面的切瓦利对合是否存在。根据定义 2.3.2，作为其中心上的模有限生成的无中心李环面称为有限生成中心无 Lie 环面。根据定理 2.3.4(b)，所有类型不同于 A_ℓ 的无中心李环面都是有限生成中心无 Lie 环面。此外，根据定理 [ABFP09，定理 3.3.1]（见下文定理 6.1.1），任意有限生成中心无 Lie 环面都是一个“多环代数”。因此，无中心李环面的切瓦利对合是否存在，归结为多环代数的切瓦利对合是否存在。

6.1. 多环 Lie $\mathbb{Z}^n$-环面。设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维单李代数，σ_1、……、σ_ν 是 $\mathfrak{g}$ 的互相交换的有限阶自同构，其周期分别为 m_1、……、m_ν。令 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$。设 $1 \le i \le \nu$ 的一个本原 m_i^{th} 次单位根为 ω_i。那么

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}^n} \mathfrak{g}^{\bar{\lambda}},$$

其中，对于 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu) \in \Lambda := \mathbb{Z}^\nu$，$\bar{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$，且 $\lambda_j := \lambda_j + m_j\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{m_j}$，以及

$$\mathfrak{g}^{\bar{\lambda}} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \sigma_j(x) = \omega_j^{\lambda_j} x \text{ for } 1 \le j \le \nu\}.$$

令 $\pi_{\bar{\lambda}}$: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^{\bar{\lambda}}$ 表示到 $\mathfrak{g}^\lambda$上的投影。令 $\mathcal{A} = \mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_\nu^{\pm 1}]$ 为 ν个变量的劳朗多项式代数，并赋予自然的Λ分次 $\mathcal{A} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{K} z^\lambda$、$z^\lambda = z_1^{\lambda_1}$、……、$z_\nu^{\lambda_\nu}$、$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu)$。

（i）子代数

$$M(\mathfrak{g}, \boldsymbol{\sigma}) := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \pi_{\bar{\lambda}}(\mathfrak{g}) \otimes z^\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} \mathfrak{g}^{\bar{\lambda}} \otimes z^\lambda \tag{6.1}$$

$L(\mathfrak{g}, \mathcal{A}) := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ 称为基于 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\mathfrak{g}$的 ν步多环代数。

(ii) 已知 $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{\sigma}}$ 包含一个子代数 $\mathfrak{h}'$，它是 $\mathfrak{g}$-ad-可对角化的，参见 [ABFP09, 注 3.2.2(ii)]。令 Δ' 为 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}'$的权集。令

$$\mathrm{LT}(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}') := \sum_{\lambda\in\Lambda,\alpha'\in\Delta'} \mathfrak{g}_{\alpha'}^{\bar{\lambda}}\otimes z^{\lambda},$$

其中 $\mathfrak{g}_{\alpha'}^{\bar{\lambda}}$ 是$\mathfrak{g}^{\lambda}$ 与 $\mathfrak{g}$的 α'-权空间的交，以上述 $\mathfrak{h}'$为准。因此，$\mathrm{LT}(\sigma,\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}')$是 $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$的一个子代数，带有上述相容的($\langle\Delta'\rangle\times\Lambda$)-分次。注意，作为 Λ-分次李代数，$\mathrm{LT}(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}')$ $= M(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma})$。

定理 6.1.1. [ABFP09，定理 3.3.1] 设 $E(\mathcal{L},D,\kappa)$是零度为 $\nu\geq 1$的 fgc 扩展仿射李代数，其中 $\mathcal{L}$ 是无中心李环面。那么$\mathcal{L}$与某个多环李代数 $LT(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}')$ $= M(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma})$双同构，其中$\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}'$，且满足 $\mathcal{L}_0^0\cong\mathfrak{h}'\otimes 1$。

6.2. 有限生成多环代数的切瓦利对合。我们讨论有限生成无中心李环面的切瓦利对合。下文中，对于 $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\dots,\sigma_\nu)$，我们记作 $\boldsymbol{\sigma}\tau=\tau\boldsymbol{\sigma}$，表示自同构 τ 与所有 σ_i 交换。

命题 6.2.1. 设 $\mathcal{L}=\mathrm{LT}(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}') = M(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma})$ 是一个有限生成无中心李环面。设 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个切瓦利对合，使得 $\tau\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\tau$，并且对于 $h'\in\mathfrak{h}'$，$\tau(h')=-h'$。假设 $\mathfrak{g}$ 有一个自同构 ψ 满足:

- $\psi(\mathfrak{g}^{\bar{\lambda}})\subseteq\mathfrak{g}^{-\bar{\lambda}}$, *for each* λ,
- $\psi_{|_{\mathfrak{h}'}}=id_{|_{\mathfrak{h}'}}$.

那么赋值 $\bar{\tau}_\psi:\ x\otimes a^{\lambda}\longmapsto\psi\tau(x)\otimes a^{-\lambda}$, $x\in\mathfrak{g}$, $\lambda\in\Lambda$ 定义了 $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$ 的一个预切瓦莱对合 $\bar{\tau}_\psi$，它限制为 $\mathcal{L}$ 的一个切瓦利对合。

证明。设 ψ 和 $\mathfrak{h}'$ 如陈述所述。我们有 $\mathcal{L}_0^0=\mathfrak{h}'\otimes 1$. 显然，$\bar{\tau}_\psi$ 是 $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$上的预切瓦莱对合。由于 τ与 $\boldsymbol{\sigma}$可交换，因此有$\tau(\pi_\lambda(\mathfrak{g}))=\pi_\lambda(\mathfrak{g})$，其中 $\lambda\in\Lambda$。结合 $\psi(\mathfrak{g}^{\lambda})\subseteq\mathfrak{g}^{-\lambda}$，得到

$$\bar{\tau}_\psi(\pi_\lambda(\mathfrak{g})\otimes a^{\lambda})=\psi\tau(\pi_\lambda(\mathfrak{g}))\otimes a^{-\lambda}=\psi(\pi_\lambda(\mathfrak{g}))\otimes a^{-\lambda}\subseteq\pi_{-\lambda}(\mathfrak{g})\otimes a^{-\lambda}.$$

因此，$\bar{\tau}_\psi$ 限制为 $\mathcal{L}$上的一个自同构，并满足 $\bar{\tau}_\psi(\mathcal{L}^{\lambda})\subseteq\mathcal{L}^{-\lambda}$. 此外，对于 $h'\in\mathfrak{h}'$，$\bar{\tau}_\psi(h'\otimes 1)=\psi(\tau(h'))\otimes 1=\psi(-h')\otimes 1=-h'\otimes 1$. 因此，$\bar{\tau}_\psi$ 是 $\mathcal{L}$的切瓦利对合。□

推论 6.2.2。设 $\mathcal{L}=\mathrm{LT}(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}')=M(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma})$ 是一个有限生成中心无李环面，其中所有 σ_i 均为图自同构。假设 $\mathfrak{g}$ 具有一个自同构ψ，满足:

- $\psi(\mathfrak{g}^{\bar{\lambda}})\subseteq\mathfrak{g}^{-\bar{\lambda}}$, *for each* λ,
- $\psi_{|_{\mathfrak{h}'}}=id_{|_{\mathfrak{h}'}}$.

Then $\mathcal{L}$ 配备了切瓦利对合。特别地，如果每个 σ_i 的阶为 1 或 2，那么该结论在 $\psi=\mathrm{id}$ 下成立。

证明。我们考虑一个包含 $\mathfrak{h}'$ 的嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$，以及一个关于 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 的切瓦利对合 τ。由于切瓦利对合与图自同构交换，我们有 $\tau\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\tau$。因此，该结论的第一部分由¯ ¯命题 6.2.1 得出。如果每个 σ_i 的阶为 1 或 2，那么对每个 λ 都有 $\lambda=-\lambda$，所以该结论的第二部分显然成立。□

注 6.2.3。我们讨论推论 6.2.2 中自同构 ψ 的存在性。正如该推论中所述，如果每个 σ_i 的阶为 1 或 2，那么 $\psi=\mathrm{id}$ 就可行。这已经涵盖了许多可能的情形。对于仅在类型 D_4 中出现的 3 阶图自同构，ψ 的构造见 [AFI22，推论 3.29]，应予以考虑。

下面的例子或许最容易说明，在 $\mathrm{LT}(\mathfrak{g},\boldsymbol{\sigma},\mathfrak{h}')$ 中出现的 $\mathfrak{g}^\sigma$ 的 ad-可对角化子代数 $\mathfrak{h}'$ 是如何发挥作用的。

例 6.2.4。设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$，其具有标准切瓦利基 $\{e,h,f\}$。考虑切瓦利对合 $\sigma \quad e\leftrightarrow -f \quad h\to -h$ $\mathfrak{g}^{\bar{0}}=\mathfrak{g}^\sigma=:$,。于是 ( ) $\mathbb{K}\ e-f$ $\mathfrak{g}^{\bar{1}}=\mathbb{K}h\oplus\mathbb{K}\ e+f$ $h'=i\ e-f\ /2$ $\mathfrak{h}'=\mathbb{K}h'$ h' 和 ( )。取 ( ) 和 。于是 ad 在 $\mathfrak{g}$ 上是半单的。事实上，如果 $y=e+f-ih$ 和 $z=e+f+ih$，那么 $[h',y]=-y,[h',z]=z$，因此我们得到特征子空间分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_{-1}$，其中 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}'$、$\mathfrak{g}_1=\mathbb{K}z$ 和 $\mathfrak{g}_{-1}=\mathbb{K}y$。现在我们有 $M(\mathfrak{g},\sigma)=(\mathfrak{g}^\sigma\otimes\mathbb{K}[z^{\pm2}])\oplus(\mathfrak{g}^{\bar{1}}\otimes z\mathbb{K}[z^{\pm2}])$ $=(\mathfrak{h}'\otimes\mathbb{K}[z^{\pm2}])\oplus((\mathbb{K}y\oplus\mathbb{K}z)\otimes z\mathbb{K}[z^{\pm2}])$。接下来，我们考虑切瓦利对合 τ：对于 $\mathfrak{g}$，有 $y\leftrightarrow -z,\ h'\to -h'$。我们有 $\tau\sigma=\sigma\tau$。于是，比例 6.2.1 适用于 $\psi=$id。

References

[AABGP97] B. Allison、S. Azam、S. Berman、Y. Gao 和 A. Pianzola，*Extended affine Lie algebras and their root systems*，《美国数学会回忆录》603（1997），122。[ABFP09] B. Allison、S. Berman、J. Faulkner 和 A. Pianzola，*Multiloop realization of extended affine Lie algebras and Lie tori*，《美国数学会汇刊》361（2009），第9期，4807–4842。[AF11] B. Allison 和 J. Faulkner，*Isotopy for extended affine Lie algebras and Lie tori*，《无限维李理论的发展与趋势》，2011年，第3–43页。[AFI22] S. Azam、A. Farahmand Parsa 和 M. Izadi Farhadi，*Integral structures in ex-tended affine Lie algebras*，代数杂志597（2022），116–161。[AG01] B. Allison 和 Y. Gao，*The root system and the core of an extended affine Liealgebra*，数学精选，新系列7（2001），第2期，149–212。[BGK96] S. Berman、Y. Gao 和 Y. S. Krylyuk，*Quantum tori and the structure of ellipticquasi-simple Lie algebras*，泛函分析杂志135（1996），第2期，339–389。[BGKN95] S. Berman、Y. Gao、Y. Krylyuk 和 E. Neher，*The alternative torus and thestructure of elliptic quasi-simple Lie algebras of type A_2*，《美国数学会汇刊》347（1995），第11期，4315–4363。[BM92] S. Berman 和 R. V. Moody，*Lie algebras graded by finite root systems and theintersection matrix algebras of Slodowy*，《数学发明》108（1992），第2期，323–347。

[BZ96] G. Benkart 和 E. Zelmanov, *Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras*, 《数学发明》126（1996），第1期，1–45。[ERM94] S. Eswara Rao 和 R. V. Moody, *Vertex representations for n-toroidal Lie algebras and a generalization of the Virasoro algebra*, 《数学物理通讯》159（1994），第2期，239–264。[Gao96] Y. Gao,
Involutive Lie algebras graded by finite root systems and compact formsof IM algebras, 《数学杂志》223（1996），第4期，651–672。[Gar78] H. Garland,
The arithmetic theory of loop algebras, 代数杂志53（1978），480–551。[Gar80] H. Garland, *The arithmetic theory of loop groups*, 《高等科学研究所数学出版物》52（1980），5–136。[Hum72] J. E. Humphreys,
Introduction to Lie algebras and representation theory, 第9卷，施普林格，纽约，纽约州，1972年。[Jac68] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*, 美国数学会学术出版物，第39卷，美国数学会（AMS），普罗维登斯，罗得岛州，1968年。[Jac71] N. Jacobson, *Exceptional Lie algebras*, 《纯粹与应用数学讲义》，第1卷。纽约：Marcel Dekker公司，125页，1971年。[Kos66] B. Kostant, *Groups over $\mathbb{Z}$*, 《纯粹数学研讨会论文集》第9卷，90–98页，1966年。[Kry00] Ya. Krylyuk,
On automorphisms and isomorphisms of quasi-simple Lie algebras, 《数学科学杂志》（纽约）100（2000），第1期，1944–2002。[McC04]K. McCrimmon,
A taste of Jordan algebras, Universitext, 纽约，纽约州：施普林格，2004年。[Mit85] D. Mitzman, *Integral bases for affine Lie algebras and their universal enveloping algebras*, 《当代数学》第40卷，美国数学会（AMS），普罗维登斯，罗得岛州，1985年。[Nao10] K. Naoi, *Multiloop Lie algebras and the construction of extended affine Lie algebras*, 代数杂志323（2010），第8期，2103–2129。[Neh04a] E. Neher,
Extended affine Lie algebras, 《加拿大皇家学会数学通讯》26（2004），第3期，90–96。[Neh04b] E. Neher, *Lie tori*, 《加拿大皇家学会数学通讯》26（2004），第3期，84–89。[Neh11] E. Neher,
Extended affine Lie algebras and other generalizations of affine Liealgebras – a survey, 《无限维李理论的发展与趋势》，2011年，第53–126页。[Sch66] R. D. Schafer,
An introduction to nonassociative algebras, 纯粹与应用数学丛书，第22卷。纽约和伦敦：学术出版社，166页，1966年。[Tit81] J. Tits, *Algèbres et groupes de kac-moody*, 《法兰西学院年鉴》81（1981），75–86。[Tit82] J. Tits,
Algèbres de kac-moody et groupes associés (suite), 《法兰西学院年鉴》82（1982），91–105。[Wei94] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, 剑桥高等数学研究丛书，第38卷，剑桥：剑桥大学出版社，1994年。[Yos00] Y. Yoshii,
Coordinate algebras of extended affine Lie algebras of type A_1, 代数杂志234（2000），第1期，128–168。[Yos02] Y. Yoshii,
Classification of division $\mathbb{Z}^n$-graded alternative algebras., 代数杂志256（2002），第1期，28–50。

[Yos06] Y. Yoshii, *Lie tori – a simple characterization of extended affine Lie algebras*, 数学科学研究所出版物 42（2006），第 3 期，739–762 页。[Yos08] Y.Yoshii, *Cayley polynomials*，代数与逻辑 47（2008），第 1 期，54–70 页。

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, P.O.Box: 81746-73441, Isfahan, Iran, and, School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O. Box: 19395-5746。

Email address: azam@ipm.ir, azam@sci.ui.ac.ir

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, Uni-versity of Isfahan, P.O.Box: 81746-73441, Isfahan, Iran.
Email address: m.izadi@ipm.ir