arXiv:2302.00449v1 [hep-th] 1 Feb 2023

杨代数对称性在量子色动力学中的应用

R. Kirschner[1]

莱比锡大学理论物理研究所，*PF 100 920，D-04009*
莱比锡，德国

摘要

我们回顾杨代数对称性在高能 QCD 现象学中的应用。我们重温高能 QCD 的一些基本事实，尤其是散射振幅的旋量螺旋度形式、深度非弹性散射结构函数的尺度演化方程，以及散射的高能渐近行为。作为研究工具，我们引入并在 $g\ell(n)$ 型杨代数框架下构造杨代数对称关联函数。我们介绍其在树级散射振幅及其迭代关系、部分子劈裂振幅与结构函数尺度演化方程的核，以及描述散射高能渐近行为的方程中的应用。

关键词： 非阿贝尔规范场论、量子色动力学、散射振幅、比约肯渐近行为、Regge 渐近行为、Yang-Baxter 关系、杨代数、杨代数对称关联函数。

目录

1 规范场论与量子可积系统 2

2 量子色动力学中的高能散射 3
2.1 散射振幅.3 2.2 比约肯渐近行为.6 2.3 Regge 渐近行为.10

3 杨ian代数对称性 15
3.1 单值矩阵算符和对称关联函数.15 3.2 YSC 构造方法.17 3.2.1 卷积方法.18 3.2.2 循环性.18 3.2.3 R 算子方法.19 3.3 杨-巴克斯特算子.19 3.4 螺旋度表示.21 3.5 YSC 构造示例.22 3.5.1 二点和三点.22

[1] E-MAIL:ROLAND.KIRSCHNER@ITP.UNI-LEIPZIG.DE

3.5.2 四点.23 3.5.3 交叉.26 3.6 由对称关联函数得到的积分算子.27 3.6.1 点置换算子.28 3.6.2 参数对置换算子.28 3.6.3 完整的杨-巴克斯特算子.29 3.6.4 交叉 YSC 的算子.29

4 应用于 散射振幅 3 **0**
4.1 三点 YSC 与三点振幅.30 4.2 卷积构造与 BCFW.31 4.3 四点 YSC 与 parton 树振幅.31

5 应用于 比约肯渐近行为 3 **2**
5.1 三点 YSC 与部分子劈裂振幅.32 5.2 四点 YSC 与 RLL 关系.34 5.3 四点 YSC 与位置空间中的演化核.35 5.4 四点 YSC 与动量空间中的演化核.38

6 在 Regge 渐近行为中的应用 **39**
6.1 三点 YSC 与三重Regge子顶点.39 6.2 因子化 R 算符与 BFKL 哈密顿量.40 6.3 四点 YSC 与 BFKL核的偶极子形式.41

7 结论 **42**

1 规范场论与量子可积系统

量子可积系统的历史始于用于展示基础物理的简单模型，例如自旋链 [1], 一维散射 [2], 二维晶格 [3]。在早期，量子场论的应用仅限于 $1+1$ 维中的特殊而复杂的模型。

首批基础性论文中确立的基本方法学概念——杨–巴克斯特关系、贝特拟设——得到了发展，并扩展为量子逆散射方法[4, 5, 6, 7, 8]。一个新的数学分支——量子代数——由此开启 [9, 10], ，并正蓬勃发展。

量子色动力学（QCD）如今已被确立为描述强子相互作用的规范场论，其基础概念包括非阿贝尔规范场论 [11], 、量子化 [12, 13],、可重整性 [14], 、渐近自由 [15, 16], 以及夸克模型 [17]。经过实验验证阶段后，高能散射现象学如今着眼于寻找标准模型之外的信号，并理解强子相互作用的细致结构；大量微扰量子色动力学计算则作为一种实用工具。

Li-patov [18]指出了量子可积系统在高能QCD中的首次应用。在研究微扰规范理论中的 Regge 渐近行为 [19, 20, 21] [22, 23, 24] 时，他表明，雷吉化胶子的多重交换可以视为一条海森堡量子自旋链，其各格点上的自旋$_{1\ 2}$ 表示被无限维表示取代。

很快就可以看出，比约肯渐近行为 [25, 26, 27, 28, 29, 30] 与复合算符重整化具有相似的可积性特征 [31]。在这两种情形中，作为可积性基础的杨代数对称性都建立在共形对称性之上，而在量子色动力学中，共形对称性会被圈修正破坏。超对称性能够抑制这种破坏，而在 $\mathcal{N}=4$ 超杨-米尔斯理论中则完全不存在这种破坏。过去几十年来，人们从这一角度对超杨-米尔斯理论进行了大量研究。在

平面极限下的复合算符重整化在所有阶上都成立 [32] ，而散射振幅和威尔逊环的计算也是如此 [33, 34, 35]。

在阐述高能QCD与Yangian对称性之间的关系时，我们并不打算综述所有相关文献，只列出少数几篇参考文献。我们会尽可能提供充分的解释细节，使读者无需查阅这些论文和书籍也能读懂本文。

我们将回顾高能QCD、螺旋度形式的散射振幅、比约肯渐近行为和 Regge 渐近行为等主题，并在这些背景下讨论相关应用。我们将阐述一些众所周知的关系，着重强调共形对称性，以便与Yangian对称性的结果进行比较。 [36], [37] 提供了方向相似、内容更广泛的介绍。

我们不会试图全面介绍量子代数的基础知识，也不会给出一般而严格的定义。关于杨代数这一特定主题的介绍，请参阅 [38]。我们将重点介绍定义 Yangian 对称关联函数（YSC）所需的内容，并推导和解释构造这些关联函数时所用的关系。我们将以物理学家容易理解的方式介绍杨代数的相关概念。代数生成元由底层海森堡代数的生成元构造而成，这与量子力学中可观测量的算符由基本的位置算符和动量算符构造而成的方式类似。

我们的方法部分借鉴了为散射振幅计算发展出的思想和方法， [35] 与大多数相关文献不同，我们不直接研究振幅，也不在超杨-米尔斯理论的框架内开展工作。

YSC 是作为类型为 $g\ell(n)$ 的杨代数的 N 点函数得到的，其表达式依赖于 n 和一组参数。在应用中， n 取值为 4 时对应振幅，取值为 2 时则对应结构函数的演化核以及 reggeon 相互作用核。表示参数尤其与齐次权重相关，可通过代入特定取值来描述散射态。振幅或核对粒子类型和螺旋度的依赖关系，则通过考察 YSC 对解析参数的依赖，并取特定值而导出。YSC 的构造方法与振幅构造中的壳上图方法有关 [39]。在后一种方法的原始形式中[35] 并未出现参数。已有多篇论文研究了用参数对振幅表达式进行变形，并讨论了这些参数最终在圈发散正则化中的作用 [40, 41, 42, 43]。定义 YSC 的单值矩阵所表征的参数，在我们的方法中起着关键作用。

2 量子色动力学中的高能散射

2.1 散射振幅

我们将考察夸克和胶子的散射振幅，它们对高能强子过程（例如包容喷注产生， $AB \to jet + X$）有所贡献；此类过程发生在 $s = (p_A + p_B)^2$ 取值较大时。

长期以来，人们就已知在规范理论中使用螺旋度态进行散射振幅微扰计算的优势 [44] ，并将其广泛用于对撞机唯象学的详细计算 [45]。散射夸克和胶子的动量及偏振态均用螺旋度旋量表示。无质量动量的旋量分量可表示为左旋量和右旋量分量的乘积，

$$k_{\alpha,\dot{\alpha}} = \sigma^{\mu}_{\alpha,\dot{\alpha}} k_{\mu} = \lambda_{\alpha} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \tag{2.1}$$

无质量狄拉克方程的解可用外尔旋量表示，它们代表散射夸克的螺旋度态。刻画

胶子的螺旋度态的偏振矢量可借助参考旋量 μ_α，$\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}$以及类光规范矢量 $q_{\alpha,\ \dot{\alpha}} = \mu_\alpha \bar{\mu}_{\dot{\alpha}}$的因子构造而成。

$$\epsilon^{+}_{\alpha,\dot{\alpha}} = \frac{\lambda_\alpha \bar{\mu}_{\dot{\alpha}}}{[\bar{\mu}\bar{\lambda}]}, \quad \epsilon^{-}_{\alpha,\dot{\alpha}} = \frac{\mu_\alpha \bar{\alpha}_{\dot{\alpha}}}{<\mu\lambda>}. \tag{2.2}$$

旋量指标 $\alpha, \dot{\alpha}$ 取两个值，左手（无点）旋量的内积用尖括号表示，右手（有点）旋量的内积则用方括号表示，

$$<\mu\lambda> = \mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1, \quad [\bar{\mu}\bar{\lambda}] = \bar{\mu}_1\bar{\lambda}_2 - \bar{\mu}_2\bar{\lambda}_1. \tag{2.3}$$

在高能下，可将无质量情形作为第一近似，此时树级保持共形对称性。无穷小共形变换最初表示作用于时空坐标的变换，即平移 P_μ、洛伦兹变换 $M_{\mu\nu}$、特殊共形变换 K_{mu} 和膨胀变换 D；在旋量螺旋度表示中，它们的作用形式为 [46]

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\dot{\alpha}} &= \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad M_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \partial_\beta, \quad \bar{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\beta}}, \\ K_{\alpha,\dot{\alpha}} &= \partial_\alpha \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \quad D = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha \partial^\alpha + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + 2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

洛伦兹矢量分量按照上文动量的特例（2.1）转换为旋量分量。

膨胀算符作用于 $\epsilon^{\pm}_{\alpha\ ,\dot{\alpha}}, \lambda_\alpha, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ 时的特征值，就是量子色动力学作用量中相应场的正则标度维数，即胶子为 1，夸克为$3\ 2$。（此处 D 表示动量维数为 $+1$,$-[D, P_{\alpha,\dot{\alpha}}] = P_{\alpha,\dot{\alpha}}$）。散射态由螺旋度ˆ表征，它们是螺旋度算符 h的特征值，

$$2\hat{h} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \lambda_\alpha \partial_\alpha, \tag{2.5}$$

与所有共形变换（2.4）对易。

共形对称性生成元的旋量螺旋度表述并不具有 Jordan-Schwinger 形式。通过对左旋量变量进行初等正则变换，即可得到这种形式，

$$\begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ \lambda_\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_\alpha \\ -\partial_{x\ \alpha} \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

右旋量的两个正则对保持不变，但我们更倾向于将它们重新命名为

$$\begin{pmatrix} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \partial_{x\ 2+\dot{\alpha}} \\ x_{2+\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

用由此得到的 Witten扭量正则对 x_a，∂_a 表示，共形对称性生成元可写成 Jordan-Schwinger 形式：

$$M_{ab} = x_a \partial_b. \tag{2.8}$$

指标取 4 个值，a，$b = 1$，……，4。螺旋度算符 (2.5) 包含在4×4 生成元矩阵的迹中。

$$2\hat{h} \to x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3 x_3 + \partial_4 x_4, \quad 2\hat{h} = (x\partial) + 2. \tag{2.9}$$

入射粒子 A B 的动量 A B 促使我们优先选用质心系中的类光矢量基 n_+, n_-, n_*, n_o,

$$p_A = \frac{\sqrt{s}}{2}n_+ + \mathcal{O}(\frac{M^2}{s}), \quad p_B = \frac{\sqrt{s}}{2}n_- + \mathcal{O}(\frac{M^2}{s}). \tag{2.10}$$

n_*, n_o跨越横向平面。归一化为 $n_+n_- = 2$, $n_*n_o = -2$。一般的洛伦兹矢量 k 可展开为

$$k = k^-n_- + k^+n_+ + \kappa n_* + \kappa^* n_o. \tag{2.11}$$

若其为类光矢量, $k^+k^- = \kappa\kappa^*$, 则可按照（2.1）因子分解为 $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2)$, $(\bar{\lambda}) = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ with

$$(\lambda) = (\sqrt{k^+}, \frac{\kappa}{\sqrt{k^+}}), \quad (\bar{\lambda}) = (\sqrt{k^+}, \frac{\kappa^*}{\sqrt{k^+}}). \tag{2.12}$$

动量为 k 的散射胶子的极化矢量为

$$\epsilon^+(k) = \bar{E}(k)(\frac{n_o}{\sqrt{2}} + \frac{k^-}{\sqrt{2}\kappa^*}n_-), \quad \epsilon^-(k) = E(k)(\frac{n_*}{\sqrt{2}} + \frac{k^-}{\sqrt{2}\kappa}n_-) \tag{2.13}$$

其中, n_- 选作规范矢量, $E(k)\bar{E}(k) = 1$。它们的旋量形式可按上文（2.2）所示进行因子分解, 例如:

$$\epsilon^+_{\alpha,\dot{\alpha}}(k) = const\mu^-_\alpha\epsilon^+_{\dot{\alpha}}, \quad (\mu) = (n_+) = (1,0), \quad (\epsilon^+(k)) = E(k)(\frac{k^-}{\kappa^*}, 1) \tag{2.14}$$

计算最低阶微扰贡献的一种方法，是从作用量的光锥规范形式入手。了解这种非协变形式的特殊之处后，我们可以看到其优势：在量子色动力学作用量中施加规范条件 $n_-A = 0$ ，并在路径积分中对冗余分量 $n^\mu_+A_\mu$ 和 $n^\mu_+\gamma_\mu\psi$积分后，散射部分子的物理自由度由规范场势的横向分量 A^*, A 以及费米子场的投影 f^*, f描述。这里，我们将狄拉克费米子场 ψ 按照马约拉纳旋量基 $u_{a,b}, a = \pm, b = o, *$进行分解，这些旋量满足 $\gamma^\pm u_{\pm,b} = 0, \gamma^* u_{a,o} = \gamma^o u_{a,*} = 0$；狄拉克伽马矩阵矢量则类比动量矢量（2.11）进行分解。f^*, f表示具有特定手征性和味的夸克的两种螺旋度。夸克和胶子的场自由度由场直接表示： A^*, A表示螺旋度为$+1, -1$的胶子， f^*, f表示具有特定味和特定手征性、螺旋度为 $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$的夸克。

我们写出所得光锥作用量中的动能部分，以供后续参考,

$$S_2 = \int d^4y\mathcal{L}_2(y), \quad \mathcal{L}_2(y) = -2A^{B*}(y)(\partial_+\partial_- - \partial\partial^*)A^B(y) + if^{b*}\partial_+^{-1}(\partial_+\partial_- - \partial\partial^*)f^b(y). \tag{2.15}$$

b的取值范围为规范群基本表示的范围 $b = 1, ..., N_c$，而 B的取值范围为伴随表示的范围， $B = 1, ..., N_c^2 - 1$，且$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_3)$ $\partial^* = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$。

振幅对规范群（颜色）指标的依赖可以分离出来 [45]。这里我们关注依赖于动量和螺旋度的振幅因子。

我们用螺旋度标记部分子散射态，并假设在参数数组中，位置 I 对应相应的动量 k_I和螺旋度旋量 λ_I, λ_I。我们假设所有动量均为入射，从而将由交叉关联的振幅统一起来。平面部分振幅对散射态的依赖具有循环性。

对于物理（壳上）动量值， $\lambda_{\dot{\alpha}}$ 是 λ_α的复共轭。在计算过程中，我们允许动量取复数值。特别是，可以考虑依赖于复参数 c的数值变化，同时保持动量守恒条件不变。振幅 $M(c)$对 c 的依赖所呈现的解析结构由

物理幺正性决定。树振幅是 c 的亚纯函数，因此可得到 BCFW迭代关系 [47]。

考虑 N 粒子螺旋度振幅$M_{1,..,N}$，并对螺旋度变量作如下变形：

$$\bar{\lambda}_1 \to \bar{\lambda}_1 - c\bar{\lambda}_N, \lambda_N \to \lambda_N + c\lambda_1 \tag{2.16}$$

和 $k_1(c) = \lambda_1(\lambda_1 - c\lambda_N)$、 $k_N(c) = (\lambda_N + c\lambda_1)\lambda_N$。变形后的振幅 $M_{1^*,2,...,N^*}(c)$ 在 $c = c_l$ 处有单极点，对应于单粒子中间态，其中

$$P_l(c) = P_l - c\lambda_1\bar{\lambda}_N, P_l = k_1 + ... + k_l$$

为类光， $P_l(c_l)^2 = 0$。这就得到 BCFW 递归关系

$$M_{1,..,N} = \sum_l \sum_h M^h_{1,...,l,P}(c_l)\frac{1}{P_l^2}M^{-h}_{P_l,l+1,...,N}(c_l).$$

$M^h_{1,...,l,P}(c_l)$ 是一个含有 $l+1$ 个粒子的树振幅，其动量为 $k_1(z_l)$ $k_2, ..., k_l, P_l(c_l)$，且最后一个粒子的螺旋度为 h。$M^{-h}_{P_l,l+1,...,N}(z_l)$ 是一个含有 $N-l+1$ 个粒子的树振幅，其动量为 $-P_l(c_l)$ $k_{l+1}, ...,$ $k_N(c_l)$，且第一个粒子的螺旋度为 $-h$。这里假设变形后的振幅在 $c \to \infty$ 处消失；例如，对于胶子情形，当粒子 1 的螺旋度为 -1 且粒子 N 的螺旋度为 $+1$ 时，这一条件成立。

形变 (2.16) 可用移位算子表示为

$$M_{1,...,N}(c) = e^{-c\bar{\lambda}_N\bar{\partial}_1}e^{c\lambda_1\partial_N}M_{1,...,N}, \quad \bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}_{1\dot{\alpha}}}, \partial_N^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\lambda_{N\alpha}},$$

而对于包含能量-动量δ函数的振幅，$M_{1,...,l} = M_{1,...,l}\delta(\lambda_{1\alpha_1}\lambda_{1,\dot{\alpha}_1} + \cdots + \lambda_{l\alpha_l}\lambda_{l,\dot{\alpha}_l})$，道 $1, .., l \to l+1, ..., N$对 $M_{1,...,N}$的特定贡献可写为

$$\int_{\mathcal{C}_l}\frac{dc}{c}\exp(-c\bar{\lambda}_{N\dot{\alpha}}\bar{\partial}_1^{\dot{\alpha}})\exp(c\lambda_{1\alpha}\partial_N^{\alpha})\int d^4P\delta(P^2)\widetilde{M}^h_{1,...,l,P}\widetilde{M}^{-h}_{P,l+1,...,N}. \tag{2.17}$$

$\mathcal{C}_l$ 表示围绕 c_l的小圆周。

三点振幅可作为构件，用于构造所有树振幅。在 Parke–Taylor形式 [48] 中，例如有

$$M(-1,-1,+1) = \frac{<12>^4}{<12><23><31>}, \quad M(-\frac{1}{2}.-1,+\frac{1}{2}) = \frac{<12>^3<23>}{<12><23><31>}.$$

将所有螺旋度 h_i 反转的振幅，可通过将括号 $<...>$ 替换为 $[...]$(2.3) 得到。其余三点振幅可由上述结果利用循环性得到，其余情形则为零。所有情形可概括为

$$M(h_1,h_2,h_2) = <12>^{2\eta h_3+1}<23>^{2\eta h_1+1}<31>^{2\eta h_2+1}, \quad h_1+h_2+h_3 = \eta, \eta = \pm 1. \tag{2.18}$$

2.2 Bjorken 渐近区

深度非弹性电子-质子散射 $eP \to eX$ （X 表示多强子态）是由量子色动力学的比约肯渐近行为描述的过程中的典型例子。电子发生大动量转移散射 q, $-q^2 = Q^2 \gg M^2$。这一过程的实验数据使我们能够将强子 P 的结构分辨为准自由夸克和胶子 [25]。对相关费曼图在领先 $\ln Q^2$ 近似下的分析 [26, 27, 28]证实了这一启发式图像。

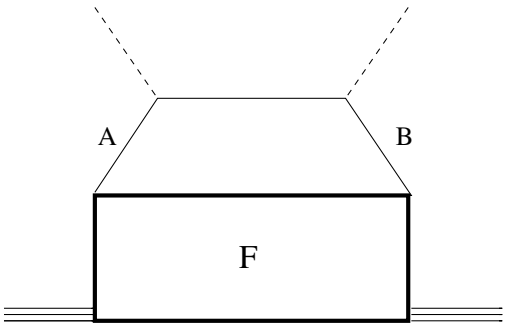


图1：虚康普顿散射，结构函数 F 的贡献。

包容截面可因子化为轻子张量和强子张量两部分。后者可视为虚康普顿散射振幅的 s 道不连续性，$\gamma^*P \to \gamma^*P$。它可展开为洛伦兹结构与结构函数的乘积 $F(z,\ Q^2)$ $z = \frac{Q^2}{2(pq)}$。

在强子张量的微扰展开中，我们看到（图1）夸克上的虚康普顿散射与强子结构函数 $F(z,\ Q^2)$ 的卷积。比约肯变量 $z = \frac{Q^2}{2(pq)}$ 是质子动量 p 中由夸克携带的份额，而 $F(z,\ Q^2)$ 可解释为在靶中找到具有动量分数 z的特定部分子的概率分布。

渐近区由费曼图控制，每一圈都会贡献一个因子 $\ln Q^2$，也就是说，适用主对数近似。在光锥规范中，主导图简化为插入了自能和顶点修正的梯形图。主导贡献来自圈动量 $k_i = k_i^- n_- + k_i^+ n_+ + \kappa_i$ 的横向分量强烈有序的积分区域

$$Q^2 \gg \kappa_N^2 \gg ... \gg \kappa_1^2 \gg M^2. \tag{2.19}$$

圈积分化为对 k_i^+的积分，它与质子动量分数成正比；对其余分量的积分则化为 $\int \frac{d^2\kappa}{\kappa^2}$，从而产生所需的因子 $\ln Q^2$。

梯形图的梯级表示强子化为末态强子态 X 的部分子。梯形图贡献之和导出结构函数的方程 [26, 30, 29]。

在极限 (2.19) 下，梯形图的基本构件化简为只依赖于 k^+ 动量分量的四点函数W_{ABCD}，$k^+ = \frac{2}{\sqrt{s}} z$。包含自能和顶点修正的领先梯形图贡献之和，导出结构函数标度依赖性的方程。A, B, C, D 表示部分子的类型和螺旋度（± 1 表示胶子，$\pm\frac{1}{2}$ 表示夸克或反夸克）。在深度非弹性散射中，B 与 A 相关，并且通过共轭也与 D 相关，C $W_{A,\ \bar{A};\ C,\ \bar{C}} \to W_{A;C}$。

$$\frac{d}{d\xi} F_A(z;Q^2) = -W_A F_A(z;Q^2) + \sum_C \int_z^1 \frac{dz'}{z'} W_{C,A}(\frac{z}{z'}) F_C(z',Q^2). \tag{2.20}$$

标度依赖性用 $\xi(Q^2) = -\frac{2N_C}{b}\ln \frac{\alpha_{(Q^2)}}{\alpha(M^2)}$，来表述，其依赖于单圈QCD耦合 $\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_{(M^2)}}{1+b\alpha_{(M^2)}2\pi\ln\frac{Q^2}{M^2}}$，$b = \frac{11}{3}N_C - \frac{2}{3}N_F$。$N_c$表示颜色数，$N_F$ 表示夸克味数。

这种形式是 分支过程之一，其中 $W_{A,\ B}(z)$ 是部分子 At 的速率

衰变为一个携带 z 的动量分数、来自 A 的部分子 B，并

$$W_A = \sum_B \int_0^1 dz z W_{BA}(z).$$

结构函数 $F_A(z;Q^2)$ 与靶强子中部分子 A 的密度成正比。实际上，$W_{A,\ B}(z)$ 在 $z=1$ 处是奇异的，相应地 W_A也是如此；这种分支图景只有在 $z=1$ 处进行正则化后才有意义。

将演化核定义为良定分布后

$$P_{BA}(z) = W_{B,A}(z) - \delta_{A,B}\delta(1-z)W_A \tag{2.21}$$

我们得到 Altarelli-Parisi形式 [29],

$$\frac{d}{d\xi}F_A(z;Q^2) = \sum_C \int_z^1 \frac{dz'}{z'} P_{C,A}(\frac{z}{z'}) F_C(z',Q^2). \tag{2.22}$$

它描述了结构函数对尺度 Q^2 的依赖，通常称为 DGLAP演化方程。

通过计算矩，可以得到由此类核定义的算符的谱

$$\gamma_{AB}(n) = \int_0^1 dz z^{n-1} P_{AB}(z) \tag{2.23}$$

并对部分子类型指标 A，B对应的矩阵进行对角化。

强子张量因子也可以表示为电磁流乘积在强子态之间的矩阵元,

$$\int d^4x e^{iqx} < P'|T j_\mu(0) j_\nu(x)|P > . \tag{2.24}$$

T 表示时间序。标度依赖性的处理可以用算符乘积展开和重整化群 [51, 52]来表述。

在当前情况下，两个强子态相同；一般情形则出现在半排他硬过程中。在一般情形下，强子张量因子的洛伦兹展开中会有更多结构项作出贡献，动量转移的 n_+ 分量也会作为一个额外变量出现在结构函数中，这类结构函数称为广义部分子分布 [53, 54, 55, 56]。

从上述强子张量因子的两种表述中可以看出，在渐近区，动力学变为一维。在算符乘积形式（2.24）中，主导积分区域为$x^2 \sim \frac{1}{Q^2}$。算符乘积展开中的主导贡献是位于光射线上的夸克的两个光锥分量的乘积（$f^*(x)$ $f(x)$）或胶子（A^*，A）。我们将这类准部分子算符贡献写作

$$F_{AB}(x_1,x_2;Q^2) =< P'|f_A^*(x_1) f_B(x_2)|P >, \tag{2.25}$$

其中A，B表示部分子的类型和螺旋度（胶子为± 1，夸克或反夸克为 $\pm\frac{1}{2}$），而x_1，x_2 是光射线上的点。尖括号表示强子态。

对于产生主要贡献的场模，QCD光锥作用量可化简为一维有效作用量。特别是，由动能项 (2.15) 可示意性地得到

$$S_{2Bj} = \int d^1x \mathcal{L}_{2Bj}, \quad \mathcal{L}_{2Bj} = 2A^*A + if^*\partial^{-1}f. \tag{2.26}$$

有效部分子场的标度维数为：胶子为 $\ell = -\frac{1}{2}$，夸克为 $\ell = -1$。根据重整化群，算符乘积贡献对动量尺度的依赖为

$$\frac{d}{d\xi}F_{AB}(x_1,x_2;Q^2) = -\frac{1}{2}(W_A+W_B)\delta_{AC}\delta_{BD}\delta(x_1-x_1')\delta(x_2-x_2')+ \tag{2.27}$$

$$\sum_{CD}\int dx_1'dx_2'W_{CD,AB}(x_1',x_2';x_1,x_2)F_{CD}(x_1',x_2';Q^2)$$

演化方程 (2.20) 是后一方程在动量转移为零的情况下的光锥动量表象。位置形式非常适用于广义部分子分布的情形。由光锥位置 (2.27) 和动量表象 (2.20)、(2.22) 中的核所定义的算符，其特征值相同。这些特征值是相应局域算符乘积线性组合的反常标度维数；这些线性组合由对 (2.25) 中的双局域算符按位置变量 x_1, x_2 的幂展开得到。

在比约肯渐近行为下，约化为一维的动力学在树级保持共形对称性。唯一相关的动量分量 k^+ 可以写成因子化的一分量变量，这与类光洛伦兹矢量的二分量旋量表示类似，$k^+ = \lambda\bar{\lambda}$。在渐近区（即共线极限）中，第二旋量分量 (2.12) 随横向动量一起趋于零。

在此极限下，基本的量子色动力学三点振幅 (2.18) 得到部分子劈裂振幅 M_{split} [57]。它们导出核 W_{AB}，这与由基本三点振幅构造散射振幅的方式类似。

将旋量 (2.12) 用光锥动量分量 (2.11) 表示，代入$k^+ = \frac{\sqrt{s}}{2}z$并选择 $z_1 = 1,\ \kappa_1 = 0,\ z_2 = z,\ \kappa_2 = \kappa,\ z_3 = 1-z,\ \kappa_3 = -\kappa$。于是部分子劈裂振幅 $1 \to 2+3$ 为

$$\lim_{\kappa\to 0}\frac{1}{<23>}M(h_1,h_2,h_3) = \frac{z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}{z^{\eta h_2}(1-z)^{\eta h_2}}.$$

我们得到对称形式的部分子劈裂振幅，$z_i = \frac{2}{\sqrt{s}}k_i^+$，$\sum z_1+z_2+z_3 = 0, h_1+h_2+h_3 = \eta$,

$$M_{split}(z_1,z_2,z_3;h_1,h_2,h_3) = z_1^{\frac{1}{2}-\eta h_1}z_2^{+\frac{1}{2}-\eta h_2}z_3^{\frac{1}{2}-\eta h_3}. \tag{2.28}$$

劈裂振幅给出上述标度演化方程中的核（此处将约定从入射动量改为通常的物理约定）：

$$W_{AB}(z) = \sum_C W_{ABC}(z),\quad W_{ABC}(z) = |M_{split}(1,-z,z-1,h_A,-h_B-h_C)|^2. \tag{2.29}$$

我们描述 Bjorken 极限下共形对称性的作用。将生成元$M_{ab} = x_a\partial_b$(2.8)作为考察对象，但现在指标限制为 $a,\ b,\ = 1,\ 2$；此外，还考虑将基本正则变换 (2.6)、(2.7) 类比地写成螺旋度形式。现在 $\alpha,\ \dot{\alpha}$ 只取一个值，因此省略这些指标。这里有（比较 (2.9)）

$$2\hat{h} = (\underline{x\partial}) + 1,\quad (\underline{x\partial}) = x_a\partial_a.$$

设生成元 $M_{ab} = x_a\partial_b$ 作用于 x_a 的函数上。该表示可约化为次数为 2ℓ 的齐次函数，$\phi(x)(x_2)^{2\ell}$，$x = \frac{x_1}{x_2}$。2ℓ 是膨胀（$x\partial$）的特征值，并与螺旋度相关，关系如下：

$$2h = 2\ell + 1, \tag{2.30}$$

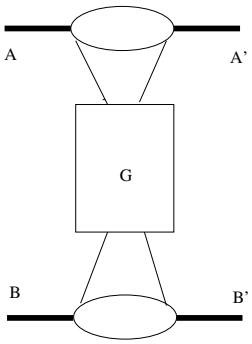


图 2：梅林振幅。

共形对称性生成元作用于 $\phi(x)$ 的方式如下：

$$(M_{ab}) = \begin{pmatrix} x\partial + \ell & \partial \\ -x(x\partial + 2\ell) & x\partial - \ell \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

由 $2\ell = 0$ 参数化的直线上的 M¨obius 变换由以下元素生成。

比值变量 x 表示上文算符乘积中出现的光射线位置，而 $k = \lambda\lambda$ 表示光锥动量。

2.3 Regge 渐近行为

散射 $AB \to A'B'$ 的 Regge 渐近行为出现在运动学条件 $s \gg t$下，其中$s = (p_A + p_B)^2, t = (p_A - p_{A'})^2 = q^2$。荷和（物理）螺旋度分别与 A' 和 B'相同的树振幅，其主导贡献的行为为 s，其中胶子在 t 道中交换。含有 n_q 夸克交换的振幅，其渐近行为为 $s^{1-\frac{1}{2}n_q}$。

考虑振幅的梅林变换会很方便，

$$M(s,t) = \int_{-i\infty+\delta}^{+i\infty+\delta} d\omega F(\omega, q) \left(\frac{s}{M^2}\right)^{1+\omega}. \tag{2.32}$$

这里省略了关于符号的细节。梅林振幅 $F(\omega, q)$，也称为分波，表现为对横向动量 κ_i 积分所形成的卷积，其中冲击因子 $\Phi_A(\kappa)$ 与粒子 A 和 A'耦合，而冲击因子 $\Phi_B(\kappa',)$ 与粒子 B 和 B'耦合；卷积还包含 Regge 子格林函数 $G(\omega, \kappa, \kappa')$，如图 2 所示，

$$F(\omega, q) = \int d\underline{\kappa} d\underline{\kappa}' \Phi_A(\underline{\kappa}) G(\omega, \underline{\kappa}, \underline{\kappa}') \Phi_B(\underline{\kappa}') \tag{2.33}$$

实际上，这里对多重 reggeon交换的贡献求和，而 κ 表示 reggeon横向动量的集合。我们还将使用与其中一个冲击因子的卷积，适用于两个 reggeon 的情形

$$f(\omega, \kappa_1, \kappa_2) = \int d\kappa_1' d\kappa_2' G(\omega, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_1', \kappa_2') \Phi_B(\kappa_1', \kappa_2').$$

s 中的渐近区由 reggeon格林函数 $G(\omega, \kappa, \kappa')$ 在 ω 中的最右奇点决定。

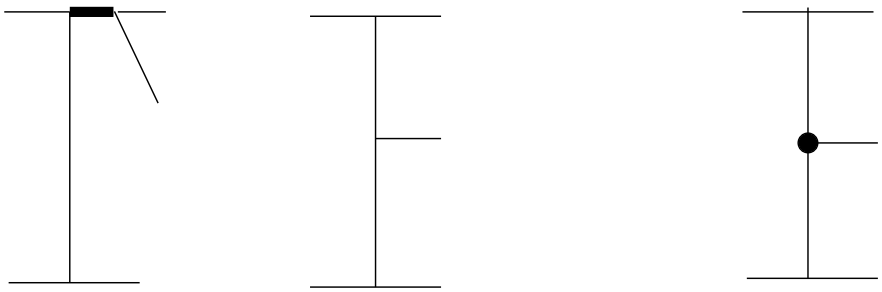


图3： $2 \to 3$ 散射。a）轫致辐射，b）直接辐射，c）有效产生顶点。

与单胶子或夸克交换相对应的 reggeon格林函数分别为,

$$\frac{1}{|\kappa|^2}\frac{1}{\omega}, \quad \frac{1}{\kappa}\frac{1}{\omega+\frac{1}{2}}, \tag{2.34}$$

或者对相反的夸克螺旋度取复共轭。横向动量依赖可由两个横向维度中有效雷吉子场的传播子描述,

$$S_{2R} = \int d^2x \mathcal{L}_{2R}(x), \quad \mathcal{L}_{2R}(x) = -\mathcal{A}_+(x)\partial\partial^*\mathcal{A}_-(x) - \chi_+(x)\partial\chi_-(x) - \widetilde{\chi}_+(x)\partial\widetilde{\chi}_-(x). \tag{2.35}$$

带有下标 $+$ 的雷吉子场将与冲击因子 Φ_A 以及几乎沿 p_A 方向飞行的粒子耦合，而带有下标 $-$ 的场将与几乎沿 p_B方向飞行的粒子耦合。

在主对数近似下，共形对称性得以保持，并分别通过作用于横向位置的线性分式变换（莫比乌斯变换）作用于 x 和 x^*。特别地，对于动能项（2.35）中出现的场¯的相应变换，我们有¯尺度对称性 $x \to \lambda x, \ x^* \to \lambda x^*$ 其尺度指数（$\ell, \ \ell$）对于胶子为（0, 0），对于夸克为（0, $-\frac{1}{2}$）或（$-\frac{1}{2}$, 0）。_

在主对数近似下，对每个圈中正比于 $\ln s$ 的费曼图贡献求和。在光锥规范下，主导图简化为梯形图，其中 t道交换的胶子或夸克经圈修正后发生 Regge 化。主导梯形图贡献的运动学特征是圈动量分量 $k^+, \ k^-$ 满足强有序条件,

$$k_1^+ \gg ... \gg k_N^+, \quad k_1^- \ll ... \ll k_N^-. \tag{2.36}$$

对这些分量的积分化为对数形式 $\sim \int \frac{dk^+}{k^+}$ ，因此动力学简化为二维横向空间中的动力学。

梯形图和 Regge 化的基本构件可以用有效产生顶点 [82] 来理解。考虑两个部分子发生散射并产生一个部分子的过程。散射部分子的轫致辐射（图 3a）与来自交换雷吉子的辐射（图 3b）之和，可表示为通过有效产生顶点 V_{gg} 发生的辐射（图 3c）。

对于胶子 Regge 子，我们将横向动量写成复数形式，并得到有效产生顶点

$$V_{gg}(\kappa, \kappa') = \frac{\kappa^*\kappa'}{\kappa - \kappa'} \tag{2.37}$$

或者将其作为有效作用量项添加到 (2.35) 中

$$\mathcal{L}_p(x) = g(\partial\mathcal{A}_+(x)\partial^*\mathcal{A}_-(x))a(x).$$

$a(x)$表示发射胶子。其动量范围接近质壳。 $\mathcal{A}_\pm$ 是交换胶子雷吉子，其动量处于范围 $k^+k^- \ll \kappa\kappa^*$内。

除了采用图 3 中图示的论证方式外，还可以通过积掉远离质壳的模式 $k^+k^- \gg \kappa\kappa^*$（利用运动方程消去）来得到有效产生项，这些模式在图 3a 中用粗线表示。

梯形图图 4a 中基本构件的贡献，可由该有效产生顶点（图中的黑点）得到:

$$K^{(0)}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1',\kappa_2') = V_{gg}(\kappa_1,\kappa_1')V_{gg}^*(\kappa_2,\kappa_2') + c.c. \tag{2.38}$$

胶子雷吉化的一圈贡献可写为

$$\omega_g(\kappa) = \frac{1}{2(2\pi)^3}|\kappa|^2\int\frac{d^2\kappa'}{|\kappa'|^2|\kappa-\kappa'|^2}. \tag{2.39}$$

计入这一贡献后，雷吉化胶子的格林函数由式（2.34）改为

$$\frac{1}{|\kappa|^2}\ \frac{1}{\omega+g_r^2\omega_g(\kappa)},\quad g_r^2 = \frac{g^2N_c}{2(2\pi)^3}. \tag{2.40}$$

两个互不相互作用的雷吉化胶子的格林函数为

$$G^{(0)}(\omega,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1',\kappa_2') = |\kappa_1|^{-2}|\kappa_2|^{-2}\delta(\kappa_1-\kappa_1')\delta(\kappa_2-\kappa_2')f^{(0)}(\omega,\kappa_1,\kappa_2),$$

$$f^{(0)}(\omega,\kappa_1,\kappa_2) = \frac{1}{\omega+g_r^2\omega_g(\kappa_1)+g_r^2\omega_g(\kappa_2)}$$

双雷吉子相互作用的梯形图贡献之和可通过求解方程得到

$$G(\omega,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1',\kappa_2') = G^{(0)}(\omega,\kappa_1,\kappa_2,\kappa_1',\kappa_2') + g_r^2\int\frac{d^2\kappa_1'd^2\kappa_2''}{|\kappa_1''|^2|\kappa_2''|^2}K^{(0)}(\kappa_1'',\kappa_2'',\kappa_1,\kappa_2)G(\omega,\kappa_1'',\kappa_2'',\kappa_1',\kappa_2').$$

Regge 化贡献 $\omega_g(\kappa)$ (2.39) 只有经过正则化才能得到良好定义，而裸核 $K^{(0)}$ 只有经过正则化才能定义一个算符。我们将方程改写为关于 BFKL核的形式，从而在正则化参数 [22, 23, 24], 为零时得到一个良好定义的算符

$$K(\kappa_1',\kappa_2',\kappa_1,\kappa_2) = K^{(0)}(\kappa_1',\kappa_2',\kappa_1,\kappa_2) - (\omega_g(\kappa_1)+\omega_g(\kappa_2))\delta(\kappa_1-\kappa_1')\delta(\kappa_2-\kappa_2'),$$

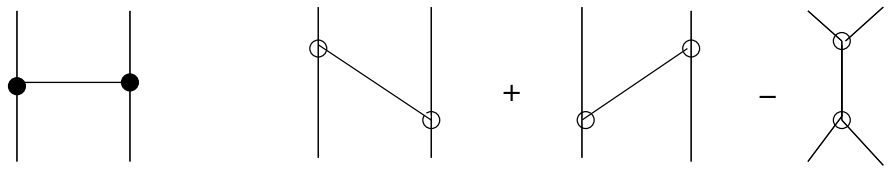
$$\omega f(\omega,\kappa_1,\kappa_2) = g_r^2\int\frac{d^2\kappa_1'd^2\kappa_2'}{|\kappa_1'|^2|\kappa_2'|^2}K(\kappa_1',\kappa_2',\kappa_1,\kappa_2)f(\omega,\kappa_1',\kappa_2'). \tag{2.41}$$

该核可以由基本的 Reggeon 三重顶点 [80], 重构，这些顶点取自图 3a 中由韧致辐射贡献产生的诱导顶角的横向部分。$\mathcal{V}^{+--}(\kappa_1,\kappa_2)$ 是一个 Reggeon $\mathcal{A}_+$ 与两个 Reggeon $\mathcal{A}_-$、 κ_1,之间的相互作用顶角， κ_2 是后者的动量。

$$\mathcal{V}^{-++}(\kappa_1,\kappa_2) = \mathcal{V}^{+--}(\kappa_1,\kappa_2) = |\kappa_1+\kappa_2|^2. \tag{2.42}$$

图 4b 展示了包含这些顶点、从而得到裸 BFKL 核 $K^{(0)}$ (2.38)) 的图，其中各项分别对应于

$$\frac{|\kappa_2|^2|\kappa_1'|^2}{|\kappa_1-\kappa_1'|^2} + \frac{|\kappa_1|^2|\kappa_2'|^2}{|\kappa_1-\kappa_1'|^2} - |\kappa_1+\kappa_2|^2 = K^{(0)}(\kappa_1',\kappa_2',\kappa_1,\kappa_2), \tag{2.43}$$



a b

图4：由有效产生顶点（a）或 Reggeon 三重顶点（b）组成的基本梯形块。



图5：由 Reggeon 三重顶点组成的 Regge 化环。

图 5 展示了产生 Regge 化 ω_g (2.39) 的圈。在图 4b 和图 5 中，三重 Reggeon 顶点（空心圆）中朝上的边表示 $\mathcal{A}_-$，朝下的边表示 $\mathcal{A}_+$。

将方程（2.41）变换到横向位置表象后，其共形对称性便显而易见。由于存在发散，进行傅里叶变换时必须谨慎。概括而言，将 BFKL 核（2.41）中的表达式按照替换规则处理后，所得结果可表示为由正则对 $x_I, \partial_I, I = 1, 2$ 及其复共轭 x_I^*, ∂_I^*构成的算符

$$|\kappa_1 - \kappa_1'| \to -\ln|x_{12}|^2, \omega(\kappa_1) \to \psi(1) - \ln(\partial_1 \partial_1^*), \quad \kappa_1 \to \partial_1^*, \ \kappa_2^* \to \partial_2. \tag{2.44}$$

~这便得到傅里叶变换 $f(\omega, x_1, x_2)$ 的方程

$$\omega \widetilde{f}(\omega, x_1, x_2) = \frac{g^2 N_c}{8\pi^2} \hat{H}_g \ \widetilde{f}(\omega, x_1, x_2) \tag{2.45}$$

^ BFKL 哈密顿量 H_g 可分解为全纯部分和反全纯部分，前者仅涉及 $x_I, \partial_I, I = 1, 2$，后者则仅涉及 $x_I^*, \partial_I^*, I = 1, 2$。

$$\hat{H}_g = (H_g + H_g^*),$$

$$H_g = 2\psi(1) - \partial_1^{-1} \ln x_{12} \ \partial_1 - \partial_2^{-1} \ln x_{12} \ \partial_2 - \ln \partial_1 - \ln \partial_2. \tag{2.46}$$

进一步进行形式算符运算，可得到用张量 Casimir 算符表示的表达式

$$C_{12} = (M^{(1)} + M^{(2)})_{ab} (M^{(1)} + M^{(2)})_{ba}, \tag{2.47}$$

其中， $M_{(I)ab}$是式（2.31）的矩阵元中的算符，将 x, ∂替换为 x_I, ∂_I，并将 ℓ替换为ℓ_I。对称代数由 $g\ell$(2) 的两个副本构成，分别由作用于 x 而不作用于 x^*的 M_{ab} ，以及作用于 x^*的 M^*_{ab} 生成。相应地，对于这些表示，我们有两个标签（ℓ, ℓ）： $\bar{\ell}$指代第一个表示， ℓ 指代第二个表示。

$\bar{}$ $\bar{}$在考虑两个胶子 Regge 子的情况下，表示参数为（ℓ_1， ℓ_1）、（ℓ_2， ℓ_2） =（0，0）、（0，0）。这对应于上文在（2.35）之后关于 Regge 子场尺度维数的论述。该表述可推广到多于两个 Regge 子的情况，也可推广到包含费米子 Regge 子的情况。后者根据螺旋度和手征性 $\bar{}$ $\bar{}$ [81]，由表示（$-\frac{1}{2}$，0）或（0，$-\frac{1}{2}$）描述。

高能散射的色偶极子模型 [58, 59, 60, 61]导出了哈密顿量的积分形式

$$\hat{H}_g \widetilde{f}(\omega, x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int d^2x_0 \frac{|x_{12}|^2}{|x_{10}|^2 |x_{20}|^2} \left(\widetilde{f}(\omega, x_1, x_2) - \widetilde{f}(\omega, x_1, x_0) - \widetilde{f}(\omega, x_0, x_2) \right). \tag{2.48}$$

$\sim f$（ω， x_1， x_2）可视为偶极子分布关于其在横向平面中端点的梅林变换，而方程（2.45）描述了其随快度 $Y \sim \ln s$ 的演化。

我们给出 [62] 导出这一形式的论证。根据形式上的算符关系

$$\partial \ln x \; \partial^{-1} = \ln x + x^{-1}\partial^{-1}, \quad x \ln \partial \; x^{-1} = \ln \partial - \partial^{-1} x^{-1} \tag{2.49}$$

哈密顿量 (2.46) 可改写为

$$\hat{H}_g = 4\psi(1) - 2\ln|x_{12}|^2 - 2|x_{12}|^{-2} \ln|\partial_1 \partial_2|^2 |x_{12}|^2. \tag{2.50}$$

对 (2.48) 中的核进行正则化后，得到

$$\int \frac{d^2x_0}{\pi} \frac{|x_{12}|^2}{(|x_{10}|^2 + \delta^2)(|x_{20}|^2 + \delta^2)} = \int_0^1 d\alpha \frac{|x_{12}|^2}{(\alpha(1-\alpha)|x_{12}|^2 + \delta^2} = 2\ln \frac{|x_{12}|^2}{\delta^2} + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$-\int \frac{d^2x_0}{\pi} \frac{|x_{12}|^2}{(|x_{10}|^2 + \delta^2)(|x_{20}|^2 + \delta^2)} \widetilde{f}(\omega, x_1, x_0) = |x_{12}|^2 (\ln(\delta^2 |d d_2|^2 - 2\psi(1)) |x_{12}|^{-2} \widetilde{f}(\omega, x_1, x_2) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

这表明，当 δ 趋于零时，积分算子 (2.48) 的作用等同于算符 (2.50)。

由核 $K(\kappa_1', \kappa_2', \kappa_1\kappa_2)$ (2.41) 定义的算符，其特征值很容易在前向极限 $\kappa_1 + \kappa_2 = -\kappa_1' - \kappa_2' = 0$ 下用横向动量形式计算。在这种情况下，特征函数为

$$E^{(n,\nu)}(\kappa) = |\kappa|^{\frac{1}{2} + i\nu} \left(\frac{\kappa^*}{|\kappa|} \right)^n,$$

复平面上的一组函数基，其中 n 和 $\nu \in \mathbb{R}^1$ 为整数。特征值可写为

$$\Omega_g(n, \nu) = \chi_0(m) + \chi_0(\bar{m}), \chi_0(m) = 2\psi(1) - \psi(m) - \psi(1-m), \tag{2.51}$$
$$m = \frac{1}{2} + i\nu + \frac{1}{2}n, \quad \bar{m} = \frac{1}{2} + i\nu - \frac{1}{2}n.$$

$\chi_0(m)$ 实际上是 $m(1-m)$ 的函数，而后者是卡西米尔算符 (2.47) 的特征值。用横向位置表示时，本征函数就是共形三点函数。

$$E^{(n,\nu)}(x_1, x_2; x_0) = E_m(x_1, x_2; x_0) E_{\bar{m}}(x_1^*, x_2^*; x_0^*), \tag{2.52}$$

$$E_m(x_1, x_2; x_0) = \left(\frac{x_{12}}{x_{10} x_{20}} \right)^m,$$

满足完备关系

$$\delta^{(2)}(x_1-x_1')\delta^{(2)}(x_2-x_2')=\int d^2x_0\int_{-\infty}^{+\infty}d\nu\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$$

$$\frac{\nu^2+\frac{n^2}{4}}{\pi^4|x_{11'}|^2x_{22'}|^2}E^{(n,\nu)*}(x_1,x_2,x_0)E^{(n,\nu)}(x_1',x_2',x_0).$$

正交关系表明，这个基是二重过完备的 [63]。

谱性质是给出上述 BFKL算符形式的依据，也使变换（2.44）、（2.49）这一非寻常步骤具有明确的含义。

依赖于尺度 Q^2 的重整化耦合，在领先阶进入 Bjorken 极限演化方程。在描述 Regge 渐近行为的 BFKL方程中，领先阶出现的是裸耦合。其重整化仅在次领先阶纳入 [64],[65], [66]。

对于两种渐近区的重叠区域，必须考虑两类方程的组合，包括将 BFKL 贡献作为 DGLAP方程的修正 [69]，或通过重整化群改进 BFKL方程 [63]。在重叠区域，多Regge子交换的贡献变得重要。可以通过将非线性项纳入 BFKL方程来描述这些贡献 [67, 68]。在偶极子图像中，多Regge子贡献表现为产生更多偶极子 [60, 61]。在极限渐近区，会出现饱和机制 [70, 71] ，从而可以应用热力学概念。有人提出将与可积自旋链直接相关的模型的热力学极限特征应用于此处；在这些模型中，BFKL 哈密顿量描述成对相互作用 [72, 73]。

3 杨代数对称性

3.1 单值矩阵算符与对称关联函数

我们首先将 $g\ell(n)$ 李代数关系表述为基本杨–巴克斯特关系

$$\mathcal{R}(u-v)(L(u)\otimes I)(I\otimes L(v))=(I\otimes L(v))(L(u)\otimes I)\mathcal{R}(u-v). \tag{3.1}$$

这里， $\mathcal{R}(u-v)$ 表示杨的 R 矩阵。其大小在我们的情形下为 $n^2\times n^2$ ，由单位矩阵以及表示张量积中 n 维基本表示空间各因子置换的矩阵组成， $\mathcal{R}(u)=uI_{n^2\times n^2}+P$。 L 矩阵的大小为 $n\times n$ ，且关于谱参数 u呈线性， $L(u)=uI_{n\times n}+L$。 $L_{ab},\ a,\ b,\ =1,\ \ldots\ldots n$ 是李代数 $g\ell(n)$ 的生成元。采用指标记法，我们有

$$L_{ab}(u)=u\delta_{ab}+L_{ab},\quad \mathcal{R}^{a_1a_2}_{b_1b_2}(u)=u\delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2}_{b_2}+\delta^{a_1}_{b_2}\delta^{a_2}_{b_1}. \tag{3.2}$$

杨代数可以通过矩阵算符 $T(u)$ 引入，该算符满足上述杨–巴克斯特关系 (3.1)，其中将 $L(u)$ 替换为 $T(u)$，且此时对 u 的依赖不再受上述限制。随后，扩展Yangian代数 [9], [38] 的生成元出现在 $T(u)$ 关于 u 的负幂展开中，而扩展Yangian代数关系则由杨–巴克斯特关系 (3.1) 推出。

我们将讨论有限阶 N 的 $g\ell(n)$ 杨代数的求值表示，其中 $T(u)$ 由 L 矩阵按照可积模型领域中众所周知的方式构造。设 $L_I(u_I)$ 的矩阵元作用于表示空间 V_I，并考虑定义单值矩阵的矩阵乘积

$$T(u,\delta_1,\ldots,\delta_N)=T(\mathbf{u})=L_1(u_1)\cdots L_N(u_N),\quad u_I=u+\delta_I, \tag{3.3}$$

作用于张量积 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ 上。

我们考虑由齐次函数表示的情形：$\mathbf{x}_I = (x_{i,\ 1},\ .....,\ x_{I,\ n})$，权重 $2\ell_I$ 是齐次度，

$$\psi(\mathbf{x}_I) = x_{i,n}^{2\ell_I}\phi(\mathbf{x}'_I), \quad \mathbf{x}'_I = (\frac{x_{I,1}}{x_{I,n}}, ..., \frac{x_{I,n-1}}{x_{I,n}}). \tag{3.4}$$

张量积 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ 的元素是 n 维空间中 N 个点的函数。

我们考虑 Jordan-Schwinger（JS）形式的李代数生成元，

$$L^+_{I,ab} = \partial_{I,a}x_{I,b}, \quad L^-_{I,ab} = -x_{I,a}\partial_{I,b}, \tag{3.5}$$

它由每个点 I 处的 n 个正则对 $x_{I,\ a}$，$\partial_{I,\ a}$ 构成，

$$[\partial_{I,a}, x_{J,b}] = \delta_{IJ}\delta_{ab}. \tag{3.6}$$

注意，基本的正则变换

$$\begin{pmatrix} x_{I,a} \\ \partial_{I,a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \partial_{I,a} \\ -x_{I,a} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

将 $L^+_I\ (u)$ 变换为 $L^-_I\ (u)$。

我们有矩阵求逆关系（对任意点 I）

$$\left(\frac{L^+(u)}{u}\right)^{-1} = \frac{L^+(-u-1-(\underline{x\partial}))}{-u-1-(\underline{x\partial})}, \quad \left(\frac{L^-(u)}{u}\right)^{-1} = \frac{L^-(-u+1+(\underline{x\partial}))}{-u+1+(\underline{x\partial})}, \tag{3.8}$$

其中 $(\underline{x\partial}) = \sum_{a=1}^n x_a\partial_a$。

JS 生成元的两种形式也通过矩阵转置相关联，$(L^t)_{ab} = L_{ba}$，

$$(L^+(u))^t = -L^-(-u-1). \tag{3.9}$$

这种转置运算与反演的作用取决于顺序，

$$(L^+(u))^{t\ -1} = (L^+(u+n))^{-1\ t}. \tag{3.10}$$

与对位置 x_a 的积分相关，我们考虑另一种作用于正则对的转置运算，其定义为

$$(x_a)^T = x_a, \quad \partial_a^T = -\partial_a,$$

保持指标不变，但反转这类算符乘积中的顺序；这类似于矩阵转置，在同一点处，例如 $(x_{I,\ a}\partial_{I,\ b}\partial_{J,\ c})^T = (\partial_{I,\ b})^T(x_{I,\ a})^T\partial^T_{J,\ c}$。

$$(L^+(u))^T = (L^-(u))^t = -L^+(-u-1), \quad (\underline{x\partial})^T = -n-(\underline{x\partial}). \tag{3.11}$$

我们打算考虑由函数构成的表示，这些函数在每一点 I (3.4)处都是齐次的，即我们限制在伸缩算符的固定特征值子空间（$x_I\partial_I$）$\to 2\ell_I$。相应的投影算符记为 $\Pi_I(2\ell_I)$。 $\quad --$

L 算符的投影取决于这一齐次度，

$$\Pi_I(2\ell_I)L^+_I(u)\Pi_I(2\ell_I) = L^+_I(u^+_I, u_I),\ u^+_I = u+\delta_I+2\ell_I \tag{3.12}$$

Th反演与转置 t 和 T 对投影后的 L obe 的作用 y

$$(L^+(u^+,u))^{-1}=\frac{L^+(-u-1,-u^+-1)}{u(-u^+-1)}, \tag{3.13}$$

$$(L^+(u^+,u))^T=-L^+(-u^+-1-n,-u-1),\quad (L^+(u^+,u))^{t\ -1}=(L^+(u^++n,u+n))^{-1\ t}, \tag{3.14}$$

$$(L^+(u^+,u))^{T\ -1}=\frac{L^+(u,u^++n)}{(u+1)(u^++n)},\quad (L^+(u^+,u))^{-1\ T}=\frac{L^+(u-n,u^+)}{u(u^++1)}. \tag{3.15}$$

投影后的 L 满足基本杨–巴克斯特关系 (3.1)。下文中我们采用形式 L^+，并省略上标 $+$。

由 $L_I(u_I)$ (3.3) 的有序矩阵乘积构成的单值矩阵，以及由投影后的 $L_I(u_I^+,\ u_I)$ 构成的单值矩阵，都满足基本杨–巴克斯特关系 (3.1)。

$$T(\mathbf{u})=L_1(u_1^+,u_1)...L_N(u_N^+,u_N),\quad \mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1 & ...,u_N\\ u_1^+ & ...,u_N^+\end{pmatrix} \tag{3.16}$$

每一点处均为 Φ 齐次的 N 点函数，满足条件

$$T(\mathbf{u})\ \Phi=IE(\mathbf{u})\ \Phi \tag{3.17}$$

称为杨代数对称关联函数（YSC） [78]。左侧有一个算符值矩阵在作用，右侧则是单位矩阵 I，以及依赖于参数集合 $\mathbf{u}$ 的特征值。Φ 对参数的依赖在谱参数平移下保持不变，$u_I\to u_I+v$, $u_I^+\to u_I^++v$。YSC 是相应杨代数表示中的不变量。

作为 (3.17) 的解，我们也接受涉及分布的表达式，以扩展表示空间 $V_1\otimes\cdots\otimes V_N$。$\delta$-分布应在 Dolbeault 意义下理解（参见 [74]），其自变量不得限制为实数值。

通过对底层正则对 (3.7) 施行基本正则变换，其中此变换可以应用于指标值集合 I,a 的一个子集，单值矩阵和对称关联函数会获得其他表示形式。在接下来的应用中，螺旋度表示发挥着重要作用。我们将在第 3.4 小节中对其进行描述。

下一小节中，我们将概述 YSC 的构造方法。杨-巴克斯特算子及相应的 RLL关系，是其中一种方法所用的工具，将在第 3.3 小节中讨论。

YSC 构造的示例将在第 3.5 小节中介绍。YSC 作为对称积分算子的核所起的作用，将在第 3.6 小节中讨论。

3.2 YSC 构造方法

对于一个点的情形，我们可以找到平凡的 YSC，$N=1$。

$$L(u,u)\cdot 1=(u+1)1,\quad L(u-n,u)\cdot\delta(\mathbf{x})=u\delta^{(n)}(\mathbf{x}).$$

单值矩阵 $T_{1,2..,N}$ 可以视为乘积 $T_{1,2..,N}=T_{1,2,...,N_1}T_{N_1+1,...,N}$，因此也可以视为 YSC 的乘积，

$$\Phi_{1,..,N_1}\cdot\Phi_{N_1,...,N}, \tag{3.18}$$

第一个满足 (3.17)，其中包含 $T_{1,\ 2,\ ...N_1}$；第二个满足 (3.17)，其中包含 $T_{N_1+1,\ ...N}$，两者的乘积是一个满足 (3.17) 的 YSC。

3.2.1 卷积方法

在乘积关联函数 (3.18) 中，标签为 1，...N_1 和 N_1+1，...N 的点彼此不连通。通过将第一个因子和第二个因子中的一些点对应起来，并对这些对应点积分，可以从乘积得到连通YSC。我们以两个三点关联函数的卷积为例说明这一点，并推导使结果满足 YSC 条件的表示参数条件。

我们推导使 YCS 的单点卷积成为 YSC 的条件。考虑两个三点 YSC 的卷积

$$\Phi_{1,2,3,4}=\int d\mathbf{x}_0\Phi_{1,2,0}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_0)\bar{\Phi}_{0,3,4}(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_3,\mathbf{x}_4),$$

它们各自满足 (3.17)

$$L_1(u_1^+,u_1)L_2(u_2^+,u_2)L_0(u_0^+,u_0)\Phi_{1,2,0}=E\ \Phi_{1,2,0},$$
$$L_0(v_0^+,v_0)L_3(u_3^+,u_3)L_4(u_4^+,u_4)\bar{\Phi}_{0,3,4}=\bar{E}\ \bar{\Phi}_{0,3,4}.$$

我们计算四阶单值矩阵对 $\Phi_{1,\ 2,\ 3,\ 4}$ 的作用

$$L_1(u_1^+,u_1))L_2(u_2^+,u_2)L_3(u_3^+,u_3)L_4(u_4^+,u_4)\Phi_{1,2,3,4}=$$

$$L_1(u_1^+,u_1))L_2(u_2^+,u_2)\int d\mathbf{x}_0\Phi_{1,2,0}\ \bar{E}(L_0(v_0^+,v_0))^{-1}\bar{\Phi}_{0,3,4}.$$

分部积分将作用于 $\bar{\Phi}$ 的 L_0^{-1} 移至作用于 Φ 的 L_0^{-1T}。若满足以下条件，结果与Φ_{1234} 成正比

$$(L_0(v_0^+,v_0))^{-1T}=constL_0(u_0^+,u_0).$$

我们计算该条件

$$(L_0(v_0^+,v_0))^{-1}=const(L_0(u_0^+,u_0))^T,$$

利用 (3.13) 和 (3.14)

$$L_0(-u_0^+-1-n,-u_0-1)=constL_0(-v_0-1,-v_0^+-1),$$

并得到关于表示参数的所需条件

$$u_0=v_0^+,\quad u_0^+=v_0-n. \tag{3.19}$$

3.2.2 循环性

若 Φ 满足 YSC 条件 (3.17)，且 $T(\mathbf{u})$，那么将点序列从 $1,2,...,N$改为 $2,...,N,1$，并按照循环规则改变参数后，它也满足 $T(\mathbf{u}')$ 的这一条件

$$\mathbf{u}'=\begin{pmatrix}u_2 & ... & u_N & u_1-n\\ u_2^+ & ... & u_N^+ & u_1^+-n\end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

循环操作不会影响与点 I 相关联的权重。我们将在权投影 (3.12) 之前的情形下表述并证明循环规则 (3.20)。

$$L_1(u_1)L_2(u_2)...L_N(u_N)\Phi=E\Phi$$

由反演可得

$$L_2(u_2)...L_N(u_N)\Phi=EL_1^{-1}(u_1)\Phi$$

以及由矩阵转置可得 (3.10)

$$L_N^t(u_N)...L_2^t(u_2) = E(L_1^{-1}(u_1))^t\Phi = E(L_1^t(u_1-n))^{-1}\Phi.$$

乘 以 $L_1^t(u_1-n)$，并再次进行矩阵转置，我们得到

$$L_2(u_2)...L_N(u_N)L_1(u_1-n)\Phi = E\Phi.$$

由此，我们证明了（3.20）。

反演（3.13）得到点顺序反转的 YSC。

3.2.3 R 算子方法

若 Φ 满足关于 $T(\mathbf{u})$ 的 YSC 条件（3.17），则可找到算符 $R_{I,I+1}(u_I-u_{I+1})$ 和 $R_{I+1,I}(u_I^+-u_{I+1}^+)$，使它们作用于 Φ 后得到一个 YSC，其单值矩阵的参数集由$\mathbf{u}$ 通过交换相邻元素得到：第一种情况下交换上排的 u_I 和 u_{I+1}，第二种情况下交换下排的 u_I^+ 和 u_{I+1}^+。通过此类 R 操作，我们可以构造更多连通YSC。与点 $I, I+1$ 相关的权重在 $R_{I,I+1}$ 的作用下，从 $2\ell_I = u_I^+ - u_I$, $2\ell_{I+1} = u_{I+1}^+ - u_{I+1}$ 变为 $2\ell_I' = u_I^+ - u_{I+1}, 2\ell_{I+1}' = u_{I+1}^+ - u_I$；或者在 $R_{I+1,I}$ 的作用下，变为 $2\ell_I'' = u_{I+1}^+ - u_I, 2\ell_{I+1}'' = u_I^+ - u_{I+1}$。

3.3 杨-巴克斯特算子

在基本杨–巴克斯特关系（3.1）中， R 矩阵交织基本 n 维表示的张量积。我们将得到一个更一般的 R 算子，用于交织 JS 型表示的张量积。它应满足如下形式的杨–巴克斯特关系

$$R_{12}(u-v)L_1(u)L_2(v) = L_1(v)L_2(u)R_{12}(u-v), \tag{3.21}$$

$$(L_1(u))_{ab} = \delta_{ab}u + \partial_a^1 x_b^1, \quad (L_2(u))_{ab} = \delta_{ab}u + \partial_a^2 x_b^2.$$

该关系涉及矩阵乘积 $L_1(u)L_2(v)$。 R_{12} 不是矩阵，即不作用于基本表示指标，而是作用于两组正则对 x_a^1， ∂_a^1 和x_a^2， ∂_a^2。

我们将（3.21）视为 R_{12} 的定义关系，并使用试探形式求解它

$$R_{12}(u) = \int \mathrm{d}c\, \phi(c) e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}.$$

我们计算移位算子作用于 L 矩阵乘积的结果:

$$e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}\underline{\partial}_1 = (\underline{\partial}_1 + c\underline{\partial}_2)e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}, \qquad e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}\mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_2 - c\mathbf{x}_1)\, e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)},$$

$$e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}(L_1^+(u)L_2^+(v))_{ab}e^{c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} = \left(L_{1ac}^+(u) + c\partial_{ad}^2 x_{dc}^1\right)\left(L_{2cb}^+(v) - c\partial_{cd}^2 x_{db}^1\right) =$$

$$\left(L_1^+(v)L_2^+(u)\right)_{ab} + \left(L_2^+(0) - L_1^+(0)\right)_{ab}\{[u-v+c(\underline{x}_1\cdot\underline{\partial}_2)] - c[u-v-1+c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)]\}.$$

第二项的贡献为零这一条件对$\phi(c)$施加了一个微分方程，因为

$$\int \mathrm{d}c\, \phi(c)\cdot c\cdot(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} = -\int \mathrm{d}c\, \phi(c)\cdot c\cdot\partial_c\, e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} = \int \mathrm{d}c\, \partial_c(c\phi(c))\, e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}.$$

在最后一步中，我们假设分部积分不产生边界项，因为对于闭合曲线，这一假设成立。因此，对 ϕ 的条件为

$$\partial_c(c\phi(c)) + (u-v)\phi(c) = 0,$$

其解为

$$\phi(c) = \frac{1}{c^{1+u-v}}.$$

第三项的消失条件可以写成

$$0 = \partial_c(c^2\phi(c)) + c(u-v-1)\phi(c) = c[\partial_c(c\phi(c)) + (u-v)\phi(c)].$$

我们看到，这并不意味着对 $\phi(c)$ 还有进一步的条件。因此我们证明了

$$R_{12}(u) = \int \frac{\mathrm{d}c}{c^{1+u}} e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} \tag{3.22}$$

在满足简单的分部积分规则时，满足杨–巴克斯特关系。如果后一个规则不同，那么上述步骤会导出相应的修正。

现在我们为投影的 L 算符（3.12）推导两个杨–巴克斯特关系。我们注意到，上述 R_{12} 解中包含的平移操作会影响伸缩算子

$$e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}(\underline{x}_1\underline{\partial}_1)e^{c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} = (\underline{x}_1\underline{\partial}_1) + c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2), \quad e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}(\underline{x}_2\underline{\partial}_2)e^{c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} = (\underline{x}_2\underline{\partial}_2) - c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2).$$

通过分部积分，我们得到

$$\int dc\phi(c)c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} = -\int dc\phi(c)c\partial_c e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} =$$

$$\int dc(\partial_c c\varphi(c))e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)} = (u-v)\int dc\varphi(c)e^{-c(\underline{x}_1\underline{\partial}_2)}.$$

这样我们有

$$R_{12}(u-v)\,(v + (\underline{x}_1\underline{\partial}_1))\,R_{12}^{-1}(u-v) = u + (\underline{x}_1\underline{\partial}_1), \quad R_{12}(u-v)\,(u + (\underline{x}_2\underline{\partial}_2))\,R_{12}^{-1}(u-v) = v + (\underline{x}_2\underline{\partial}_2)$$

or

$$R_{12}(u-v)\Pi_1(2\ell_1) = \Pi_1(2\ell_1+u-v)R_{12}(u-v), \quad R_{12}(u-v)\Pi_2(2\ell_2) = \Pi_2(2\ell_2-u+v)R_{12}(u-v)。 \tag{3.23}$$

这意味着，对投影的 L 而言，(3.21) 得出了一个类似的关系，其中 u 和 v 发生置换，但两边的附加参数相同。

$$R_{12}(u-v)L_1(u^+,u)L_2(v^+,v) = L_1(u^+,v)L_2(v^+,u)R_{12}(u-v). \tag{3.24}$$

现在，我们应用投影的 L (3.13) 的逆关系，得到第一个参数发生置换的杨–巴克斯特关系。由上一个关系 (3.24)，我们有

$$R_{12}(u-v)(L_2(v^+,v))^{-1}(L_1(u^+,u))^{-1} = (L_2(v^+,u))^{-1}(L_1(u^+,v))^{-1}R_{12}(u-v).$$

逆关系 (3.13) 意味着

$$R_{12}(u-v)L_2(-v-1,-v^+-1)L_1(-u-1,-u^+-1) =$$

$$L_2(-u-1,-v^+-1)L_1(-v-1,-u^+-1)R_{12}(u-v).$$

我们交换标签 $1 \leftrightarrow 2$,

$$R_{21}(u-v)L_1(-v-1,-v^+-1)L_2(-u-1,-u^+-1) =$$

$$L_1(-u-1,-v^+-1)L_2(-v-1,-u^+-1)R_{21}(u-v),$$

并将表示参数替换为

$$u' = -v^+ - 1, v' = -u^+ - 1, u'^+ = -v - 1, v'^+ = -u - 1$$

以获得

$$R_{21}(u'^+ - v'^+)L_1(u'^+, u')L_2(v'^+, v') = L_1(u'^+, v')L_2(v'^+, u')R_{21}(u'^+ - v'^+). \tag{3.25}$$

现在可以省略撇号。我们得到了将 L 算符投影到确定权重后的 Yang-Baxter 关系，其形式由第一个或第二个自变量的置换刻画。这便得到了上述 YSC 的 R 运算规则。

反复应用这一规则，就可以从以下形式的平凡乘积构造 YSC：在 K 个 N 点上取狄拉克δ分布，在其他点上取常数函数，例如：

$$\Phi_{K,N;0}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N) = \Pi_{L=1}^K \delta((\mathbf{x}_L).$$

R 算符可表示为关于移位算子（3.22）的围道积分，由此得到一般形式：

$$\Phi_{K,N}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N) = \int \varphi(c)\Pi_{L=1}^K dc_{L,K+1}...dc_{L,N}\delta(\mathbf{x}_L - c_{L,K+1}\mathbf{x}_{K+1} - c_{L,N}\mathbf{x}_N). \tag{3.26}$$

积分变量可视为格拉斯曼簇 $\mathcal{M}_{K,N}$ 上的坐标。被积函数 $\varphi(c)$ 包含了特定 YSC 的信息。起始 YSC $\Phi_{K,N;0}$ 中各点彼此不连通，也可写成这种形式，其中 $\varphi(c)$ 是$c_{L,M}$ 上狄拉克δ分布的乘积。如果各点最大程度地连通，那么由元素 $c_{L,M}, L = 1, ...K;\ M = 1, ..., N$ 构成的矩形矩阵具有最大秩，积分则遍历 $\mathcal{M}_{K,N}$ 的最大舒伯特胞腔。

3.4 螺旋度表示

我们注意到，JS表示的 L 算符（3.5）的两种形式 L^+, L^- 由基本的正则变换（3.7）联系起来。在此，变换对指标值 $a = 1, ...n$的作用是一致的。现在我们只考虑偶数 $n = 2m$的情况。我们将指标范围分成两部分：$1, ..., m$ 和 $m + 1, ..., 2m$，并将第一部分标记为 $\alpha = 1, .., m$，第二部分标记为 $\dot{\alpha}= 1, ..., m$。采用相应修改后的变换，即仅对指标值 $a = \alpha = 1, ..., m$ 有非平凡作用，

$$\begin{pmatrix} x_{I,\alpha} \\ \partial_{I,\alpha} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \partial^\lambda_{I,\alpha} \\ -\lambda_{I,\alpha} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{I,m+\dot{\alpha}} \\ \partial_{I,m+\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{I,\dot{\alpha}} \\ \bar{\partial}^\lambda_{I,\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

将其应用于 L_I^+ （3.5），便得到螺旋度形式 L_I^λ，它以 $m \times m$ 块的形式出现（对任意 I）

$$L^\lambda_{\alpha,\beta} = -\lambda_\alpha \partial^\lambda_\beta, \quad L^\lambda_{\alpha,\dot{\beta}} = -\lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\beta}},$$

$$L^\lambda_{\dot{\alpha},\beta} = \bar{\partial}^\lambda_{\dot{\alpha}} \partial^\lambda_\beta, \quad L^\lambda_{\dot{\alpha},\dot{\beta}} = \bar{\partial}^\lambda_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}.$$

对伸缩算子（$x\partial$）施加变换后得到

$$(\underline{x\partial}) \to -\partial^\lambda_\alpha \lambda^\alpha + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\lambda\ \dot{\alpha}} = -m + 2\hat{h}$$

我们注意到，对于 $m=2$，式（3.27）是式（2.6）、（2.7）的反演。鉴于其在ˆ散射中的应用，我们将其称为 h 螺旋度。其特征值与膨胀权重之间的关系为

$$2h = m + 2\ell. \tag{3.28}$$

R_{12}^{λ} 的表达式可由 $R_{12}(u)$ 的表达式（3.22）根据正则变换（3.27）代入得到

$$(\underline{x}_1\underline{\partial}_2) \to -\partial_{1\alpha}^{\lambda}\lambda_2^{\alpha} + \bar{\lambda}_{1\dot{\alpha}}\bar{\partial}_2^{\dot{\lambda}\dot{\alpha}}. \tag{3.29}$$

YSC 条件（3.17）特别意味着

$$\sum_I L^{\lambda}_{I\alpha\dot{\alpha}}\ \Phi^{\lambda} = \sum_I \lambda_{I\alpha}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\ \Phi^{\lambda} = 0. \tag{3.30}$$

$\Phi_{K,N}$ （3.26）变换到螺旋度表示后得到

$$\Phi^{\lambda}_{K,N}(\lambda_1,\bar{\lambda}_1...,\lambda_N,\bar{\lambda}_N) = \int \varphi(c)\Pi_{L=1}^{K} dc_{L,K+1}...dc_{L,N}$$

$$\delta^{(m)}(\bar{\lambda}_L - c_{L,K+1}\bar{\lambda}_{K+1} - c_{L,N}\bar{\lambda}_N)\Pi_{M=K+1}^{N}\delta^{(m)}(\lambda_M + c_{1,M}\lambda_1 + ... + c_{K,M}\lambda_K). \tag{3.31}$$

现在，我们有 N 个 m 维狄拉克δ分布因子，而不是 K 个 $n=2m$ 维狄拉克δ分布因子。被积函数 $\varphi(c)$ 没有变化。（3.30）可由狄拉克δ分布自变量所蕴含的线性方程推出。这意味着，因子 $\delta^{(2m)}(\sum_I \lambda_{I\alpha}\bar{\lambda}_{I\dot{\alpha}})$ 可以分离出来。

3.5 YSC 构造示例

3.5.1 二点与三点

经过一次 R 操作，我们得到二点 YSC

$$\Phi_{12}^{-+}(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = R_{21}(u_1^+ - u_2)\delta(\mathbf{x}_1) = \int \frac{dc_{12}}{c_{12}^{1+u_1^+-u_2}}\delta(\mathbf{x}_1 - c_{12}\mathbf{x}_2).$$

我们用下标 I 简写 Φ 对点$\mathbf{x}_I$ 的依赖关系。

我们从平凡的三点关联函数开始构造三点关联函数

$$\Phi_{123,0}^{--+} = \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2), \quad \Phi_{123,0}^{-++} = \delta(\mathbf{x}_1).$$

相应的单值矩阵由参数集 $\mathbf{u}$ 刻画，这些参数通过 u_I 和 u_I^+ 的行（3.16）方便地展示出来。我们用参数的位置索引 I 来简写参数，必要时再加上上标 $+$，以表示平移 $-n$。当 $\Phi_{123}^{--+}{}_{,0}$ 时，我们有

$$\mathbf{u}^{--+(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1^+ & 2^+ & 3 \end{pmatrix},$$

而在$\Phi_{123\,0,}^{-++}$的情况下，

$$\mathbf{u}^{-++(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1^+ & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

通过一次 R 运算，我们得到

$$\Phi_{123,1}^{--+} = R_{31}(u_1^+ - u_3)\Phi_{123,0}^{--+} = \int \frac{c_{13}}{c_{13}^{1+u_1^+-u_3}}\delta(\mathbf{x}_1 - c_{13}\mathbf{x}_3)\delta(\mathbf{x}_2)$$

with

$$\mathbf{u}^{--+(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2^+ & 1^+ \end{pmatrix}.$$

通过第二次 R 运算，我们得到完全连通关联函数。

$$\Phi^{--+}_{123,2} = R_{32}u_2^+ - u_1^+)R_{31}(u_1^+ - u_3)\Phi^{--+}_{123,0} = \int \frac{dc_{13}}{c_{13}^{1+u_1^+-u_3}} \frac{dc_{23}}{c_{23}^{1+u_2^+-u_1^+}} \delta(\mathbf{x}_1 - c_{13}\mathbf{x}_3)\delta(\mathbf{x}_2 - c_{23}\mathbf{x}_3) \quad (3.32)$$

with

$$\mathbf{u}^{--+(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1^+ & 2^+ \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

对于另一种情况，我们有

$$\Phi^{-++}_{123,1} = R_{31}(u_1^+ - u_3)\delta(\mathbf{x}_1) = \int \frac{dc_{13}}{c_{13}^{1+u_1^+-u_3}} \delta(\mathbf{x}_1 - c_{13}\mathbf{x}_3)$$

with

$$\mathbf{u}^{-++(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1^+ \end{pmatrix}.$$

完全连通关联函数在下一步中得到：

$$\Phi^{-++}_{123,2} = R_{21}(u_3 - u_2)R_{31}(u_1^+ - u_3)\delta(\mathbf{x}_1) = \int \frac{dc_{13}}{c_{13}^{1+u_1^+-u_3}} \frac{dc_{12}}{c_{12}^{1+u_3-u_2}} \delta(\mathbf{x}_1 - c_{12}\mathbf{x}_2 - c_{13}\mathbf{x}_3) \quad (3.34)$$

with

$$\mathbf{u}^{-++(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1^+ \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

3.5.2 四点

我们通过两种方式演示如何构造连通的四点 YSC：首先，对二点 YSC 的乘积进行 R 操作；其次，将两个三点 YSC 卷积后再进行 R 操作。

我们从二点 YSC 的乘积开始：

$$\Phi_{1234,2} = \Phi_{12}\Phi_{34} = R_{21}(u_1^+ - u_2)R_{43}(u_3^+ - u_4)\delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_3) =$$

$$\int \frac{dc_{12}dc_{34}}{c_{12}^{1+u_1^+-u_2} c_{34}^{1+u_3^+-u_4}} \delta(\mathbf{x}_1 - c_{12}\mathbf{x}_2)\delta(\mathbf{x}_3 - c_{34}\mathbf{x}_4).$$

相应的单值矩阵由以下参数集表征

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1^+ & 4 & 3^+ \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

为了得到完全连通的四点 YSC，我们对其施加 $R_{23}R_{32}$。适当的自变量可由（3.36）读出。施加 R_{32} 后得到

$$\Phi_{1234,3} = R_{32}(u_1^+ - u_4)\Phi_{1234,2} =$$

$$\int \frac{dc_{23}dc_{12}dc_{34}}{c_{23}^{1+u_1^+-u_4} c_{12}^{1+u_1^+-u_2} c_{34}^{1+u_3^+-u_4}} \delta(\mathbf{x}_1 - c_{12}\mathbf{x}_2 - c_{12}c_{23}c_{34}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_3 - c_{34}\mathbf{x}_4).$$

代入 $c_{14}=c_{12}c_{23}c_{34}$ 得到

$$\Phi_{1234,3}=\int\frac{dc_{23}dc_{12}dc_{34}}{c_{14}^{1+u_1^+-u_4}c_{12}^{1+u_4-u_2}c_{34}^{1+u_3^+-u_1^+}}\delta(\mathbf{x}_1-c_{12}\mathbf{x}_2-c_{14}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_3-c_{34}\mathbf{x}_4).$$

单值化参数为

$$\mathbf{u}^{(3)}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1^+&3^+\end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

这个关联函数仍未完全连通。通过 R_{23} 的作用，可得到完全连通的关联函数

$$\Phi_{1234,4}=\int\frac{dc_{32}dc_{23}dc_{12}dc_{34}}{c_{32}^{1+u_2-u_3}c_{14}^{1+u_1^+-u_4}c_{12}^{1+u_4-u_2}c_{34}^{1+u_3^+-u_1^+}}\delta(\mathbf{x}_1-c_{12}\mathbf{x}_2-c_{14}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_3-c_{32}\mathbf{x}_2-c_{34}\mathbf{x}_4),$$

with

$$\mathbf{u}^{(4)}=\begin{pmatrix}1&3&2&4\\2&4&1^+&3^+\end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

现在我们展示如何通过卷积方法得到相同的结果。
我们考虑三点 YSC (3.34) 和 (3.32) 的卷积,

$$\int d\mathbf{x}_0\Phi^{-++}_{120,2}(\mathbf{u})\Phi^{--+}_{034,2}(\mathbf{v}).$$

考虑到参数集 (3.35) 和 (3.33)，由 (3.19) 可得谱参数的条件,

$$v_0-n=u_1-n,u_0-n=v_4-n. \tag{3.39}$$

因此我们有

$$\int\frac{dc_{12}dc_{10}dc_{04}dc_{34}}{c_{12}^{1+v_4-u_2}c_{10}^{1+u_1^+-v_4}c_{04}^{1+u_1-n-v_4}c_{34}^{1+u_2^+-u_1^+}}\delta(\mathbf{x}_1-\widetilde{c}_{12}\mathbf{x}_2-\widetilde{c}_{10}c_{04}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_3-c_{34}\mathbf{x}_4).$$

代入 $c_{14}=c_{10}c_{04}$ 得到

$$\int\frac{dc_{04}}{c_{04}}\int\frac{dc_{12}dc_{14}dc_{34}}{c_{12}^{1+v_4-u_2}c_{14}^{1+u_1^+-v_4}c_{34}^{1+u_2^+-u_1^+}}\delta(\mathbf{x}_1-\widetilde{c}_{12}\mathbf{x}_2-\widetilde{c}_{14}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_3-c_{34}\mathbf{x}_4).$$

第一个积分可视为一个无关因子。结果可以表示为由三个 R 算符直接生成，正如上文操作的倒数第二步所示

$$R_{32}(u_1^+-u_4)R_{21}(u_1^+-u_2)R_{43}(u_3^+-u_4)\delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_3)$$

代入 $c_{14}=c_{12}c_{23}c_{34}$ 后，即它与 $\Phi_{1234,\ 3}$ 以及参数集 (3.37) 相一致。与上文一样，完全连通关联函数 (3.38) 由 R_{23} 的作用得到。因此，通过卷积两个三点 YSC 重构这个四点 YSC，可概括为

$$\Phi_{1234,4}=R_{23}(u_2-u_3)\int d\mathbf{x}_0\Phi^{-++}_{120,2}(\mathbf{u})\Phi^{--+}_{034,2}(\mathbf{v})|_{v|u}, \tag{3.40}$$

其中 $v|u$ 提示进行代入 (3.39)。

关联函数中的点似乎分为两种类型，用符号 ±标记。那些$\mathbf{x}_I$ 通过 $\delta(\mathbf{x}_I)$ 进入初始平凡关联函数 $\Phi_{...,\ 0}$ 的点，我们用 $-$ 标记，其他点则用 $+$ 标记。特别是,

上文的四点 YSC 示例带有符号 $--+-+$。对于完全连通 YSC，这种符号分配并不重要。一般而言也是如此，我们将在四点情形下证明这一点。

标准的 $--+-+$ 形式

$$\Phi_{1234}^{--+-+}=\int dc\varphi^{--+-+}(c_{12},c_{14},c_{32},c_{34})\delta(\mathbf{x}_1-c_{12}\mathbf{x}_2-c_{14}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_3-c_{32}\mathbf{x}_2-c_{34}\mathbf{x}_4)$$

可以改写为例如

$$\Phi_{1234}^{--++}=\int dc'\varphi^{--++}(c')\delta(\mathbf{x}_1-c'_{13}\mathbf{x}_3-c'_{14}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_2-c'_{23}\mathbf{x}_3-c'_{24}\mathbf{x}_4)$$

其中

$$\varphi^{--++}(c'_{13},c'_{14},c'_{23},c'_{24})=c_{23}'^{n-4}\varphi^{--+-+}(\frac{c'_{13}}{c'_{23}},\frac{c'_{14}c'_{23}-c'_{24}c'_{13}}{c'_{23}},\frac{1}{c'_{23}},-\frac{c'_{24}}{c'_{23}}).\tag{3.41}$$

因此，最大连通关联函数 (3.38) 变换为 $--++$ 形式:

$$\Phi_{1234,4}^{--++}=\int\frac{dc'_{13}dc'_{14}dc'_{23}dc'_{24}}{(c'_{13})^{1+u_4-u_2}(c'_{24})^{1+u_3^+-u_1^+}(c'_{14}c'_{23}-c'_{24}c'_{13})^{1+u_1^+-u_4}}\tag{3.42}$$

$$\delta(\mathbf{x}_1-c'_{13}\mathbf{x}_3-c'_{14}\mathbf{x}_4)\ \delta(\mathbf{x}_2-c'_{23}\mathbf{x}_3-c'_{24}\mathbf{x}_4)$$

这两个表达式 $\Phi_{1234}^{--+-+},_4$ 和 $\Phi_{1234}^{--++},_4$ 是等价的，特别是，它们都满足 YSC 条件 (3.17)，并具有相同的参数单值矩阵 (3.38)。后一个表达式 (3.42) 可以直接由 $\Phi_{1234}^{--++},_0=\delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2)$ 通过 R 运算得到

$$\Phi_{1234,4}^{--++}=R_{12}(v_1-v_2)R_{21}(v_4-v_3)R_{32}(v_2^+-v_3)R_{41}(v_1^+-v_4)\ \delta(\mathbf{x}_1)\delta(\mathbf{x}_2)\tag{3.43}$$

以及关联函数 对应于单值矩阵，其参数 $\mathbf{v}$ 简写为以下模式

$$\mathbf{v}^{(4)}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\3&4&2^+&1^+\end{pmatrix}.\tag{3.44}$$

参数 $\mathbf{u}^{(4)}$ 和 $\mathbf{v}^{(4)}$ 之间的关系为 $u_1=v_2,u_2=v_3,u_3=v_1,u_4=v_4$。事实上，式 (3.43) 右端的显式形式为

$$\int\frac{dc_{21}dc_{12}dc_{23}dc_{14}}{c_{21}^{1+v_1-v_2}c_{12}^{1+v_4-v_3}c_{23}^{1+v_1^+-v_3}c_{14}^{1+v_1^+-v_4}}$$

$$\delta(\mathbf{x}_1-c_{12}c_{23}\mathbf{x}_3-c_{14}\mathbf{x}_4)\delta(\mathbf{x}_2-(1+c_{12}c_{21}+1)c_{23}\mathbf{x}_3-c_{21}c_{14}\mathbf{x}_4)$$

转换为标准 $--++$ 形式 (3.41) 后得到

$$\Phi_{1234,4}^{--++}=\int\frac{dc'_{13}dc'_{14}dc'_{23}dc'_{24}}{c_{13}'^{1+v_4-v_3}c_{24}'^{1+v_1-v_2}(c'_{14}c'_{23}-c'_{24}c'_{13})^{1+v_2^+-v_4}}\tag{3.45}$$

$$\delta(\mathbf{x}_1-c'_{13}\mathbf{x}_3-c'_{14}\mathbf{x}_4)\ \delta(\mathbf{x}_2-c'_{23}\mathbf{x}_3-c'_{24}\mathbf{x}_4)$$

使用单值化参数 (3.44)。我们将使用 $\Phi_{1234;4}^{--++}$ (3.43) 以及该 R 操作构造的中间 YSC $\Phi_{1234;2}^{--++}$ 和 $\Phi_{1234;3}^{--++}$。

3.5.3 交叉

我们回顾一下，参数 u_I^+ ， u_I 与点 I处 YSC 的膨胀权重相关，如 $2\ell_I = u_I^+ - u_I$ 所示。关联函数 $\Phi_{K,\ N}$ 中的权重集合满足约束

$$\sum_{I=1}^{N} 2\ell_I + nK = 0. \tag{3.46}$$

上文构造的四点 YSC$\Phi_{1234,\ 4}$ 的权重受到更多限制，

$$2\ell_1 + 2\ell_3 + n = 0, \quad 2\ell_2 + 2\ell_4 + n = 0. \tag{3.47}$$

我们打算构造一个四点 YSC，使这类约束改为连接点 1，4 和 2， 3。为此，我们对 YSC (3.44)、(3.45) 作用额外的 R 算符，

$$R_{43}(v_2 - v_1)R_{34}(v_3 - v_4)\Phi^{--++4}_{1234;4}.$$

该作用会影响狄拉克δ分布 (3.45) 的自变量，

$$\delta(\mathbf{x}_1 - (c_{13} - c_{14}\bar{c}_{42})\mathbf{x}_3 - (c_{14}(1+\bar{c}_{43}\bar{c}_{34}) - c_{13}\bar{c}_{34})\mathbf{x}_4)\ \ \delta(\mathbf{x}_2 - (c_{23} - c_{24}\bar{c}_{42})\mathbf{x}_3 - (c_{24}(1+\bar{c}_{43}\bar{c}_{34}) - c_{23}\bar{c}_{34})\mathbf{x}_4).$$

通过变量 c_{I3}， c_{I4} 到 $\widetilde{c}_{I3}$， $\widetilde{c}_{I4}(I = 1,\ 2)$ 的变换，可恢复标准形式 (3.26)，

$$\begin{pmatrix} \widetilde{c}_{I3} \\ \widetilde{c}_{I4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{c}_{43} \\ -\bar{c}_{34} & 1 + \bar{c}_{43}\bar{c}_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{I3} \\ c_{I4} \end{pmatrix},$$

由依赖于变量 $\bar{c}_{34}$、 $\bar{c}_{43}$ 的矩阵给出，分别对应额外的 R_{43}、 R_{34}。

我们将 $\Phi^{--++}_{1234\ 4}$,(3.45) 的关联函数被积函数 $\varphi(c)$ 变换到新的变量

$$(\varphi(c)^{-1} \cdot \bar{c}_{34}^{1+v_2-v_1}\bar{c}_{43}^{1+v_3-v_4} = ((1 + \bar{c}_{43}\bar{c}_{34})\widetilde{c}_{13}\bar{c}_{43}\widetilde{c}_{14})^{1+v_4-v_3}\ (\bar{c}_{34}\widetilde{c}_{23} + \widetilde{c}_{24})^{1+v_1-v_2}$$

$$(\widetilde{c}_{13}\widetilde{c}_{24} - \widetilde{c}_{23}\widetilde{c}_{14})^{1+v_2^+-v_4} \cdot \bar{c}_{34}^{1+v_2-v_1}\bar{c}_{43}^{1+v_3-v_4} =$$

$$(\widetilde{c}_{13}\widetilde{c}_{24} - \widetilde{c}_{23}\widetilde{c}_{14})^{1+v_2^+-v_4}\bar{c}_{34}^2(\widetilde{c}_{23} + \frac{\widetilde{c}_{24}}{\bar{c}_{34}})^{1+v_1-v_2}\ \ \bar{c}_{43}^2(\widetilde{c}_{14} + \frac{\widetilde{c}_{13}}{\bar{c}_{43}}(1 + \bar{c}_{43}\bar{c}_{34}))^{1+v_4-v_3}.$$

我们对 $\bar{c}_{43}$、 $\bar{c}_{34}$ 积分。

$$\int \frac{d\bar{c}_{43}}{\bar{c}_{43}^2(\widetilde{c}_{14} + \frac{\widetilde{c}_{13}}{\bar{c}_{43}}(1 + \bar{c}_{43}\bar{c}_{34}))^{1+v_4-v_3}} = \widetilde{c}_{14}^{-1-v_4+v_3}\int \frac{dc'_{43}}{(1 + \frac{\widetilde{c}_{13}}{\widetilde{c}_{14}}\bar{c}_{34} + c'_{34}\frac{\widetilde{c}_{13}}{\widetilde{c}_{14}})^{1+v_4-v_3}}.$$

我们已代入 $c'_{43} = \bar{c}_{43}^{-1}$，接下来代入 $c''_{43} = c'_{43}\frac{\widetilde{c}_{13}}{\widetilde{c}_{14}} + 1 + \bar{c}_{34}\frac{\widetilde{c}_{13}}{\widetilde{c}_{14}}$，得到 — —

$$\frac{1}{\widetilde{c}_{13}\widetilde{c}_{14}^{v_4-v_3}}\int \frac{c''_{43}}{c''^{1+v_4-v_3}_{43}}.$$

˜类似地，我们代入 $c'_{34} = \frac{c_{24}}{\widetilde{c}_{23}\bar{c}_{34}}$,

$$\int \frac{d\bar{c}_{34}}{\bar{c}_{34}^2(\widetilde{c}_{23} + \frac{\widetilde{c}_{24}}{\bar{c}_{34}})^{1+v_1-v_2}} = \frac{1}{\widetilde{c}_{24}\widetilde{c}_{23}^{v_1-v_2}}\int \frac{c'_{34}}{c'^{1+v_1-v_2}_{43}}.$$

对 c''_{43}， c'_{34} 的积分会产生未定义但无关紧要的因子。因此，关联函数$R_{43}(v_2 - v_1)R_{34}(v_3 - v_4)\Phi^{--++,}$ $_4$ 具有标准形式 (3.26)，其被积函数为 $\widetilde{\varphi}$,

$$(\widetilde{\varphi}(c))^{-1} = c_{13}c_{14}^{v_4-v_3}c_{24}c_{23}^{v_1-v_2}(c_{23}c_{14} - c_{13}c_{24})^{1+v_2^+-v_4}, \tag{3.48}$$

以及　　单值矩阵 $L_1L_2L_3L_4$ 中 L 算符的参数简写为 b　　y

$$\mathbf{v}^{(4)c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1^+ & 2^+ \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

现在，权重限制为

$$2\ell_1 + 2\ell_4 + n = 0, \quad 2\ell_2 + 2\ell_3 + n = 0. \tag{3.50}$$

若要使具有相关权重的 YSC 相邻，则需应用循环性关系 (3.20)。同一个关联函数满足关于单值矩阵 $L_2L_3L_4L_1$ 的 YSC 关系，其中参数自变量可从以下内容读出

$$\mathbf{v}^{(4)cc} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2-n \\ 4 & 1^+ & 2^+ & 3-n \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

此处，最后一列中的 $-n$ 表示带有显式参数的最后一个因子是 $L_1(v_3-n,\ v_2-n$　　).

3.6 对称关联函数导出的积分算子

我们考虑以 YSC 为核的积分算子。这类算子以高度对称的方式作用，不仅是函数上的 $g\ell(n)$李代数作用（整体对称性）的同态，也是相关杨代数的同态。下面以作用于两个点的函数、且以四点 YSC 为核的算子为例加以说明 [79]。

我们定义 Q 在 $\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$上的作用为

$$Q\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \int d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' \psi(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2')\Phi(\mathbf{x}_2',\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1) \tag{3.52}$$

核满足 YSC 条件 (3.17)（重新标记 $1234 \to 2'1'21$）

$$L_{2'}(u_2'^+,u_2')L_{1'}(u_1'^+,u_1')L_2(u_2^+,u_2)L_1(u_1^+,u_1)\Phi(\mathbf{x}_2',\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1) = E(\mathbf{u})\Phi(\mathbf{x}_2',\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1).$$

所涉及的单值矩阵具有如下参数模式

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 2' & 1' & 2 & 1 \\ 2'^+ & 1'^+ & 2^+ & 1^+ \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

我们证明 Q 满足

$$L_2(u_2^+,u_2)L_1(u_1^+,u_1)Q = F((\mathbf{u}')QL_1(u_1'-n,u_1'^+)L_2(u_2'-n,u_2'^+), \tag{3.54}$$

$$F(\mathbf{u}') = \frac{E(\mathbf{u}')}{u_1'(u_1'^+ + 1)u_2'(u_2'^+ + 1)}.$$

事实上，由核满足的 YSC 条件可知，

$$L_2(u_2^+,u_2)L_1(u_1^+,u_1)Q = E(\mathbf{u})\int d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' \psi(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2')L_{1'}^{-1}(u_1'^+,u_1')L_{2'}^{-1}(u_2'^+,u_2')\Phi(\mathbf{x}_2',\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1).$$

我们进行分部积分，并假设积分区域不存在边界贡献，且关系 (3.11, 3.14) 适用。

$$E(\mathbf{u}')\int d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' (L_{1'}^{-1}(u_1'^+,u_1'))^T (L_{2'}^{-1}(u_2'^+,u_2'))^T \psi(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2')\Phi(\mathbf{x}_2',\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1) =$$

$$\frac{E(\mathbf{u}')}{u_1'(u_1'^{+}+1)u_2'(u_2'^{+}+1)}\int d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' L_{1'}(u_1'-n,u_1'^{+})L_{2'}(u_2'-n,u_2'^{+})\psi(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2')\Phi(\mathbf{x}_2',\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1).$$

T对任意函数证明的关系意味着算符关系 (3.54)

如果 $\Phi_{2'1'21}$ in (3.52) 是由 R operations 从$\Phi_{2'1'21;0}=\delta(\mathbf{x}_1')\delta(\mathbf{x}_2')$ 构造而成，那么它的参数$\mathbf{v}$ 是以下各项的置换:

$$\mathbf{v}^{(0)}=\begin{pmatrix}2' & 1' & 2 & 1\\ 2'^{+} & 1'^{+} & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

和 $E(\mathbf{u})=E(\mathbf{v}^{(0)})=v_1'v_2'(v_1+1)(v_2+1)$。

3.6.1 点置换算符

对于 $\Delta=\Phi^{--++}_{2'1'21;2}$ (3.43) 的情况，我们有

$$\Delta(\mathbf{x}_2',\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)=R_{22'}(v_{1'}^{+}-v_2)R_{12'}(v_{2'}^{+}-v_1)\delta(\mathbf{x}_1')\delta(\mathbf{x}_2'),$$

$$\mathbf{v}^{(2)}=\begin{pmatrix}2' & 1' & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1' & 2'\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{u}'=\mathbf{v}^{(2)}$ 表示 $v_{1'}=u_{1'},v_{2'}=u_{2'},v_1=u_1,v_2=u_2,u_{2'}^{+}=v_1,u_{1'}^{+}=v_2,u_2^{+}=v_{2'}{}',u_1^{+}=v_{2'}{}^{+}$，这意味着 $F(\mathbf{u}')=1$。将 (3.52) 中的核替换为 Δ 以及 $\mathbf{u}'=\mathbf{v}^{(2)}$，作为 (3.54) 的具体形式，我们得到由该核定义的相应算符 $\hat{}\Delta$ 满足

$$\hat{\Delta}L_1(v_{1'}-n,v_2)L_2(v_{2'}-n,v_1)=L_2(v_{1'}-n,v_2)L_1(v_{2'}-n,v_1)\hat{\Delta}. \tag{3.55}$$

因此，选取 $\Delta=\Phi^{--++}_{2'1'21;2}$ (3.43) 作为 (3.52) 中的核，我们得到置换算符 P_{12} 的表示，其作用为 $P_{12}(x_{1,a},\partial_{1,a})P_{12}=(x_{2,a},\partial_{2,a})$。

3.6.2 参数对置换算符

我们证明，核 $R^{++}_{1'2'}(v_1-v_2)\Delta=\Phi^{--++}_{2'1'21;3}$ 通过 (3.52) 定义了算符 $\hat{}$ $R_{12}=P_{12}R_{12}$，其中 R_{12} 满足 (3.24)。事实上，参数置换模式为

$$\mathbf{v}^{(3)}=\begin{pmatrix}2' & 1' & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1'^{+} & 2'^{+}\end{pmatrix}.$$

我们看到 $F(\mathbf{u}')=1$，而关系 (3.54) 指定了 $\mathbf{u}'=\mathbf{v}^{(3)}$ 到

$$\hat{R}_{12}(v_1-v_2)L_1(v_{1'}^{+},v_1)L_2(v_{1'}^{+},v_2)=L_2(v_{1'}^{+},v_2)L_1(v_{2'}^{+},v_1)\hat{R}_{12}(v_1-v_2). \tag{3.56}$$

该关系应与 (3.24) 进行比较。参数 v_1,v_2 及其底层正则对发生了置换，而参数 $\widetilde{v}_1^{+}=v_{2'}^{+}$ 和 $\widetilde{v}_2^{+}=v_{1'}^{+}$ 保持不变。

$\hat{}$ 接下来我们证明，由 (3.52) 定义的核 $R_{2'1'}(v_{2'}-v_{1'})\Delta$ 是算符 $R_{21}=P_{12}R_{21}$，其中 R_{21} 满足 (3.25)。事实上，置换模式为

$$\mathbf{v}^{(3')}=\begin{pmatrix}1' & 2' & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1'^{+} & 2'^{+}\end{pmatrix}.$$

再次，$F(\mathbf{u}')=1$。关系 (3.54) 指定了 $\mathbf{u}'=\mathbf{v}^{(3')}$ 到

$$\hat{R}_{21}(v_{2'}-v_{1'})L_1(v_{2'}^{+},v_2)L_2(v_{2'}^{+},v_1)=L_2(v_{1'}^{+},v_2)L_1(v_{2'}^{+},v_1)\hat{R}_{21}(v_{2'}-v_{1'}). \tag{3.57}$$

该关系应与（3.25）进行比较。参数 $\widetilde{v}_1^{+}=v_{2'}^{+}$，$\widetilde{v}_2^{+}=v_{1'}^{+}$ 与 underlying 正则对一起置换，而参数 v_1，v_2 保持不变。

3.6.3 完整的杨-巴克斯特算子

核 $R_{2'1}(v_{2'}-v_{1'})R_{1'2'}(v_1-v_2)^{\Delta}=\Phi^{--++}_{2'1'21}$；4（3.43）根据（3.52）定义了完整的杨–巴克斯特算符 $\mathbb{R}_{12}$。事实上，参数的置换模式为

$$\mathbf{v}^{(4)}=\begin{pmatrix}1' & 2' & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1'^{+} & 2'^{+}\end{pmatrix}.$$

我们找到 $F(\mathbf{u}')=1$，并且关系式（3.54）在 $\mathbf{u}'=\mathbf{v}^{(4)}$ 中得到

$$\hat{\mathbb{R}}_{12}(\widetilde{v}_1^{+}-\widetilde{v}_2^{+},v_1-v_2)L_1(\widetilde{v}_1^{+},v_1)L_2(\widetilde{v}_2^{+},v_2)=L_2(\widetilde{v}_2^{+},v_2)L_1(\widetilde{v}_1^{+},v_1)\hat{\mathbb{R}}_{12}(\widetilde{v}_1^{+}-\widetilde{v}_2^{+},v_1-v_2).\quad(3.58)$$

其中 $\widetilde{v}_1^{+}=v_{2'}-n$，$\widetilde{v}_2^{+}=v_{1'}-n$。参数和底层的正则对都进行了置换。与关联函数 $R_{2'1'}(v_{2'}-v_{1'})R_{1'2'}(v_1-v_2)^{\Delta}=\Phi^{--++}_{2'1'21}$; 中各点对应的权重由 $\mathbf{v}^{(4)}$ 计算为 $2\ell_{2'}=-2\ell_2-n=v_2-v_{1'}$、$2\ell_{1'}=-2\ell_1-n=v_1-v_{2'}$。$L$ 算符 L_1 和 L_2 中的权重分别为 $\widetilde{v}_1^{+}-v_1=2\ell_1$ 和 $\widetilde{v}_2^{+}-v_2=2\ell_2$。算符 $\mathbb{R}_{12}$ 取决于这些权重以及谱参数差 v_1-v_2。

3.6.4 交叉 YSC 的算符

我们通过对前一个完全连通关联函数进行交叉，构造了一个完全连通关联函数（ 3 48 $R_{12}\ v_{1'}^{+}-.$），（）（）; 。其参数模式由 $v_{2'}^{+}\ R_{23}\ v_2-v_1\ \Phi^{--++}_{2'1'21\ 4}$ $^{(4)}$ 3 44 $\mathbf{v}$（.）经过最后两列置换后得到，即（3.49），

$$\mathbf{v}^{(4)c}=\begin{pmatrix}1' & 2' & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2'^{+} & 1'^{+}\end{pmatrix}.$$

而在 $\Phi^{--++}_{2'1'21}$;4 中，次近点的权重彼此相关，$2\ell_{2'}+2\ell_2+n=0$；此处则有 $2\ell_{2'}+2\ell_1+n=0$。现在，关系（3.54）在$\mathbf{u}'=\mathbf{v}^{(4)c}$ 中得出

$$\mathbb{Q}L_1(v_{2'}^{+},v_1)L_2(v_{1'}^{+}-v_2)=L_2(v_{2'}^{+},v_1)L_1(v_{1'}^{+}-v_2)\mathbb{Q}\quad(3.59)$$

ˆ 它与 Δ 的关系 (3.55) 相比。两者都像点的置换 P_{12} 那样作用于单值矩阵 L_1L_2，但 $\mathbb{Q}$ 还取决于权重以及 v_1-v_2。

由后者经过循环置换得到的 YSC 具有这样的性质：相邻点的权重彼此相关，因为此时点序列为 $2'$，1，2，$1'$。参数置换模式为

$$\mathbf{v}^{(4)cc}=\begin{pmatrix}2' & 1 & 2 & 1'-n\\ 1 & 2'^{+} & 1'^{+} & 2-n\end{pmatrix}.$$

现在，关系 (3.54) 得出，其中 $\mathbf{u}'=\mathbf{v}^{(4)cc}$

$$\mathbb{Q}^{c}L_1(v_1^{+},v_{2'}^{+})L_2(v_{2'}^{+},v_1)=L_2(v_{1'}^{+},v_2)L_1(v_2^{+},v_{1'}^{+})\mathbb{Q}^{c}.\quad(3.60)$$

左侧单值化矩阵的权重彼此相关，右侧单值化矩阵的权重也彼此相关，但左边 L_1,L_2 的权重与右边出现的权重并无关联。与前面的情况不同，左边 L 算符的参数自变量并不是右边算符参数自变量的置换。除了权重之外，该算符还取决于 v_1-v_2。

4 散射振幅的应用

4.1 三点 YSC 与三点振幅

我们考虑 co　　螺旋度形式 (3.4) 中完全连接的三点 YSC，特别是 (3.34)　　.

$$\Phi^{\lambda-++}_{123,2}=\int\frac{dc_{13}dc_{12}}{c_{13}^{1+u_1^+-u_3}c_{12}^{1+u_3-u_2}}\delta^{(m)}(\bar\lambda_1-c_{12}\bar\lambda_2-c_{13}\bar\lambda_3)\delta^{(m)}(\lambda_2+c_{12}\lambda_1)\delta^{(m)}(\lambda_3+c_{13}\lambda_3))$$

单值化参数为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1^+\end{pmatrix}$$

并得到权重

$$2\ell_1=u_2-u_1,2\ell_2=u_3-u_1,2\ell_3=u_1^+-u_3. \tag{4.1}$$

δ函数自变量中的条件导致

$$\lambda^1_\alpha\bar\lambda^1_{\dot\alpha}+\lambda^2_\alpha\bar\lambda^2_{\dot\alpha}+\lambda^3_\alpha\bar\lambda^3_{\dot\alpha}=0. \tag{4.2}$$

确实，将第一个 delta 函数中的条件乘以 λ^1_α,

$$\bar\lambda^1_{\dot\alpha}\lambda^1_\alpha-c_{12}\bar\lambda^2_{\dot\alpha}\lambda^1_\alpha-c_{13}\bar\lambda^3_{\dot\alpha}\lambda^1_\alpha=0$$

我们利用其余的 delta 函数进行代入 $c_{12}\lambda^1_\alpha=\lambda^2_\alpha$，　$c_{13}\lambda^1_\alpha=\lambda^3_\alpha$ 并得到动量条件 (4.2)。

第二个和第三个条件的一个非平凡投影足以确定积分变量:

$$c^*_{12}=-\frac{<2\mu>}{<1\mu>},\ c^*_{13}=-\frac{<3\mu'>}{<1\mu'>}.$$

我们可以选择 $\mu=|3>$ 和 $\mu'=|2>$。对 c_{12}，　c_{13} 积分的结果为

$$\left(\frac{<1\mu'>}{<3\mu'>}\right)^{u_1^+-u_3}\left(\frac{<1\mu>}{<2\mu>}\right)^{u_3-u_2}$$

相差与参数无关的雅可比因子。后者可以通过比较该表达式在 $\lambda_I\to\mu_I^{-1}\lambda_I$ 下的缩放与 YSC 在螺旋度形式下的缩放定律$\mu_I^{2h_I}$来确定。

对于 $m=2$ ，利用 (4.1) 和 (3.28) 可得,

$$\Phi^{\lambda-++}=<12>^{2h_3+1}<13>^{2h_2+1}<23>^{2h_1+1}\ \delta^{(4)}(\bar\lambda^1\lambda^1+\bar\lambda^2\lambda^2+\bar\lambda^3\lambda^3)$$

在 $\eta=+1$ 的情况下，可重现表达式 (2.18)。 $\eta=-1$ 的情况可通过类似方式从Φ^{---+}_{123}，$_2$ (3.32) 得到。

由此，我们证明了三点振幅就是三点 YSC。

4.2 卷积构造与 BCFW

在第 3.2.1 节和第 3.5.2 节中，我们在三点这一特例下证明，YSC 的对称卷积可以构造出更多 YSC。推广到更高点的 YSC 显而易见。卷积是用正则对 x_a、∂_a、$a=1,\ldots\ldots,\ n$来表述的；具体而言，卷积意味着对两个关联函数中一个已识别点的坐标 x_a 进行积分。对于其他表示形式的 YSC，也可以重新表述卷积构造，特别是当 $n=2m$ 时的螺旋度形式。此时，积分是对该已识别点的螺旋度坐标 λ_α、$\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$、$\alpha=1,\ldots\ldots,\ m$、$\dot{\alpha}=1,\ldots\ldots,\ m$进行的。在将其应用于量子色动力学的散射振幅（$n=2m=4$）时，这一积分可以改写为对融合腿 $P_{\alpha\dot{\alpha}}=\lambda_\alpha\,\lambda_{\dot{\alpha}}$、$d^4P\delta$ 的壳上动量分量（P^2）以及一个相位的积分。由此，我们得到一种与式（2.17）中的第二个因子相容的形式。

每个关联函数中包含的能量-动量δ分布，导致所得关联函数整体具有能量-动量δ分布。

在第 3.5.2 节中，我们看到，两个完全连通的三点 YSC 卷积后得到的是一个四点 YSC，但它并非完全连通。特定的 R 操作（3.40）可得到完全连通 YSC。R 算符可表示为对移位算子（3.22）进行围道积分。在螺旋度表示中，它根据（3.29）呈现为

$$R_{IJ}(u)=\int_{\mathcal{C}}\frac{dc}{c^{1+u}}\exp(-c\bar{\lambda}_{J\dot{\alpha}}\bar{\partial}_I^{\dot{\alpha}}+c\lambda_{I\alpha}\partial_J^{\alpha}).$$

我们注意到，（2.17）中的第一个因子是后一种 R 算符表达式的一个特例。

通过这一比较，我们得出结论：在卷积构造 YSC 的基础上加入 R 操作，可以推广 QCD 树振幅的 BCFW 构造。

4.3 四点 YSC 与部分子树振幅

We 考虑 $n=4$ 处于 $K=2$ 螺旋度表象中的四点 YSC n

$$\Phi^{--++\lambda}=\int \mathrm{d}^4c\,\varphi(c)\,\delta^{(2)}(\bar{\lambda}_1-c_{13}\bar{\lambda}_3-c_{14}\bar{\lambda}_4)\delta^{(2)}(\bar{\lambda}_2-c_{23}\bar{\lambda}_3-c_{24}\bar{\lambda}_4)\delta^{(2)}(\lambda_3+c_{13}\lambda_1+c_{23}\lambda_2)\quad(4.3)$$

$$\times\delta^{(2)}(\lambda_4+c_{14}\lambda_1+c_{24}\lambda_2).$$

并对 c 变量进行积分，结果为

$$\Phi^{--++\lambda}=\varphi(c^*)\ \ \delta^{(4)}(\sum k_i),\qquad(4.4)$$

$$c_{13}^*=\frac{[14]}{[34]},\ c_{14}^*=\frac{[13]}{[43]},\ c_{23}^*=\frac{[24]}{[34]},\ c_{24}^*=\frac{[23]}{[43]},\ c_{13}^*c_{24}^*-c_{14}^*c_{23}^*=\frac{[12]}{[34]}.$$

这里我们将 (k_i) 记为 $\dot{\alpha},\alpha=\lambda_{i,\dot{\alpha}}\lambda_{i,\alpha}$, $[ij]=\lambda_{i,1}\lambda_{j,2}-\lambda_{i,2}\lambda_{j,1}$。

胶子和夸克的螺旋度 h_i 与权重的关系为 $2h_i=2\ell_i+2$。YSC Φ_X(3.45) 和 $\Phi_{||}$ (3.48) 取决于两个独立的螺旋度和一个额外参数 $\varepsilon=v_3-v_4$。对于 Φ_X，螺旋度之间的关系为 $h_1=-h_3$，$h_2=-h_4$。在这些条件下，$2\to2$ 螺旋度振幅的 6 种螺旋度组态中，只有 4 种可以实现。使用 $\Phi_{||}$，我们可以涵盖其余情况。此时螺旋度之间的关系为 $h_1=-h_4,\quad h_2=-h_3$。在这些条件下，同样可以涵盖 4 种螺旋度组态，其中两种会使上述某些关联函数重复出现。

由 (4.4) 以及来自 (3.45) 和 (3.48) 的 $\varphi(c)$，我们得到以独立螺旋度和额外参数 ε 为变量的显式表达式，

$$\varphi_X(c^*;h_1,h_2,\varepsilon)=\left(\frac{[14][23]}{[12][34]}\right)^{\varepsilon}\ \frac{[12]^{1+2h_1}[34]^{1-2h_2}}{[14][23]^{1+2h_1-2h_2}},$$

$$\varphi_{||}(c^*;h_1,h_2,\varepsilon)=\left(\frac{[13][24]}{[12][34]}\right)^{\varepsilon}\ \frac{[12]^{1+2h_1}[34]^{1-2h_2}}{[14][23][24]^{2h_1-2h_2}}.$$

我们发现，旋量螺旋度形式的胶子树振幅 [45, 75] 可由这两个 YSC 重现，如下所示

$$M(1,1,-1,-1)=\varphi_X(c^*,1,1,0),\quad M(-1,-1,1,1)=\varphi_X(c^*,-1,-1,0),$$
$$M(1,-1,-1,1)=\varphi_X(c^*,1,-1,4),M(-1,1,1,-1)=\varphi_X(c^*,-1,1,0),$$

$$M(1,1,-1,-1)=\varphi_{||}(c^*,1,1,0),\quad M(-1,-1,1,1)=\varphi_{||}(c^*,-1,-1,0),$$
$$M(1,-1,1,-1)=\varphi_{||}(c^*,1,-1,4),M(-1,1,-1,1)=\varphi_{||}(c^*,-1,1,0).$$

夸克树振幅可重现为

$$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\varphi_X(c^*,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),$$
$$M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\varphi_X(c^*,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3),\quad M(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\varphi_X(c^*,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),$$
$$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\varphi_{||}(c^*,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),$$
$$M(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\varphi_{||}(c^*,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},3),\quad M(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\varphi_{||}(c^*,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1).$$

胶子-夸克树振幅可重现为

$$M(1,\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})=\varphi_X(c^*,1,\frac{1}{2},1),\quad M(1,-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})=\varphi_X(c^*,1,-\frac{1}{2},3),$$
$$M(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)=\varphi_{||}(c^*,1,\frac{1}{2},1),\quad M(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)=\varphi_{||}(c^*,1,-\frac{1}{2},3).$$

为得到树振幅，YSC 的单值化参数由螺旋度以及参数 ε的取值确定。选择 ε 的物理判据是仅允许在 $s=|<12>|^2=|<34>|^2,t=|<14>|^2=|<23>|^2$ 或 $u=|<13>|^2=|<24>|^2$处出现单极点。

5 比约肯渐近行为的应用

5.1 三点 YSC 与部分子劈裂振幅

我们考虑情形 $n=2,\ m=1$ 下根据式 (3.4) 转换为螺旋度形式的三点 YSC (3.34)、(3.32)。我们从 (3.34) 开始。

$$\Phi_{123,2}^{-++,\lambda}=\int\frac{dc_{13}dc_{12}}{c_{13}^{1+u_1^+-u_3}c_{12}^{1+u_3-u_2}}\delta(\bar{\lambda}_1-c_{12}\bar{\lambda}_2-c_{13}\bar{\lambda}_3)\delta(\lambda_2+c_{12}\lambda_1)\delta(\lambda_3+c_{13}\lambda_1).$$

狄拉克δ分布确定了 c_{12}，c_{13} 的取值。

$$\Phi_{123,2}^{-++,\lambda}=\lambda_1^{1+u_1^+-u_2}\lambda_2^{-1-u_3+u-2}\lambda_3^{-1-u_1+u_3}\delta(\lambda_1\bar{\lambda}_1+\lambda_2\bar{\lambda}_2+\lambda_3\bar{\lambda}_3).$$

根据单值化参数 (3.35)，我们得到权重为 $2\ell_1=u_2-u_1, 2\ell_2=u_3-u_2, 2\ell_2=u_1^+-u_3$。回顾螺旋度的关系 (3.28)、(2.30)、$2h=1+2\ell$，并将指数表示为满足 $2h_1+2h_2+2h_3=+1$ 约束的螺旋度的形式，

$$\Phi_{123,2}^{-++,\lambda}=\lambda_1^{-h_1}\lambda_2^{-h_2}\lambda_3^{-h_3}\delta(\lambda_1\bar{\lambda}_1+\lambda_2\bar{\lambda}_2+\lambda_3\bar{\lambda}_3).$$

我们以类似的方式处理 (3.32)

$$\Phi_{123,2}^{--+,\lambda}=\int\frac{dc_{13}dc_{23}}{c_{13}^{1+u_1^+-u_3}c_{23}^{1+u_2^+-u_1^+}}\delta(\bar{\lambda}_1-c_{13}\bar{\lambda}_3)\delta(\bar{\lambda}_1-c_{12}\bar{\lambda}_2)\delta(\lambda_3++c_{13}\lambda_1+c_{23}\lambda_2)$$

并得到

$$\Phi_{123,2}^{--+,\lambda}=\bar{\lambda}_1^{h_1}\bar{\lambda}_2^{h_2}\bar{\lambda}_3^{h_3}\delta(\lambda_1\bar{\lambda}_1+\lambda_2\bar{\lambda}_2+\lambda_3\bar{\lambda}_3).$$

该关联函数的单值化参数给出了权重约束 $2\ell_1+2\ell_2+2\ell_3+4=0$，因此螺旋度参数满足 $2h_1+2h_2+2h_3=-1$。

如果 $k_I=\lambda_I\bar{\lambda}_I$ 表示动量的光锥分量，因而取实值，我们将相位和动量守恒因子分开，重写这两个结果如下:

$$\Phi_{123,2}^{\lambda}=e^{i\alpha}M(k_1,k_2,k_3,h_1,h_2,h_3)\delta(k_1+k_2+k_3).$$

采用如下记号

$$2h_1+2h_2+2h_3=\eta,\quad \eta=\pm1 \tag{5.5}$$

在两种情况下，我们都写作

$$M(k_1,k_2,k_3,h_1,h_2,h_3)=k_1^{-h_1\eta}k_2^{-h_2\eta}k_3^{-h_3\eta}.$$

我们定义共线部分子三重顶点，它与卷积中的传播子相差一个相关因子。

$$M_3(k_1,k_2,k_3;h_1,h_2,h_3)=(k_1k_2k_3)^{\frac{1}{2}}M(k_1,k_2,k_3,h_1,h_2,h_3)=k_1^{\frac{1}{2}-h_1\eta}k_2^{\frac{1}{2}-h_2\eta}k_3^{\frac{1}{2}-h_3\eta}. \tag{5.6}$$

对于散射振幅（第 4 节），相关 YSC 中的螺旋度参数与部分子螺旋度相对应（在全入射约定下，符号可能相反）。在该情形下，对于三点，YSC 螺旋度满足 $2h_1+2h_3+2h_3=2\eta$，因为 $n=2m=4$。此处 $n=2m=2$，因此螺旋度参数满足式 (5.5)。

我们发现，共线部分子三重顶点与部分子劈裂振幅 (2.28) 一致，从而得到部分子劈裂概率 (2.29) $A\to BC$：将 B，C 替换为动量分数 z，$1-z$，并将物理部分子螺旋度替换为依据全入射约定确定的符号即可。

$$W_{ABC}(z)=|M_3(1,-z,z-1;h_B+h_B-\frac{1}{2}\eta,-h_B,-h_C)|^2.$$

作为比较，我们写出由劈裂振幅通过 (2.29) 计算得到的部分劈裂核结果（不包括与δ(1 − z)成正比的项）。请记住，W_{AB} 处的标签指的是相关夸克（$\pm\frac{1}{2}$）和胶子（±1）的物理螺旋度。

$$\begin{aligned}
W_{-1,-1}(z)=W_{+1,+1}(z)=W_{+1,+1,-1}(z)+W_{+1,+1,+1}(z)=\frac{1}{z(1-z)}+\frac{z^3}{(1-z)},\\
W_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(z)=W_{+\frac{1}{2},+\frac{1}{2}}(z)=\frac{z}{1-z},\\
W_{-1,1}=W_{+1,-1}(z)=\frac{(1-z)^3}{z},\quad W_{1,-\frac{1}{2}}(z)=(1-z)^2,\quad W_{1,+\frac{1}{2}}(z)=z^2.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2 四点 YSC 与 RLL 关系

我们在第 3.6 节中已证明，四点 YSC 定义为核的算符满足涉及两个 L算符乘积的 RLL 型关系。特别是，具有 YSC (3.45) 的积分算子满足杨–巴克斯特关系 (3.21)、(3.58)。这里，我们将 L 算符限定在 $n = 2m = 2$ 情形，并利用由正规坐标中的显式形式推导出的性质。

通过将作用限制在坐标分量的函数上，并限定齐次度，可将 L 算符约化到特征值为 2ℓ 的子空间。我们将式 (3.4)、(3.12) 特化到当前情形。

$$\psi_{2\ell}(\mathbf{x}) = (x_2)^{2\ell}\phi(x), \quad L^+(u)(x_2)^{2\ell}\phi(x) = (x_2)^{2\ell}L_x(u^+ + 1, u + 1)\phi(x),$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad x = \frac{x_1}{x_2}. \tag{5.8}$$

我们改用正则对 x、∂，其中 x 是法向坐标比，∂ 是相应的微分算符，并使用 $x_1\partial_1 \to x\partial$、$x_2\partial_2 = (\mathbf{x}\mathbf{p}) - x_1\partial_1 \to 2\ell - x\partial$。具体而言，我们有

$$L^+(u) = \begin{pmatrix} u + 1 + x_1\partial_1 & x_2\partial_1 \\ x_1\partial_2 & u + 1 + x_2\partial_2 \end{pmatrix},$$

$$L_x(u^+ + 1, u + 1) = \begin{pmatrix} u + 1 + x\partial & \partial \\ x\,(-x\partial + 2\ell) & u + 1 + 2\ell - x\partial \end{pmatrix},$$

其中 $u^+ = u+2\ell$ 如上所述。参数的一种更对称的定义是代入 $v = u+\ell$，并写成

$$L_x(u^+, u) = L(v^{(1)}, v^{(2)}), \quad v^{(1)} = v + \ell, v^{(2)} = v - \ell - 1. \tag{5.9}$$

L 的结果与（2.31） $L_{ab}\,(v^{(1)},\ v^{(2)}) = v\delta_{ab} + M_{ab}$相比较。 L 矩阵与 $s\ell(2)$ 生成元之间的关系为

$$L(v^{(1)}, v^{(2)}) = \begin{pmatrix} v + S^0 & S^- \\ S^+ & v - S^0 \end{pmatrix},$$

$$S^- = \partial, \quad S^+ = x(-x\partial + 2\ell), \quad S^0 = x\partial - \ell. \tag{5.10}$$

我们继续采用正规坐标的表述。考虑多个点时，现在用指标 x 标记点 I，即下文中的 x_1, x_2 并非如（5.8）中的 $\mathbf{x}$ 那样是其分量。令 $\psi\,(x_1,\ x_2)$ 满足特征值关系

$$\mathrm{R}_{21}(w)\psi(x_1, x_2) = \lambda(w)\psi(x_1, x_2).$$

杨–巴克斯特关系（3.21）意味着

$$\mathrm{R}_{21}(w)L_2(v)L_1(v - w)\psi(x_1, x_2) = \lambda(w)L_1(v - w)L_2(v)\psi(x_1, x_2). \tag{5.11}$$

我们回顾一个已知事实：RLL 关系意味着算符 R_{21} 的特征值。为此，我们不使用它的积分算子形式，该形式将在下一小节中明确写出。

我们将关系 (5.11) 简记为 $\mathrm{R}\mathcal{L}\psi = \lambda\mathcal{R}\psi$，并按 v 的幂展开。在 v^2 处，我们得到一个平凡关系；在 v^1 处，我们得到：如果 ψ 是特征函数，那么它也是 $(S_1^a + S_2^a)\psi$，且具有相同的特征值，即我们有 $s\ell$个简并的不可约表示子空间（2）。v^0 处的条件由这种整体对称性联系起来。因此，只需分析与一个矩阵元相关的条件，例如 12。

$$\mathcal{R}_{12} = (S_1^0 - \delta)S_2^- - S_1^-S_2^0, \qquad \mathcal{L}_{12} = S_2^0S_1^- - S_2^-(S_1^0 + \delta).$$

我们考虑函数 $\psi_n^{(0)} = (x_1 - x_2)^n$，它是一个最低权向量

$$(S_1^- + S_2^-)\psi_n^{(0)} = 0, \quad (S_1^0 + S_2^0)\psi_n^{(0)} = -\mu_n \psi_n^{(0)}, \quad \mu_n = -\ell_1 - \ell_2 + n.$$

我们计算

$$\mathcal{R}_{12}\psi_n^{(0)} = \frac{1}{2}\mu_n \mathrm{S}^- \psi_n^{(0)} + \frac{1}{2}(1+\delta)\mathrm{S}^- \psi_n^{(0)}, \quad \mathcal{L}_{12}\psi_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\mu_n \mathrm{S}^- \psi_n^{(0)} - \frac{1}{2}(1-\delta)\mathrm{S}^- \psi_n^{(0)},$$

其中 $\mathrm{S}^a = S_1^a - S_2^a$。由 (5.11) 得到

$$\lambda_n[\mu_n + 1 + \delta]\,\mathrm{S}^- \psi_n^{(0)} = [-\mu_n + \delta - 1]\,\mathrm{R}_{21}\,\mathrm{S}^- \psi_n^{(0)}.$$

我们用指标 n 标记由最低权向量 $\psi_n^{(0)}$ 生成的表示的特征值。我们发现，$\mathrm{S}^- \psi_n^{(0)}$ 也是 R_{21} 的特征函数，对应另一个特征值，

$$\mathrm{R}_{21}\ \mathrm{S}^- \psi_n^{(0)} = \lambda_{n-1}\mathrm{S}^- \psi_n^{(0)}.$$

通过比较，我们得到关于 λ_n 的递推关系。容易看出，常数函数是一个特征函数，而且也是一个最低权向量。因此，通过分析，我们找到了所有特征函数和特征值。后者满足迭代关系

$$\lambda_{n+1} = -\lambda_n \frac{n - \ell_1 - \ell_2 + w}{n - \ell_1 - \ell_2 - w}$$

其解为

$$\lambda_n(w) = (-1)^n \frac{\Gamma(n - \ell_1 - \ell_2 + w)}{\Gamma(n - \ell_1 - \ell_2 - w)} \frac{\Gamma(-\ell_1 - \ell_2 - w)}{\Gamma(-\ell_1 - \ell_2 + w)}. \tag{5.12}$$

5.3 四点 YSC 与位置空间中的演化核

We 给出 YSC (3.26) 关于 $N = 4, K = 2, n = 2m = 2$ 的一般积分形式。

$$\Phi^{--++} = \int \mathrm{d}^4 c\, \varphi(c)\, \delta^{(2)}(\mathbf{x}_1 - c_{13}\mathbf{x}_3 - c_{14}\mathbf{x}_4)\delta^{(2)}(\mathbf{x}_2 - c_{23}\mathbf{x}_3 - c_{24}\mathbf{x}_4), \tag{5.13}$$

我们有四 个狄拉克δ分布。前两个分布的自变量为零时，得到

$$c_{13}^{(0)} = \frac{\langle 14\rangle}{\langle 34\rangle}, \quad c_{14}^{(0)} = \frac{\langle 13\rangle}{\langle 43\rangle}.$$

我们使用以下记号：$\langle IJ\rangle = x_{I,1}x_{J,2} - x_{I,2}x_{J,1}$，$x_I = {}^{x_I}{}_{,x_I}{}^{1}{}_{2}$，。后两个分布的自变量为零时，得到

$$c_{23}^{(0)} = \frac{\langle 24\rangle}{\langle 34\rangle}, \quad c_{24}^{(0)} = \frac{\langle 23\rangle}{\langle 43\rangle}.$$

此外，

$$c_{13}^{(0)}c_{24}^{(0)} - c_{14}^{(0)}c_{23}^{(0)} = \frac{\langle 12\rangle}{\langle 34\rangle}.$$

雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x'_{1,1}, x'_{1,2}, x'_{2,1}, x'_{2,2})}{\partial(c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24})} = \langle 34\rangle^2.$$

$x'_{1,\ 1}$，$x'_{1,\ 2}$，$x'_{2,\ 1}$，$x'_{2,\ 2}$ 简写式（5.13）中狄拉克δ分布的自变量。

结果为

$$\Phi_{1234}^{--++} = \langle 34\rangle^{-2}\varphi^{--++}(c^{(0)}). \tag{5.14}$$

我们进行变换 从齐次坐标变换到正规坐标，如上一小节所述 ，

$$\langle IJ\rangle = x_{I,2}x_{J,2}x_{IJ},\quad x_{IJ} = x_I - x_J,$$

并提取尺度因子

$$\Phi_{1234} = x_{1,2}^{2\ell_1}x_{2,2}^{2\ell_2}x_{3,2}^{2\ell_3}x_{4,2}^{2\ell_4}\phi_{1234}. \tag{5.15}$$

ϕ_{1234}通过将 $\langle IJ\rangle$替换为 x_{IJ}，即可得到 Φ_{1234}。

对于四点 YSC（3.45），利用（5.14）、（5.15）可得

$$\phi_X(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{x_{34}^{1+v_1^+-v_3}}{x_{23}^{1+v_1-v_2}x_{14}^{1+v_4-v_3}x_{12}^{1+v_2^+-v_4}} = \frac{x_{12}^{1+2\ell_1-\varepsilon}}{x_{23}^{1+2\ell_1-2\ell_2-\varepsilon}x_{14}^{1-\varepsilon}x_{24}^{1+2\ell_2+\varepsilon}}$$

其中 $2\ell_1 = v_3 - v_1$，$2\ell_2 = v_4 - v_1$，$\varepsilon = v_3 - v_4$。我们代入 1，2，3，4，$\to 2'$，$1'$，2，1，从而得到满足 RLL 关系（3.21）、（3.58）的 R 算符 $R(\varepsilon)$ 在正规坐标形式下的核的显式表达式，其中 $n = 2m = 2$ 。

$$\phi_X(x_{2'},x_{1'},x_2,x_1) = x_{12'}^{2h_1-2h_2-1}x_{1'2}^{-1}x_{1'2'}^{-2h_1}x_{12}^{2h_2}\left(\frac{x_{1'2'}x_{12}}{x_{1'2}x_{12'}}\right)^{\varepsilon} \tag{5.16}$$

我们按照（3.52）定义积分算子，令 $\mathbf{x}_I$ 取为 x_I，并将 $x_{1'}$，$x_{2'}$上的积分路径固定为围绕点 x_1，x_2的 Pochhammer 轮廓。函数 x_{12}^n 是特征函数，其特征值可用欧拉贝塔函数表示，

$$B(-\varepsilon, n+1-2h_1+\varepsilon)B(1+n-2h_2, 2h_1-2h_2-\varepsilon). \tag{5.17}$$

比较对 n 的依赖与 (5.12) 后，我们确认，具有核 (5.16) 的这个算符表示满足 RLL 关系 (3.21) 的 R 算符，其中作为 (3.21) (5.11) 中 R 的自变量的谱参数差为 $w = u - v = \varepsilon - h_1 + h_2$。

对于位置 x_1, x_2 的实数值以及参数的一般取值，可以将围道收缩至 x_1, x_2 之间的区间。于是我们可以将核写成单纯形积分形式。

$$\int_0^1 \mathrm{d}^3\alpha\,\delta(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-1)\chi(\alpha)\delta(x_{11'}-\alpha_1x_{12})\delta(x_{22'}+\alpha_2x_{12}) = J_\chi. \tag{5.18}$$

这种形式便于与 [49], [50] 中给出的广义部分子分布演化核进行比较。此外，这种形式也很方便，因为傅里叶变换很容易完成。

我们注意到，作用量 (2.26) 中出现的部分子场权重，根据 (3.28)，对两个物理态都对应于负螺旋度值。核中螺旋度的替换规则有一个特点：螺旋度符号的选择取决于算符作用量中积分的形式。对称性要求，在两个因子中，待积分点（例如 $x_{1'}$）的螺旋度必须相反，$h_{1'}, -h_{1'}$，但有两种选择。若依据作用量中的权重进行选择，则无论物理态的螺旋度如何，在 ψ 中都应取负值。

我们首先考虑 $h_1 = h_2 = -h$ 对于 $h = 1,1\ 2$ 的情形，并表明，无螺旋度翻转的胶子 $\to$ 胶子和夸克 $\to$ 夸克的演化核可以重现。

在 $\varepsilon \to 0$ 的极限下，这个 R 算符核 (5.16) 与 $\delta(x_{12'})\delta(x_{21'})$ 成正比，它表示点置换算符 P_{12}。算符 $P_{12}R_{12}(\varepsilon)$ 的核可由上述 (5.16) 对点 x_1 和 x_2进行置换得到。

后一个算符在 ε 中展开的下一项是相关贡献 $J_{11'}^{(2h)} + J_{22'}^{(2h)}$，可表示为单纯形积分 (5.18)，其被积函数为

$$\chi_{11'}(\alpha,h) + \chi_{22'}(\alpha),\quad \chi_{11'} = (1-\alpha_2)^{2h}\delta(\alpha_1)$$

下一项相关贡献在 $\varepsilon=-1$ 处得到，为 $J_{11,\ 2h}$，可表示为单纯形积分，其被积函数为

$$\chi_{11h}(\alpha)=\alpha_3^{2h-1}.$$

在胶子情形下，第三个相关贡献在 $\varepsilon=-2$, J_{221} 处得到，表示为被积函数为

$$\chi_{221}(\alpha)=\alpha_1\alpha_2.$$

.

因此，胶子情形下的演化核为

$$W_{1-11-1}(x_{2'},x_{1'},x_2,x_1)=a_0(J^{(2)}_{11'}+J^{(2)}_{22'})+a_1J_{112}+a_2J_{221},$$

而夸克情形下为

$$W_{\frac12-\frac12\frac12-\frac12}(x_{2'},x_{1'},x_2,x_1)=b_0(J^{(1)}_{11'}+J^{(1)}_{22'})+b_1J_{111}.$$

这些系数无法由对称性确定，我们可以像下一节所讨论的那样，通过与 parton splitting 结果进行比较来获取相关信息。特征值根据（5.12）、（5.17）及相应的替换计算得出，所得对 n 的依赖与通过（2.23）根据相应的 parton splitting 概率 W_{11} 和 $W_{\frac12,\ 12}$ 计算得到的反常维数的依赖相符。

在 $h_1=-h_2=-h$ 的情形下，我们可以对二者都代入负值，从而得到（$J^{(2h)}_{11'}+J^{(2h)}_{22'}$），这是在 $\varepsilon=0$ 处关于 ε 的展开中的第一个非平凡项，这符合横向极化 parton 分布 W_{1111}，$W_{\frac12\frac12\frac12\frac12}$ 的核应有的情况，这一结果来自费曼规则计算[49], [50]。

跃迁核并非通过指定 YSC (3.45) 得到；要得到跃迁核，我们必须从交叉 YSC (3.48) 出发。通过类似步骤可推导出上文的 (5.16)，结果为

$$\phi_{||}(x_{2'},x_{1'},x_2,x_1)=x_{12}^{-1}x_{1'2'}^{-1}x_{11'}^{2h_1-2h_{2'}}x_{12'}^{2h_{2'}}x_{1'2}^{-2h_1}\left(\frac{x_{12'}x_{1'2}}{x_{11'}x_{22'}}\right)^{\varepsilon},\tag{5.19}$$

$h_1=-h_2$，$h_{1'}=-h_{2'}$。我们指定轮廓和参数 ε，以重现跃迁核。

我们固定 $\varepsilon=-2h_{2'}-1$，并令 $x_{2'}$ 的围道为一个包围 x_1 的圆。于是核化简为

$$\delta(x_{12'})x_{12}^{2h_{2'}}x_{1'2'}^{2h_1}x_{1'2}^{-1-2h_1-2h_{2'}}.$$

对函数 x_1，x_2 的作用量定义为围绕 x_1，x_2 的 Pochhammer 轮廓积分；作用于基本本征函数 x_{12}^n 后，所得特征值正比于

$$B(1+n+2h_1,-2h_1-2h_{2'}).$$

通过将 n 的依赖关系与由 $W_{AB}(z)$ 计算得到的反常维数的依赖关系进行比较，我们看到，对于 $h_1=-1$，$h_{2'}=-\frac12$和 $h_1=-1$，$h_{2'}=-1$，可得到带自旋翻转的跃迁核：胶子-夸克 $W_{1-1-\frac12\frac12}$ 和胶子 - 胶子 W_{1-1-11}。对于 $h_{2'}=-1$，$h_1=-\frac12$，可得到不发生自旋翻转的夸克 - 胶子跃迁核 $W_{\frac12-\frac121-1}$。围道和参数 ε 的其他类似选择会得到螺旋度相同或相反的跃迁核。

5.4 动量空间中的四点 YSC 和演化核

四点 YSC 的螺旋度形式在 $n=2m=2$ 处写作

$$\Phi^{--++\lambda}=\int \mathrm{d}^4c\,\varphi(c)\,\delta(\bar\lambda_1-c_{13}\bar\lambda_3-c_{14}\bar\lambda_4)\delta(\bar\lambda_2-c_{23}\bar\lambda_3-c_{24}\bar\lambda_4)\delta(\lambda_3+c_{13}\lambda_1+c_{23}\lambda_2)$$
$$\times\,\delta(\lambda_4+c_{14}\lambda_1+c_{24}\lambda_2).$$

我们再次得到四个狄拉克δ分布，但它们并未消去四个 c 积分。将第一个方程乘以 λ_1，第二个乘以 λ_2，第三个乘以 λ_3，第四个乘以 λ_4，再将它们相加，得到结果 $\lambda_1\lambda_1+\lambda_2\lambda_2+\lambda_3\lambda_3+\lambda_4\lambda_4=0.$，由此可看出相关线性方程之间的依赖关系。

我们利用前三个 δ 分布对 c_{13}，c_{14}，c_{23} 进行积分。它们的取值固定为

$$c_{13}^{(0)}=\frac{\lambda_1\bar\lambda_1+\lambda_4\bar\lambda_4+c_{24}\bar\lambda_4\lambda_2}{\bar\lambda_3\lambda_1},\quad c_{14}^{(0)}=\frac{-\lambda_4-c_{24}\lambda_2}{\lambda_1},$$
$$c_{23}^{(0)}=\frac{\bar\lambda_2-c_{24}\bar\lambda_4}{\bar\lambda_3},\quad c_{13}^{(0)}c_{24}-c_{14}^{(0)}c_{23}^{(0)}=\frac{\bar\lambda_2\lambda_4+c_{24}(\lambda_1\bar\lambda_1+\lambda_2\bar\lambda_2)}{\bar\lambda_3\lambda_1}.$$

我们换到 $c=c_{24}\lambda_2\lambda_4$，并引入 $k_I=\lambda_I\bar\lambda_I$，以分离一维动量依赖。

$$c_{13}^*=\lambda_1\bar\lambda_3c_{13}^{(0)}=k_1+k_4+c,\quad c_{14}^*=\lambda_1\bar\lambda_4c_{14}^{(0)}=k_1+k_2+k_3-c,$$
$$c_{23}^*=\lambda_2\bar\lambda_3c_{23}^{(0)}=k_2-c,\quad \lambda_1\lambda_2\bar\lambda_3\bar\lambda_4(c_{13}^{(0)}c_{24}-c_{14}^{(0)}c_{23}^{(0)})=k_2k_4+c(k_1+k_2)$$

螺旋度形式的关联函数结果为

$$\Phi_{1234}^{--++\lambda}=\lambda_1^{-2h_1}\lambda_2^{-2h_2}\bar\lambda_3^{-2h_1}\bar\lambda_4^{-2h_2}\int \mathrm{d}c\,\varphi(c^*)\;\;\delta(k_1+k_2+k_3+k_4).\tag{5.20}$$

满足 RLL 关系 (3.21)、(3.58) 的 R 算符的核，可通过代入 (3.45) 中的 φ 并重新标记点 $1234\to 2'1'21$ 得到。我们省略动量守恒 δ 函数和相位因子。

$$\phi^{--++}_{X2'1'21,4}=(k_{1'}k_1)^{h_1}(k_{2'}k_2)^{h_2}\int dc(k_2'+k_1+c)^{-1-\varepsilon 2h_1-2h_2}c^{-1-\varepsilon}(k_{1'}k_1+c(k_2'+k_1'))^{\varepsilon-2h_1}.\tag{5.21}$$

在前向情形 $k_2'+k_1'=0$ 下，关于如何选择 c积分围道的问题变得简单。此时，选择一条环绕被积函数前两个因子所对应分支点的 Pochhammer 轮廓，即可得到一个非平凡的核。我们得到的核为

$$w_X(k_1,k_{1'};h_1,h_2,\varepsilon))=(k_1k_{1'})^{1-h_1+h_2+\varepsilon}\quad(k_1-k_{1'})^{2h_1-2h_2-1-2\varepsilon}.\tag{5.22}$$

在 $h_1=h_2=h$ 的情况下，通过代入 $k_1=z,k_{1'}=1$，并选取特定值 $\varepsilon=0,-1,-2$，即可得到特定物理螺旋度 $h_A=h_B=\pm1=h,h_A=h_B=\pm\frac12=h$ 对应的核 $W_{AB}(z)$ 中的贡献。

$$W_{11}(z)=W_{-1-1}(z)=2zw_X(z,1;1,1,0)+4zw_X(z,1;1,1,-1)+zw_X(z,1;1,1,-2)=$$
$$2zw_X(z,1;-1,-1,0)+4zw_X(z,1;-1,-1,-1)+zw_X(z,1;-1,-1,-2),$$
$$W_{\frac12\frac12}(z)=W_{-\frac12-\frac12}(z)=2zw_X(z,1;\frac12,\frac12,0)+zw_X(z,1;\frac12,\frac12,-1)=$$
$$2zw_X(z,1;-\frac12,-\frac12,0)+zw_X(z,1;-\frac12,-\frac12,-1).$$

其余　其中包含 ra 因子 z，因为卷积积分通常写作 $\int \frac{dz}{z}$ —.

与散射振幅类似，ε 的允许取值可以通过如下条件来理解：散射道中仅存在简单极点作为奇点。但在这里，我们看不到确定这些贡献系数的依据。

在 $h_1 = -h_2 = h$ 的情形下，(5.22) 重现了反平行螺旋度构型（投影 P_T 在 [49] 中）的演化核贡献，

$$w(z;1,-1,2) = w(z;\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1) = \frac{z}{1-z},$$

这些贡献决定了横向极化结构函数的标度依赖性，且无法纳入部分子分支图像。

与散射振幅类似，并非所有部分子劈裂核都能由四点 YSC (3.42) 重现。要重现具有螺旋度翻转或从胶子到夸克跃迁的 W_{AB}，需要使用交叉 YSC (3.48)。

$$\phi^{--++}_{||2'1'21,4} = (k_1k_2)^{-h_1}(k_{1'}k_{2'})^{h_{1'}}\int dc(k_2+c)^{-\varepsilon+2h_1-2h_{2'}}c^{-1}(k_1+k_2+c)^{-1}(k_{1'}k_1+c(k'_2+k_1))^{\varepsilon+2h_{2'}}. \tag{5.23}$$

在前向情形下，$k_1+k_2=0$，例如可以通过固定 $\varepsilon = -2h_{2'}-1$，并将围道取为围绕 (5.23) 中最后一个因子的极点的圆，来重现部分子劈裂核。我们选择 k_1，k'_1，h_1，$h_{1'}$ 作为独立变量，并得到

$$w_{||}(k_1,k_{1'},h_1,h_{1'}) = (k_1-k_{1'})^{2h_{1'}-2h_1-1}k_{1'}^{-2h'_1}k_1^{2h_1}.$$

那么，$zw(1,z;h_1,h_{1'})$ 与 $h_1=-1,h_{1'}=+1$ 一起重现胶子-胶子螺旋度翻转核，与$h_1=-1,h_{1'}=+\frac{1}{2}$ 一起重现胶子-夸克螺旋度翻转核。$zw(z,1;\ h_1,h_{1'})$ 与 $h_1=+\frac{1}{2},h_{1'}=+1$ 一起重现夸克-胶子非翻转核。

总而言之，我们已经看到，广义部分子分布的演化核由四点 YSC 得到。在动量表象中，其显式形式看起来较为复杂，而在前向极限下则会简化。在这方面，上一小节讨论的光射线位置表示更为方便。

6 Regge 渐近区的应用

6.1 三点 YSC 与三重Regge子顶点

对两个雷吉化胶子的交换求和所得的 BFKL方程是用横向动量表述的，在这种表述中，复数记号十分方便。正如第 2.3 小节所述，该方程的核由三重雷杰子顶点 (2.42) 以及内部线的传播子 $\sim |k|^{-2}$ 构成。

考虑第 5.1 节中通过螺旋度形式的三点 YSC 对 $n=2m=2$ 得到的共线三点顶点 (5.6)。我们观察到，雷杰子顶点由两个因子 M_3 (5.6) 得到：其中一个将动量 k_I 替换为复变量 κ_I，另一个将动量 k_I 替换为复共轭变量 κ^*_I。螺旋度应根据雷吉化胶子的权重 (ℓ_I,ℓ_I) =(0,0) 进行¯替换。这意味着在两个因子中均有 $h_1=h_2=+\frac{1}{2},h_3=-\frac{1}{2}$。

$$\bar{\mathcal{V}}^{-++}(\kappa_1,\kappa_2) = \bar{\mathcal{V}}^{+--}(\kappa_1,\kappa_2) = M_3(\kappa_1,\kappa_2,-\kappa_1-\kappa_2;\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})M_3(\kappa_1^*,\kappa_2^*,-\kappa_1^*-\kappa_2^*;\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}). \tag{6.24}$$

6.2 因子化的 R 算子与 BFKL 哈密顿量

我们考虑 $n=2$ 情形下的 L 算符，在投影到正规坐标中的权重 2ℓ $x=\frac{x_1}{x_2}$ (5.9) 后。矩阵 $L(v^{(1)},v^{(2)})$分解为

$$L(v^{(1)},v^{(2)})=\begin{pmatrix} v^{(2)}+1+x\partial & \partial \\ x(-x\partial+2\ell) & v^{(1)}-x\partial \end{pmatrix}= \quad v^{(1)}\hat{V}^{-1}(v^{(1)})\hat{D}\hat{V}(v^{(2)}), \tag{6.25}$$

$$\hat{V}(v)=\begin{pmatrix} v & 0 \\ -x & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}=\begin{pmatrix} 1 & -\partial \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们总结了用于构造杨-巴克斯特 R 算子[76, 77]的参数置换方法。考虑两个此类 L 算子的单值矩阵，

$$L_1(v_1^{(1)},v_1^{(2)})L_2(v_2^{(1)},v_2^{(2)}) \tag{6.26}$$

并寻找表示参数序列 $v_1^{(1)},v_1^{(2)},v_2^{(1)},v_2^{(2)}$ 的初等置换、并作用于单值矩阵的算符，例如：

$$\mathcal{S}_{12}(v_2^{(1)}-v_1^{(2)})L_1(v_1^{(1)},v_1^{(2)})L_2(v_2^{(1)},v_2^{(2)})=L_1(v_1^{(1)},v_2^{(1)})L_2(v_1^{(2)},v_2^{(2)})\mathcal{S}_{12}(v_2^{(1)}-v_1^{(2)}).$$

利用因子化形式（6.25），我们得到

$$\mathcal{S}_{12}(v)=x_{12}^{v}.$$

对于序列中前两个（$I=1$）或后两个（$I=2$）元素的类似置换，我们有 $\mathcal{S}_{11}(v_1^{(1)}-v_1^{(2)})$ 和 $\mathcal{S}_{22}(v_2^{(1)}-v_2^{(2)})$，其中

$$\mathcal{S}_{II}(v)=x_I^{-v}\frac{\Gamma(x_I\partial_I+1)}{\Gamma(x_I\partial_I+1-v)}.$$

考虑将序列 $v_1^{(1)},v_1^{(2)},v_2^{(1)},v_2^{(2)}$ 置换为 $v_2^{(1)},v_2^{(2)},v_1^{(1)},v_1^{(2)}$。它出现在$RLL$关系中，其中完整的杨-巴克斯特算子（3.21）经点置换 $\check{\mathbb{R}}_{12}=P_{12}\mathbb{R}_{12}$修正。为用 $\mathcal{S}_{IJ}$ 构造该算子，我们写出相应的初等置换乘积，以及它在单值矩阵（6.26）上的作用表示。

$$\mathcal{S}_{12}(v_1^{(1)}-v_2^{(2)})\mathcal{S}_{22}(v_1^{(2)}-v_2^{(2)})\mathcal{S}_{12}(v_1^{(2)}-v_1^{(1)})\cdot\mathcal{S}_{12}(v_1^{(1)}-v_1^{(2)})\mathcal{S}_{11}(v_1^{(1)}-v_2^{(1)})\mathcal{S}_{12}(v_1^{(2)}-v_2^{(1)})=$$

$$\frac{\Gamma(x_{12}\partial_2+1+v_1^{(2)}-v_1^{(1)})}{\Gamma(x_{12}\partial_2+1+v_2^{(2)}-v_1^{(1)})}\frac{\Gamma(x_{21}\partial_1+1+v_1^{(2)}-v_2^{(1)})}{\Gamma(x_{21}\partial_1+1+v_1^{(2)}-v_1^{(1)})}.$$

用谱参数和权重表示，我们得到完整 R 算符的一种形式，适用于 $g\ell(2)$情形，并以正则坐标算符和导数算符表示，

$$\check{\mathbb{R}}(v_1-v_2;\ell_1,\ell_2)=\frac{\Gamma(x_{21}\partial_2-2\ell_1)}{\Gamma(x_{21}\partial_2-\ell_1-\ell_2+v_2-v_1)}\frac{\Gamma(x_{12}\partial_1+v_1-v_2-\ell_1-\ell_2)}{\Gamma(x_{12}\partial_1-2\ell_1)} \tag{6.27}$$

这种形式并不方便；更理想的是让算符自变量与生成元 $S_1^a+S_2^a$对易。

我们注意到，在表示的张量积中，最高权态由 x_1,x_2 中的多项式表示；如式（5.17）所示，它们是差值 x_{12}^n 的幂。这些态是算符（6.27）的特征向量。可得具有相同特征值的简便形式：

$$\mathbb{R}(v_1-v_2;\ell_1,\ell_2)=\frac{\Gamma(-\hat{m}+v_1-v_2)}{\Gamma(-\hat{m}+v_2-v_1)} \tag{6.28}$$

以.....表示 算符 $\hat{}m$ ，它与张量卡西米尔算符（2.47）的关系为 $\hat{}m(1-\hat{}m) = x_{12}^2\partial_1\partial_2$.

我们回顾一下，在坐标表象中，BKFL 方程的解可按基函数 $E^{n,\ \nu}$ (2.52) 展开，基函数分解为全纯因子和反全纯因子，其中表示标签 n 取遍所有整数，而 ν 取遍所有实数。点 x_0 标记特定表示的向量。

这些全纯基元素 E_m 在有限 x_0时不满足最高权条件。导出简便形式 (6.28) 的论证无法直接照搬。不过，对于固定的 x_0 ，我们可以通过对坐标进行 M¨obius 变换来变换正则对 x_1， ∂_1， x_2，∂_2 ，

$$x_1' = \frac{1}{x_{10}}, x_2' = \frac{1}{x_{20}}. \tag{6.29}$$

于是，按照 (5.10) 用新的正则对（其依赖于 x_0）构造的生成元 S'^a_1， S'^a_2 满足 E_m 遵循最高权条件，

$$(S'^-_1 + S'^-_2)E_m(x_1, x_2; x_0) = 0, \quad (S'^0_1 + S'^0_2)E_m(x_1, x_2; x_0) = mE_m(x_1, x_2; x_0).$$

因此，带有 $\ell_1 = \ell_2 = 0$ 的 (6.28) 是与 BFKL 波美子相关的 R 算符的一种简便形式。BFKL 哈密顿算符可由其关于 $\varepsilon = v_1 - v_2$ 的展开中的第一个非平凡项得到，差一个归一化因子。

$$H = \psi(\hat{m}) + \psi(1-\hat{m}) - 2\psi(1)$$

dire与特征值 (2.51) 及算符形式 H_g (2.46), (2.5 0).

该哈密顿量描述胶子 Regge 子多重交换中的最近邻相互作用。R 算子的分解得到了相应闭合自旋链的一组彼此对易的局域可观测量 [83]。

6.3 四点 YSC与 BFKL核的偶极子形式

我们按照第 5.3 节所述，在齐次坐标形式下考虑 $N = 4, K = 2, n = 2$ 处的 YSC，对 c 进行积分，并按照 (5.15) 转换到分离尺度因子的正规坐标。如第 5.3 节所述，由 (3.45) 可得正规坐标形式的 R 算子核 (5.16)。

在第 3.6 节中，我们考虑了作用于两个 n 维位置变量函数的积分算子。这里我们考虑复平面上两点 $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$ 的函数以及积分算子

$$Q\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int d^2\mathbf{x}_1' \psi(\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2')\ K(\mathbf{x}_2', \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1).$$

核由一个全纯因子和一个反全纯因子组成。这两个因子均由形式为 (5.16) 的 YSC 推导而来。在两个因子中，我们都令 $\ell_{1'} = \ell_{2'} = \ell$。位置自变量在第一个因子中代入为复数 x_I， $I = 2'$， $1'$， 2， 1，在第二个因子中则代入其复共轭x_I^* 。

$$K(\mathbf{x}_{2'}, \mathbf{x}_{1'}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = \phi_X(x_{1'}, x_{2'}, x_1, x_2)\phi_X(x_{1'}^*, x_{2'}^*, x_1^*, x_2^*) = \frac{|x_{1'2'}|^{2(-1-2\ell-\varepsilon)}|x_{12}|^{2(1+2\ell-\varepsilon)}}{|x_{1'2}|^{2(1-\varepsilon)}|x_{12'}|^{2(1-\varepsilon)}}.$$

在 ε 中的分解里，首项 ε^{-1} 对应于置换算子P_{12}的核。 ε 展开中的下一项为

$$|x_{1'2'}|^{2(-1-2\ell)}|x_{12}|^{2(1+2\ell)}\left(|x_{1'2}|^2\delta^{(2)}(x_{12'}) + |x_{12'}|^2\delta^{(2)}(x_{1'2}) - \delta^{(2)}(x_{12'})\delta^{(2)}(x_{1'2})\int d^2x_3|x_{13}|^2|x_{13}|^2\right).$$

在对应于雷吉化胶子交换 $\ell \to 0$ 的极限情形下，作用量定义在相同自变量处取零的函数 $x_{1'} = x_{2'}$上。所得的核可以写成

$$|x_{12}|^2 \int \frac{d^2 x_3}{|x_{13}|^2 |x_{23}|^2} \left(\delta^{(2)}(x_{21'}) \delta(x_{2'3}) + \delta^{(2)}(x_{12'}) \delta(x_{1'3}) - \delta^{(2)}(x_{12'}) \delta(x_{21'}) \right)$$

这就是 BFKL 核 (2.48) 的偶极子（或 M¨obius）形式。

7 结论

以 Jordan-Schwinger 表示的 $g\ell(n)$ 代数作为矩阵元的 L 算子矩阵，可视为我们方法的基础。由 L 算子构成的有序矩阵乘积所形成的单值矩阵，参与 YSC 的定义。L 算子的性质导出了 YSC 的关系以及构造方法。

通过初等正则变换，可以得到 L 算子的不同形式，进而得到 YSC 的不同表示形式。原始的 J S 形式和螺旋度形式出现在应用中。

满足 Yang-Baxter RLL关系（其中涉及两个此类 L 算子的乘积）的 R 算子发挥着核心作用。这类 R 算子的一个特定解具有关于移位算子的闭合围道积分形式。它是构造 YSC 的工具。由特定四点 YSC 构造的积分算子最终成为 RLL 关系的解。在 $n = 2$ 的情形下，满足 RLL 关系的算子谱以及 R 的另一种算子形式已得到研究和应用。

投影到齐次函数作用上的 L 算子依赖于两个参数；由它们构成的 N 阶单值矩阵以及相应的 N 点 YSC，则依赖于一组 2N 个参数。我们将这些参数选取为一种形式，使得 R 算子的作用会导致这些参数发生置换。

在实际应用中，单值化参数与粒子类型和螺旋度相关。通过对参数进行特定设定，具有一般参数值的 YSC 就会转化为物理上相关的对象。

我们已经证明，三点振幅是树振幅迭代式 BCFW 构造的基本构件，也是三点 YSC 的特定参数设定。我们阐明了这种迭代构造实际上就是构造 YSC 的卷积方法。我们还展示了，特定设定四点 YSC 的参数，可以得到胶子和夸克的 $2 \to 2$ 树振幅。

我们已经看到，在三点振幅的共线极限中出现的部分子劈裂振幅，可通过对三点 YSC 进行特定设定得到。四点 YSC 定义了满足 RLL 型关系的积分算子之核。后者使我们能够推导出这些算子的特征值。我们展示了如何通过对四点 YSC 的参数和积分围道进行特定设定，得到 Bjorken演化方程的核。通过证明相应的特征值与反常维数成正比，这一结果得到了确认。

reggeon 三重顶点分解为一个全纯因子和一个反全纯因子，它们各自都可由三点 YSC 特化得到。通过参数置换方法，可以得到一个与 L 算子满足 RLL 关系的 R 算子，其中 L 算子特化为 $g\ell$ (2) 情形的正规坐标形式；该 R 算子的分解中，首个非平凡项包含 BFKL 哈密顿量的（全纯部分）。将四点 YSC 特化为该 R 算子的核，即可得到其积分算子形式。对于作用在横向平面上两点函数的情形，可以构造相应的 R 算子，其核由两个这样的四点 YSC 因子组成。后一个 R 算子的分解中出现了 BFKL 哈密顿量的偶极子形式。

参考文献。

[1] H. Bethe，线性原子链的本征值和本征函数，《物理学杂志》71 (1931)，205-226。[2] C.N. Yang，关于一维排斥性 δ函数相互作用多体问题的一些精确结果，《物理评论快报》19:23 (1967) 1312-1315；C.N. Yang，C.P. Yang，具有排斥性 δ函数相互作用的一维玻色子系统的热力学，《数学物理杂志》10 (1969) 1115-1122。[3] R.J. Baxter，八顶点格点模型的配分函数，《物理年鉴》70 (1972) 193-228；一维各向异性海森堡链，《物理年鉴》70 (1972) 323-237；格点统计中的八顶点模型与一维各向异性海森堡链 I、II、III，《物理年鉴》78 (1973) 1-24、25-47、48-71。[4] L.D. Faddeev、E.K. Sklyanin 和 L.A. Takhtajan，量子逆问题方法。*1*，《理论与数学物理》**40** (1980) 688 [《理论与数学物理》**40** (1979) 194[5] V.O. Tarasov、L.A. Takhtajan 和 L.D. Faddeev，可积量子晶格模型的局域哈密顿量，《理论与数学物理》 **57** (1983) 163[6] P.P. Kulish 和 E.K. Sklyanin，量子谱变换方法：近期进展，《物理学讲义》，**第151卷** (1982)，61-119。[7]L.D. Faddeev，代数贝特假设如何应用于可积模型，载于：《量子对称性/对称量子》，莱乌什暑期学校会议录，第LXIV卷。编者：A. Connes、K. Kawedzki、J. Zinn-Justin。北荷兰出版社，1998，149-211, [hep-th/9605187[8] V. E. Korepin、N. M. Bogoliubov 和 A. G. I zergin，《量子逆散射方法与关联函数》，剑桥大学出版社，1993，ISBN 978-0-511-62883-2 doi:10.1017/CBO9780511628832[9] V. G. Drinfeld，《霍普夫代数与量子杨-巴克斯特方程》，《苏联数学文献》**32**(1985)，254-258；《杨代数与量子化仿射代数的新实现》，《苏联数学文献》**36** (1988)，212-216[10] S.L. Woronowicz，紧矩阵伪群，《数学物理通讯》**111** (1987) 117-181。[11] C. N. Yang 和 R. L. Mills，《同位旋守恒与同位旋规范不变性》，《物理评论》**96** (1954)，191-195 doi:10.1103/PhysRev.96.191[12] L. D. Faddeev 和 V. N. Popov，《杨-米尔斯场的费曼图》，《物理快报 B》**25** (1967)，29-30 doi:10.1016/0370-2693(67)90067-6[13] L. D. Faddeev，《奇异拉格朗日量的费曼积分》，《理论与数学物理》**1** (1969)，1-13 doi:10.1007/BF01028566[14] G. 't Hooft 和 M. J. G. Veltman，《规范场的正则化与重整化》，《核物理B》**44** (1972)，189-213 doi:10.1016/0550-3213(72)90279-9[15] D. J. Gross 和 F. Wilczek，《非阿贝尔规范理论的紫外行为》，《物理评论快报》**30** (1973)，1343-1346 doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343

[16] H. D. Politzer, 《强相互作用的可靠微扰结果？》, 《物理评论快报》30（1973）, 1346-1349, doi:10.1103/PhysRevLett.30.1346[17] M. Gell-Mann, 《重子和介子的示意模型》, 《物理快报》8（1964）, 214-215, doi:10.1016/S0031-9163(64)92001-3; 《夸克》, 《奥地利物理学报增刊》9（1972）, 733-761, doi:10.1007/978-3-7091-4034-5 20[18] L. N. Lipatov, 《多色QCD的高能渐近行为与恰好可解的晶格模型》, 《苏联物理学报快报》59（1994）596, 帕多瓦预印本DFPD/93/TH/70, hep-th/9311037。[19]T. Regge, 《复轨道角动量导论》, 《新物理学报》14（1959）, 951, doi:10.1007/BF02728177[20] M. Froissart, 《Mandelstam表示中的渐近行为与减除项》, 《物理评论》123（1961）, 1053-1057, doi:10.1103/PhysRev.123.1053[21] V. N. Gribov和I. Y. Pomeranchuk, 《复轨道角动量与高能下各种过程截面之间的关系》, 《苏联物理学报》15（1962）, 788L, doi:10.1103/PhysRevLett.8.343[22] L. N. Lipatov, 《矢量介子的Regge化与非阿贝尔规范理论中的真空奇点》, 《苏联核物理学报》23（1976）, 338-345[23] V. S. Fadin、E. A. Kuraev和L. N. Lipatov, 《物理快报 B》60（1975）, 50-52, doi:10.1016/0370-2693(75)90524-9; 《杨–米尔斯理论中的多Regge子过程》, 《苏联物理学报》44（1976）, 443-450; 《非阿贝尔规范理论中的Pomeranchuk奇点》, 《苏联物理学报》45（1977）, 199-204[24] I. I. Balitsky和L. N. Lipatov, 《量子色动力学中的Pomeranchuk奇点》, 《苏联核物理学报》28（1978）, 822-829[25] J. D. Bjorken和E. A. Paschos, 《非弹性电子-质子和伽马-质子散射，以及核子结构》, 《物理评论》185（1969）1975。[26] V. N. Gribov和L. N. Lipatov, 《微扰理论中的深度非弹性电子-质子散射》, 《苏联核物理学报》15（1972） 438 [《核物理学报》15（1972） 781]。[27] V. N. Gribov和L. N. Lipatov, 微扰理论中的电子+ 电子-对湮灭和深度非弹性电子-质子散射, 《苏联核物理学报》15（1972） 675 [《核物理学报》15（1972） 1218]。[28] L. N. Lipatov, 部分子模型与微扰理论, 《苏联核物理学报》20（1975）94[《核物理学报》20（1974） 181]。[29] G. Altarelli和G. Parisi, 《部分子语言中的渐近自由》, 《核物理B》126（1977）298。[30] Y. L. Dokshitzer, 《通过量子色动力学中的微扰理论计算深度非弹性散射和电子+电子-湮灭的结构函数》, 《苏联物理学报》46（1977） 641 [《理论与实验物理学报》73（1977） 1216]。[31] V. M. Braun、S. E. Derkachov和A. N. Manashov, 《QCD中三粒子演化方程的可积性》, 《物理评论快报》81（1998）2020, doi:10.1103/PhysRevLett.81.2020 [hep- ph/9805225]。

[32] N. Beisert和M. Staudacher, 《N=4 SYM可积超自旋链》, 《核物理B》670（2003）439, doi:10.1016/j.nuclphysb.2003.08.015 [hep-th/0307042]; N. Beisert, 《N=4 超杨-米尔斯理论的伸缩算子与可积性》, 《物理报告》405（2004）1, doi:10.1016/j.physrep.2004.09.007 [hep-th/0407277]。[33] J. M. Drummond、J. Henn、G. P. Korchemsky和E. Sokatchev, N=4 超杨-米尔斯理论中散射振幅的对偶超共形对称性, 《核物理B》828（2010）317, doi:10.1016/j.nuclphysb.2009.11.022 [arXiv:0807.1095 [hep-th]]。[34]J. M. Drummond、J. Henn和J. Plefka, N=4 超杨-米尔斯理论中散射振幅的Yangian对称性, 《高能物理学期刊》0905（2009）046, doi:10.1088/1126-6708/2009/05/046[arXiv:0902.2987 [hep-th]]。[35] N. Arkani-Hamed、F. Cachazo、C. Cheung和J. Kaplan, 《扭量空间中的S矩阵》, 《高能物理学期刊》1003（2010） 110 [arXiv:0903.2110 [hep-th]]; N. Arkani-Hamed、F. Cachazo、C. Cheung和J. Kaplan, 《S矩阵的对偶性》, 《高能物理学期刊》1003（2010） 020 [arXiv:0907.5418 [hep-th]]; N. Arkani-Hamed、F. Cachazo和C. Cheung, 《对偶超共形不变性的格拉斯曼流形起源》, 《高能物理学期刊》1003（2010） 036 [arXiv:0909.0483 [hep-th]]。[36] L.N. Lipatov, 《微扰量子色动力学中的小x物理》, 《物理报告》286（1997）131, doi:10.1016/S0370-1573(96)00045-2 [hep-ph/9610276]。[37] B.L. Ioffe、V.S. Fadin、L.N. Lipatov, 《量子色动力学：微扰与非微扰方面》, 剑桥大学出版社, 2010年。[38] Molev, A., 《杨代数与经典李代数》。第143号。美国数学学会, 2007年。[39] J. Broedel、M. de Leeuw和M. Rosso, 《R算子、壳上图与杨ian代数之间的词典》, 《高能物理学期刊》1406（2014）170, doi:10.1007/JHEP06(2014)170 [arXiv:1403.3670[hep-th]]。[40] L. Ferro、T. Lukowski、C. Meneghelli、J. Plefka和M. Staudacher, 《用于散射振幅和谱正则化的调和R矩阵》, 《物理评论快报》110（2013）第12期, 121602, doi:10.1103/PhysRevLett.110.121602 [arXiv:1212.0850 [hep-th]]; 《N=4超杨-米尔斯理论散射振幅的谱参数》, 《高能物理学期刊》1401（2014）094, doi:10.1007/JHEP01(2014)094 [arXiv:1308.3494 [hep-th]]。[41]L. Ferro、T. Lukowski和M. Staudacher, 《$\mathcal{N} = 4$ 散射振幅与变形格拉斯曼流形》, 《核物理B》889（2014）192, doi:10.1016/j.nuclphysb.2014.10.012[arXiv:1407.6736 [hep-th]]。[42] N. Beisert、J. Broedel和M. Rosso, 《关于 $\mathcal{N} = 4$ 超杨-米尔斯理论中变形壳上图的杨ian不变正则化》, 《物理学杂志A》47（2014）365402, doi:10.1088/1751-8113/47/36/365402 [arXiv:1401.7274 [hep-th]]。[43] T. Bargheer、Y. t. Huang、F. Loebbert和M. Yamazaki, 《N=4 超杨-米尔斯理论和ABJM理论中的可积振幅变形》, 《物理评论D》91（2015）第2期, 026004, doi:10.1103/PhysRevD.91.026004 [arXiv:1407.4449 [hep-th]]。[44] F. A. Berends和W. Giele, 《六胶子过程作为外尔-范德瓦尔登旋量演算的一个例子》, 《核物理B》294（1987）, 700-732, doi:10.1016/0550-3213(87)90604-3

[45] L. J. Dixon, 《高效计算散射振幅》, arXiv:hep-ph/9601359。[46] E. Witten, 《作为扭量空间中弦理论的微扰规范理论》, 《数学物理通讯》252 (2004年) 189 [arXiv:hep-th/0312171].
[47] R. Britto、F. Cachazo、B. Feng 和 E. Witten, 《杨–米尔斯理论中树级递归关系的直接证明》, 《物理评论快报》94 (2005年) 181602 [arXiv:hep-th/0501052].[48] S. J. Parke 和 T. R. Taylor, 《胶子散射振幅》, 《物理评论快报》56 (1986) 2459。[49] A. P. Bukhvostov、G. V. Frolov、L. N. Lipatov 和 E. A. Kuraev, 《准部分子算符的演化方程》, 《核物理B》258 (1985) 601。doi:10.1016/0550-3213(85)90628-5[50] S. E. Derkachov 和 R. Kirschner, “量子色动力学 Bjorken 极限下的部分子相互作用”, 《物理评论D》64 (2001), 074013 doi:10.1103/PhysRevD.64.074013 [arXiv:hep-ph/0101174 [hep-ph]].[51] N. H. Christ、B. Hasslacher 和 A. H. Mueller, “微扰理论的光锥行为”, 《物理评论D》6 (1972), 3543 doi:10.1103/PhysRevD.6.3543[52] H. D. Politzer, “渐近自由：一种研究强相互作用的方法”, 《物理报告》14 (1974), 129-180 doi:10.1016/0370-1573(74)90014-3[53] V. L. Chernyak 和 A. R. Zhitnitsky, “夸克模型中强子形状因子的渐近行为。（俄文）”, 《苏联物理学报快报》25 (1977), 510[54] A. V. Efremov 和 A. V. Radyushkin, “量子色动力学中因子化与 π介子形状因子的渐近行为”, 《物理快报 B》94 (1980), 245-250 doi:10.1016/0370-2693(80)90869-2[55] G. P. Lepage 和 S. J. Brodsky, “量子色动力学中的排他过程：强子波函数和介子形状因子的演化方程”, 《物理快报 B》87 (1979), 359-365 doi:10.1016/0370-2693(79)90554-9[56]X. Ji, “广义部分子分布”, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 54 (2004年), 413-450 doi:10.1146/annurev.nucl.54.070103.181302[57] R. Kirschner 和 G. Savvidy, “广义杨–米尔斯理论中高自旋部分子劈裂振幅的杨代数与超对称性”, Mod. Phys. Lett. A 32 (2017年) no.23, 1750121 doi:10.1142/S0217732317501218 [arXiv:1701.06660 [hep-th]].[58] N. N. Nikolaev 和 B. G. Zakharov, “关于确定 HERA 上大 1/x 的胶子分布”, 《物理快报 B》332 (1994), 184-190 doi:10.1016/0370-2693(94)90877-X [arXiv:hep- ph/9403243 [hep-ph]].[59] A. H. Mueller, “无限动量波函数中的软胶子与 BFKL 波美子”, 《核物理B》415 (1994), 373-385 doi:10.1016/0550-3213(94)90116-3[60] I. Balitsky, “因子化与高能有效作用量”, 《物理评论D》60 (1999) 014020 doi:10.1103/PhysRevD.60.014020 [hep-ph/9812311].[61] Y. V. Kovchegov, “包含多重波美子交换的原子核小 x F(2) 结构函数”, 《物理评论D》60 (1999) 034008 doi:10.1103/PhysRevD.60.034008 [hep-ph/9901281].[62]J. Bartels、L. N. Lipatov 和 G. P. Vacca, “莫比乌斯表示中的Regge化胶子相互作用”, 《核物理B》706 (2005) 391 doi:10.1016/j.nuclphysb.2004.10.008 [hep- ph/0404110].

[63] R. Kirschner 和 L. N. Lipatov，“渐近自由理论中的裸Regge子”，Yad. Fiz. 50 (1989)，1739-1746 doi:10.1007/BF01549678[64] V. S. Fadin 和 L. N. Lipatov，“次领近似中的 BFKL 波美子”，《物理快报 B》429 (1998)，127-134 doi:10.1016/S0370-2693(98)00473-0 [arXiv:hep-ph/9802290 [hep- ph]].[65] M. Ciafaloni 和 G. Camici，“能标与次领BFKL方程”，《物理快报 B》430 (1998)，349-354 doi:10.1016/S0370-2693(98)00551-6[66] A. V. Kotikov 和 L. N. Lipatov，“量子色动力学和超对称规范理论中 BFKL 方程的 NLO修正”，《核物理B》582 (2000)，19-43 doi:10.1016/S0550-3213(00)00329-1 [arXiv:hep-ph/0004008 [hep-ph]].[67]J. Bartels，“非阿贝尔规范理论中的高能行为（II）：对 $T_{n\to m}$ 超越领头 $\ln s$ 近似的首次修正”，《核物理B》175 (1980)，365-401 doi:10.1016/0550-3213(80)90019-X[68] J. Kwiecinski 和 M. Praszalowicz，“量子色动力学中的三胶子积分方程与奇异 c 单态 Regge奇点”，《物理快报 B》94 (1980)，413-416 doi:10.1016/0370-2693(80)90909-0[69] S. Catani、M. Ciafaloni 和 F. Hautmann，“高能因子化与小 x 重味产生”，《核物理B》366 (1991)，135-188 doi:10.1016/0550-3213(91)90055-3[70]L. D. McLerran 和 R. Venugopalan，《物理评论D》49 (1994)，2233-2241 doi:10.1103/PhysRevD.49.2233 [arXiv:hep-ph/9309289 [hep-ph]].[71] F. Gelis、E. Iancu、J. Jalilian-Marian 和 R. Venugopalan，Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 60 (2010年)，463-489 doi:10.1146/annurev.nucl.010909.083629 [arXiv:1002.0333 [hep-ph]].[72] D. E. Kharzeev 和 E. M. Levin，“深度非弹性散射作为纠缠的探针”，《物理评论D》95 (2017年) no.11, 114008 doi:10.1103/PhysRevD.95.114008 [arXiv:1702.03489 [hep-ph]].[73] K. Zhang、K. Hao、D. Kharzeev 和 V. Korepin，“深度非弹性散射中的纠缠熵产生”，《物理评论D》105 (2022年) no.1, 014002 doi:10.1103/PhysRevD.105.014002[arXiv:2110.04881 [quant-ph]].[74] P. Griffiths、J. Harris，《代数几何原理》，Wiley Classics，1994。[75] V.V. Khoze，《规范理论振幅、标量图与扭量空间》，载于：Continuous Advances in QCD 2004，会议论文集，第492.503页，World Scientific 2004，arXiv:hep.th/0408233。[76] S. E. Derkachov，“R矩阵的因子化。I.”，Zapiski POMI 335 (2006)，134-163（J. Math. Sciences 143(1) (2007)，2773-2790，math/0503396 [math-qa];[77] S. Derkachov、D. Karakhanyan 和 R. Kirschner，“杨-巴克斯特 R 算子与参数置换”，《核物理B》785 (2007) 263 [hep-th/0703076 [HEP-TH]];[78] D. Chicherin 和 R. Kirschner，“Yangian 对称关联函数”，《核物理B》877 (2013) 484 doi:10.1016/j.nuclphysb.2013.10.006 [arXiv:1306.0711 [math-ph]]D. Chicherin、S. Derkachov 和 R. Kirschner，“N=4超对称杨–米尔斯理论中的杨-巴克斯特算子与散射振幅”，《核物理B》881 (2014) 467 doi:10.1016/j.nuclphysb.2014.02.016 [arXiv:1309.5748 [hep-th]].

[79] J. Fuksa 和 R. Kirschner，具有 $s\ell_2$ *Yangian*对称性的关联函数，《核物理B》**914** （2017年）1，doi:10.1016/j.nuclphysb.2016.10.019 [arXiv:1608.04912 [hep-th]].[80] R. Kirschner，《物理评论D》**53** （1996年），1087-1097，doi:10.1103/PhysRevD.53.1087 [arXiv:hep- ph/9505421 [hep-ph]].[81] R. Kirschner，《微扰量子色动力学中的对称雷杰子相互作用》，《欧洲物理学杂志C》**41** （2005年）353，doi:10.1140/epjc/s2005-02228-7 [hep-ph/0502202].[82]R. Kirschner、L. N. Lipatov 和 L. Szymanowski，《量子色动力学中高能散射有效作用量的对称性》，《物理评论D》**51** （1995年），838-855，doi:10.1103/PhysRevD.51.838 [arXiv:hep-th/9403082 [hep-th]].[83] V. O. Tarasov、L. A. Takhtajan 和 L. D. Faddeev，《晶格上可积量子模型的局域哈密顿量》，Theor. Math. Phys. **57** （1983年），1059-1073，doi:10.1007/BF01018648