基于 Copula-POT 模型的多事件触发巨灾债券定价

YIFAN TANG、CHENGXIU LING 和 CONGHUA WEN

arXiv:2302.00462v2 [stat.AP] 2 Feb 2023

摘要

自然灾害的发生频率不断上升，造成的损失也日益扩大，这给传统巨灾保险市场带来了严峻挑战。本文旨在建立一种创新框架，为具有极端依赖结构的多事件触发巨灾债券定价。鉴于此类债券现金流的不确定性较低，且巨灾债券回报较高，多事件巨灾债券有望成功将巨灾风险转移至大型金融市场，从而满足大多数潜在投资者分散资本配置的需求。本文设计的混合触发机制有助于降低道德风险，并提升债券吸引力；结合 CIR 随机利率，该机制体现了票息被取消、赔付本金、自然灾害发生及其强度之间的联动关系。由于多事件巨灾债券的不同触发指数具有厚尾特征，且依赖关系各异，本文引入嵌套阿基米德 Copula，并采用 POT-GP 分布对超额数据进行边缘建模，同时使用常见参数模型描述中等风险。为说明这一理论定价框架，本文研究了中国 2006–2020 年间一种由巨灾财产损失触发的三事件暴雨巨灾债券。本文通过蒙特卡洛模拟分析暴雨巨灾债券价格对触发附着水平、到期日、巨灾强度及触发指标数量的敏感性。

关键词：极值理论；嵌套阿基米德 copula；巨灾债券定价；ARMA模型；CIR 模型

1 引言

近年来，自然环境恶化和人类活动日益频繁，加剧了自然灾害造成的破坏，经济损失也不断增加。根据 Sigma 巨灾数据库网站的数据，1970–2021年全球巨灾数据显示，过去五十年来，巨灾发生频率总体呈上升趋势。损失情况也同样如此：过去十年中，所有损失有90%达到数百亿美元或以上，给保险公司、政府财政和社会带来了沉重负担。

许多国家通过发行各种类型的巨灾证券化产品来分散巨灾风险。例如，1997 年，Hannover Re 推出了首个成功发行的巨灾债券，其中涵盖了日本、澳大利亚、加拿大和欧洲的飓风与地震灾害风险。这种形式弥补了传统保险方式的不足，将灾害风险转移

至庞大的资本市场，有效地分散了巨灾风险，并提高了保险公司的赔付能力 [12]。其中，巨灾债券被认为是巨灾证券化产品中最成熟的金融工具，因其收益与其他金融市场工具的相关性极低，吸引了越来越多的投资者。

巨灾债券是一种证券，当预先设定的灾害风险发生时，债券发行方（即抵押特殊目的载体（SPV），通常由作为保险公司或再保险公司的发起人在离岸地区设立）/将获得赔付，如图1所示。特殊目的载体从投资者和再保险人处收取（再保险）保费，并以此提供再保险保障。保费通常作为票息支付的一部分支付给债券投资者，票息支付通常还包含与某一参考利率挂钩的浮动部分，该利率通常为伦敦银行同业拆借利率，体现受托人的收益。当指定的触发事件发生时，本金和票息支付将会减少，从而可将部分资金支付给发起人，以偿付其已支付的保险索赔 [8]。巨灾债券的一个重要特征是触发机制，即用于确定何时必须向债券发行方赔付的机制；不同类型的发行方所采用的触发机制往往有所不同。

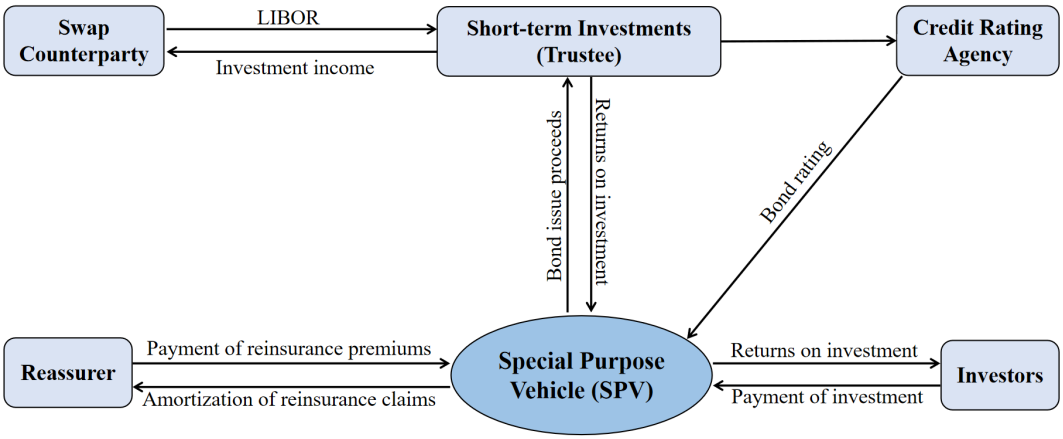


图 1：巨灾债券流程图。

由于巨灾债券旨在承保保险损失的高层部分，单一的、前所未有的事件（例如巨灾风险造成的累计经济损失）可能适合作为触发事件 [1, 5, 15, 18]。尽管此类行业损失触发机制可以彻底消除保险公司的基差风险，但道德风险极高，因为保险公司可能为了自身利益夸大损失统计数据中的损失，从而与资本市场投资者造成严重的信息不对称。此外，正如 [11], 所指出的，投资者对单一事件触发型巨灾债券的兴趣未来可能会下降，因为灾害损失逐年增加且强度不断上升的全球趋势，可能会提高巨灾债券索赔风险。因此，发行多重触发型巨灾债券或可成为一种解决方案，将行业损失指数和物理参数同时用作触发条件 [7,24]。这种混合触发机制能够在降低触发风险的同时避免基差风险和道德风险，从而吸引市场上风险偏好较低的投资者。除了在极值理论框架下理解边际触发指标的尾部特征 [2,9,14,17,25],之外，还需要通过Copula方法考察多个触发指标之间的依赖关系 [3, 20, 23]。

本文旨在将 [7]的方法扩展至离散时间周期，建立一个涵盖多种相互依赖的巨灾风险的巨灾债券定价模型。我们的触发机制有三方面创新。首先，本文考察了如何全面选择巨灾指标，以尽可能涵盖各类巨灾指标，满足债券触发机制设置的公平性。其次，考虑了全球气候变化背景下，直至巨灾债券到期日的灾难事件异质性。最后，与静态的票息和本金全部减记方式不同，我们设置的基于本金的票息支付方式兼顾了巨灾风险的严重程度和频率。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍主要方法论，建立基于相互独立的利率风险和自然灾害风险的 CIR-POT- Copula模型。第 3 节阐述我们对中国主要暴雨的定价机制，该机制采用多个事件指标的嵌套阿基米德依赖结构以及基于 ARMA 的暴雨年度强度，并对蒙特卡罗模拟的债券价格进行一系列敏感性分析。第 4 节总结本文，并进一步讨论未来研究。

2 方法论

2.1 POT 模型

极值理论在分析极值事件的统计规律方面发挥着重要作用。提取极端样本的典型方法有两种：区块最大值（BM）法和超阈值（POT）模型。与 BM 法相比，POT 模型能够充分利用极值数据，因此广泛应用于保险、水文学和金融领域 [16]。

假设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是来自总体 $X \sim F(x)$ 的随机样本，即 X_i's 相互独立且同分布，其共同分布函数（df）为 $F(x)$。给定阈值u，则在 $X > u$ 条件下，超额$Y_{[u]} = X - u$ 的分布 $F_u(y)$ 为

$$F_u(y) = \mathbb{P}\{X - u \le y \mid X > u\} = \frac{\mathbb{P}\{u < X \le y + u\}}{\mathbb{P}\{X > u\}} = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Pickands [19] 指出，对于足够高的阈值，阈值超额$Y_{[u]}$ 的分布可由广义帕累托（GP）分布$G_{\xi,\sigma}(\cdot)$ 近似，即对于右端点$x^* = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$

$$\lim_{u \to x^*} \sup_{0 \le y \le x^* - u} \left| F_u(y) - G_{\xi,\sigma}(y) \right| = 0.$$

因此，$\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ 可用来近似X 的尾部分布函数 y

$$\overline{F}(x) = \overline{F}(u)\overline{F}_u(x-u) \approx \overline{F}(u)\overline{G}_{\xi,\sigma}(x-u), \quad x > u. \tag{2.1}$$

这里 $\xi \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma > 0$ 是 GP 分布的形状参数和尺度参数$G_{\xi,\ \sigma}(y) = 1 - [1 + \xi y/\sigma]^{-1/\xi}, \ > 0$。在实践中，超越概率$F(x)$ 能够揭示潜在风险。可通过公式（2.1）中的外推方法，利用对 ξ, σ 基于

超额（$x_{(i)} - u$）'s 的最大似然估计，得到 GP 模型尾部概率的近似值，其中 $x_{(1)} \geq \cdots \geq x_{(n_u)}$ 超过阈值 u，且 $F(u)$ 的估计值为 n_u/n。理论上，可通过最小化 ξ 的 Hill 估计量的均方误差来确定阈值u，从而平衡模型偏差与方差。确定阈值的一种常见图形方法是检查经验平均超额函数的线性

$$e_n(u) = \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} (x_{(i)} - u) \tag{2.2}$$

及其对尺度参数和形状参数的稳定估计。

2.2 Copula函数理论

Sklar [21]提出将Copula作为描述边缘变量之间依赖关系的工具。具体而言，对于联合分布 $G(x_1, \ldots, x_m)$，其边缘分布函数为 G_i，对应第 i 个分量，则Copula$C$ 由下式确定

$$C(u_1, \ldots, u_m) = G(G_1^{-1}(u_1), \ldots, G_m^{-1}(u_m)), \quad (u_1, \ldots, u_m) \in [0,1]^m.$$

表 1 列出了常见的阿基米德 copula，包括 Clayton、Gumbel 和 Frank Copula，其生成元 $\phi(t)$ 为凸函数且递减：$[0,1] \mapsto (0,\infty)$ 满足 $\phi(1) = 0$。其尾部相关性由参数 θ 控制，Copula 表达式为

$$C(u_1, \ldots, u_m) = \phi(\phi^{-1}(u_1), \ldots, \phi^{-1}(u_m)).$$

表1：常见的阿基米德 copula。

Copula	生成元	$C(u_1, \ldots, u_m)$	参数
Gumbel	$(-\ln t)^\theta$	$\exp\left(-\left(\sum_{i=1}^m (-\ln u_i)^\theta\right)^{1/\theta}\right)$	$\theta \geq 1$
Clayton	$\frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$	$\left(\sum^m$ 斜体=1你$^{-\theta}$ 斜体$-$ 米 $+1\right)^{-1/\theta}$	$\theta \geq 0$
Frank	$-\ln \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\prod_{i=1}^m \frac{e^{-\theta u_i}-1}{(e^{-\theta}-1)^{m-1}}\right)$	$\theta \neq 0$

鉴于阿基米德 copula 具有良好的解析可处理性，因此广泛应用于保险、金融、水文学和生存分析等领域。本文考虑能够表示各组成部分之间不同依赖关系的层次型（或嵌套）阿基米德 copula [10]。也就是说，嵌套阿基米德 copula 的形式为

$$C(u_1, \ldots, u_m) = C_{outer}\left(C_{inner}(u_1, \ldots, u_k; \theta_1), u_{k+1}, \ldots, u_m; \theta_2\right), \tag{2.3}$$

其中，内层和外层 Copula 可以是表1中的三种阿基米德 copula 之一。尾部相关性可通过参数 θ_1 和 θ_2来衡量。如 [4], 所示，Gumbel、Clayton 或 Frank Copula 中涉及的 θ越大，表示这些变量之间的相关性越强。

2.3 计数过程

记录某一时间段 $(0,t]$内灾害发生次数的随机过程称为计数过程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$。对于所有 $t \geq 0$，$N(t)$ 都是取非负整数值的变量，并且 $N(t)$ 也是时间 t 的非递减函数。当 $0 \leq s < t$ 时，$N(t) - N(s)$ 表示时间区间 $(s,t]$内的灾害数量。常用的计数过程是泊松过程，可分为齐次泊松过程和非齐次泊松过程。

齐次泊松过程具有平稳独立增量。当 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ 时，增量 $N(t_j) - N(t_{j-1})$ 的分布仅取决于时间区间的长度$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$，而与具体的起始时刻 t_j 无关，并且互不重叠区间上的增量彼此独立。在这种情况下，若以 λ 表示单位时间区间内灾害的平均数量，则

$$\mathbb{P}\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

非齐次泊松过程（NHPP）允许瞬时强度密度 $\lambda(t)$ 随 t 变化。也就是说，截至时刻 t 发生的灾害数量服从均值为 $\Lambda(t)$ 的泊松分布，且满足

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x)dx.$$

一般而言，时间区间（s，$s + \Delta t$] 内的灾害数量服从均值为下式的泊松分布

$$\Lambda(s + \Delta t) - \Lambda(s) = \int_s^{s+\Delta t} \lambda(x)dx.$$

2.4 巨灾债券定价模型

本文研究由单次灾害触发的巨灾债券定价，其中在发生严重灾害时，票息和本金均面临风险。我们借鉴 [3]的主要思路，考虑一种由m 个相关巨灾指标$x_1, \ldots, x_m$触发的付息型巨灾债券。投资者可在每年年末获得部分票息，并在到期日收回部分本金。这些比例由触发指标x_i超过其起赔点u_i的累积超额决定。与 [3], 不同，我们将三元指标（α_t，β_t，γ_t）纳入压力指标以及灾害计数过程$\{N(t),\ t \geq 0\}$ （即一个取整数值、非负且非递减的随机过程）。下文将建立一种定价机制，以反映触发指标的超额程度及潜在灾害的发生情况。所有涉及的符号列于表2。

假设 m 维指标向量 $(x_{1}j, \ldots, x_{mj})$、$j = N(t-1) + 1, \ldots, N(t)$ 的观测值与计数过程 $\{N(t)、t \geq 0\}$ 相互独立，我们将年份 t 的整体巨灾风险严重程度定义如下。

$$\alpha_t = f\left(s_{N(t-1)+1}, \ldots, s_{N(t)}\right), \quad s_j = \prod_{i=1}^{m}\left[1 - \frac{\left(x_{ij} - u_i\right)_+}{x_{ij}}\right], \tag{2.4}$$

表2：定价公式中涉及的符号及其说明。

符号	说明
F	本金
C_t	年份t、$t = 1$、.....、T支付的票息
R	票面利率
$N(t)$	截至t年的灾害数量
$N_t = N(t) - N(t-1)$	t年的灾害数量
x_{ij}	截至t年$i$th触发指标的第j个值，$j = 1, \ldots, N(t)$
u_i	$i$th触发指标的附着水平，$i = 1, \ldots, m$

其中，$x_+ = \max(x, 0)$，$f: [0,1]^{\mathbb{N}} \mapsto [0,1]$ 是定义在滤过物理概率空间上的泛函，具有分量单调不减、非负且右连续的性质。我们将 f 设为一般泛函，以适应巨灾债券的不同设计。例如，在暴雨巨灾债券中，票息留存 α_t 可以设计为：

(i) T 年份t中由灾害导致的平均票息留存比例，建模为 y

$$\alpha_t = \frac{1}{N(t) - N(t-1)} \sum_{j=N(t-1)+1}^{N(t)} \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \frac{\left(x_{ij} - u_i\right)_+}{x_{ij}} \right].$$

(ii) 最大值 年份t中由灾害导致的最大票息留存比例，建模为 y

$$\alpha_t = \max_{N(t-1)+1 \le j \le N(t)} \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \frac{\left(x_{ij} - u_i\right)_+}{x_{ij}} \right].$$

注 2.1 注意，每个 $s_j \in (0,1]$。$s_j = 1$ 的情况表明，在第 j 次灾害中，所有触发指标都低于起赔点。s_j越小，指标 $x_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj})$越有可能远大于其起赔点 $u = (u_1, \ldots, u_m)$。根据泛函 f 的分量非递减性质，$\alpha_t \in (0,1]$ 适合用于量化票息留存比例。

为进一步刻画多个触发指标超额超过其起赔点所导致的部分本金触发机制，我们引入以下两个指标 β_t 和 γ_t 如下。与 s_j和式中f 的泛函2.4类似，我们定义

$$\beta_t = g\left(s^*_{N(t-1)+1}, \ldots, s^*_{N(t)}\right), \quad s^*_j = \prod_{1 \le i_1 < i_2 \le m} \left[1 - \frac{\left(x_{i_1 j} - u_{i_1}\right)_+}{x_{i_1 j}} \cdot \frac{\left(x_{i_2 j} - u_{i_2}\right)_+}{x_{i_2 j}} \right], \tag{2.5}$$

$$\gamma_t = h\left(s^{**}_{N(t-1)+1}, \ldots, s^{**}_{N(t)}\right), \quad s^{**}_j = \prod_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} \left[1 - \frac{\left(x_{i_1 j} - u_{i_1}\right)_+}{x_{i_1 j}} \cdot \frac{\left(x_{i_2 j} - u_{i_2}\right)_+}{x_{i_2 j}} \cdot \frac{\left(x_{i_3 j} - u_{i_3}\right)_+}{x_{i_3 j}} \right] \tag{2.6}$$

其中，g 和h 是与f类似的两个泛函，即它们是从 $[0,1]^{\mathbb{N}}$到 $[0,1]$的分量非递减、非负且右连续的泛函。在下面的命题中，我们介绍（s_j、s^*_j、s^{**}_j）和（α_t、β_t、γ_t）的性质。

命题 2.2 设 $(s_j、s_j^*、s_j^{**})$ 由公式(2.4)-(2.6) 定义，且 $(\alpha_t、\beta_t、\gamma_t)$是从 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 到 $[0,1]$的三个分量非递减、非负且右连续的泛函。

(i) 由此可知，$s_j、s_j^*、s_j^{**}$的取值范围为 $[0,1]$。当$s_j^* < 1$ （$s_j^{**} < 1$）时，这意味着在第j次灾害中，m个触发指标中至少有两个（三个）指标同时超过其起赔点。与s_j类似，s_j^*和s_j^{**}的取值描述了超过其阈值的幅度。

(ii) 定量而言，我们有 $0 < s_j \le s_j^* \le s_j^{**} \le 1$，进一步表明

$$0 < \alpha_t \le \beta_t \le \gamma_t \le 1$$

前提是这三个泛函取为相同的泛函。

(iii) 根据泛函f、g和h逐分量单调不减的性质，量 α_t、β_t、γ_t 不仅反映灾害的频率，也反映其严重程度；其值越低，表明触发指标的频率越高、严重程度越极端。

基于命题 2.2 中所示的性质，我们将设计一种巨灾债券，除非至少有两个触发指标同时被触发，否则本金将受到保护，即$\beta_t < 1$。在这种情况下，根据恰好有两个以及至少有三个指标同时被触发时的累计比例，我们分别按 β_t 和 $\beta_t/2$的比例核销本金。这可以确保投资者的本金永远不会被全部支付为零，从而提高投资者对巨灾债券投资的兴趣。设投资者在t 年份购买一张面值为F的巨灾债券，并于T年份到期。记$C_{t,s}$ 为s 年份支付的票息，记$F_{t,T}$ 为t年份的赎回价值。我们定义

$$\begin{cases} C_{t,s} = \begin{cases} \alpha_{t+1} \cdot C_0, & s = t+1, \\ \alpha_s \cdot \prod_{k=t+1}^{s-1} \left(\beta_k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\mathbb{I}(\gamma_k < 1)} \right) \cdot C_0, & s = t+2, \ldots, T, \end{cases} \\ F_{t,T} = \prod_{k=t+1}^{T} \left(\beta_k \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\mathbb{I}(\gamma_k < 1)} \right) \cdot F, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中（α_t、β_t、γ_t）由式（2.4）—（2.6）定义，且$C_0 = F \cdot R$表示按照固定票息率R 为面值为F的债券支付的票息。

注释 2.3 与式（2.7）中给出的混合触发机制相比，我们在式（ *[23]*）中的触发机制，以及采用分层比例票息并支付本金的设计，可能会吸引更多投资者。因为在混合触发机制下，一旦其中一个指标被触发，当前及未来的票息将被支付；而一旦两个指标同时被触发，到期日的本金将被完全核销。

最后，巨灾债券的价格是所有未来现金流的现值，记为 P_t，其表达式为

$$P_t = \sum_{s=t+1}^{T} \mathbb{E}\{C_{t,s}\}\, p(t,s) + \mathbb{E}\{F_{t,T}\} \cdot p(t,T), \tag{2.8}$$

其中，$p(t,s)$ 表示零息债券在时间 s 赎回价值为 1 时，在时间 t 的贴现因子，$t < s \leq T$，其表达式为

$$p(t,s) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^s r(u)\mathrm{d}u\right)\right].$$

在本文的背景下，我们采用 Cox-Ingersoll-Ross（CIR）模型 [6] 来描述连续时间利率过程 $\{r(t),\ t \geq 0\}$。与 Vasicek 利率模型相比，CIR利率模型具有一些特定优势： [22] 该模型简单易处理，具有均值回归特性，并且排除了利率低于零的可能性。在风险中性概率测度下，它满足以下一阶微分方程：

$$dr(t) = k\left(\theta - r(t)\right)dt + \varepsilon\sqrt{r(t)}dW_t, \tag{2.9}$$

其中，$k > 0$为均值回复测度，$\varepsilon > 0$ 为波动率参数，$\theta > 0$ 为利率的长期均值，而 $\{W_t、\ t \geq 0\}$ 表示标准维纳过程。因此，贴现因子$p(t,T)$为

$$p(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)},$$

其中

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \left[\frac{2\eta e^{(\kappa+\eta)(T-t)/2}}{(\kappa+\eta)\left(e^{\eta(T-t)}-1\right)+2\eta}\right]^{2\kappa\theta/\varepsilon^2}, \\ B(t,T) &= \frac{2\left(e^{\eta(T-t)}-1\right)}{(\kappa+\eta)\left(e^{\eta(T-t)}-1\right)+2\eta}, \\ \eta &= \sqrt{\kappa^2+2\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

3 实证分析

为阐明我们的定价机制，本节基于《中国自然灾害统计年鉴》网站记录的2006–2020年中国全部245场主要暴雨，以及三个主要灾害指标，重点分析中国特大暴雨的定价。这些指标涵盖了所有灾害指标，即受影响人口（AP），其统计范围包括死亡、失踪、紧急转移安置人数以及饮用水受损人口；农作物受灾面积（CAA），反映农田受淹面积及其受灾面积；以及经2020年居民消费价格指数（CPI）调整后的直接经济损失（DEL），其数值为倒塌或受损房屋及其他财产的损失金额乘以相应受损比例后求和所得。

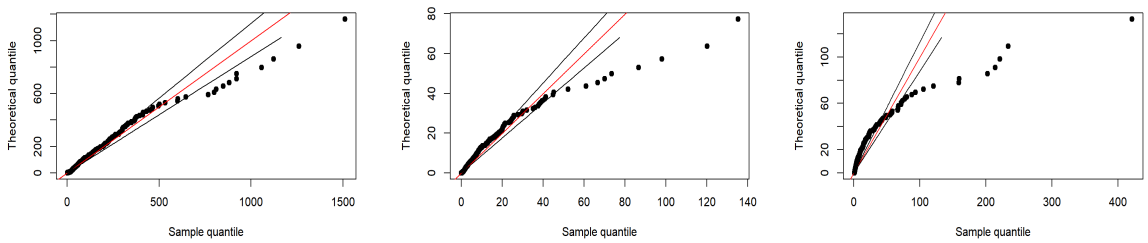
接下来，我们首先在第 *3.1*节介绍三种触发指标的基本模式（X_1,X_2,X_3），它们分别代表受影响人口、CAA 和 DEL。这些指标的非正态性促使我们在第 3.2节使用经典参数模型和超阈值峰值（POT）方法，将全部数据范围划分为主体部分和尾部部分；随后在第 3.3节使用嵌套阿基米德 copula 研究灾害指标数据的联合分布函数。第3.4节使用 ARMA模型预测未来 3 年的灾害强度。第 3.5节对巨灾债券价格进行蒙特卡洛模拟。除非另有说明，本文均将式（2.4）–式（2.6）中 f、h 和g 的留存函数取为平均函数。

3.1 触发指标的描述性分析

从表 3 可以看出，三种主要指标的平均值均远大于相应的中位数。此外，这些指标的偏度和峰度均远大于 0 和 3，表明它们呈右偏模式，且可能具有重尾。这一点也可从图 2 中的指数QQ图得到直观验证：图形相对于理论直线呈向下凸的偏离。

表3：受影响人口（AP）（百万）、农作物受灾面积（CAA）（百万公顷）和直接经济损失（DEL）（十亿元）的描述性统计。

触发指标	最大值	最小值	Mean	中位数	偏度	峰度
AP	1510.000	1.600	187.880	116.750	**2.771**	**12.678**
CAA	135.200	0.005	12.492	7.000	**3.689**	**20.458**
DEL	420.816	1.011	21.411	8.083	**5.154**	**37.823**



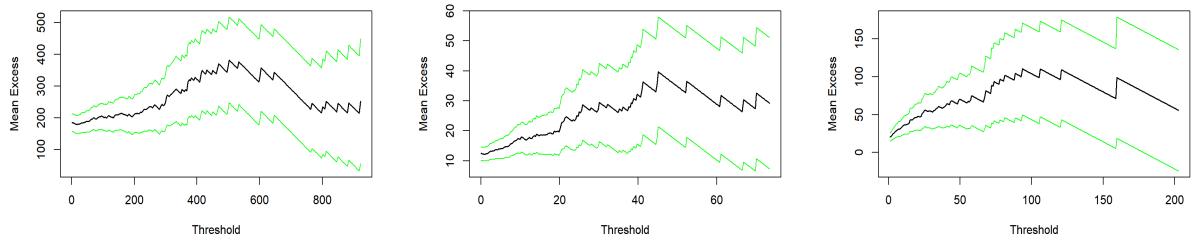
(a) (b) (c)

图2：(a) 受影响人口（AP）、(b) 农作物受灾面积（CAA）和 (c) 直接经济损失（DEL）的指数QQ图，红色虚线表示指数参考线。

3.2 基于POT的触发指标尾部分析

为了确定三个指标 (X_1, X_2, X_3) 的阈值水平 (u_1,u_2,u_3)，我们考察图3中的平均剩余寿命图（详情见式(2.2)）。我们首先确定受影响人口 X_1的阈值 u_1。根据呈线性趋势的样本平均剩余寿命图（见图3(a)），检测到阈值的可能范围为区间 $(150, 200)$，随后我们在图4(a)(b)中考察广义帕累托模型中涉及的尺度参数和形状参数估计值的稳定性，该模型用于拟合受影响人口（AP）的超阈值。因此，确定受影响人口（AP）的起赔点 $u_1 = 160$。同理可得农作物受灾面积（CAA）的起赔点 $u_2 = 12$ 以及直接经济损失（DEL）的起赔点 $u_3 = 15$。

我们利用全部数据范围对触发指标的概率分布进行建模，并赋予模型足够的灵活性，以便分别控制主体部分和尾部特征。不同于 [3], ，我们



(a) (b) (c)

图3：（a）受影响人口（AP）、（b）农作物受灾面积（CAA）和（c）直接经济损失（DEL）的平均剩余寿命图。绿色线表示95%置信区间。

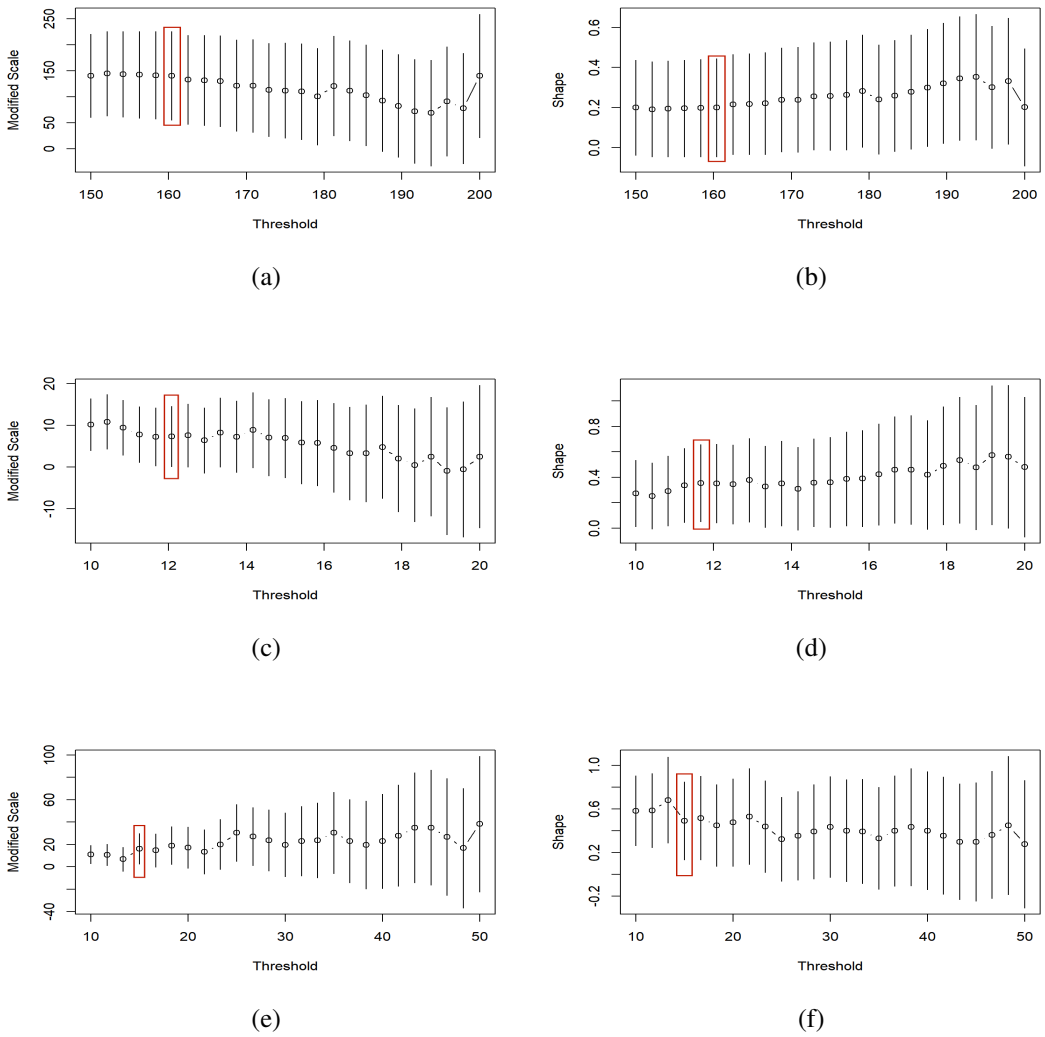
考虑用于缩放后的未超阈值数据和超阈值数据的 Beta-GP模型，即，

$$\begin{cases} X_i - u_i | X_i > u_i \sim G(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, \ y > 0, & \text{for threshold-excesses,} \\ X_i^* = \frac{X_i - m_i}{u_i - m_i} \sim Beta_{\alpha,\beta}(y) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}, \ 0 < y < 1, & \text{for non-exceedances, i.e., } X_i < u_i, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中，$(m_1,m_2,m_3) = (1.6, 0.005, 1.011)$ 分别为表1中给出的AP、CAA和DEL触发指标的样本最小值；$(u_1,u_2,u_3) = (160,12,15)$ 则由上文的平均剩余图和参数稳定性图确定。Beta-GP模型中涉及的所有参数的最大似然估计结果见表4。可以看出，CAA和DEL均具有重尾，其形状参数的95%置信区间分别为(0.03,0.64)和(0.13, 0.84)；而AP超额的形状参数估计值为0.197，表明其具有一定的幂衰减尾。此外，我们使用卡方检验考察模型的拟合优度，所有p值均大于0.246，证实Beta-GP模型与观测到的触发指标相符。直观而言，图5表明，对每个触发指标而言，阈值超额的GP模型是合适的，因为PP图和QQ图中的几乎所有点都分布在直线附近，说明样本分位数/经验概率与理论值相当接近。

表4：阈值超额的*GP* 模型中的尺度（σ）和形状（ξ）参数估计值，以及 Beta 模型$Beta_{\alpha,\beta}$中阈值以下缩放后的主体数据所对应的两个参数 α 和 β 。基于卡方检验的p值证实Beta-GP模型对数据拟合良好。

	GP					Beta		
	尺度（σ）	95% 置信区间	形状（ξ）	95% 置信区间	p值	α	β	p-值
AP	173.369	(118.21, 226.38)	0.197	(−0.04, 0.44)	0.247	1.016	1.345	0.246
CAA	11.771	(7.41, 16.13)	0.341	(0.03, 0.64)	0.283	1.076	1.687	0.299
DEL	23.538	(13.96, 33.19)	0.492	(0.13, 0.84)	0.250	0.582	1.137	0.253

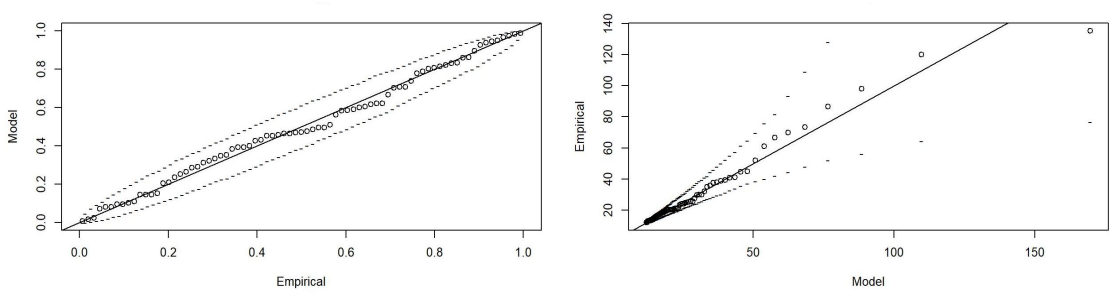


(a) (b)

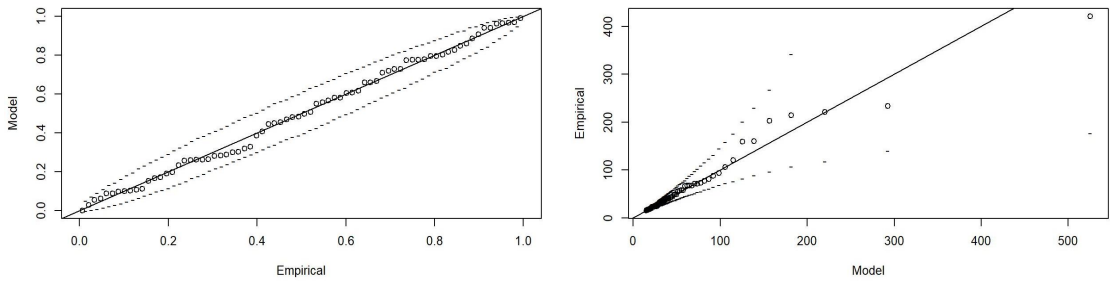
(c) (d)

(e) (f)

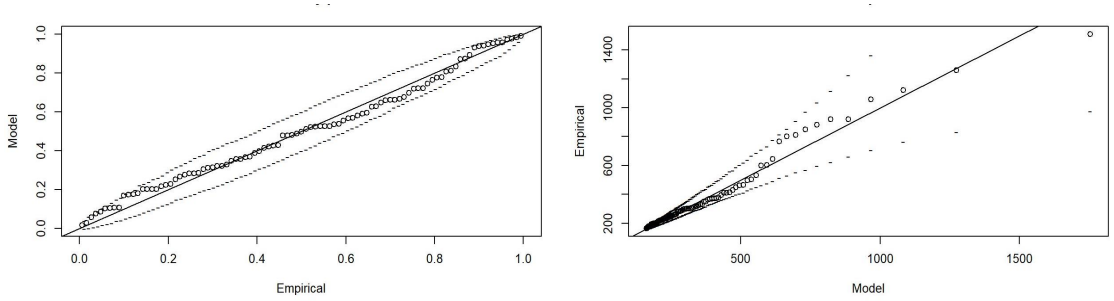
图4：上方为受影响人口（AP）的参数稳定性图，中间为农作物受灾面积（CAA）的参数稳定性图，下方为直接经济损失（DEL）的参数稳定性图。(a、c、e)中的柱条越短，尺度参数（σ）的估计越稳定；(b、d、f)对应形状参数（ξ）。



(a)



(b)



(c)

图5：（a）受影响人口（AP）、（b）农作物受灾面积（CAA）和（c）直接经济损失（DEL）的PP图（左）和QQ图（右）。

总之，受影响人口（AP）、受影响农作物面积（CAA）和直接经济损失（DEL）对应触发指标的拟合分布F_i、$i = 1,2,3$如下所示

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{n_{u_i}}{n}\overline{G}_{\xi_i,\sigma_i}(x - u_i), & x > u_i, \\ \frac{1}{B(\alpha_i,\beta_i)} \int_0^{(x-m_i)/(u_i-m_i)} t^{\alpha_i-1}(1-t)^{\beta_i-1}dt, & x \le u_i, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中，$n = 245$、阈值（u_1, u_2, u_3）、超额数量（n_{u_1}、n_{u_2}、n_{u_3}）、样本最小值（m_1, m_2, m_3）以及Beta-GP模型的其他参数由式（3.1）和表 4给出。

给定式（3.2）中各触发指标的分布，下一节将通过嵌套阿基米德 copula讨论其依赖关系，以阐释第 3.5 节中的多事件触发定价机制。

3.3 基于嵌套阿基米德 copula的触发指标依赖性分析

我们首先通过斯皮尔曼秩相关 ρ考察触发指标之间的非可交换依赖关系。(AP, CAA)、(AP, DEL)和(CAA, DEL)的斯皮尔曼 ρ值分别为0.771、0.554和0.515。可以看出，这三组指标之间都存在一定程度的依赖关系，其中(AP, CAA)之间的依赖性强于其他两组。这促使我们采用嵌套阿基米德 copula描述依赖关系：将(AP, CAA)置于内层Copula中，其阿基米德参数为 θ_1；将DEL置于参数为 θ_2 的外层阿基米德Copula中（见式（2.3））。

接下来，为了使用嵌套阿基米德 copula 建模依赖结构，我们根据第3.2节的边缘分析，对原始数据进行均匀分布变换，即直接应用公式（3.2）可得

$$\widetilde{u}_{ij} = F_i(x_{ij}), \quad i = 1,2,3,\ j = 1,2,\ldots,245.$$

最后，我们使用嵌套阿基米德 copula 分析依赖结构，其中内层和外层 copula 均为表1所列的 Gumbel、Clayton 和 Frank Copula 之一，即假设

$$(\widetilde{u}_{1j}, \widetilde{u}_{2j}, \widetilde{u}_{3j}) \overset{i.i.d.}{\sim} C_{outer}(C_{inner}(\widetilde{u}_{1j}, \widetilde{u}_{2j}; \theta_1), \widetilde{u}_{3j}; \theta_2), \quad j = 1,\ldots,245. \tag{3.3}$$

从表 5 可以看出，内层参数的极大似然估计 θ_1 均大于外层参数的极大似然估计 θ_2，这与内层变量之间的依赖性强于内层与外层变量之间的依赖性相符。其次，我们将基于 Kolmogorov-Smirnov（KS）检验选择最合适的 Copula。可以看出，所有嵌套阿基米德 copula 均能很好地拟合数据，其中最佳的嵌套 Gumbel Copula 的 KS 检验值最小，为 0.04，最大p值为 0.61。

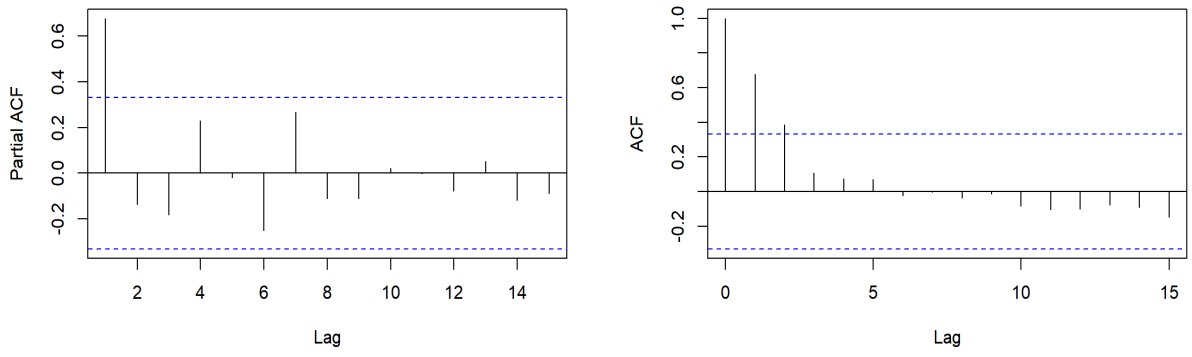
3.4 中国暴雨年频率建模

注意，我们的定价机制采用离散形式。由式（2.7）可知，票息和本金的支付比例不仅取决于灾害的严重程度（因此也取决于

表5：式（2.3）中内层和外层 Copula 所涉及参数的极大似然估计。Kolmogorov-Smirnov（KS）检验及其p值表明，最佳模型为嵌套 Gumbel Copula。

内层和外层 Copula	θ_1（内层）	θ_2（外层）	KS 检验	p值
Gumbel	44.68	22.80	0.06	0.12
Clayton	9.58	4.35	0.12	0.35
Frank	176.34	87.60	**0.04**	**0.61**

触发指标），还取决于独立的灾害年发生频率。由于气候变化，主要暴雨的发生越来越频繁。本节旨在使用自回归移动平均（ARMA）模型对中国1986—2020年主要暴雨的年发生频率进行建模，以预测未来三年（即2021—2023年）的频率。相关数据来自国家气候中心。



(a) (b)

图6：（a）1985—2020年中国暴雨年强度的偏自相关函数（PACF）图和（b）自相关函数（ACF）图。

暴雨年强度的ARMA模型如下 [11]:

$$\Lambda_k = \mu + \phi_1\Lambda_{k-1} + \ldots + \phi_p\Lambda_{k-p} + \theta_1 e_{k-1} + \ldots + \theta_q e_{k-q} + e_k,$$

其中，$\Lambda_t = \Lambda(t+1) - \Lambda(t)$ 表示第j年暴雨的强度测度，j =1、2、.....、k；p和q分别表示自回归阶数、差分阶数和移动平均阶数；e_k 表示随机误差。ARMA（p，q）的假设如下：

- 随机误差e_k相互独立，且服从零均值、常方差的正态分布，记作$e_k \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2)$,
- 序列 Λ_k 满足弱平稳性，即 $\forall k$，$\mathbb{E}\{\Lambda_k\} = \mu_\Lambda$，且 $\mathrm{Var}(\Lambda_k) = \sigma^2_\Lambda$。

根据增广迪基–富勒（ADF）检验（p = 0.05），接受 Λ_t 的平稳性假设。接下来，我们分别根据图6中的偏自相关函数（PACF）图和自相关函数图，确定偏自回归阶数 p = 1 和移动平均阶数 q = 3，因为 PACF 在滞后 p = 1 处截尾，而 ACF 在 q = 3 处截尾。因此，选用 ARMA(1,3)模型对中国主要暴雨的年度强度测度进行建模，并得到相关参数的最大似然估计，$(\phi_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 的估计值为 (0.816, 0.268,0.240, –0.748)。

根据 Jarque-Bera（JB）检验，e_k的正态性得到认可，检验的p值为 0。08；Ljung-Box（LB）检验的p = 0。502，验证了其独立同分布假设。在应用该模型进行预测之前，F检验确认模型拟合优度良好，p = 0。003。因此，直接将 ARMA(1,3) 应用于 2021年、2022年和2023年的强度度量，预测未来三年暴雨频率总体呈上升趋势，数值分别为（41。86，41。56，39。39），如图7所示；下文第3.5节将利用这些结果模拟定价机制。

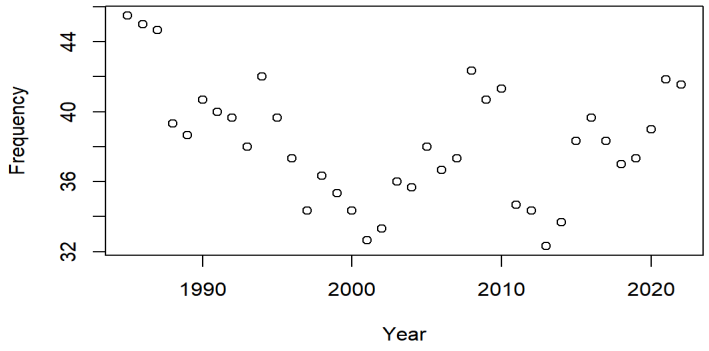


图7：中国1985—2020年主要暴雨年发生次数，数据来源：国家气候中心。

3.5 巨灾债券定价

本节将基于公式(2.8中的定价机制以及我们在第3.1—3.4节对主要暴雨所做的基本分析，重点讨论巨灾债券定价。下文考虑一只期限为T年的巨灾债券，其本金为F = 100 元，固定票息率为R = 3。5%。需要注意的是，公式(2.8)中的显式期望难以求得。因此，我们采用蒙特卡洛模拟估算巨灾债券价格。模拟步骤如下。

(1) 生成T个随机数$N_1, N_2, \ldots\ldots, N_T$，它们独立地服从强度测度为 Λ_1的泊松分布，$\Lambda_2\ldots\ldots$，Λ_T，分别表示第1年、2、……、T年中的主要暴雨数量。这里（Λ_1，$\Lambda_2\ldots\ldots$，Λ_T）可由第3.4节中的ARMA(1,3)模型给出。

(2) 根据式(3.2)中的边缘分布和式(3.3)中的嵌套Frank Copula，以及表4和5中给出的参数，我们生成了T组样本，每组包含 (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j})，样本量为N_j，对应年份

j as

$$x_{ij} = F_i^{-1}(\widetilde{u}_{ij}), \quad i = 1, 2, 3,\ j = \sum_{k=1}^{j-1} N_k + 1, \ldots, \sum_{k=1}^{j} N_k.$$

(3) 此处，我们假设随机利率过程 $\{r(t), t \geq 0\}$ 遵循式(2.9)所述的 CIR 模型，相关参数由下式给出： [13] 根据2021年可获取的一年期七天利率数据，该数据来源于 上海银行间同业拆借利率。初始利率为2021年1月6日的利率，即:

$$\begin{cases} dr(t) = 0.2\,(0.05 - r(t))\,dt + 0.05\,\sqrt{r(t)}dW_t, \\ r(0) = 2.962\%. \end{cases} \tag{3.4}$$

我们模拟利率风险，以得出贴现因子$p(t, T)$。

(4) 给定触发水平 (u_1,u_2,u_3)，我们根据式(2.7)中的现金流以及式(3.4)中的利率风险模型，计算巨灾债券的价格。

我们重复上述所有模拟步骤$m = 10^4$ 次，得到在年份$t = 0$（1，...，$T - 1$）购买的T年期巨灾债券的价格P_t 的样本均值。接下来，我们将讨论期限、触发水平以及触发指标对定价的敏感性。

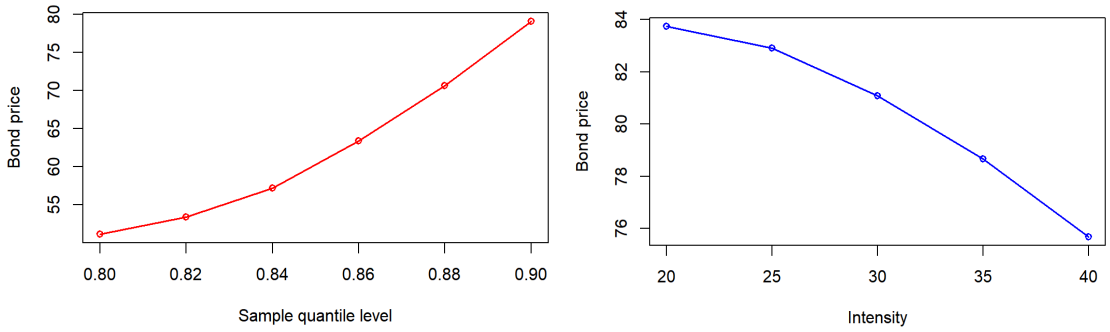
期限对价格的敏感性。表6 展示了T年期巨灾债券在触发指标（AP、CAA、DEL）三者同时触发、触发水平（u_1,u_2,u_3)为样本90%分位数时的情况。债券价格随期限T 延长而下降，且下降趋势逐渐加剧。债券发行期限越长，未来灾害可能越严重、越频繁，导致触发事件的规模更大，保留的票息和本金比例也就更低。因此，中期巨灾债券的价格较低。另一方面，对于给定的期限$T = 2$ 或3，债券可在债券发行期内的不同年份出售。我们发现，较早年份购入的债券价格更高，因为前几年主要暴雨带来的潜在风险可能较低，票息和本金也更有可能得以保留。因此，就为再保险筹集资本而言，这种定价机制相当有吸引力。

表6：根据公式（*2.8*）计算的中国主要暴雨巨灾债券定价：在年份$t = 1$年2、3购买，期限至年份T。此处，触发水平（u_1,u_2,u_3）取（受影响人口、CAA、DEL）的样本90%分位数。

	$T = 1$	$T = 2$		$T = 3$		
	$t = 0$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
债券价格 P_t	80.392	70.881	66.255	56.006	54.865	52.321

主要暴雨触发水平和强度测度的价格敏感性。适当的触发水平对于通过巨灾债券价格平衡投资者与债券发行人之间的利益至关重要。一般而言，触发水平和强度度量均由潜在灾害（此处为暴雨）的严重程度和频率决定，并通过公式（2.7）中的票息和本金被全部扣除，导致巨灾债券价格发生变化。显然，从图8中可以看出，债券价格与触发水平呈正相关，但与强度测度呈负相关

。实际上，随着触发水平提高，债券被触发的可能性降低，因此票息和本金留存水平将提高，从而导致巨灾债券价格上涨。而当主要暴雨以更高的强度测度更频繁地发生时，由此产生的触发指标可能会累积扣除少量票息和本金，进而导致债券价格下降。



(a) (b)

图8：一年期巨灾债券价格对（a）触发水平和（b）灾害强度测度 $\Lambda_1 = 20$、25、...、40 的敏感性。此处，（a）中的触发水平为步骤1中给定强度测度下，水平为$q = 00.80$、0.82、...、0.90 的样本分位数；（b）中则将触发水平固定为其样本90%分位数。

触发指标选择的价格敏感性。如前所述，多事件触发巨灾债券日益受到投资者和巨灾债券发行人的青睐。在表 7 中，我们依据公式（2.8）所示的定价机制，比较了采用不同触发指标组合的一年期债券价格。显然，三事件触发巨灾债券的发行价格低于双变量事件触发债券。这是因为同时触发事件的触发概率较低，导致折现现金流的期望值较小。此外，若三个指标均被触发，本金可能仅返还一半（回想一下 γ_t 的用法）。

表7：根据式（2.8），比较采用不同多事件触发机制时，根据我们的定价机制计算的一年期巨灾债券价格。

触发指标	AP-CAA-DEL	AP-CAA	AP-DEL	CAA-DEL
债券价格	80.3922	48.7558	48.7561	48.7564

4 结论与延伸讨论

本文基于 Copula–POT模型设计了一种多事件触发巨灾债券定价模型，并推导出相应的定价公式。我们的定价模型更加灵活，且具有更大的

实际意义，因为其票息与已支付本金之间存在动态关联，且这种泛函的大小会随潜在灾害而变化。这可为巨灾债券的定价研究及后续实际应用提供一定参考。尽管多事件触发机制涉及更多要素、流程更加复杂，并且对技术能力的要求更高，但多事件触发债券因道德风险和触发风险较低而日益受到关注 [3, 11, 23]。同时，模拟结果表明，巨灾债券价格随债券期限延长而下降，与触发水平负相关，与巨灾强度正相关。

该定价机制取决于共同灾害引发的巨灾损失指标的联合分布。现实中，巨灾涉及多个区域发生的多种灾害。未来的一个研究方向是构建能够考虑时空极值的基于网络的巨灾债券定价模型。由于无法获取巨灾债券二级市场的真实交易数据，所构建的巨灾债券定价模型仅通过巨灾损失数据模拟债券价格，未使用真实交易数据检验其准确性，这也为近期的另一研究方向提供了启示。

参考文献

[1] Knut Aase. 巨灾保险期货与利差的均衡模型。《日内瓦风险与保险理论论文集》，24(1):69–96，1999年。[2] CS Anantapadmanabhan. 关于灾难性风险的若干统计方面。*ASTIN Bulletin: TheJournal of the IAA*，5(3):307–313，1971年。[3] Wen Chao 和 Huiwen Zou. 基于 CIR-Copula-POT 模型的多事件巨灾债券定价。《自然与社会中的离散动力学》，2018年，2018年。[4] Arthur Charpentier 和 Johan Segers. 多元阿基米德 copula 的尾部。《多元分析杂志》，100(7):1521–1537，2009年8月。[5] Junfei Chen、Guiyun Liu、Liu Yang、Quanxi Shao 和 Huimin Wang. 极端洪水巨灾债券的定价与模拟。《水资源管理》，27(10):3713–3725，2013年。[6] John C Cox、Jonathan E Ingersoll Jr 和 Stephen A Ross. 资产价格的跨期一般均衡模型。《计量经济学》，第363–384页，1985年。[7] Samuel H Cox 和 Hal W Pedersen. 巨灾风险债券。《北美精算学杂志》，4(4):56–82，2000年。[8] J David Cummins. 巨灾债券及其他风险挂钩证券：市场现状与最新进展。《风险管理与保险评论》，11(1):23–47，2008年。[9] Guoqu Deng、Shiqiang Liu、Li Li 和 Chushi Deng. 全球干旱巨灾债券定价研究。《工程数学问题》，2020年，2020年。

[10] Marius Hofert. 嵌套阿基米德 *copula* 的抽样及其在担保债务凭证定价中的应用。博士论文，Universit¨at Ulm，2010年。[11] Riza Andrian Ibrahim、Herlina Napitupulu 等。多触发巨灾债券定价模型及其数值方法模拟。*Mathematics*，10(9):1363，2022年。[12] N Karagiannis、H Assa、AA Pantelous 和 CG Turvey. 温度型农业应用下灾难性风险债券的建模与定价。*Quantitative Finance*，16(12):1949–1959，2016年。[13] Kamil Klad´ıvko. Cox-Ingersoll-Ross 过程的最大似然估计：MATLAB 实现。*Technical ComputingPrague*，7(8):1–8，2007年。[14] Matias Leppisaari. 采用微观模拟方法进行再保险定价的极值理论灾难性死亡建模。*ScandinavianActuarialJournal*，2016(2):113–145，2016年。[15] Robert H Litzenberger、David R Beaglehole 和 Craig E Reynolds. 将巨灾再保险挂钩证券评估为一种新资产类别。*Journal of Portfolio Management*，第76页，1996年。[16] Ning Ma、Yanbing Bai 和 Shengwang Meng. 基于极值理论评估中国大陆最大可能地震震级的重现期。*Sensors*，21(10):3519，2021年。[17] Alexander J McNeil. 使用极值理论估计损失严重程度分布的尾部。*ASTINBulletin: TheJournal of theIAA*，27(1):117–137，1997。[18] Piotr Nowak 和 Maciej Romaniuk. 巨灾债券的定价与模拟。*Insurance: Mathematics and Economics*，52(1):18–28，2013年。[19] J Pickands. 使用极端次序统计量进行统计推断。*Ann.Statist*，3:131，1975年。[20] Ganna Reshetar. 多事件付息巨灾债券的定价。可在 *SSRN 1059021* 获取，2008年。[21] Abe Sklar. 随机变量、联合分布函数与 Copula。*Kybernetika*，9(6):449–460，1973年。[22] Oldrich Vasicek. 期限结构的均衡刻画。*Journal of FinancialEconomics*，5(2):177–188，1977年。[23] Longfei Wei、Lu Liu 和 Jialong Hou. 基于 Copula-极值理论模型的混合触发型巨灾债券定价。*Quantitative Financeand Economics*，6(2):223–243，2022年。[24] Gordon Woo. 巨灾债券细分领域：多事件风险。载于*NBER*保险项目组会议，2004年。[25] Alexandros A Zimbidis、Nickolaos E Frangos 和 Athanasios A Pantelous. 通过极值理论对地震风险建模并为相应的巨灾债券定价。*ASTINBulletin: TheJournal of the IAA*，37(1):163–183，2007年。