arXiv:2302.00466v1 [math.DG] 1 Feb 2023

$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的常截面曲率超曲面

HAIZHONG LI、LUC VRANCKEN、XIANFENG WANG 和 ZEKE YAO

Abstract. 本文对具有常截面曲率的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 超曲面进行了分类。通过应用所谓的清华原理——该原理由前三位作者于2013年在清华大学首次发现——我们证明，常截面曲率只能是$_{1\ 2}$，且由Urbano定义的乘积角函数 C 恒为零。我们证明，任何此类超曲面都是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有 $C = 0$的极小超曲面的平行超曲面，并建立了相应极小超曲面与著名的“Sinh-Gordon 方程”之间的一一对应关系。

$$(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})h = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}h).$$

作为推论，我们给出了具有常平均曲率和常乘积角函数 C的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 超曲面的完整分类。

1. Introduction

除了具有常全纯截面曲率 4 的四维单位球面 $\mathbb{S}^4$ 和复射影平面 $\mathbb{C}P^2$ 外，两个单位球面的黎曼乘积 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 是最有趣的紧致 4-流形。众所周知， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{C}P^2$ 是仅有的紧致厄米对称 4-流形。近年来，对 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$的典范子流形的研究十分活跃。当余维为 2 时，关于 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的极小曲面已有许多有趣的结果（参见 [3, 14, 19], 等），关于 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有平行平均曲率向量的曲面也有许多相关结果（参见 [18], 等）。在超曲面情形（即余维 1）下，Urbano[20] 对 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$中的齐性超曲面和等参超曲面进行了分类；他还研究了 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常主曲率的超曲面，并给出了一些其他重要的分类结果。最近，Gao、Hu、Ma 和第四位作者 [7] 研究了 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的 Hopf 超曲面以及具有等距 Reeb 流的超曲面。Lu、Wang 和 Wang [16]构造了 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常 C的若干新的余齐性一超曲面例子。然而，许多基本问题仍然悬而未决。

从黎曼几何的角度来看，不同环境空间中具有常截面曲率的子流形分类问题，是微分几何中一个重要而引人关注的课题，关于这一问题已有许多有趣的结果。当环境空间是实空间形式时，具有常截面曲率的超曲面的分类问题历史悠久，且已得到充分理解。在非平坦复空间形式中，不存在具有常截面曲率的超曲面，参见 [4, 8, 9, 10, 17], 等。当环境空间的曲率张量没有简单的表达式时，若直接使用高斯方程和 Codazzi 方程，具有常截面曲率的超曲面的分类问题就会变得十分困难

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：53C42；次要分类号：53B25。*Key words and phrases.* 常截面曲率，极小超曲面，乘积角函数，平行超曲面，Sinh-Gordon 方程。

。为克服这一困难，前三位作者提出了一种新方法，即所谓的清华原理。该方法以间接的方式运用 Codazzi 方程和里奇恒等式，得到一些涉及第二基本形式分量的优美线性方程。利用这种方法，人们已对某些典范黎曼流形中具有常截面曲率的若干典范子流形（甚至在更一般的条件下）进行了分类，参见 [1, 5, 6, 14, 21, 22], 等。本文的主要目的是对$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常截面曲率的超曲面进行分类。

在陈述主要结果之前，我们先回顾一些基本性质和典范例子。注意到，在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 上存在一个自然的乘积结构 P，定义如下

$$P(X_1, X_2) = (X_1, -X_2)$$

对于任意切向量场 X_1、X_2，定义在 $\mathbb{S}^2$ 上。于是，正如 Urbano [20], 所指出的， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中超曲面的几何与一个光滑函数 C 密切相关。这里，对于 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有单位法向量场 N 的可定向超曲面 M，函数 C 定义为

$$C = g(PN, N),$$

其中 g 表示 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 上的标准度量。下文称 C 为 M 的乘积角函数。显然， $-1 \leq C \leq 1$。Urbano [20] 证明， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中任何满足$C^2 \equiv 1$ 的超曲面，局部上都是 $\mathbb{S}^2$ 中一条曲线与 $\mathbb{S}^2$ 的一个开子集的乘积。我们用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$表示 $\mathbb{S}^2$ 上的标准度量。于是，作为典型例子，对于 $t \in$（$-1, 1$）以及单位向量 a、$b \in \mathbb{S}^2$，Urbano [20] 指出， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中以下三类超曲面的 $C = 0$ 为常数，且高斯-克罗内克曲率恒为零:

$$M_t = \{(p, q) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid \langle p, q \rangle = t\};$$
$$M_{a,b} = \{(p, q) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid \langle p, a \rangle + \langle q, b \rangle = 0\};$$
$$\hat{M}_{a,b} = \{(p, q) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid \langle p, a \rangle^2 + \langle q, b \rangle^2 = 1\}.$$

此外，上述例子具有以下性质 [20]：

(i) M_t 是一个具有三个常主曲率的齐性等距超曲面（因此具有常平均曲率）。在所有的 M_t中，只有 M_0 是极小的。(ii) $M_{a,\ b}$ 是极小的，且具有非常数标量曲率。(iii) $\hat{}M_{a,\ b}$ 具有常截面曲率 $1/2$ （因此具有常数量曲率），但平均曲率非常数。

作为本文的首个重要结果，我们分类了具有常截面曲率的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 超曲面。

定理 1.1. 设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常截面曲率 κ的一个超曲面。那么$\kappa = 1/2$，乘积角函数 $C = 0$ 和 M 全等于 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中某个极小超曲面的平行超曲面的一个开子集，且满足 $C = 0$。更确切地说， M 在局部上为以下两者之一:

(1) 对某些 a、$b \in \mathbb{S}^2$而言，$\hat{}M_{a,\ b}$ 的一个开子集；或$\tilde{}$

$\tilde{}$(2) M 在距离 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 处的平行超曲面的一个开子集，其中 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的极小超曲面，满足 $C = 0$，由定理 3.5 描述。

注 1.1. (i) 在定理 3.5 中，我们建立了定理 1.1 的情形（2）中所涉及的$\tilde{}$极小超曲面 M 与著名的“sinh-Gordon 方程”之间的一一对应关系

$$(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})h = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}h).$$

˜事实上，我们证明了 M 具有坐标 (u, v, t)，并且存在一个非零函数 h：$(u, v) \to \mathbb{R}$使得 h 满足上述“sinh-Gordon 方程”。反之，对于任意非零解h：$(u, v) \to \mathbb{R}$，我们构造一个度量 g和两个 (1,1) 阶张量 A、 P（见 (3.20)、(3.21) 和 (3.22)），然后根据 [11, 15], 中的存在性定理和唯一性定理，在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$的等距变换意义下，存在唯一的极小超曲面 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$，使得 $C = 0$，且其第一基本ˆ形式和形算子分别由 g 和 A给出。(ii) 定理 1.1 的情形 (1) 中的超曲面 $M_{a,b}$ 实际上是极小超曲面 $M_{a,b} = \{(p, q) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 | \langle p, a\rangle + \langle q, b\rangle = 0\}$的一个平行超曲面。注意，$M_{a,b}$对应于“sinh-Gordon 方程”的一个平凡解： $h \equiv 0$。

作为第二个主要结果，我们对具有常 C 和常平均曲率（或常数量曲率）的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$超曲面进行了完整分类，从而补全了 Urabno 的分类结果（见 [20]中的定理 1）。

定理 1.2. 设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的一个超曲面，具有常乘积角函数 C。则

(1) M 具有常平均曲率，当且仅当以下条件之一成立：(a) $C^2 = 1$ 和 M 是某个 $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^2$ 的开子集，其中 $r \in (0, 1]$, ；(b) $C = 0$ 和 M 是某个 M_t 的开子集，其中 $t \in (-1, 1)$；(c) $C = 0$ 和 M 是某个$M_{a,b}$ 的开子集，其中 $a, b \in \mathbb{S}^2$；或(d) $C = 0$ 和 M 是定理 3.5 所描述的极小超曲面的开子集。(2) M 具有常标量曲率，当且仅当以下条件之一成立：(a) $C^2 = 1$ 和 M 是某个 $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^2$ 的开子集，其中 $r \in (0, 1]$, ；(b) $C = 0$ 和 M 是某个 M_t 的开子集，其中 $t \in (-1, 1)$；(c) $C = 0$ 和 M 是某个ˆ$M_{a,b}$ 的开子集，其中 $a, b \in \mathbb{S}^2$；或˜(d) $C = 0$ 和 M 是 M 在距离 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$处的平行超曲面的开子集，其中$\tilde{M}$ 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的一个极小超曲面，具有定理 3.5 所描述的 $C = 0$。

注 1.2。我们在定理 1.2 中的贡献是情形 (1d) 和情形 (2d)。情形 (1a)–情形 (1c) 以及情形 (2a)–情形 (2c) 由 Urbano 得到（见 [20] 中的定理 1）。

本文安排如下。第 2 节中，我们汇集了 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的一些基本性质，以及关于 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 超曲面几何的一些预备知识。第 3 节中，我们给出了具有 $C = 0$ 的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 极小超曲面的完整分类（见定理 3.7）。结果表明，所得超曲面只能是 M_0、 $M_{a,\ b}$，或者定理 3.5 所描述的某个超曲面。为得到这一分类，我们讨论了第二基本形式各分量的所有可能情形。值得一提的是，我们构造了具有常 C 的超曲面新例子，并给出了它们的局部刻画。事实上，这些例子就是具有常 $C \neq \pm 1$ 和 $b_2 = 0$ 的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 超曲面（ b_2 的定义见 (2.9)）。更多详情见命题 3.6。第 4 节中，我们给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明。首先，我们运用所谓的清华原理，证明常截面曲率只能是 $_1$ $_2$，且乘积角函数 C 恒为零。这是定理 1.1 证明中的关键步骤之一。证明中的另一重要环节是观察到，任何具有常截面曲率的超曲面都是某个具有 $C = 0$ 的极小超曲面的平行超曲面（见定理 4.4）。因此，我们可以应用第 3 节中的分类结果完成证明。

致谢：H. Li 得到了国家自然科学基金项目 11831005、国家自然科学基金项目 12126405 和国家自然科学基金—佛兰德研究基金项目 11961131001 的资助。L. Vrancken 得到了国家自然科学基金—佛兰德研究基金项目 11961131001 的资助。X. Wang 得到了国家自然科学基金项目 11971244 和中央高校基本科研业务费的资助

。Z. Yao 得到了国家自然科学基金项目 12171437 和中国博士后科学基金会（编号：2022M721871）的资助。

2. Preliminaries

2.1. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$上的几何结构。

设 $\mathbb{S}^2$ 为带有标准度量 $\langle\cdot$的二维单位球面，复结构 $\cdot\rangle$ 定义为

$$J_p v = p \wedge v,$$

对于任意 $p \in \mathbb{S}^2$ 和 $v \in T_p\mathbb{S}^2$，其中 $\wedge$ 表示 $\mathbb{R}^3$中的叉积。在带有乘积度量 g的乘积空间$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 上，我们有两个复结构

$$J_1 = (J, J), \quad J_2 = (J, -J),$$

它们在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$上定义了两个 K¨ahler 结构，因此 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 成为一个 K¨ahler 曲面。

T P上的乘积结构 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 定义为： P： $T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \to T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$，使得 t

$$P(X_1, X_2) = (X_1, -X_2), \quad \forall\, X_1, X_2 \in T\mathbb{S}^2.$$

P满足 $P = -J_1J_2 = -J_2J_1$、 $P^2 = \mathrm{Id}$和 $\bar{\nabla}P = 0$，其中 $\bar{\nabla}$ 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$上的列维-奇维塔联络。此外，

$$g(PY, Z) = g(Y, PZ), \quad \forall\, Y, Z \in T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2).$$

带有乘积度量的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的黎曼曲率张量 $\bar{R}$ 为

$$\begin{aligned}\bar{R}(U, Y, Z, W) = \tfrac{1}{2}\big\{&g(Y, Z)g(U, W) - g(U, Z)g(Y, W)\\ &+ g(PY, Z)g(PU, W) - g(PU, Z)g(PY, W)\big\},\end{aligned}$$

其中 U、 Y、 Z、 $W \in T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$。因此， $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 是一个标量曲率为4且具有非负截面曲率的爱因斯坦流形。

2.2. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$的超曲面。

设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的一个可定向超曲面， N 为单位法向量场，并仍记 g 为 M上的诱导度量。那么，关于乘积结构 P，我们定义

$$\begin{aligned}C &:= g(PN, N) = g(J_1N, J_2N),\\ X &:= PN - CN,\end{aligned}$$

乘积角函数 C： $M \to \mathbb{R}$ 以及一个与 M相切的向量场 X 。显然，$-1 \le C \le 1$且 $|X|^2 := g(X, X) = 1 - C^2$。对于 M上的任意切向量场 Y，经乘积结构 P作用后，有如下分解

$$PY = TY + \mu(Y)N,$$

其中， TY和 $\mu(Y)N$分别是 PY的切向部分和法向部分。因此， T是一个 (1, 1) 型张量场，而 μ是定义在 M上的 1-形式。此外， $\mu(Y) = g(PY, N)$。

设 ∇ 为 M上诱导度量 g 的列维-奇维塔联络。高斯公式和魏因加滕公式表明

$$\bar{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + g(AY, Z)N, \quad \bar{\nabla}_Y N = -AY,$$

其中， A 是 M的形算子。

M 的高斯方程和 Codazzi 方程为

$$\begin{aligned} R(U,Y)Z =& \tfrac{1}{2}\big[g(Y,Z)U - g(U,Z)Y + g(TY,Z)TU - g(TU,Z)TY\big] \\ &+ g(AY,Z)AU - g(AU,Z)AY, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$(\nabla_Y A)Z - (\nabla_Z A)Y = \tfrac{1}{2}\big[g(Y,X)TZ - g(Z,X)TY\big], \tag{2.2}$$

其中， U、 Y、 $Z \in TM$和 R表示相对于度量 g的 M的曲率张量。因此，里奇曲率张量为

$$\mathrm{Ric}(Y) = \tfrac{1}{2}\big(Y - CTY + g(Y,X)X\big) + 3HAY - A^2Y, \tag{2.3}$$

其中， $H = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}A$是超曲面 M的平均曲率。因此， M 的标量曲率ρ 为

$$\rho = 2 + 9H^2 - \|A\|^2. \tag{2.4}$$

令 $\nabla^2 A$ 表示 A的二阶协变导数，即

$$(\nabla^2 A)(U,Y,Z) := \nabla_U[(\nabla_Y A)Z] - (\nabla_{\nabla_U Y}A)Z - (\nabla_Y A)\nabla_U Z.$$

则里奇恒等式表明

$$\begin{aligned} &g\big((\nabla^2 A)(U,Y,Z),W\big) - g\big((\nabla^2 A)(Y,U,Z),W\big) \\ &= -g\big(R(U,Y)Z,AW\big) - g\big(R(U,Y)W,AZ\big). \end{aligned} \tag{2.5}$$

下面的引理由 [7, 20], 得到，它描述了函数 C、向量场 X 以及 T 和 μ的协变导数的一些性质，后文将用到这些性质。

引理 2.1（参见 [20] 中的引理 1 和 [7]中的引理 2.1）。设 $M \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 为一个可定向超曲面， A 为与单位法向量场 N相对应的形算子。那么，C的梯度、 X的协变导数、 T 和 μ 由下式给出

$$\begin{aligned} &\nabla C = -2AX, \quad \nabla_Y X = CAY - TAY, \\ &(\nabla_Y T)\,Z = g(AY,Z)X + \mu(Z)AY, \\ &(\nabla_Y \mu)\,Z = Cg(AY,Z) - g(TZ,AY). \end{aligned} \tag{2.6}$$

证明。 C 的梯度公式和 X 的协变导数公式可直接见 [20]中的引理 1。对于其余两个公式，根据 T、 μ 的定义以及高斯公式和魏因加滕公式，可得

$$\begin{aligned} (\nabla_Y T)\,Z &= (\bar{\nabla}_Y(TZ))^\top - T(\nabla_Y Z) \\ &= [\bar{\nabla}_Y(PZ - \mu(Z)N)]^\top - T(\nabla_Y Z) \\ &= [P\bar{\nabla}_Y Z - \mu(Z)\bar{\nabla}_Y N]^\top - T(\nabla_Y Z) \\ &= g(AY,Z)(PN)^\top + \mu(Z)AY \\ &= g(AY,Z)X + \mu(Z)AY, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_Y \mu)\,Z &= Y\mu(Z) - \mu\,(\nabla_Y Z) \\ &= g(\bar{\nabla}_Y PZ, N) + g(PZ, \bar{\nabla}_Y N) - g(P\bar{\nabla}_Y Z - g(AY,Z)PN, N) \\ &= -g(TZ,AY) + Cg(AY,Z), \end{aligned}$$

其中， $\cdot^\top$ 表示切向部分。 □

在[20]中, Urbano 证明，具有 $C^2 \equiv 1$ 的超曲面局部上是如下超曲面 s.

引理 2.2（[20]）。设 M 是 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 中具有 $C^2\equiv 1$ 的超曲面。那么，在 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 的等距变换意义下，M 局部上是曲线 Γ（位于 $\mathbb{S}^2$ 中）与 $\mathbb{S}^2$ 的一个开子集的乘积。

2.3. 与 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 的超曲面相关的典范标架。

在本小节中，我们假设 $\langle\langle\langle$ 在 M 上成立，并选取适当的局部正交标架场 $\{E_1,E_2,E_3\}$，其属于 M，如下所示：

$$E_1=\frac{J_1N+J_2N}{\sqrt{2(1+C)}},\quad E_2=\frac{J_1N-J_2N}{\sqrt{2(1-C)}},\quad E_3=\frac{X}{\sqrt{1-C^2}}. \tag{2.7}$$

该标架具有以下性质：

$$\begin{cases}PE_1=E_1,\quad PE_2=-E_2,\quad PE_3=\sqrt{1-C^2}N-CE_3,\quad PN=CN+\sqrt{1-C^2}E_3.\\ TE_1=E_1,\quad TE_2=-E_2,\quad TE_3=-CE_3,\quad \mu(E_1)=\mu(E_2)=0,\quad \mu(E_3)=\sqrt{1-C^2}.\end{cases} \tag{2.8}$$

我们假设

$$\begin{aligned}AE_1&=b_1E_1+b_2E_2+b_3E_3,\\ AE_2&=b_2E_1+b_4E_2+b_5E_3,\\ AE_3&=b_3E_1+b_5E_2+b_6E_3,\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中，b_1、b_2、b_3、b_4、b_5 和 b_6 是 M上的光滑函数。

由 (2.3) 可知，在标架 $\{E_1,E_2,E_3\}$下，里奇张量可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_1)&=(\tfrac{1-C}{2}+b_1b_4+b_1b_6-b_2^2-b_3^2)E_1+(b_2b_6-b_3b_5)E_2+(b_3b_4-b_2b_5)E_3,\\ \mathrm{Ric}(E_2)&=(b_2b_6-b_3b_5)E_1+(\tfrac{1+C}{2}+b_1b_4+b_4b_6-b_2^2-b_5^2)E_2+(b_1b_5-b_2b_3)E_3,\\ \mathrm{Ric}(E_3)&=(b_3b_4-b_2b_5)E_1+(b_1b_5-b_2b_3)E_2+(1+b_1b_6+b_4b_6-b_3^2-b_5^2)E_3.\end{aligned} \tag{2.10}$$

当 C 在 M上为常数且不等于 ±1 时，我们有以下引理 a:

引理 2.3（参见 [20]第 1395 页）。设 M是 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 中的一个具有常数 $C\neq\pm1$的超曲面。那么，在局部标准正交标架场 $\{E_1,E_2,E_3\}$下，有以下关系：

$$\begin{aligned}&b_3=b_5=b_6=0,\quad AE_1=b_1E_1+b_2E_2,\ AE_2=b_2E_1+b_4E_2,\ AE_3=0,\\ &\nabla_{E_1}E_1=b_1\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}E_3,\ \nabla_{E_1}E_2=-b_2\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}E_3,\ \nabla_{E_1}E_3=-b_1\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}E_1+b_2\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}E_2,\\ &\nabla_{E_2}E_1=b_2\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}E_3,\ \nabla_{E_2}E_2=-b_4\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}E_3,\ \nabla_{E_2}E_3=-b_2\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}E_1+b_4\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}E_2,\\ &\nabla_{E_3}E_1=\nabla_{E_3}E_2=\nabla_{E_3}E_3=0.\end{aligned} \tag{2.11}$$

此外，高斯方程和 Codazzi 方程等价于以下方程：

$$E_3b_1=\tfrac{\sqrt{1-C^2}}{2}+b_1^2\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}-b_2^2\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}, \tag{2.12}$$

$$E_3b_2=b_2\big(b_1\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}-b_4\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}\big), \tag{2.13}$$

$$E_3b_4=-\tfrac{\sqrt{1-C^2}}{2}+b_2^2\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}-b_4^2\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}, \tag{2.14}$$

$$E_1b_2-E_2b_1=0, \tag{2.15}$$

$$E_1b_4-E_2b_2=0. \tag{2.16}$$

注 2.1. 由于标架的下标不同，引理 2.3 中的公式与 [20] 第 1395 页上的公式略有不同。

3. Minimal hypersurfaces with $C = 0$

本节中，我们给出具有 $C = 0$ 的极小超曲面的分类，这在定理 1.1 和定理 1.2 的证明中起着非常重要的作用。

引理 3.1. 设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中满足 $C = 0$的极小超曲面。则对于由 (2.7) 定义的标架$\{E_1, E_2, E_3\}$，M上的 b_1、b_2和 b_4有以下三种情形。情形 1：

$$b_1 = b_4 = 0, \quad b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

情形 2：

$$b_1 = -b_4 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \tan(\tfrac{t-k}{\sqrt{2}}), \quad b_2 = 0,$$

情形 3：

$$\begin{aligned} b_1 = -b_4 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\frac{t-l}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{t-l}{\sqrt{2}})}{\cos^2(\frac{t-l}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{h}{\sqrt{2}})}, \\ b_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sinh(\frac{h}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{h}{\sqrt{2}})}{\cos^2(\frac{t-l}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{h}{\sqrt{2}})}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，函数 t满足 $E_3 t = 1$，而函数 h、k、l：$M \to R$满足 $h \neq 0$和$E_3 h = E_3 k = E_3 l = 0$。

证明。利用 $H = \frac{1}{3}(b_1 + b_4) = 0$和 $C = 0$，方程 (2.12) 和 (2.13) 化为

$$\begin{aligned} E_3 b_1 &= \tfrac{1}{2} + b_1^2 - b_2^2, \\ E_3 b_2 &= 2 b_1 b_2. \end{aligned}$$

当 b_2在 M上为常数时，有 $b_1 b_2 = 0$。此外，若 $b_1 = 0$，则除单位法向量 N的符号外，我们处于情形 1。若 $b_2 = 0$，则 b_1 满足 $E_3 b_1 = \frac{1}{2} + b_1^2$。沿着 E_3的积分曲线对该方程积分，可得情形 2。

当 b_2在 M上不是常数时，令 $F = b_1 + \mathbf{i} b_2$，得到

$$E_3 F = E_3(b_1 + \mathbf{i} b_2) = \frac{1}{2} + (b_1 + \mathbf{i} b_2)^2 = \frac{1}{2} + F^2.$$

沿着 E_3 的积分曲线直接对该方程积分，可得 $F = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan(\frac{t + z_0}{\sqrt{2}})$，其中 $z_0 = -l + \mathbf{i} h$、h 和 l 是定义在 M 上的函数，它们满足 $h \neq 0$ 和 $E_3 h = E_3 l = 0$。由$F = b_1 + \mathbf{i} b_2$可知，b_1 和 b_2 分别是 F的实部和虚部，对应情形 3。□

下面我们处理引理 3.1 的情形 3。受 [12], 中所用技巧的启发，我们利用可积条件寻找适当的局部坐标。我们假设

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_1 d_1 + a_2 d_2 \\ -a_2 & a_1 & -a_2 d_1 + a_1 d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中 a_1、a_2、d_1、d_2 是定义在 M 上的光滑函数。

引理 3.2. $\{U, V, T\}$是局部坐标标架，当且仅当满足以下方程组：

$$E_3 a_1 = -a_1 b_1 - a_2 b_2, \quad E_3 a_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1, \tag{3.3}$$

$$E_1 a_2 + E_2 a_1 = 0, \quad E_1 a_1 - E_2 a_2 = 0, \tag{3.4}$$

$$E_3d_1 = b_1d_1 - b_2d_2, \quad E_3d_2 = b_1d_2 + b_2d_1, \tag{3.5}$$

$$E_1d_2 - E_2d_1 = 2b_2. \tag{3.6}$$

证明。我们将证明，我们的方程组等价于交换子 $[T,U]$、$[T,V]$ 和 $[U,V]$ 均为零。利用 $[E_i,E_j] = \nabla_{E_i}E_j - \nabla_{E_j}E_i$、$C=0$ 和 (2.11)，可得

$$[E_1,E_2] = -2b_2E_3,\ [E_1,E_3] = -b_1E_1 + b_2E_2,\ [E_2,E_3] = -b_2E_1 + b_4E_2 = -b_2E_1 - b_1E_2. \tag{3.7}$$

因此

$$\begin{aligned}[T,U] =&(E_3a_1 + a_1b_1 + a_2b_2)E_1 + (E_3a_2 - a_1b_2 + a_2b_1)E_2\\ &+ (d_1E_3a_1 + a_1E_3d_1 + d_2E_3a_2 + a_2E_3d_2)E_3.\end{aligned}$$

那么，$[T,U]=0$ 等价于（3.3），并且

$$a_1E_3d_1 + a_2E_3d_2 = (a_1b_1 + a_2b_2)d_1 + (a_2b_1 - a_1b_2)d_2. \tag{3.8}$$

类似地，我们得到

$$\begin{aligned}[T,V] =&(-E_3a_2 - a_2b_1 + a_1b_2)E_1 + (E_3a_1 + a_2b_2 + a_1b_1)E_2\\ &+ (-d_1E_3a_2 - a_2E_3d_1 + d_2E_3a_1 + a_1E_3d_2)E_3.\end{aligned}$$

利用（3.3），我们得到以下方程

$$-a_2E_3d_1 + a_1E_3d_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)d_1 + (a_1b_1 + a_2b_2)d_2. \tag{3.9}$$

简单计算可知，（3.8）和（3.9）等价于（3.5）。最后，直接计算得到

$$\begin{aligned}[U,V] =&\Big(-a_1(E_1a_2 + E_2a_1) + a_2(E_1a_1 - E_2a_2)\Big)E_1\\ &+ \Big(a_2(E_1a_2 + E_2a_1) + a_1(E_1a_1 - E_2a_2)\Big)E_2\\ &+ \Big((a_1^2 + a_2^2)(E_1d_2 - E_2d_1 - 2b_2) - a_1d_1(E_1a_2 + E_2a_1) + a_2d_1(E_1a_1 - E_2a_2)\\ &+ a_2d_2(E_1a_2 + E_2a_1) + a_1d_2(E_1a_1 - E_2a_2)\Big)E_3.\end{aligned}$$

由于 $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$，我们得到：当且仅当 (3.4) 和 (3.6) 同时成立时，$[U,V]$ 才为零。 □

方程组 (3.3)–(3.6) 的任意解都为我们提供了适应坐标。我们给出如下一个特殊解。

引理 3.3. 设 b_1、b_2 和 b_4 在 M 上由 (3.1) 给出，令 f 为满足 $E_3f = -1$ 的任意函数。则由下式定义的函数 a_1、a_2、d_1、d_2

$$(a_1 + \mathbf{i}a_2)^2 = \frac{1}{2(b_1 - \mathbf{i}b_2)^2 + 1}, \quad d_1 = E_1f,\ d_2 = E_2f, \tag{3.10}$$

是微分方程 (3.3)–(3.6) 的一个解。

证明。注意到，方程组分解为两个相互独立的子系统，即 (3.3)–(3.4) 和 (3.5)–(3.6)。

假设 a_1、a_2 是关于 b_1、b_2 的函数。利用方程 (2.12)–(2.16) 和 $C=0$，我们将第一个子系统 (3.3)-(3.4) 表示为关于 b_1、b_2 的方程，并得到

$$(b_1^2 - b_2^2 + \frac{1}{2})\frac{\partial a_1}{\partial b_1} + 2b_1b_2\frac{\partial a_1}{\partial b_2} = -a_1b_1 - a_2b_2, \tag{3.11}$$

$$(b_1^2 - b_2^2 + \frac{1}{2})\frac{\partial a_2}{\partial b_1} + 2b_1b_2\frac{\partial a_2}{\partial b_2} = a_1b_2 - a_2b_1, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial b_1}E_1b_1 + \frac{\partial a_2}{\partial b_2}E_1b_2 + \frac{\partial a_1}{\partial b_1}E_2b_1 + \frac{\partial a_1}{\partial b_2}E_2b_2 = 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial b_1}E_1b_1 + \frac{\partial a_1}{\partial b_2}E_1b_2 - \frac{\partial a_2}{\partial b_1}E_2b_1 - \frac{\partial a_2}{\partial b_2}E_2b_2 = 0. \tag{3.14}$$

若 $(a_1、\ a_2)$ 关于 $b_1、\ b_2$ 满足柯西–黎曼方程，则方程 (3.13) – (3.14) 成立，即

$$\frac{\partial a_2}{\partial b_1} = \frac{\partial a_1}{\partial b_2},\ \ \frac{\partial a_2}{\partial b_2} = -\frac{\partial a_1}{\partial b_1}.$$

We 假设 $a_1(z) + \mathbf{i}a_2(z)$ 是关于 $z = b_1 - \mathbf{i}b_2$ 的全纯函数，则

$$(z^2 + \tfrac{1}{2})\frac{\partial}{\partial z}(a_1 + \mathbf{i}a_2) = (b_1^2 - b_2^2 + \tfrac{1}{2})\frac{\partial a_1}{\partial b_1} + 2b_1b_2\frac{\partial a_1}{\partial b_2} + \mathbf{i}\Big((b_1^2 - b_2^2 + \tfrac{1}{2})\frac{\partial a_2}{\partial b_1} + 2b_1b_2\frac{\partial a_2}{\partial b_2}\Big),$$

and

$$-z(a_1 + \mathbf{i}a_2) = (-a_1b_1 - a_2b_2) + \mathbf{i}(-b_1a_2 + b_2a_1).$$

那么 (3.11) 和 (3.12) 等价于

$$(z^2 + \tfrac{1}{2})\frac{\partial}{\partial z}(a_1 + \mathbf{i}a_2) = -z(a_1 + \mathbf{i}a_2).$$

因此，我们得到方程组 (3.11) –(3.14) 的一个特殊解：$(a_1 + \mathbf{i}a_2)^2 = {}_{2\ b_1 -\ (\mathbf{i}b_2)^2+1}{}^{1}$。令 ~~$f$ 为满足 $E_3f = -1$~~ 的任意函数。我们记 $d_1 = E_1f, d_2 = E_2f$，利用 (3.7)，得到关于 f 的以下可积条件。

$$\begin{aligned}
0 &= [E_1, E_3]f + b_1E_1(f) - b_2E_2(f) = -E_3d_1 + b_1d_1 - b_2d_2,\\
0 &= [E_2, E_3]f + b_2E_1(f) + b_1E_2(f) = -E_3d_2 + b_2d_1 + b_1d_2,\\
0 &= [E_1, E_2]f + 2b_2E_3(f) = E_1d_2 - E_2d_1 - 2b_2,
\end{aligned}$$

这立即意味着 $d_1 = E_1f, d_2 = E_2f$ 是第二个子系统 (3.5)- (3.6) 的一个解。□

我们将引理 3.3 中给出的解所得到的坐标记为 (u, v, t)，即 $\partial_u = U$，$\partial_v = V$，$\partial_t = T = E_3$。我们将进一步对 f 作一个特殊选择，以简化 (3.1)。

引理 3.4. 存在一个函数 f，满足 $E_3f = -1$，以及一个常数 c，使得将 t 替换为$t - c$后，有 $l = 0$。此外，f由下式给出

$$f = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\Big(\tfrac{\sqrt{2}b_1}{\sqrt{(b_1^2 - b_2^2 + \frac{1}{2})^2 + 4b_1^2b_2^2}}\Big).$$

变量 t 由 $t = -f$+const 给出。

证明。经过简单计算可知，我们对 f 的选择满足 $E_3f = -1$。利用 $T、\ U、\ V$的定义方程 (3.2)，可得

$$E_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}\partial_u - \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\partial_v - d_1\partial_t, \tag{3.15}$$

$$E_2 = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\partial_u + \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}\partial_v - d_2\partial_t, \tag{3.16}$$

$$E_3 = \partial_t. \tag{3.17}$$

由 $E_1 f = d_1$、$E_2 f = d_2$、$E_3 f = -1$ 可得

$$\frac{\partial}{\partial u} f = \frac{\partial}{\partial v} f = 0.$$

将 (3.1) 代入 f 的定义，得到 $\sin(-\sqrt{2} f) = \sin(\sqrt{2}(t-l))$，因此 $\frac{\partial}{\partial u} l = \frac{\partial}{\partial v} l = 0$。回顾 $E_3 l = 0$（见引理 3.1），可得 l 必为常数。□

定理 3.5. 设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有乘积角函数 $C = 0$ 的极小超曲面。假设相对于标架场 $\{E_1, E_2, E_3\}$（见 (2.7)），在 M 上定义的函数 b_2（见 (2.9)）不是常数。那么 M 具有局部坐标 (u, v, t)，且存在一个非零函数 $h : (u, v) \mapsto \mathbb{R}$，使得在 (2.9) 中定义的函数 b_1、b_2、b_4 可表示为

$$b_1 = -b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{t}{\sqrt{2}})}{\cos^2(\frac{t}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{h}{\sqrt{2}})}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sinh(\frac{h}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{h}{\sqrt{2}})}{\cos^2(\frac{t}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{h}{\sqrt{2}})}, \tag{3.18}$$

其中 h 满足以下“Sinh-Gordon 方程”：

$$(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}) h = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2} h). \tag{3.19}$$

反过来，设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个开子集，并且 $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, (u, v) \mapsto h(u, v) \in \mathbb{R}$ 是满足微分方程 (3.19) 的非零函数。令 $\Omega_0 = \{(u, v, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} | h(u, v) = 0, \sqrt{2} t = (2p+1)\pi, p \in \mathbb{Z}\}$, $\Omega = \{(u, v, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}\} - \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$，我们在 Ω 上定义度量 g 如下

$$\begin{aligned} g = {} & \Big(\tfrac{1}{2}(\cos(\sqrt{2}t) + \cosh(\sqrt{2}h)) + h_v^2\Big) du^2 + \Big(\tfrac{1}{2}(\cos(\sqrt{2}t) + \cosh(\sqrt{2}h)) + h_u^2\Big) dv^2 + dt^2 \\ & - 2h_u h_v du dv + 2h_v du dt - 2h_u dv dt, \end{aligned} \tag{3.20}$$

并在 $T\Omega$ 上定义一个 (1, 1)型张量场 A 如下

$$\begin{aligned} A\partial_u = {} & \tfrac{\cosh(\sqrt{2}h)\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}(\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h))} \partial_u + \tfrac{\cos(\sqrt{2}t)\sinh(\sqrt{2}h)}{\sqrt{2}(\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h))} \partial_v \\ & - \tfrac{\cosh(\sqrt{2}h)\sin(\sqrt{2}t) h_v - \cos(\sqrt{2}t)\sinh(\sqrt{2}h) h_u}{\sqrt{2}(\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h))} \partial_t, \\ A\partial_v = {} & \tfrac{\cos(\sqrt{2}t)\sinh(\sqrt{2}h)}{\sqrt{2}(\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h))} \partial_u - \tfrac{\cosh(\sqrt{2}h)\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}(\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h))} \partial_v \\ & - \tfrac{\sinh(\sqrt{2}h)\cos(\sqrt{2}t) h_v + \sin(\sqrt{2}t)\cosh(\sqrt{2}h) h_u}{\sqrt{2}(\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h))} \partial_t, \\ A\partial_t = {} & 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

设 ν 是 Ω 上秩为 1、带有度量 $\tilde{g}$ 的向量丛，$\nabla^\perp$ 是 ν 上与度量 $\tilde{g}$ 相容的联络，且 N 是 ν 中的一个单位向量场。我们定义 $T\Omega \otimes \nu$ 上的一个 (1, 1)型张量场 P：

$$\begin{aligned} \tilde{P}\partial_u = {} & \tfrac{1+\cos(\sqrt{2}t)\cosh(\sqrt{2}h)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)} \partial_u - \tfrac{\sin(\sqrt{2}t)\sinh(\sqrt{2}h)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)} \partial_v \\ & - \tfrac{h_v + h_v \cos(\sqrt{2}t)\cosh(\sqrt{2}h) + h_u \sin(\sqrt{2}t)\sinh(\sqrt{2}h)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)} \partial_t + h_v N \\ \tilde{P}\partial_v = {} & -\tfrac{\sin(\sqrt{2}t)\sinh(\sqrt{2}h)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)} \partial_u - \tfrac{1+\cos(\sqrt{2}t)\cosh(\sqrt{2}h)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)} \partial_v \\ & - \tfrac{h_u + h_u \cos(\sqrt{2}t)\cosh(\sqrt{2}h) - h_v \sin(\sqrt{2}t)\sinh(\sqrt{2}h)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)} \partial_t - h_u N, \\ \tilde{P}\partial_t = {} & N, \\ \tilde{P}N = {} & \partial_t. \end{aligned} \tag{3.22}$$

那么，可积条件在 Ω 上成立，因此在 Ω 的任意单连通子集 Ω_1 上也成立。除去 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$的一个等距变换，存在唯一的等距浸入 Ψ，将 (Ω_1, g) 浸入 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$，使得 A 是 Ω_1 到 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$的形算子， ν 通过同构 $\tilde{\Psi}: \nu \to T^{\perp}\Psi(\Omega_1)$ 与 $\Psi(\Omega_1)$ 在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的法丛等距，并且对于任意 $Y \in T\Omega_1,$，有

$$P(\Psi_* Y) = \Psi_*((\tilde{P}Y)^T) + \tilde{\Psi}((\tilde{P}Y)^{\perp}),\ P(\tilde{\Psi}N) = \Psi_*(\partial_t), \tag{3.23}$$

其中， P是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$的乘积结构，$\tilde{P}Y$和$\tilde{P}Y$分别表示 $\tilde{P}Y$到$T\Omega_1$ 和 ν上的投影。此外， Ψ 是乘积角函数为 $C = 0$的极小超曲面。

证明。设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的一个满足 $C = 0$的极小超曲面。根据引理 3.1–3.4， M 具有局部坐标（u， v， t），且存在一个函数 h：（u， v） $\mapsto \mathbb{R}$，使得 b_1、 b_2、 b_4 由（3.18）给出。由引理 3.3，我们得到

$$a_1 = \cos(\tfrac{t}{\sqrt{2}})\cosh(\tfrac{h}{\sqrt{2}}),\ a_2 = \sin(\tfrac{t}{\sqrt{2}})\sinh(\tfrac{h}{\sqrt{2}}). \tag{3.24}$$

利用（3.15）、（3.16）和（3.18），可知（2.15）和（2.16）等价于

$$d_1 = \frac{2\big(\cos(\frac{t}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{h}{\sqrt{2}})h_v + \sin(\frac{t}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{h}{\sqrt{2}})h_u\big)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)},\quad d_2 = \frac{2\big(\sin(\frac{t}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{h}{\sqrt{2}})h_v - \cos(\frac{t}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{h}{\sqrt{2}})h_u\big)}{\cos(\sqrt{2}t)+\cosh(\sqrt{2}h)}.$$

接着，我们可以检验 b_1、 b_2、 b_4 关于李括号 $[E_i, E_j]$、$1 \le i < j \le 3$的相容条件，并得出

$$(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})h = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sinh(\sqrt{2}h).$$

事实上， b_1、 b_2、 b_4 关于李括号 $[E_1, E_3]$ 和$[E_2, E_3]$的相容条件自动满足，而 b_1、 b_2、 b_4关于李括号 $[E_1, E_2]$ 的相容条件则蕴含上述微分方程。

反过来，假设函数 h 满足（3.19），度量 g 按照（3.20）定义，˜型张量 A 由（3.21）定义，并且有一个由（3.22）定义的（1, 1)型张量 P，那么可以直接检验所有可积条件均得到满足。因此，直接应用 [11, 15] 中的存在唯一性定理即可得到结论。□

注记 3.1. (i) 根据 [20]的推论 1（3）， M_0 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中唯一同时为极小超曲面且具有常标量曲率和常函数 C 的超曲面。在 (2.7) 中定义的标架 $\{E_1, E_2, E_3\}$下， $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 在 M_0上。因此，若 M 是定理 3.5 中所描述的极小超曲面，则 M 不可能具有常标量曲率。(ii) 引理 3.1 的情形 2 对应于 “Sinh-Gordon 方程”的平凡解： $h \equiv 0$，相应的例子是超曲面 $M_{a,\ b}$；更多详情见定理 3.7。

在讨论引理 3.1 的情形 1 和情形 2 之前，我们先给出以下分类结果：它针对具有常 $C \neq \pm 1$ 和常 b_2的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 超曲面。与此同时，对于任意给定的常数 $C \neq \pm 1$，我们构造了 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中一大类具有常乘积角函数 C的新超曲面例子。

命题 3.6. 设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常数 $C \neq \pm 1$ 的超曲面。那么，在式 (2.7) 定义的标架 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 下， b_2 在 M 上为常数，当且仅当以下条件之一成立：

(1) $b_2 \neq 0$ 且 M 是 M_t 的一个开子集，其中某个 $t \in (-1, 1)$，或者

(2) $b_2=0$ 且 M 局部由浸入 $\Phi:\Omega\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$: $(t,r,s)\longrightarrow$ (p,q给出),

$$\begin{aligned} p(t,r)&=\cos(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t)\gamma(r)+\sin(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t)N(r),\\ q(t,s)&=\cos(\sqrt{\tfrac{1+C}{2}}t)\tilde{\gamma}(s)+\sin(\sqrt{\tfrac{1+C}{2}}t)\tilde{N}(s), \end{aligned} \tag{3.25}$$

其中， $\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$ 是 $\mathbb{S}^2$ 中的两条任意光滑正则曲线，其弧长参数分别为 r 和s； $N(r)$ 和 $\tilde{N}(s)$ 分别是 $\mathbb{S}^2$中 $\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$ 的单位法向量场。

证明。We 假设 b_2 在 M上为常数。若 b_2 是非零常数，则由 (2.13) 得

$$b_1\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}-b_4\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}=0,$$

这意味着 $b_4=\frac{1-C}{1+C}b_1$。将 $b_4=\frac{1-C}{1+C}b_1$ 代入 (2.12) 和 (2.14)，得到

$$\begin{aligned} E_3b_1&=-\tfrac{1+C}{2}\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}+b_2^2\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}-b_1^2\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}},\\ E_3b_1&=\tfrac{\sqrt{1-C^2}}{2}+b_1^2\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}-b_2^2\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}. \end{aligned}$$

由上述两个方程可知， b_1 和 b_4 在 M上也为常数，因此 M 具有常主曲率。因此， M 具有常数 C、常平均曲率和常数量曲率。根据 [20]的推论 1（3）， M 是某个 $t\in(-1,1)$ 的开子集。反过来，可以直接验证，超曲面 $\{M_t,\ t\in(-1,1)\}$ 具有常数 C，且满足 b_2 为非零常数（参见 [20]的第 3.2 节）。

下面，我们考虑 M上 $b_2=0$ 的情形。由（2.12）和（2.14），可得

$$\begin{aligned} E_3b_1&=\tfrac{\sqrt{1-C^2}}{2}+b_1^2\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}},\\ E_3b_4&=-\tfrac{\sqrt{1-C^2}}{2}-b_4^2\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}. \end{aligned}$$

上述两个方程可以沿 E_3 的积分曲线直接积分，得到

$$\begin{aligned} b_1&=\sqrt{\tfrac{1+C}{2}}\tan\big(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}(t+h_1)\big),\\ b_4&=-\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}\tan\big(\sqrt{\tfrac{1+C}{2}}(t+h_2)\big), \end{aligned} \tag{3.26}$$

其中， h_1 和 h_2 是 M 上的两个局部函数，且满足 $E_3h_1=E_3h_2=0$。

接下来，我们选取两个适当的非零函数 ρ_1 和 ρ_2，使得新标架

$$\{X_1=\rho_1E_1,\ X_2=\rho_2E_2,\ X_3=E_3\}$$

满足 $[X_1,X_2]=[X_1,X_3]=[X_2,X_3]=0$。具体而言，利用 $[E_i,E_j]=\nabla_{E_i}E_j-\nabla_{E_j}E_i$、(2.11) 和 $b_2=0$，可得

$$[E_1,E_2]=0,\ [E_1,E_3]=-b_1\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}E_1,\ [E_2,E_3]=b_4\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}E_2.$$

因此

$$[X_1,X_3]=-(\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}\rho_1b_1+E_3\rho_1)E_1.$$

那么 $[X_1,X_3]=0$ 等价于

$$E_3\rho_1=-\sqrt{\tfrac{1-C}{1+C}}\rho_1b_1. \tag{3.27}$$

类似地，我们得到

$$[X_2, X_3] = (\sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}\rho_2 b_4 - E_3\rho_2)E_2, \quad [X_1, X_2] = \rho_1(E_1\rho_2)E_2 - \rho_2(E_2\rho_1)E_1.$$

那么， $[X_2, X_3] = [X_1, X_2] = 0$ 等价于

$$E_3\rho_2 = \sqrt{\tfrac{1+C}{1-C}}\rho_2 b_4, \tag{3.28}$$

$$\rho_1 E_1 \rho_2 = \rho_2 E_2 \rho_1 = 0. \tag{3.29}$$

然后利用 (3.26)，沿着E_3 的积分曲线直接对方程 (3.27) 和 (3.28) 积分，可得

$$\begin{aligned} \rho_1 &= h_3 \cos\big(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}(t+h_1)\big), \\ \rho_2 &= h_4 \cos\big(\sqrt{\tfrac{1+C}{2}}(t+h_2)\big), \end{aligned} \tag{3.30}$$

其中， h_3 和 h_4 是定义在 M 上的函数，满足 $E_3 h_3 = E_3 h_4 = 0$。特别地，我们取$h_3 = h_4 = 1$，于是 $\rho_1 = \cos\big(\sqrt{\frac{1-C}{2}}(t+h_1)\big)$， $\rho_2 = \cos\big(\sqrt{\frac{1+C}{2}}(t+h_2)\big)$。

另一方面，由 (3.26) 可得

$$t + h_1 = \sqrt{\tfrac{2}{1+C}}\arctan(\sqrt{\tfrac{2}{1+C}}b_1), \quad t + h_2 = \sqrt{\tfrac{2}{1+C}}\arctan(-\sqrt{\tfrac{2}{1-C}}b_4).$$

将这些方程与 $\rho_1 = \cos\big(\sqrt{\frac{1-C}{2}}(t+h_1)\big)$、 $\rho_2 = \cos\big(\sqrt{\frac{1+C}{2}}(t+h_2)\big)$结合，可得

$$\rho_1 = \cos\big(\arctan(\sqrt{\tfrac{2}{1+C}}b_1)\big), \quad \rho_2 = \cos\big(\arctan(-\sqrt{\tfrac{2}{1-C}}b_4)\big).$$

由 (2.15)、(2.16) 和 $b_2 = 0$ 可得 $E_1\rho_2 = E_2\rho_1 = 0$，这意味着 $[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$。

根据标架 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 的定义，并利用 $[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0$，我们可以在局部将 M 识别为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个开子集 Ω，并用浸入表示超曲面 M

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \quad (t, r, s) \mapsto (p(t, r, s), q(t, r, s)),$$

使得 $(\frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial t}) = E_3$，且 $(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial q}{\partial r})$、$(\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial q}{\partial s})$ 分别与 E_1、E_2 共线。根据 P 的定义并利用

$$PE_1 = E_1, \quad PE_2 = -E_2,$$

我们得到， $dp, dq: T\Omega \to T\mathbb{S}^2$ 满足

$$\begin{cases} (dp(\frac{\partial}{\partial r}), 0) = \frac{1}{2}(d\Phi(\frac{\partial}{\partial r}) + Pd\Phi(\frac{\partial}{\partial r})) = d\Phi(\frac{\partial}{\partial r}), \\ (0, dq(\frac{\partial}{\partial r})) = \frac{1}{2}(d\Phi(\frac{\partial}{\partial r}) - Pd\Phi(\frac{\partial}{\partial r})) = 0, \end{cases} \tag{3.31}$$

and

$$\begin{cases} (dp(\frac{\partial}{\partial s}), 0) = \frac{1}{2}(d\Phi(\frac{\partial}{\partial s}) + Pd\Phi(\frac{\partial}{\partial s})) = 0, \\ (0, dq(\frac{\partial}{\partial s})) = \frac{1}{2}(d\Phi(\frac{\partial}{\partial s}) - Pd\Phi(\frac{\partial}{\partial s})) = d\Phi(\frac{\partial}{\partial s}). \end{cases} \tag{3.32}$$

(3.32) 的第一个方程表明， p 仅依赖于（t， r）。类似地，由 (3.31) 中的第二个方程可得， q仅依赖于（t， s）。根据 $g(PE_3, E_3) = -C$， $AE_3 = 0$和

$\nabla_{E_3}E_3=0$，我们有： E_3 的积分曲线是 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$的测地线，因此可以假设

$$p(t,r)=\cos(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t+c_1(r))\gamma(r)+\sin(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t+c_1(r))(m_1(r)\frac{d\gamma(r)}{dr}+m_2(r)N(r)),$$
$$q(t,s)=\cos(\sqrt{\tfrac{1+C}{2}}t+c_2(s))\tilde{\gamma}(s)+\sin(\sqrt{\tfrac{1+C}{2}}t+c_2(s))(n_1(s)\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}+n_2(s)\tilde{N}(s)),$$

其中， $\gamma(r)$ $\tilde{\gamma}(s)\in\mathbb{S}^2$、 $N(r)$ 和 $\tilde{N}(s)$ 分别是 $\mathbb{S}^2$ 中 $\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$ 的单位法向量场。我们可以重新参数化这些曲线，采用弧长参数（仍记作 r 和 s），于是 $|\frac{d\gamma(r)}{dr}|=|\frac{d\tilde{\gamma}}{(ds}^{s}|=m_1^2(r)+m_2^2(r)=n_1^2(s)+n_2^2(s)=1$。假设 $k(r)$ 和 $\tilde{k}(s)$ 分别是 $\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$ 的曲率，则有

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\gamma(r)}{dr^2}=-\gamma(r)+k(r)N(r),\quad \frac{dN(r)}{dr}=-k(r)\frac{d\gamma(r)}{dr},\\&\frac{d^2\tilde{\gamma}(s)}{ds^2}=-\tilde{\gamma}(s)+\tilde{k}(s)\tilde{N}(s),\quad \frac{d\tilde{N}(s)}{ds}=-\tilde{k}(s)\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

利用 $g(E_1,E_3)=g(E_2,E_3)=0$ 这一事实，可得

$$g((\frac{\partial p}{\partial t},\frac{\partial q}{\partial t}),(\frac{\partial p}{\partial r},\frac{\partial q}{\partial r}))=g((\frac{\partial p}{\partial t},\frac{\partial q}{\partial t}),(\frac{\partial p}{\partial s},\frac{\partial q}{\partial s}))=0,$$

这意味着

$$\frac{dc_1(r)}{dr}+m_1(r)=\frac{dc_2(s)}{ds}+n_1(s)=0.\tag{3.34}$$

最后，我们进行一个变换，将 (p,q) 的表达式化简如下。

$$\begin{aligned}p(t,r)&=\cos(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t+c_1(r))\gamma(r)+\sin(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t+c_1(r))(m_1(r)\frac{d\gamma(r)}{dr}+m_2(r)N(r))\\&=\cos(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t)V_1(r)+\sin(\sqrt{\tfrac{1-C}{2}}t)V_2(r),\end{aligned}$$

其中

$$V_1(r)=\cos(c_1(r))\gamma(r)+\sin(c_1(r))(m_1(r)\frac{d\gamma(r)}{dr}+m_2(r)N(r)),$$
$$V_2(r)=-\sin(c_1(r))\gamma(r)+\cos(c_1(r))(m_1(r)\frac{d\gamma(r)}{dr}+m_2(r)N(r)).$$

利用 (3.34)，可以直接验证 $|V_1(r)|=|V_2(r)|=1$ 以及 $\langle V_1(r)\ V_2(r)\rangle=\langle\frac{dV_1(r)}{dr},V_2(r)\rangle=0$，即 ~~$V_2(r)$~~是 $V_1(r)$ 的单位法向量场 $\hookrightarrow\mathbb{S}^2$。对于 $q(t,s)$，我们可以进行类似的变换。此外，通过重新参数化，使 r 和 s 成为弧长参数， M在局部可表示为映射 $\Phi:\Omega\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$: $(t,r,s)\longrightarrow(p,q)$，其由 (3.25) 定义。反之，可以直接验证，由 (3.25) 构造的超曲面具有常数 C ，并满足 $b_2=0$。□

借助引理 3.1、定理 3.5 和命题 3.6，我们得到如下关于具有常数 $C=0$ 的 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 的极小超曲面的分类结果。

定理 3.7. 设 M 是具有常数 $C=0$ 的 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 中的极小超曲面。那么，以下两种情况之一成立:

(1) M 是 M_0的一个开子集；或 (2) M 是$M_{a,\ b}$ 在某些 a、 $b\in\mathbb{S}^2$下的一个开子集；或 (3) M 是定理 3.5 所描述的某个极小超曲面的一个开子集。

证明。由引理 3.1，在标架 $\{E_1, E_2, E_3\}$下， M上 b_1、 b_2、 b_4有三种情形，而情形 3 已由定理 3.5 分类。

对于情形 1，不难看出， M 具有常平均曲率和常标量曲率。于是，根据 [20] 的推论 1（3），以及 M_0 是 M_t中唯一的极小超曲面这一事实，我们知道情形 1 对应于超曲面 $M_0 = \{(p, q) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 | \langle p, q\rangle = 0\}$。

对于情形 2，根据命题 3.6， M 在局部由浸入 $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$: $(t, r, s) \longrightarrow (p, q)$ 给出，该浸入由 (3.25) 定义，其中 $C = 0$。因此，我们只需确定具体的曲线$\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$。与命题 3.6 的证明中一样，我们假设 $\kappa(r)$ 和 $\tilde{\kappa}(s)$ 分别是 $\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$ 的曲率。于是，(3.33) 在 $\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$ 上成立。通过直接计算，我们得到

$$E_1 = (\frac{d\gamma(r)}{dr}, 0),\ E_2 = (0, \frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}),\ E_3 = (\frac{\partial p}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial t}),\ N = (\frac{\partial p}{\partial t}, -\frac{\partial q}{\partial t}),$$

and

$$b_1 = g(AE_1, E_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) + \cos(\frac{t}{\sqrt{2}})\kappa(r)}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) - \sin(\frac{t}{\sqrt{2}})\kappa(r)},\quad b_2 = g(AE_1, E_2) = 0,$$

$$b_4 = g(AE_2, E_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) + \cos(\frac{t}{\sqrt{2}})\tilde{\kappa}(s)}{\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) - \sin(\frac{t}{\sqrt{2}})\tilde{\kappa}(s)}.$$

由 $H = \frac{1}{3}(b_1 + b_4) = 0$，我们得到 $\kappa(r)$ 和 $\tilde{\kappa}(s)$ 等于同一个常数。在对 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 施加一个等距变换后，不妨设 $\gamma(r)$ 和 $\tilde{\gamma}(s)$ 都是 $\mathbb{S}^1(r_1) \hookrightarrow \mathbb{S}^2$，且第三个坐标分量为 $\sqrt{1 - r_1^2}$，于是 M满足 $\langle p, (0, 0, 1)\rangle + \langle q, (0, 0, -1)\rangle = 0$ 对于任意 $(p, q) \in M$均成立。因此，一般而言， M是 M_a 的一个开子集，$_b$ 其中 a、$b \in \mathbb{S}^2$。□

4. Proofs of Theorem 1.1 and Theorem 1.2

在本节中，我们证明定理 1.1 和定理 1.2。作为第一个关键步骤，利用所谓的清华原理——该原理最初由前三位作者于2013年在清华大学 [1], 发现——我们在具有常截面曲率的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的任意超曲面 M 上建立一个非常有用的恒等式。

引理 4.1. 设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常截面曲率 κ 的超曲面。那么，对于任意切向量场 W、U、Y、$Z \in TM$，下式成立:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{W,U,Y} \mathbf{I}(W, U, Y, Z) = 0, \tag{4.1}$$

其中，符号 $\mathfrak{S}$ 表示循环求和，而 $\mathbf{I}(W, U, Y, Z)$ 定义为

$$\mathbf{I}(W, U, Y, Z) := \tfrac{1}{2}\{-g(TY, Z)g(AW, TU) + g(TU, Z)g(AW, TY)\}.$$

P证明。为了证明引理 4.1，我们计算循环求和的表达式 n

$$\mathfrak{A} := \mathop{\mathfrak{S}}_{W,U,Y} \big\{g((\nabla^2 A)(W, U, Y), Z) - g((\nabla^2 A)(W, Y, U), Z)\big\} \tag{4.2}$$

以两种不同的方式。具体而言，一方面，我们对 Codazzi 方程 (2.2) 求协变导数，得到

$$\begin{aligned} &g((\nabla^2 A)(W, U, Y), Z) - g((\nabla^2 A)(W, Y, U), Z) \\ &= \tfrac{1}{2}\{g((\nabla_W T)Y, Z)\mu(U) + g(TY, Z)(\nabla_W \mu)U \\ &\quad - g((\nabla_W T)U, Z)\mu(Y) - g(TU, Z)(\nabla_W \mu)Y\}. \end{aligned}$$

通过直接计算并利用引理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned}&g((\nabla^2A)(W,U,Y),Z)-g((\nabla^2A)(W,Y,U),Z)\\&=\tfrac{1}{2}\{g(AW,Y)\mu(Z)\mu(U)-g(TY,Z)g(AW,TU)+Cg(TY,Z)g(AW,U)\\&\quad-g(AW,U)\mu(Z)\mu(Y)+g(TU,Z)g(AW,TY)-Cg(TU,Z)g(AW,Y)\}.\end{aligned}$$

因此，可以直接验证

$$\mathfrak{A}=\underset{W,U,Y}{\mathfrak{S}}\mathbf{I}(W,U,Y,Z). \tag{4.3}$$

另一方面，循环和 $\mathfrak{A}$ 可改写为

$$\mathfrak{A}=\underset{W,U,Y}{\mathfrak{S}}\big\{g((\nabla^2A)(W,U,Y),Z)-g((\nabla^2A)(U,W,Y),Z)\big\}. \tag{4.4}$$

然后应用里奇恒等式 (2.5)，得到

$$\mathfrak{A}=-\underset{W,U,Y}{\mathfrak{S}}\big\{g(R(W,U)Y,AZ)+g(R(W,U)Z,AY)\big\}. \tag{4.5}$$

由于 M 具有 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$的常截面曲率 κ，我们有

$$g(R(W,U)Y,Z)=\kappa\{g(U,Y)g(W,Z)-g(W,Y)g(U,Z)\}. \tag{4.6}$$

由此可直接得出

$$\mathfrak{A}=-\underset{W,U,Y}{\mathfrak{S}}\big\{g(R(W,U)Y,AZ)+g(R(W,U)Z,AY)\big\}=0,$$

结合 (4.3)，即可得出引理 4.1 的结论。 □

注 4.1. 引理 4.1 的证明中所用的方法称为清华原理。这一卓越技巧自首次成功应用于 [1], 以来，已被应用于许多不同的情形，详情参见 [5, 6, 13, 14, 21, 22] 。

命题 4.2. 设 M 是 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 中具有常截面曲率 κ的超曲面。那么，$\kappa=\frac{1}{2}$ 且乘积角函数为 $C=0$。

证明. 假设超曲面 M 具有常截面曲率 κ。由于我们只考虑局部情形，为证明此命题，我们将根据 M上乘积角函数 C 的取值分两种情况讨论。

情形 I. M上的 $C\neq\pm1$ 。

在此情形下，我们可以取由 (2.7) 定义的局部标准正交标架场 $\{E_1,E_2,E_3\}$ 。那么，形算子 A、(1, 1)型张量 T和 1-形式 μ 由 (2.8) 和 (2.9) 给出。利用 $\nabla P=0$、(2.8) 和引理 2.1，可得

$$\begin{cases}E_1C=-2b_3\sqrt{1-C^2},\ E_2C=-2b_5\sqrt{1-C^2},\ E_3C=-2b_6\sqrt{1-C^2},\\ \nabla_{E_1}E_1=b_1\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}E_3,\ \nabla_{E_1}E_2=-b_2\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}E_3,\ \nabla_{E_1}E_3=-b_1\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}E_1+b_2\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}E_2,\\ \nabla_{E_2}E_1=b_2\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}E_3,\ \nabla_{E_2}E_2=-b_4\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}E_3,\ \nabla_{E_2}E_3=-b_2\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}E_1+b_4\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}E_2,\\ \nabla_{E_3}E_1=b_3\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}E_3,\ \nabla_{E_3}E_2=-b_5\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}E_3,\ \nabla_{E_3}E_3=-b_3\sqrt{\frac{1-C}{1+C}}E_1+b_5\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}E_2.\end{cases} \tag{4.7}$$

将 $(W,U,Y,Z)=(E_1,E_2,E_3,E_1)$、$(E_1,E_2,E_3,E_2)$、$(E_1,E_2,E_3,E_3)$ 分别代入 (4.1)，可得 $b_3(1+C)=b_5(1-C)=b_2C=0$。由于 $C\neq\pm1$，因此有 $b_3=b_5=0$。

断言。 $C=0$ 和 $\kappa=\frac{1}{2}$ 在 M上。

断言的证明：我们采用反证法。如果 $C \neq 0$ 在 M的一个开子集上成立，那么$b_2 = 0$。通过直接计算，我们得到

$g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) = b_1 b_4$, $g(R(E_1, E_3)E_3, E_1) = \frac{1}{2} - \frac{C}{2} + b_1 b_6$, $g(R(E_2, E_3)E_3, E_2) = \frac{1}{2} + \frac{C}{2} + b_4 b_6$.由于 $C \neq 0$，我们有 $b_6 \neq 0$。又由于 $C \neq \pm 1$，可得

$$\kappa \neq 0,\ b_6 = \frac{2\kappa - 1 + C}{2b_1} = \frac{2\kappa - 1 - C}{2b_4},\ b_6^2 = \frac{(2\kappa-1)^2 - C^2}{4\kappa}.$$

如果 $\kappa < 0$，那么 $(2\kappa - 1)^2 - C^2 > 0$，这与 $b_6^2 = \frac{(2\kappa-1)^2 - C^2}{4\kappa} > 0$矛盾。因此 $\kappa > 0$。不失一般性，我们假设

$$b_6 = -\frac{\sqrt{(2\kappa-1)^2 - C^2}}{2\sqrt{\kappa}},\ b_1 = -\frac{\sqrt{\kappa}(2\kappa - 1 + C)}{\sqrt{(2\kappa-1)^2 - C^2}},\ b_4 = -\frac{\sqrt{\kappa}(2\kappa - 1 - C)}{\sqrt{(2\kappa-1)^2 - C^2}}. \tag{4.8}$$

接下来，将 $(Y, Z) = (E_3, E_1)$ 和 $(Y, Z) = (E_3, E_2)$ 代入 Codazzi 方程 (2.2)，并利用 (2.8)、(4.7)，分别比较 E_1 和 E_2 的分量。由此可得

$$E_3(b_1) - E_1(b_3) = \frac{\sqrt{1-C^2}}{2} + 2b_3^2\sqrt{\frac{1-C}{1+C}} - b_6 b_1\sqrt{\frac{1-C}{1+C}} + b_1^2\sqrt{\frac{1-C}{1+C}} - b_2^2\sqrt{\frac{1+C}{1-C}},$$
$$E_3(b_4) - E_2(b_5) = -\frac{\sqrt{1-C^2}}{2} - 2b_5^2\sqrt{\frac{1+C}{1-C}} + b_6 b_4\sqrt{\frac{1+C}{1-C}} + b_2^2\sqrt{\frac{1-C}{1+C}} - b_4^2\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}.$$

利用 $b_2 = b_3 = b_5 = 0$，上述两个方程变为

$$E_3 b_1 = \frac{\sqrt{1-C}(1 + C + 2b_1(b_1 - b_6))}{2\sqrt{1+C}},\ E_3 b_4 = \frac{\sqrt{1+C}(-1 + C + 2b_4(b_6 - b_4))}{2\sqrt{1-C}}. \tag{4.9}$$

接下来，我们对 b_1 和 b_4 关于 E_3求导，利用 (4.8) 和$E_3 C = -2b_6\sqrt{1 - C^2}$，得到

$$E_3 b_1 = \frac{\sqrt{1-C^2}(2\kappa - 1)}{1 + C - 2\kappa},\ E_3 b_4 = \frac{\sqrt{1-C^2}(2\kappa - 1)}{-1 + C + 2\kappa}. \tag{4.10}$$

由 (4.9) 和 (4.10)，我们有 $\sqrt{1 - C^2}(2\kappa - 1) = 0$，由此得到 $\kappa = \frac{1}{2}$。然而，这与 $C \neq 0$ 和 $\sqrt{(2\kappa - 1)^2 - C^2} \geq 0$矛盾。因此，乘积角函数 $C = 0$。

最后，由引理 2.1，我们有 $b_3 = b_5 = b_6 = 0$。通过直接计算，我们得到

$$g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) = b_1 b_4 - b_2^2,\ \ g(R(E_1, E_3)E_3, E_1) = g(R(E_2, E_3)E_3, E_2) = \tfrac{1}{2},$$

这意味着 M 的截面曲率为 $\kappa = \frac{1}{2}$，且 $b_1 b_4 - b_2^2 = \frac{1}{2}$ 在 M上成立。我们完成了上述断言的证明。

情形 II。$C^2 = 1$ 在 M上。

在此情形下，由引理 2.2 可知，M 是 $\Gamma \times \mathbb{S}^2$的一个开子集，其中 Γ 是$\mathbb{S}^2$的一条曲线。因此，M的切丛可分解为 $TM = T\Gamma \oplus T\mathbb{S}^2$，并且有$A|_{T\mathbb{S}^2} = 0$。接下来，取一个正交基 $\{v_1, v_2, v_3\}$，满足 $v_1 \in T\Gamma$ 和 v_2、$v_3 \in T\mathbb{S}^2$，经过直接计算，得到 $g(R(v_1, v_2)v_2, v_1) = 0$ 以及 $g(R(v_2, v_3)v_3, v_2) = 1$。因此，在此情形下，不存在具有常截面曲率的超曲面。□

注记 4.2. 作为命题 4.2 的直接推论，我们得到，在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中不存在具有常截面曲率和常平均曲率的超曲面。事实上，设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常截面曲率 κ 的超曲面，由命题 4.2，$\kappa = \frac{1}{2}$ 和 M 具有常 $C = 0$。根据 [20] 的推论 1（3），$\{M_t,\ t \in (-1, 1)\}$ 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中唯一同时具有常平均曲率、标量曲率和函数 C 的超曲面。然而，对于任意 $t \in (-1, 1)$，M_t 不具有常截面曲率。

在证明定理 1.1 和定理 1.2 之前，我们需要进行一些准备。对于任意局部具有乘积角函数 $C \neq \pm 1$ 的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中的超曲面 M，设 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 是 M 上由（2.7）定义的标准正交标架。我们定义映射

$$\Phi_r : M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \qquad (p,q) \mapsto \Phi_r((p,q)) = \tilde{\exp}_{(p,q)}(rN_{(p,q)}), \quad \Phi_0(M) = M,$$

其中，$(p,q) \in M$和 $\tilde{\exp}$ 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的黎曼指数映射。对于任意 $(p,q) \in M$，记 $\gamma(t) = \tilde{\exp}_{(p,q)}(tN_{(p,q)})$ 为满足 $\gamma(0) = (p,q)$ 且 $\gamma'(0) = N_{(p,q)}$ 的测地线。令 $\{E_1^r, E_2^r, E_3^r\}$ 为 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 沿 $\gamma(t)$ 在点 $\Phi_r((p,q))$ 处的平行移动，则 $\{E_1^r, E_2^r, E_3^r\}$在点 $\Phi_r((p,q))$ 处构成 $(T\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \setminus \{\gamma'(r)\}$ 的标准正交基。

对于固定的 r，$\Phi_r(M)$ 不一定是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的子流形，但至少在局部且当 r 足够小时，它是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 的超曲面。$\Phi_r(M)$ 是超曲面，当且仅当对于任意 $(p,q) \in M$，切映射 $(\Phi_r((p,q)))_*$ 非退化。在这种情况下，相应的标架$\{E_1^r, E_2^r, E_3^r\}$构成 $T_{\Phi_r((p,q))}\Phi_r(M)$ 的标准正交基。

下面，针对任意超曲面 M 和任意 $r \in \mathbb{R}$，利用雅可比场理论，我们给出映射 Φ_r 在 M 具有常乘积角函数 $C = 0$时的一些详细几何性质。更具体地说，我们确定 Φ_r的切映射；当 $\Phi_r(M)$ 是一个超曲面时，我们确定 $\Phi_r(M)$ 的形算子。这些性质将在定理 4.4 和定理 1.1 的证明中用到。

命题 4.3. 设 M是具有 $C = 0$的 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 超曲面，且 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 是由 (2.7) 定义在 M上的标架场。那么，对任意 $(p,q) \in M$，Φ_r的切映射可表示为:

$$\begin{pmatrix} (\Phi_r)_* E_1 \\ (\Phi_r)_* E_2 \\ (\Phi_r)_* E_3 \end{pmatrix} = (B_{ij}) \begin{pmatrix} E_1^r \\ E_2^r \\ E_3^r \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

其中

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}b_1 \sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & -\sqrt{2}b_2 \sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & 0 \\ -\sqrt{2}b_2 \sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & \cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}b_4 \sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

(B_{ij}) 的行列式为

$$\mathrm{Det}(B_{ij}) = \tfrac{1}{2}\Big(1 - 2b_2^2 + 2b_1 b_4 + (1 + 2b_2^2 - 2b_1 b_4)\cos(\sqrt{2}r) - \sqrt{2}(b_1 + b_4)\sin(\sqrt{2}r)\Big). \tag{4.13}$$

此外，当 $\Phi_r(M)$ 是一个超曲面时，这等价于 $\mathrm{Det}(B_{ij}) \neq 0$。令 A_r为 $\Phi_r(M)$ 的形算子，则对于任意 $(p,q) \in M$，A_r在 $\Phi_r((p,q))$ 处的表达式为

$$\begin{pmatrix} A_r E_1^r \\ A_r E_2^r \\ A_r E_3^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_r)_{11} & (A_r)_{12} & 0 \\ (A_r)_{21} & (A_r)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^r \\ E_2^r \\ E_3^r \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

其中

$$(A_r)_{11} = \frac{\sqrt{2}(b_1 - b_4 + (b_1 + b_4)\cos(\sqrt{2}r)) + (1 + 2b_2^2 - 2b_1b_4)\sin(\sqrt{2}r)}{\sqrt{2}\Big(1 - 2b_2^2 + 2b_1b_4 + (1 + 2b_2^2 - 2b_1b_4)\cos(\sqrt{2}r) - \sqrt{2}(b_1 + b_4)\sin(\sqrt{2}r)\Big)},$$

$$(A_r)_{12} = (A_r)_{21} = \frac{2b_2}{1 - 2b_2^2 + 2b_1b_4 + (1 + 2b_2^2 - 2b_1b_4)\cos(\sqrt{2}r) - \sqrt{2}(b_1 + b_4)\sin(\sqrt{2}r)},$$

$$(A_r)_{22} = \frac{\sqrt{2}(-b_1 + b_4 + (b_1 + b_4)\cos(\sqrt{2}r)) + (1 + 2b_2^2 - 2b_1b_4)\sin(\sqrt{2}r)}{\sqrt{2}\Big(1 - 2b_2^2 + 2b_1b_4 + (1 + 2b_2^2 - 2b_1b_4)\cos(\sqrt{2}r) - \sqrt{2}(b_1 + b_4)\sin(\sqrt{2}r)\Big)}.$$

证明。我们选取由 (2.7) 定义的正交标架场 $\{E_1, E_2, E_3\}$，并假设 (2.9) 成立。由于 M 具有常数 $C = 0$，因此可得 $b_3 = b_5 = b_6 = 0$。

设 $N = (N_1, N_2)$ 为 M的单位法向量场，则对任意给定的 $r \in \mathbb{R}$，我们定义映射 Φ_r：$M \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$，使得

$$\Phi_r((p,q)) = \tilde{\exp}_{(p,q)}(rN_{(p,q)}) = (\exp_p rN_1, \exp_q rN_2), \quad (p,q) \in M,$$

其中 exp 表示 $\mathbb{S}^2$中的指数映射。由于 $C = 0$，我们有 $|N_1| = |N_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$，于是

$$\Phi_r(M) = \big(\cos(\tfrac{r}{\sqrt{2}})p + \sqrt{2}\sin(\tfrac{r}{\sqrt{2}})N_1, \cos(\tfrac{r}{\sqrt{2}})q + \sqrt{2}\sin(\tfrac{r}{\sqrt{2}})N_2\big), \quad (p,q) \in M.$$

对于任意 $(p,q) \in M$，令 $\gamma(t)$ 为满足 $\gamma(0) = (p,q)$ 且 $\gamma'(0) = N_{(p,q)}$ 的测地线。沿着 $\gamma(t)$，利用 $\nabla P = 0$ 和 $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$，我们有

$$\frac{d}{dt}g(P\gamma'(t), \gamma'(t)) = g(\bar{\nabla}_{\gamma'(t)}P\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0.$$

由此可得

$$g(P\gamma'(r), \gamma'(r)) = g(P\gamma'(0), \gamma'(0)) = C = 0. \tag{4.15}$$

Let

$$E_1^t = \frac{J_1\gamma'(t) + J_2\gamma'(t)}{\sqrt{2}}, \; E_2^t = \frac{J_1\gamma'(t) - J_2\gamma'(t)}{\sqrt{2}}, \; E_3^t = P\gamma'(t), \tag{4.16}$$

于是，$\{E_1^t, E_2^t, E_3^t\}$ 沿着 $\gamma(t)$构成三个正交归一的平行向量场，并且 $E_1^0 = E_1$，$E_2^0 = E_2$，$E_3^0 = E_3$。此外，沿着 $\gamma(t)$，有

$$PE_1^t = E_1^t, \quad PE_2^t = -E_2^t, \quad PE_3^t = \gamma'(t), \quad P\gamma'(t) = E_3^t. \tag{4.17}$$

回顾一下，如 [2], 第10.2.1节所述，沿着 $\gamma(t)$的雅可比场 $Y(t)$称为 M-雅可比场，若其初始值满足以下两个条件：

$$Y(0) \in T_{\gamma(0)}M \quad \text{and} \quad Y'(0) + AY(0) \in T^{\perp}_{\gamma(0)}M.$$

我们将 $\mathfrak{J}(M, \gamma(t))$定义为由沿着$\gamma(t)$且垂直于 M-雅可比场 $t \to t\gamma'(t)$的所有 M-雅可比向量场构成的三维向量空间。于是，在 $\gamma(r) \in \Phi_r(M)$处，$\Phi_r(M)$的切空间可表示为

$$T_{\gamma(r)}\Phi_r(M) = \mathrm{Span}\{Y(r) |\ Y(t) \in \mathfrak{J}(M, \gamma(t))\}.$$

设 $Y_i(t)$、$i = 1$、2、3 是沿测地线 $\gamma(t)$ 的 M-雅可比场，满足 $Y_i(0) = E_i$ 且$Y_i'(0) = -AE_i$。然后，通过直接计算，我们得到

$$Y_i(t) = \Big(\delta_{1i}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}g(AE_1, E_i)\sin(\frac{t}{\sqrt{2}})\Big)E_1^t + \Big(\delta_{2i}\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}g(AE_2, E_i)\sin(\frac{t}{\sqrt{2}})\Big)E_2^t + (\delta_{3i} - tg(AE_3, E_i))E_3^t.$$

取 $t=r$，我们得到

$$\begin{pmatrix} (\Phi_r)_*E_1 \\ (\Phi_r)_*E_2 \\ (\Phi_r)_*E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(r) \\ Y_2(r) \\ Y_3(r) \end{pmatrix} = (B_{ij}) \begin{pmatrix} E_1^r \\ E_2^r \\ E_3^r \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

其中

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}b_1\sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & -\sqrt{2}b_2\sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & 0 \\ -\sqrt{2}b_2\sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & \cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}b_4\sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

通过直接计算，我们得到

$$\mathrm{Det}(B_{ij}) = \tfrac{1}{2}\Big(1 - 2b_2^2 + 2b_1b_4 + (1 + 2b_2^2 - 2b_1b_4)\cos(\sqrt{2}r) - \sqrt{2}(b_1+b_4)\sin(\sqrt{2}r)\Big).$$

下文中，假设 $\Phi_r(M)$ 是 M 在距离 r 处的一个平行超曲面。于是，对任意的 $(p,q) \in M$，相应的 $\{E_1^r, E_2^r, E_3^r\}$ 构成 $T_{\Phi_r((p,q))}\Phi_r(M)$ 的一个标准正交基。容易验证，由下式定义的 $N^r = (N_1^r, N_2^r)$

$$N_1^r = \cos(\tfrac{r}{\sqrt{2}})N_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\tfrac{r}{\sqrt{2}})p, \quad N_2^r = \cos(\tfrac{r}{\sqrt{2}})N_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\tfrac{r}{\sqrt{2}})q, \ (p,q) \in M,$$

是超曲面 $\Phi_r(M)$ 的一个单位法向量场。由 (4.15)，我们知道 $\Phi_r(M)$ 也具有常乘积角函数 $C=0$。接下来，我们计算 $Y_i(t)$ $i=1,2,3$ 关于 t 的导数，并得到

$$\begin{pmatrix} A_rY_1(r) \\ A_rY_2(r) \\ A_rY_3(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_1'(r) \\ -Y_2'(r) \\ -Y_3'(r) \end{pmatrix} = (D_{ij}) \begin{pmatrix} E_1^r \\ E_2^r \\ E_3^r \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

其中 A_r 是超曲面 $\Phi_r(M)$ 关于 N^r 的形算子，并且

$$(D_{ij}) = \begin{pmatrix} b_1\cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & b_2\cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) & 0 \\ b_2\cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) & b_4\cos(\frac{r}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{r}{\sqrt{2}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后，利用 (4.18) 和 (4.19)，我们得到

$$\begin{pmatrix} A_rE_1^r \\ A_rE_2^r \\ A_rE_3^r \end{pmatrix} = (B_{ij})^{-1}(D_{ij}) \begin{pmatrix} E_1^r \\ E_2^r \\ E_3^r \end{pmatrix}.$$

T于是 (4.14) 立即得出，命题4的证明也就完成了。 3. □

下面利用命题 4.3，建立具有常截面曲率的超曲面与具有 $C=0$ 的极小超曲面之间的关系，这是定理 1.1 证明中的关键观察之一。

定理 4.4. 设 M 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常截面曲率 κ 的超曲面。那么， M 在距离 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 处的平行超曲面 $\Phi_{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}(M)$，是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常数 $C=0$ 的极小超曲面。

证明。由于 M 具有常截面曲率 κ，根据命题 4.2， M 具有常 $C=0$ 和$\kappa = \frac{1}{2}$。我们选取由 (2.7) 定义的正交标架场 $\{E_1, E_2, E_3\}$，并假设 (2.9) 成立。由命题 4.2 的证明可知， $b_3 = b_5 = b_6 = 0$ 和 $b_1b_4 - b_2^2 = \frac{1}{2}$。

注意，对于任意 $r \in \mathbb{R}$， $\Phi_r(M)$ 是 M 的平行超曲面，当且仅当 $\mathrm{Rank}((\Phi_r)_*)$ 在 M 上满足 $=3$。对于一般的超曲面 M， $\Phi_r(M)$ 未必总是超曲面。然而，当M 具有常截面曲率时，我们将证明，对于任意 r，$\mathrm{Rank}((\Phi_r)_*)=3$ 在 M 上成立。

事实上，由命题 4.3 可知，对于任意的 $(p,q) \in M$， Φ_r 的切映射满足表达式 (4.11)。(B_{ij}) 的行列式由 (4.13) 给出。由于 $b_1b_4 - b_2^2 = \frac{1}{2}$，我们可以化简 $\mathrm{Det}(B_{ij})$，得到

$$\mathrm{Det}(B_{ij}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1+b_4)\sin(\sqrt{2}r).$$

如果存在某个 r，使得 $\mathrm{Det}(B_{ij}) = 0$ 在局部成立，那么 M 具有常平均曲率，这与注记 4.2 矛盾。由于我们关注的是局部情形，可以假设对于任意的 $(p,q) \in M$ 以及任意固定的 r，$\mathrm{Det}(B_{ij}) \neq 0$。由此可得 $\mathrm{Rank}((\Phi_r)_*) = 3$，且 $\Phi_r(M)$ 是 M 在距离 r处的平行超曲面。

下文中，我们仍用 A_r 表示 $\Phi_r(M)$ 的形算子。再次利用命题 4.3 可得，对于任意的 $(p,q) \in M$， A_r 在 $\Phi_r((p,q))$ 处的表达式由 (4.14) 给出。然后，利用 $b_1b_4 - b_2^2 = \frac{1}{2}$，我们有

$$\begin{pmatrix} A_rE_1^r \\ A_rE_2^r \\ A_rE_3^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b_1+b_4-(b_1+b_4)\cos(\sqrt{2}r)}{-2+\sqrt{2}(b_1+b_4)\sin(\sqrt{2}r)} & \frac{-2b_2}{-2+\sqrt{2}(b_1+b_4)\sin(\sqrt{2}r)} & 0 \\ \frac{-2b_2}{-2+\sqrt{2}(b_1+b_4)\sin(\sqrt{2}r)} & \frac{b_1-b_4-(b_1+b_4)\cos(\sqrt{2}r)}{-2+\sqrt{2}(b_1+b_4)\sin(\sqrt{2}r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^r \\ E_2^r \\ E_3^r \end{pmatrix}.$$

因此，平行超曲面 $\Phi_r(M)$ 的平均曲率 $H(r)$ 为

$$H(r) = \frac{2(b_1+b_4)\cos(\sqrt{2}r)}{6-3\sqrt{2}(b_1+b_4)\sin(\sqrt{2}r)}.$$

因此，若取 $r = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$，则 $H(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}) = 0$。这意味着平行超曲面 $\Phi_{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}M$ 是 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 中具有常数 $C=0$ 的极小超曲面。□

最后，我们应用定理 3.7、命题 4.2、命题 4.3 和定理 4.4，完成定理 1.1 的证明。

定理 1.1 证明的完成。

由于 M 具有常截面曲率 κ，根据命题 4.2，我们知道 M 具有常数 $C=0$，且截面曲率为 $\kappa = \frac{1}{2}$。根据定理 4.4， M 是极小超曲面 M 在距离 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 处的平行超曲面 ~ ~ ~；其中， M 也具有常数 $C=0$，而这类 M 已在定理 3.7 中完成分类。然而，反过来，定理 3.7 中超曲面的平行超曲面未必总具有常截面曲率。下文将考察定理 3.7 中的三种情形，并找出在哪种情形下平行超曲面具有常截面曲率。

情形 (1)： $\tilde{M}$ 是 M_0的一个开子集。

在此情形下，我们指出， $M_t, t \in (-1,1)$ 本身构成一族平行超曲面，其焦子流形为对角曲面 $\Sigma = \{(p,p) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 | \ p \in \mathbb{S}^2\}$。可以直接验证，对于任意 $t \in (-1,1)$， M_t 都不具有常截面曲率。

因此，情形 (1) 不可能出现。

情形 (2)： $\tilde{M}$是 $M_{\tilde{a},\tilde{b}} = \{ (\tilde{p},\tilde{q}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 | \ \langle \tilde{p},\tilde{a}\rangle + \langle \tilde{q},\tilde{b}\rangle = 0\}$ 的一个开子集，其中 $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathbb{S}^2$.

在这种情况下，经过 $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 的一个等距变换后，我们假设 $\tilde{a}=(0,0,1)$ $\tilde{b}=(0,0,-1)$。于是，$\tilde{M}$在局部可由浸入 $\tilde{\Phi}\colon\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$给出，

$$\tilde{\Phi}(t_1,t_2,t_3)=\big(\tilde{p}(t_1,t_2),\tilde{q}(t_1,t_3)\big)=\cos(\tfrac{t_1}{\sqrt{2}})\big((\cos t_2,\sin t_2,0),(\cos t_3,\sin t_3,0)\big)+\sin(\tfrac{t_1}{\sqrt{2}})(\tilde{a},-\tilde{b}),$$

单位法向量场由下式给出

$$N=(N_1,N_2)=-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\tfrac{t_1}{\sqrt{2}})\big((\cos t_2,\sin t_2,0),-(\cos t_3,\sin t_3,0)\big)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(\tfrac{t_1}{\sqrt{2}})(\tilde{a},\tilde{b}).$$

我们定义映射 $\tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}\colon\ \tilde{M}\to\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$ 如下

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}((\tilde{p},\tilde{q}))=&\big(\cos(\tfrac{\pi}{4})\tilde{p}(t_1,t_2)+\sqrt{2}\sin(\tfrac{\pi}{4})N_1,\cos(\tfrac{\pi}{4})\tilde{q}(t_1,t_3)+\sqrt{2}\sin(\tfrac{\pi}{4})N_2\big)\\=&\big(\tfrac{\cos(\frac{t_1}{\sqrt{2}})-\sin(\frac{t_1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}(\cos t_2,\sin t_2,0)+\tfrac{\cos(\frac{t_1}{\sqrt{2}})+\sin(\frac{t_1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}\tilde{a},\\&\tfrac{\cos(\frac{t_1}{\sqrt{2}})+\sin(\frac{t_1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}(\cos t_3,\sin t_3,0)+\tfrac{\cos(\frac{t_1}{\sqrt{2}})-\sin(\frac{t_1}{\sqrt{2}})}{\sqrt{2}}\tilde{b}\big),\quad(\tilde{p},\tilde{q})\in\tilde{M}.\end{aligned}$$

直接验证可知，$M=\Phi_{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}(M)$ 是 M 的平行超曲面，距离为 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$，且 M 满足 $\langle p,\tilde{a}\rangle^2+\langle q,\tilde{b}\rangle^2=1$，对任意 $(p,q)=\tilde{\Phi}_{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}((\tilde{p},\tilde{q}))\in M$ 均成立。此外，M具有常截面曲率$_1$ $_2$，且 $C=0$。

因此，在情形（2）中，M 局部是某个 $a,b\in\mathbb{S}^2$ 对应的 $\hat{M}_{a,b}$ 的开子集。

情形（3）：$\tilde{M}$ 是定理 3.5 所描述的极小超曲面。

在此情形下，我们仍选取由 (2.7) 定义在 M 上的正交标架场 $\{E_1,E_2,E_3\}$，并假设 (2.9) 成立，则在 $\tilde{M}$上有 $b_3=b_5=b_6=0$ 和 $H=\frac{b_1+b_4}{3}=0$。

我们沿用命题 4.3 中的记号。由命题 4.3 可知，对于任意 $(p,q)\in M$，Φ_r 的切映射满足表达式 (4.11)。(B_{ij}) 的行列式由 (4.13) 给出。$H=0$ 意味着 $b_4=-b_1$，因此我们可以化简 $\mathrm{Det}(B_{ij})$ 并得到

$$\mathrm{Det}(B_{ij})=\frac{1}{2}\big(1-2b_1^2-2b_2^2+(1+2b_1^2+2b_2^2)\cos(\sqrt{2}r)\big).$$

若存在某个 r，使得 $\mathrm{Det}(B_{ij})$ 在局部 $=0$，则 M 具有常数量曲率，这与注记 3.1 矛盾。由于我们关注的是局部情形，可以假设对于任意 $(p,q)\in M$以及任意固定的 r，$\mathrm{Det}(B_{ij})\neq 0$。因此，$\mathrm{Rank}((\Phi_r)_*)=3$，且 $\Phi_r(M)$ 是 M 的一个平行超曲面，距离为 r。

我们仍用 A_r 表示 $\Phi_r(M)$ 的形算子。再次应用命题 4.3，我们得到，对于任意 $(p,q)\in M$，A_r 在 $\Phi_r((p,q))$ 处的表达式由 (4.14) 给出。然后，利用$b_4=-b_1$，我们有

$$\begin{pmatrix}A_rE_1^r\\A_rE_2^r\\A_rE_3^r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4b_1+\sqrt{2}(1+2b_1^2+2b_2^2)\sin(\sqrt{2}r)}{2(1-2b_1^2-2b_2^2+(1+2b_1^2+2b_2^2)\cos(\sqrt{2}r))} & \frac{2b_2}{1-2b_1^2-2b_2^2+(1+2b_1^2+2b_2^2)\cos(\sqrt{2}r)} & 0\\ \frac{2b_2}{1-2b_1^2-2b_2^2+(1+2b_1^2+2b_2^2)\cos(\sqrt{2}r)} & \frac{-4b_1+\sqrt{2}(1+2b_1^2+2b_2^2)\sin(\sqrt{2}r)}{2(1-2b_1^2-2b_2^2+(1+2b_1^2+2b_2^2)\cos(\sqrt{2}r))} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1^r\\E_2^r\\E_3^r\end{pmatrix}.$$

利用 (2.10)，经过直接计算，我们得到超-曲面 $M=\Phi_r(M)$ 的里奇曲率张量满足

$$\mathrm{Ric}(E_1^r) = \frac{-1+2b_1^2+2b_2^2}{(-1+2b_1^2+2b_2^2)-(1+2b_1^2+2b_2^2)\cos(\sqrt{2}r)}E_1^r,$$
$$\mathrm{Ric}(E_2^r) = \frac{-1+2b_1^2+2b_2^2}{(-1+2b_1^2+2b_2^2)-(1+2b_1^2+2b_2^2)\cos(\sqrt{2}r)}E_2^r,$$
$$\mathrm{Ric}(E_3^r) = E_3^r.$$

若取 $r = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$，则 $\mathrm{Ric}(E_1^r) = E_1^r$，$\mathrm{Ric}(E_2^r) = E_2^r$，$\mathrm{Ric}(E_3^r) = E_3^r$.。由于 $\dim M = 3$，根据舒尔引理，M 具有常截面曲率 1 2。

因此，在情形（3）中，M的距离为$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$的平行超曲面 $\Phi_{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}(M)$具有常截面曲率1 2。□

定理 1.2 证明的完成。

根据 [20], 中的定理 1，并应用定理 3.7 和定理 1.1 中的分类结果，我们完成了定理 1.2 的证明。

References

[1] Miroslava Anti *Affine hypersurfaces with constant sectional curvature* **310** 2021 2, 275 302 4226240 c、HAIZHONG LI、LUC VRANCKEN 和 XIANFENG WANG, ，《太平洋数学杂志》（），第–期。MR

[2] Jurgen Berndt、Sergio Console 和 Carlos Enrique Olmos, *Submanifolds and holonomy*, 第二版，数学专著与研究札记丛书，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，2016年。MR 3468790[3] Ildefonso Castro 和 Francisco Urbano, *Minimal Lagrangian surfaces in* $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$, 《分析与几何通讯》15（2007），第2期，217–248。MR 2344322[4] Thomas E. Cecil 和 Patrick J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, 《美国数学会汇刊》 **269** 1982 2, 481 499 637703（），第–期。MR Xiuxiu Cheng、Zejun Hu、Marilena Moruz 和 LUC

[5] VRANCKEN, *On product affine hyperspheres in* $\mathbb{R}^{n+1}$, 《中国科学：数学》63（2020），第10期，2055–2078。MR 4159399[6] Bart Dioos、LUC VRANCKEN 和 XIANFENG WANG, *Lagrangian submanifolds in the homogeneous nearly Kähler* $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ **53** 2018 66 ，《全球分析与几何年刊》（），第 1, 39 3746515 –期。MR Dong Gao、Zejun Hu、Hui Ma 和 ZEKE YAO,

[7] *On real hypersurfaces of* $\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2$, 《美国数学会会刊》150（ 2022 10, 4447 4461 4470187），第–期。MR Thomas A. Ivey 和

[8] Patrick J. Ryan, *Hopf hypersurfaces of small Hopf principal curvature in* $\mathbb{C}H^2$, 《几何专集》 **141** 2009 147 161 2520069（），–。MR Hyang Sook Kim 和 Patrick J. Ryan, *A classification of pseudo-Einstein hypersurfaces in* $\mathbb{C}P^2$, 《微分几何及其应用》

[9] **26** 2008 1, 106 112 2393977（），第–期。MR Masahiro Kon,

[10] *Pseudo-Einstein real hypersurfaces in complex space forms*, 《微分几何杂志》14（1979），第 3, 339 354 1980 594705 –期（）。

[11] MR Daniel Kowalczyk, *Isometric immersions into products of space forms*, 《几何专集》151（2011），1–8。MR 2780734[12] Marcus Kriele 和 LUC VRANCKEN, *An extremal class of three-dimensional hyperbolic affine spheres*, 《几何专集》77（1999），第3期，239–252。MR 1716673[13] Cece Li、Cheng Xing 和 Huiyang Xu, *Locally strongly convex affine hypersurfaces with semi-parallel cubic form* **33** 2023 3, 81 4531058 ，《几何分析杂志》（），第期。

MR[14] HAIZHONG LI、Hui Ma、Joeri Van der Veken、LUC VRANCKEN 和 XIANFENG WANG, *Minimal Lagrangian submanifolds of the complex hyperquadric* **63** 2020 8, 1441 1462 4125728 ，《中国科学：数学》（），第–期。

MR

[15] J. H. Lira、R. Tojeiro 和 F. Vit´orio, *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms*, 《巴塞尔数学档案》 **95** 2010 5, 469 479 2738866 （），第–期。MR 陆晓歌、王鹏和王晓珍,
[16] *On the Geometry of Hypersurfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, 《数学成果》**78**（ 2023 1, 10 4510548 ），论文编号。MR Sebastian
[17] Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space* **37** 1985 3, ，《日本数学会杂志》 515 535 792990 （），第–期。MR [18] Francisco Torralbo 和 Francisco Urbano, *Surfaces with parallel mean curvature vector in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$, 《美国数学会汇刊》 **364** 2012 2, 785 813 2846353 （），第–期。MR，，《几何分析杂志》（），第
[19] ——— *Minimal surfaces in* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ **25** 2015 2, 1132 1156 3319965 –期。MR Francisco Urbano，，《分析与几 4052731
[20] *On hypersurfaces of* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ **27** 2019 6, 1381 1416 何通讯》（），第–期。MR [21] *Lagrangian submanifolds of the complex hyperbolic quadric*
Joeri Van der Veken 和 Anne Wijffels，，《纯粹与应用数学年刊》（第4辑）200（2021），第5期，1871–1891，MR 4285103[22] Zeke Yao、尹邦超 *Non-existence of conformally flat real hypersurfaces in both the complex*
和 Zejun Hu, *quadric and the complex hyperbolic quadric* **65** 2022 1, 68 83 4396624 ，《加拿大数学通报》
（），第–期。MR

Haizhong Li:
Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University,
Beijing, 100084, P.R. China.
电子邮箱：lihz@tsinghua.edu.cn。

Luc Vrancken:
Univ. Polytechnique Hauts-de-France, CERAMATHS-Laboratoire de Mathériaux Céramiques et de Mathématiques, F-59313 Valenciennes, France;
INSA Hauts-de-France, CERAMATHS, F-59313 Valenciennes, France;
Department of Mathematics, KU Leuven, Celestijnenlaan 200B, Box 2400, BE-3001 Leuven, Belgium.电子邮箱：luc.vrancken@uphf.fr.

Xianfeng Wang:
School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University,
Tianjin 300071, P.R. China.
电子邮箱：wangxianfeng@nankai.edu.cn。

ZEKE YAO:
Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University,
Beijing, 100084, P.R. China.电子邮箱：yaozkleon@163.com。