PROCEEDINGS OF SCIENCE

格点场论量子计算综述

Lena Funcke,[a,b,*] **Tobias Hartung,**[c] **Karl Jansen**[d] **和 Stefan Kühn**[d,e]

[a]跨学科研究领域“物质基本构成与基本相互作用”（*TRA Matter*）和亥姆霍兹辐射与核物理研究所（*HISKP*），波恩大学，*Nußallee 14-16*，*53115* 波恩，德国[b]理论物理中心、量子优势协同设计中心和美国国家科学基金会人工智能与基本相互作用人工智能研究所，麻省理工学院，*77 Massachusetts Avenue*，*Cambridge*，*MA 02139*，美国[c]东北大学伦敦分校，*DevonHouse*，圣凯瑟琳码头，伦敦，*E1W 1LP*，英国[d]德国电子同步加速器研究所 *DESY*，*Platanenallee 6*，*15738* 措伊滕，德国[e]计算科学与技术研究中心，塞浦路斯研究院，*20 Kavafi Street*，*2121* 尼科西亚，塞浦路斯电子邮箱：lfuncke@uni-bonn.de，tobias.hartung@desy.de，karl.jansen@desy.de，stefan.kuehn@desy.de

在本论文集中，我们回顾了将量子计算应用于格点场论的最新进展。量子计算有望模拟传统蒙特卡罗方法在很大程度上难以触及的参数区域中的格点场论，例如受符号问题困扰的有限重子数密度、拓扑项和非平衡动力学区域。已完成在（1+1）维格点规范理论上的首批概念验证量子计算，并已开发出用于（1+1）维和（2+1）维格点规范理论的首批资源高效量子算法。通往（3+1）维格点规范理论（包括格点量子色动力学）量子计算的道路，需要通过许多渐进步骤来同时改进量子硬件和量子算法。在回顾这些要求和最新进展后，我们讨论了主要挑战与未来方向。

预印本编号：MIT-CTP/5482

第*39*届格点场论国际研讨会（*Lattice 2022*），*2022*年*8*月*8*日至*13*日，德国波恩波佩尔斯多夫讲堂中心

*演讲者

© 版权归作者所有，依据知识共享署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0 国际许可协议（CC BY-NC-ND 4.0）。

arXiv:2302.00467v2 [hep-lat] 9 Aug 2023

1. 引言

规范理论是我们理解现代高能物理的核心，其中粒子物理标准模型或许是最突出的例子。将规范理论离散化到时空格点上，可基于马尔可夫链蒙特卡罗方法进行强大的数值模拟。然而，尽管马尔可夫链蒙特卡罗方法取得了巨大成功，但由于臭名昭著的符号问题，在某些参数区域中便不再适用，尤其是在存在 θ-项、重子化学势或非平衡动力学时。人们提出了多种方法来缓解或规避这一问题，包括复朗之万方法（例如，参见文献 [1]）、利用 Lefschitz thimble 进行积分路径变形（例如，参见文献 [2]），以及基于机器学习（例如，参见文献 [3]）、张量网络（TN）（例如，参见文献 [4, 5]）和量子计算（例如，参见文献 [6, 7]）的方法。此外，马尔可夫链蒙特卡罗方法还会遭遇临界减速：格距减小时，自相关时间会迅速增长。基于哈密顿量的方法（如张量网络或量子计算）有望克服这一问题。

在本文集中，我们回顾了量子计算应用于格点场论的现状与未来前景。人们已经在 (1+1) 维空间中首次实现了规范理论的量子计算，这些计算展现了标准模型的一些特征（例如，参见文献 [8–26]）。此外，人们已经开发出若干适用于量子计算的 (1+1) 维和 (2+1) 维规范理论的资源高效表述（例如，参见文献 [27–33]）。然而，鉴于目前可用的含噪中等规模量子（NISQ）硬件 [34]，利用量子计算研究标准模型之内及之外的 (3+1) 维现象这一宏大目标仍相当遥远。要实现这一目标，还需逐步迈出许多步，尤其是改进量子硬件、量子算法和量子纠错。此外，验证量子计算结果对于获得可靠结果至关重要，尤其是在马尔可夫链蒙特卡罗方法无法触及的参数区域。验证可借助经典哈密顿量方法来完成，特别是利用基于张量网络的方法 [35]，在弱纠缠区域对量子计算结果进行交叉检验。

本文集的组织结构如下。在第2节中，我们回顾 MCMC 算法面临的计算挑战，简述解决这些问题的经典方法，并探讨经典计算是否足以应对这些挑战。在第3节中，我们举例说明模拟量子模拟器如何在特定的经典计算任务中实现超越。在第4节中，我们简要回顾数字量子计算的基础知识，介绍量子比特、量子电路、量子错误以及量子误差缓解和纠错等概念。在第5节中，我们回顾格点场论量子算法的最新进展，探讨量子-经典混合算法、量子电路设计以及费米子和规范场的实现方法。我们还列举了一些已在量子计算机上模拟的格点场论实例。第6节将给出结论、讨论和展望。

2. 为什么要对格点场论进行量子计算?

2.1 MCMC 算法的计算挑战

经典的马尔可夫链蒙特卡罗模拟通常依赖于格点场论的欧几里得时空表述，因此无法研究实时动力学。因此，像 Schwinger

效应导致的强电场中正电子对产生，或相对论重离子对撞机（RHIC）和大型强子对撞机（LHC）中重离子碰撞和质子碰撞之后的非平衡动力学，都无法通过该方法进行研究。此外，马尔可夫链蒙特卡罗方法无法研究高密度下的强耦合物质。因此，这种方法无法为量子色动力学状态方程提供精确的数值结果，而该状态方程对于理解未来来自中子星碰撞的引力波观测实验数据至关重要，例如激光干涉引力波天文台（LIGO）所观测到的数据。

这些经典计算难题的根源在于臭名昭著的符号问题（例如，参见参考文献 [36]），即如何对一个涉及大量变量且高度振荡的函数进行数值积分。数值马尔可夫链蒙特卡罗方法在这里会失效，因为积分中的正、负贡献几乎相互抵消；也就是说，必须对两者进行高精度积分，才能以足够的精度求得它们的差值。要获得准确结果，所需的蒙特卡罗采样点数量会随系统体积呈指数增长。

此外，马尔可夫链蒙特卡罗方法天生受自相关时间的影响。格距减小时，这些自相关时间会迅速增长，这种现象称为“临界减速”。在某些情况下，自相关时间甚至会呈指数增长，参见参考文献 [37], ，这使得研究连续极限变得困难。

2.2 我们真的需要《量子》计算吗?

一旦遇到经典算法难以在多项式时间内解决的问题，我们首先可能会问：能否利用量子算法高效地解决这些问题？对于临界减速问题（例如，参见文献 [7]）以及马尔可夫链蒙特卡罗方法中的符号问题（例如，参见文献 [6]），答案都是肯定的。然而，我们还应该提出第二个问题：我们真的需要量子计算来绕过这些问题吗？还是说也存在经典方法?

事实上，有几种经典方法可以减轻或绕过马尔可夫链蒙特卡罗方法的障碍，尤其是临界减速问题和符号问题（例如，参见文献 [1–3、38–41]）。例如，人们已提出基于机器学习的方法来克服临界减速问题（例如，参见文献 [3, 40]）。关于符号问题，复朗之万方法（例如，参见文献 [1]）、利用 Lefschitz thimble 进行积分路径变形（例如，参见文献 [2]）、基于机器学习的方法（例如，参见文献 [3]）以及其他方法，都已被证明能够缓解符号问题。要彻底绕过符号问题，最有前景的技术之一是哈密顿形式；利用基于张量网络的经典方法，可以高效地处理该形式。这种数值方法最初是在凝聚态物理领域发展起来的，但如今已广泛应用于其他领域，包括格点场论 [4] ，甚至量子引力（例如，参见文献 [42–44]）。

张量网络方法可用于在中度纠缠区域验证量子计算。因此，我们将在下文回顾这一方法。关于应对马尔可夫链蒙特卡罗模拟计算挑战的其他方法，读者可参阅例如文献 [1–3]。

2.2.1 经典方法：张量网络示例

张量网络态是量子多体态的一种特定表示，其依据是该态的纠缠结构。为了说明这种方法，我们考虑一个一般的量子态 $|\psi$，它属于 N

相互作用量子系统。系统的波函数可以表示为对所有基态求和，

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,\dots i_N=1}^{d} C_{i_1\dots i_N} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \cdots \otimes |i_N\rangle, \tag{1}$$

其中，态 $|i_k$ 构成量子系统在位置 k 处的 d 维希尔伯特空间的一组基。乘在多体基态上的张量$C_{i_1\dots i_N}$ 包含数量呈指数级增长的复数元素（d^N），因此无法高效地存储在经典计算机上。张量网络的基本思想是将$C_{i_1\dots i_N}$ 分解为由较小张量构成的网络。一类简单的一维张量网络态是矩阵乘积态（MPS），它将波函数的系数参数化为矩阵的乘积，

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_N}^{d} \mathrm{tr}\left(A_1^{i_1} A_2^{i_2} \cdots A_N^{i_N}\right) |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \cdots \otimes |i_N\rangle. \tag{2}$$

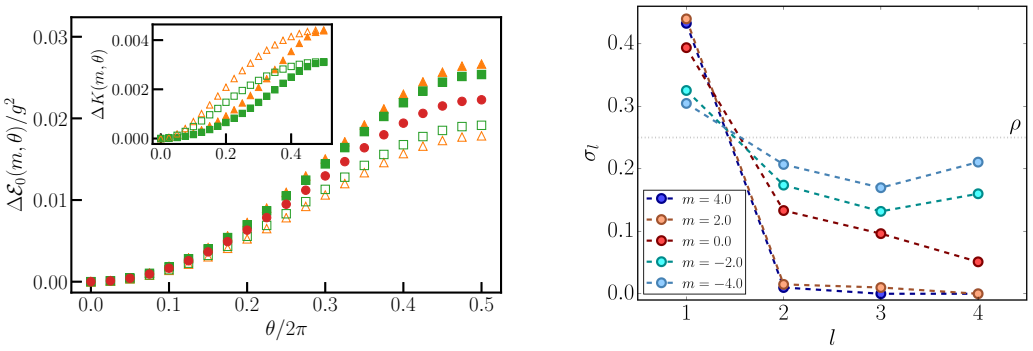
在上式中， $A_k^{i_k}$ 是大小为 $D \times D$ 的复矩阵，tr 表示迹。参数 D 称为 MPS 的键维数，它限制了试探态中可能存在的纠缠量[1] [35, 45, 46]。具体而言，对于 MPS 试探态这一例子，需要存储 NdD^2 个复数。因此，只要 D 不会随 N呈指数级增长 N [47–49]，用张量网络表示就是高效的，并能克服系统尺寸带来的指数级扩展。量子信息论的研究结果表明，在许多具有物理意义的情形下， D 确实仅随 N [47–49]呈多项式关系。MPS 试探态可直接推广到更高维度 [50], ，并且还存在适用于一维和更高维度的更一般的张量网络试探态 [51–54]。

除了作为一种强大的理论工具外，张量网络形式还能够高效计算基态和低能激发态。给定一个（局域）哈密顿量 H，可以通过变分地最小化能量 $E = \psi|H|\psi$，并迭代更新张量 [35, 45, 46]，从而找到基态的张量网络近似。随后，可以考虑投影到与基态正交的子空间上的哈密顿量来求得激发态。基态是投影哈密顿量的本征态，其本征值为零；第一激发态则是能量为 E_1 的本征态。鉴于 $E_1 < 0$（这总能通过给 H 加上适当的常数来实现），第一激发态因此对应于投影哈密顿量的基态，可以使用上文介绍的变分算法求得 [55]。此外，只要演化过程中态的纠缠保持适中，张量网络形式还可以计算量子系统随时间的演化 [35, 45, 46]。在这两种情况下，都可以通过直接计算 $\psi|O|\psi$ 来获得（局域）可观测量的期望值 O 。因此，无需进行马尔可夫链蒙特卡罗采样，张量网络方法也不存在符号问题。正如我们将在下一小节讨论的那样，这一点已在多种模型中得到成功验证。

2.2.2 将张量网络方法应用于格点场论

近年来，采用张量网络方法研究格点场论取得了显著进展。例如，矩阵乘积态方法已用于探索量子链模型、Z$_n$-

[1]考虑将系统划分为两个连续的子系统，可以证明，描述其中一个子系统的约化密度算符的冯·诺伊曼熵上界为 $2\log(D)$ [35]。



(a)张量网络在（1+1）维 Schwinger模型上的结果 [56]。 **(b)** 张量网络在（3+1）维格点量子电动力学中的结果 [57]。

图 1：（a）裸质量为 $m/g = 0.07$（实心标记）以及 $m/g = -0.07$ 和 $\theta \to \theta + \pi$（空心标记）时，Schwinger模型的基态能量密度随 θ-参数的变化。橙色三角形（绿色方块）对应 $x = 80$ ($x = 160$) 的有限格点数据，其中 $x \equiv 1/(ag)^2$, a 为格距，g 为耦合常数。红点表示将有限格点数据外推至连续极限后的结果。插图：格点数据与连续极限数据之间偏差的绝对值，展示了反常方程的格点畸变。图和说明改编自参考文献 [56]。（b）对于不同的费米子质量 m，边长为 $L = 8$ 的格点边界向内距离 l 处的立方体上，（3+1）维格点量子电动力学的表面电荷密度 σ_l。系统处于含有 $Q = 128$ 个正电荷的全局对称扇区（有限密度 $\rho = 1/4$）。经许可转载自参考文献 [57], https://doi.org/10.1038/s41467-021-23646-3，遵循知识共享署名 4.0 国际许可协议。

量子电动力学模型和非阿贝尔规范模型。此外，研究者利用矩阵乘积态计算了Schwinger模型的谱，并研究了该模型在非零化学势、非零 θ 项和非零温度下的性质，以及其实时问题。除矩阵乘积态外，张量网络重整化技术 [58–60] 也已用于研究 (1+1) 维中的各种规范理论，以及带有 θ 项的 CP(1)模型。综述请参阅文献 [4, 5]，文献 [56, 57, 61–69] 则介绍了文献 [4, 5] 未收录的较新研究。特别是，近期已有针对 (2+1) 维规范理论的首批张量网络研究 [68, 69]，以及首项关于有限密度下 (3+1) 维格点量子电动力学的张量网络研究 [57]。

在图1中，我们展示了两个应用张量网络方法克服符号问题的例子。符号问题源于 θ 项 [图1(a)]，或源于有限密度 [图1(b)]。图1(a)展示了文献 [56], 中的结果，该文研究了带有 θ项的Schwinger模型的拓扑真空结构。Schwinger模型与3+1维量子色动力学有许多相似之处，因此可作为基准模型，用于测试旨在应用于格点量子色动力学的新数值技术。文献 [56] 使用矩阵乘积态模拟了Schwinger模型的参数区域，在这些区域中，微扰理论和马尔可夫链蒙特卡罗方法均会失效。特别是，文献 [56]量化了量子反常方程的格点畸变，该方程将负费米子质量映射为正费米子质量，$m \to -m$方法是改变 θ参数，$\theta \to \theta + \pi$见图1(a)。

图 1（b）展示了参考文献 [57], 中的结果，其中在有限电荷密度下对（3+1）维格点量子电动力学进行了模拟。参考文献 [57] 使用树张量网络计算了表面电荷密度$\sigma_l = \frac{1}{A(l)} \sum_{\mathbf{x} \in A(l)} \hat{\psi}^{\dagger}_{\mathbf{x}} \hat{\psi}_{\mathbf{x}}$，其中 $\mathbf{x} \equiv (i, j, k)$ 对于 $0 \le i, j, k \le L - 1$ 标记晶格中的格点，L 表示晶格尺寸，$\hat{\psi}_{\mathbf{x}}$ 表示交错无自旋费米子场，而 $A(l)$ 仅包含位于

距最近边界特定晶格距离 l 的格点。这些首次开展的（3+1）维张量网络计算，是以经典方式解决符号问题的里程碑，但要将张量网络方法应用于（3+1）维格点量子色动力学，仍需在算法方面取得诸多进展。

2.3 为什么经典计算（有时）还不够?

尽管其他经典方法能够克服或缓解传统马尔可夫链蒙特卡罗方法的一些局限，但迄今为止，仍无法充分探索马尔可夫链蒙特卡罗模拟无法处理的区域。量子计算机有望克服这些限制。下文将聚焦于张量网络方法，讨论这些局限。

如上所述，张量网络方法的成功在很大程度上取决于这样一个事实：大多数具有物理意义的态所含的纠缠很少，因此可以用规模适中的张量来描述。具体而言，这包括热力学极限下具有有限强度局域相互作用且能隙非零的哈密顿量的基态；人们认为，张量网络态能够高效描述这些基态[2]。然而，在某些情况下，纠缠量可能大到难以承受，从而无法进行高效的张量网络描述。一个典型例子是全局量子猝冷后发生的非平衡动力学，在此过程中，系统中的纠缠会随时间线性增长 [70, 71]。为了忠实表示系统的波函数，张量规模将因此呈指数级增长。在这些情况下，张量网络模拟只能处理较短的时间尺度，因为张量规模的指数级增长很快就会使计算变得不可行。

此外，即使在可以采用高效 TN 描述的情况下，尽管 TN 算法的计算成本关于张量大小呈多项式增长，实际计算中仍可能难以承受。对于前文介绍的 MPS，变分基态搜索和时间演化模拟的主导阶计算成本为 $\mathrm{O}(D^3)$ [35, 45, 46]。对于其二维推广形式——投影纠缠对态（PEPS） [50], , 变分基态优化算法的计算成本最高可达 $\mathrm{O}(D^{10})$ [72]。尽管这仍是关于键维数的多项式增长，但它大幅限制了实际计算中可达到的键维数。尽管近期在设计适用于处理（2+1）维和（3+1）维晶格规范模型的 TN 变分 Ansatz 方面取得了进展，并首次成功完成了相关计算 [57, 68, 69], , 但要将 TN 计算的成功拓展到更高维度，仍非一朝一夕之事。量子计算和量子模拟或许能提供另一条途径，帮助克服这些限制，下一节将对此展开讨论。

3. 使用模拟量子模拟器超越张量网络方法

早在 2012 年，文献 [74] 就证明，在实时演化的情形下，模拟量子模拟能够胜过经典模拟；尤其是在模拟孤立的强关联（1+1）维玻色气体向平衡态弛豫时：“受控的[量子]动力学能够持续更长时间，超出现有经典算法所能追踪的范围” [74]。尽管这段引文实质上表达了如今广为流行的“量子优势”这一概念，

[2]事实上，对于处于（1+1）维的系统，这一点可以得到证明，见参考文献 [49]。对于更高维度，有人猜想局域有隙哈密顿量的基态可以通过张量网络态进行高效描述。

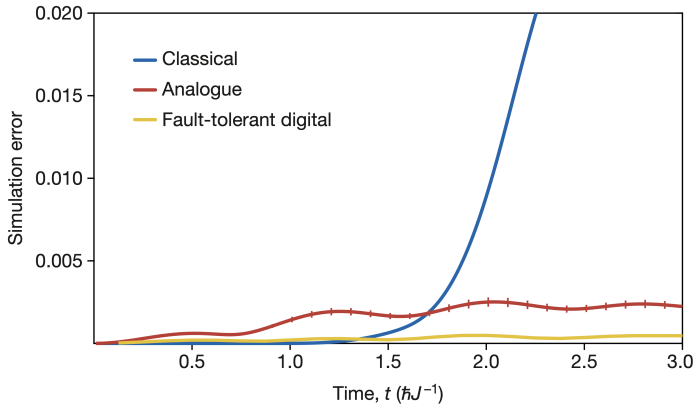


图 2： 量子模拟相较于经典模拟的量子优势：图中展示了（1+1）维玻色-哈伯德模型淬火动力学中单粒子关联的误差，见式（3），对于 $U/J = 1$ 和 20 个格点。蓝线表示采用键维数为 $D = 64$的矩阵乘积态进行单格点含时变分原理时间演化，用以展示这类经典方法相对于精确计算的典型截断误差；对于更长时间和更大系统规模的计算，精确计算必不可少。红线表示校准误差为 1% 的模拟量子模拟。黄线表示采用二阶特罗特分解、时间步长为 $J\delta t = \hbar/8$的数字量子模拟。图转载自参考文献 [73],https://doi.org/10.1038/s41586-022-04940-6，经 Springer Nature 许可。

这一术语在 2012 年尚未出现；直到十年后，文献 [73] 才指出，借助模拟量子模拟器已经实现了“实用量子优势”。经典模拟方法（例如文献 [74], 中使用的基于矩阵乘积态的方法）之所以失效，是因为这些经典方法会遭遇纠缠熵的大幅增长，正如上一节所述。这限制了经典计算所能处理的弛豫时间，如图2所示。

在参考文献 [74], 中，量子理论描述的是一条由隧穿耦合 J 连接的（1+1）维格点链，其中填充了相互排斥的玻色粒子。在紧束缚近似下，哈密顿量可写成一个（1+1）维玻色-哈伯德模型，

$$H_{\mathrm{BH}_{(1+1)\mathrm{D}}} = \sum_j \left[-J\left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \mathrm{h.c.}\right) + \frac{U}{2}\hat{n}_j(\hat{n}_j - 1) + \frac{K}{2}\hat{n}_j j^2 \right], \tag{3}$$

其中 $\hat{a}_j$湮灭格点 j上的一个粒子，$\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$对应格点 j 上的原子数，且 U为格点相互作用能。参数 $K = m\omega^2 d^2$(m为粒子质量， d格距）描述了一个阱频率为 $\omega \simeq 2\pi \times 61\mathrm{Hz}$ 的外部谐振子势阱。式（3）中模型的模拟量子模拟细节见图 3。

这里我们指出，目前“实用量子优势”仅在模拟量子模拟器中得到展示（参见文献 [73] 及其中的参考文献），而非数字量子计算机。接下来，我们想简要谈谈这两种不同量子技术之间的差异。模拟量子模拟器利用量子效应，通过可控量子系统来模拟另一量子系统的行为。因此，模拟量子模拟器执行连续时间演化，通常不具备通用性。相比之下，数字量子计算机具有通用性，并通过一组通用逻辑门实现酉操作，

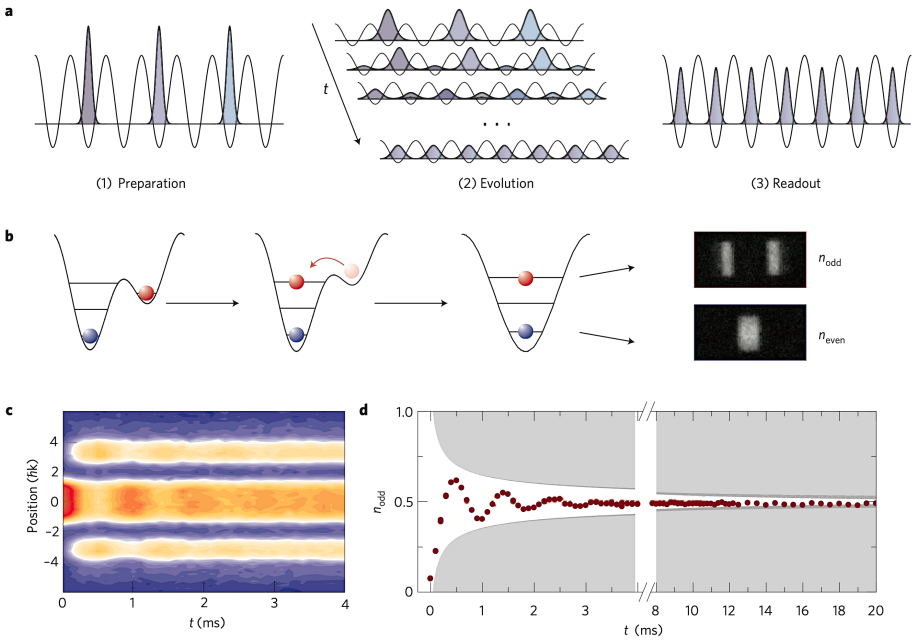


图 3：(1+1) 维玻色-哈伯德模型的模拟量子模拟，见式 (3)。(a) 实验概念：制备好密度波 $|\psi(t = 0)$ (i) 后，迅速降低晶格深度以实现隧穿 (ii)。最后，在再次抑制所有隧穿后，读取演化态的性质 (iii)。(b) 奇偶位点分辨探测：将奇数位点上的粒子移至更高的布洛赫能带。随后采用能带映射序列，以揭示奇数位点和偶数位点占据数。(c) 弛豫时间 t 对应的积分能带映射剖面，其中 $h/(4J) \simeq 0.9$ ms、$U/J = 5.16(7)$ 和 $K/J \simeq 9 \times 10^{-3}$。(d) 根据 c 中所示原始数据提取的奇数位点密度。阴影区域标示自由玻色子（浅灰色）以及计入实验系统中哈伯德参数非均匀性时（深灰色）的包络范围。图转载自参考文献 [74],https://doi.org/10.1038/s41586-022-04940-6，经 Springer Nature 许可。

这些量子门作用于量子比特。因此，时间演化必须分解为离散步骤。数字量子计算机的通用性意味着，它们最终将更适用于量子计算高维格点规范理论这一宏大目标，尤其是（3+1）维格点量子色动力学。因此，在本文集的余下部分，我们将只关注后一种量子技术，即数字量子计算机。

4. 数字量子计算基础

量子计算机有望在从密码学、机器学习到组合优化问题等各种任务中胜过经典计算机。尤其是，高效模拟量子多体系统的潜力，使量子计算机成为解决物理、化学及其他领域中量子多体问题（例如符号问题）的有力工具。下文将综述数字门式量子计算的基本特征，包括量子比特、量子电路和量子错误。

4.1 量子比特

在经典计算中，信息以比特的形式存储和处理，比特可以取确定的二进制值 0 或 1。类似地，量子比特（qubit）是由二维希尔伯特空间描述的量子系统，其基态为 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$。量子力学定律允许将两个基态制备成叠加态，而一般的单量子比特态 $|\psi\rangle$ 可以表示为以下线性组合

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

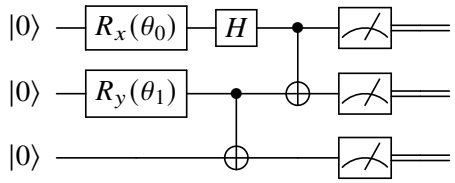
其中，α 和 β 是复数，并满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$，从而使该态归一化。在计算基中对量子比特进行投影测量时，测得结果 $|0\rangle$ 的概率为 $|\alpha|^2$，测得结果 $|1\rangle$ 的概率为 $|\beta|^2$。尤其是，利用构造叠加态的可能性，可以使 N 个量子比特处于所有 2^N 个可能基态的叠加态中，从而高效地编码一个指数级庞大的希尔伯特空间。

当前量子计算机有多少个量子比特？我们最近进入了含噪中等规模量子（NISQ）[34]时代，其定义为拥有$O(10-100)$ 个含噪量子比特的数字量子计算机时代。以 IBM-Q 量子设备为例，量子比特数量大致每年翻一番，从 2019 年的 27 个增至 2022 年的 433 个；这一发展计划将持续下去，预计 2023 年达到 1121 个，2025 年达到 4158 个量子比特（例如，参见文献 [75]）。以 Google 量子设备为例，其目标是在本十年结束前建成一台“实用的、经过纠错的量子计算机” [76]，其中应包含 1,000 个容错逻辑量子比特（纠错详情见第4.3.2节），对应 1,000,000 个物理量子比特。

4.2 量子计算

主流的量子计算模型使用量子电路来描述计算过程，它由三个阶段组成：(i) 将所有 N 量子比特初始化为 $|0\rangle$ 态（记作$|0^{\otimes N}\rangle$）。(ii) 量子门，表示幺正变换。(iii) 在计算基下对部分或全部量子比特进行测量。

量子计算可通过量子电路图直观地表示，其中时间从左向右流逝。每条单线表示一条量子线路，每条双线表示一个经典比特。量子线路上的符号表示对量子比特执行的操作，例如量子门操作或测量。例如，我们来考虑一个三量子比特电路



(5)

包含参数化旋转门 $R_x(\theta_0) = \exp(-i\frac{\theta_0}{2}\sigma_x)$ 和 $R_y(\theta_1) = \exp(-i\frac{\theta_1}{2}\sigma_y)$、一个哈达玛门 H，以及两个用于产生纠缠的 CNOT门。该电路的第二阶段由幺正操作给出

$$(\text{CNOT} \otimes \mathbb{1}_2) \times (H \otimes \text{CNOT}) \times (R_x(\theta_0) \otimes R_y(\theta_1) \otimes \mathbb{1}_2), \tag{6}$$

因为线路之间的复合通过张量积实现，而沿线路的复合通过矩阵乘积实现。第三阶段是在 σ_z 基底下进行投影测量，$\{|0\rangle, |1\rangle\}$，从而得到经典比特。正如我们将在下一节讨论的那样，量子计算的这三个阶段都会受到量子噪声的影响。

4.3 量子错误

4.3.1 量子计算机中会出现哪些类型的错误?

当前的中等规模量子设备受到相当程度的噪声影响，包括门错误、测量错误和热弛豫错误。例如，在量子计算的最后阶段可能会出现比特翻转测量错误（参见第4.2节）。由于这些比特翻转，实际测量结果为1时，可能会被错误地读作0，反之亦然。另一个例子是影响量子比特的热弛豫错误。一般而言，错误可以用量子信道表示，并将原本由密度算符$|\psi\rangle\langle\psi|$描述的纯态转变为真正的混合态，其密度算符为 ρ。量子态 ρ 受到热弛豫错误影响一段时间 t 后的演化，例如可表示为

$$\rho \to \rho' = \sum_{k=1}^{2} E_k \rho E_k^\dagger, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\lambda} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中 $\lambda = 1 - \exp(-t/T_1)$。因此，给定一个制备在 $|1\rangle$ 中的状态，该状态被正确测量为 $|1\rangle$ 且未衰变为状态 $|0\rangle$ 的概率为 $p(t) = \exp(-t/T_1)$，其中 $T_1 \sim 100\mu$s（针对当前的超导量子设备）。虽然这限制了能够可靠执行的电路深度，但含噪声中等规模量子（NISQ）设备在某些特定情形下已能够超越经典计算机的能力。错误缓解，尤其是纠错，仍然是量子计算面临的主要挑战之一；成功实现这些技术对于在物理学和化学相关的大规模问题上实现量子优势至关重要。

4.3.2 纠错与错误缓解

根据量子计算阈值定理（称为“量子阈值定理”）[77–80], ，原则上可以构建容错量子计算机；该定理类似于冯·诺依曼提出的经典计算阈值定理 [81]。容错意味着，只要量子计算机的物理错误率低于某个阈值，量子纠错技术就能将量子计算机上的逻辑错误率抑制到任意 低的水平。目前有许多纠错方案，例如比特翻转码 [82], 、Shor码 [83], 、表面码 [78], 和GKP码 [84]。一般来说，实现容错量子计算需要满足两个条件：(i) 量子错误低于某个阈值；(ii) 使用额外的（“物理”）量子比特来实现量子纠错方案，并成功编码容错“逻辑”量子比特的信息。例如，如果量子计算机的退极化错误概率低于0.1%的阈值，表面码将需要为每个逻辑量子比特配备1000多个物理量子比特 [85]。

鉴于目前的量子比特数量为 O (10 – 100)，门错误的量子错误率最高可达 O (1%)，测量错误的量子错误率最高可达 O (10%)， [86], 容错量子计算

仍遥不可及。因此，作为面向 NISQ 设备的近期解决方案，需要采用量子误差缓解，而非量子纠错。量子误差缓解的基本理念是采用开销较低的方法来减轻量子噪声的影响，从而获得更可靠的估计值，例如可观测量的期望值。具体而言，可以改变量子设备上执行的量子电路，对从设备收集的数据进行后处理，测量修正算符，或结合使用这些方法。错误缓解技术的几个例子包括零噪声外推、随机编译、准概率分解和算符重缩放方法（例如，参见文献 [86–97]）。

4.3.3 错误缓解示例：格点理论应用中的零噪声外推

让我们简要讨论一种错误缓解方法，即零噪声外推 [89]，包括其在含噪量子计算机上进行格点场论模拟中的应用 [16]。零噪声外推背后的基本思想是，虽然人们很难降低量子电路中的噪声，但却可以轻易地增加量子电路中的噪声。例如，可以在量子电路中的每个 CNOT 门后添加一对 CNOT 门。在理想的无噪声情况下，这不应改变量子计算，因为 $(\text{CNOT})^2 = \mathbb{1}$。然而，对于含噪的 CNOT 门，我们有 $(\text{CNOT})^2 \neq \mathbb{1}$，添加越来越多的 CNOT 门对会导致量子计算中的误差越来越大。因此，我们可以引入一个噪声参数r，其中 $r-1$ 表示在原始量子电路中每个 CNOT 门所在位置额外插入的 CNOT 门数量。在不同的 r 取值下执行量子计算，随后外推至 $r \to 0$，便能降低 CNOT 门噪声造成的系统偏差。图4 展示了这种方法在格点场论中的一个应用示例，具体来说，是对 Schwinger模型动力学进行量子-经典混合计算 [16](另一个示例见参考文献 [25])。下文将介绍这种量子-经典混合计算背后的算法，参见第5.1.1节。

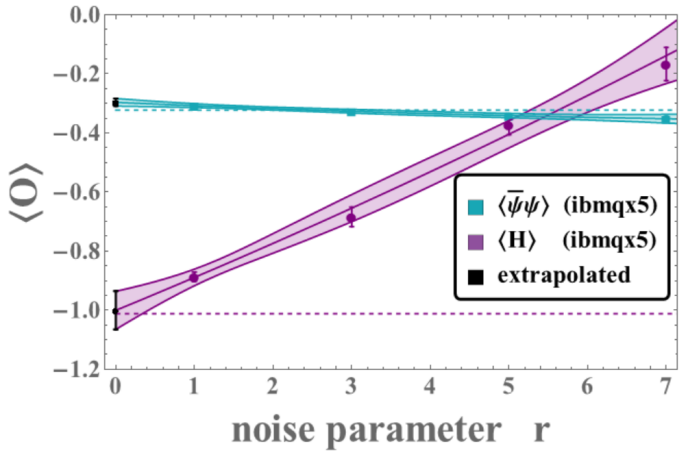


图 4： 用于 Schwinger 模型动力学量子-经典混合计算的零噪声外推。基态能量$\langle H \rangle$ 和手征凝聚$\langle \bar{\psi}\psi \rangle$（分别以紫色和蓝色表示）随噪声参数 r变化。在 $r = 0$ 处的点（黑色）经过了二次外推。水平虚线表示精确值。经许可转载自参考文献 [16], https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.032331，版权归美国物理学会所有（2018 年）。

5. 格点场论的量子算法

5.1 量子-经典混合算法

5.1.1 用于计算基态的变分量子本征求解器

在量子多体系统的背景下，利用 NISQ 设备的一种颇具前景的方法是采用量子-经典混合算法，例如变分量子本征求解器（VQE） [98, 99]。该算法利用经典计算机与量子协处理器之间的反馈回路，后者用于高效评估代价函数

$$C(\vec{\theta}) = \langle\psi(\vec{\theta})|H|\psi(\vec{\theta})\rangle \tag{8}$$

对于给定的一组变分参数 θ。这里，量子态 $|\psi(\theta)\rangle$ 由参数化量子电路实现，例如公式（5）中的示例电路，其中变分参数为旋转角 θ_1 和 θ_2。如果 $|\psi(\theta)\rangle$ 的试探态具有足够的表达能力，则 $C(\vec{\theta})$ 的最小值在问题哈密顿量 H的基态处取得。在量子-经典反馈回路中，参数 θ 由经典计算机根据从量子协处理器获得的测量结果进行优化。

5.1.2 用于计算激发态的变分量子退激

使用第5.1.1节中介绍的 VQE 算法的一种扩展，称为变分量子退激（VQD）算法 [100, 101], ，可以计算格点场论的质量间隙。其目标是通过惩罚低能激发态的解，来估算 k阶激发态 E_k 的能量。这可以通过最小化以下代价函数来实现

$$C(\vec{\theta}_k) = \langle\psi(\vec{\theta}_k)|H|\psi(\vec{\theta}_k)\rangle + \sum_{i=0}^{k-1}\beta_i|\langle\psi(\vec{\theta}_k)|\psi(\vec{\theta}_i^*)\rangle|^2, \tag{9}$$

其中， θ_i^* 是 i阶激发态的最优参数， β_i 是实值系数，其必须大于质量间隙 $E_k - E_i$。因此，在约束 $E(\theta_k)$-[下，最小化式（9）中的第一项]： [式（9）中的第二项] 要求状态 $|\psi(\theta_k)\rangle$ 必须与之前的 k 个态正交。例如，要计算基态 E_0 与第一激发态 E_1之间的质量间隙，可按以下三个步骤进行：

- 执行变分量子本征求解器（VQE），获得最优参数和近似基态 $|\psi(\theta_0^*)$,
- 对于第一激发态的能量 E_1，定义哈密顿量： $H_1 = H+\beta_1|\psi(\theta_0^*)\psi(\theta_0^*)|$。
- 使用哈密顿量 H_1 执行变分量子本征求解器（VQE），以求得近似的第一激发态 $|\psi(\theta_1^*)$。

实验已证实（综述参见文献 [6, 102, 103]），变分量子本征求解器和 VQD 可用于求解与粒子物理、凝聚态物理学以及量子化学相关的低维基准模型的基态和低能激发态。要使其适用于更高维度和更大系统规模，开发资源高效量子算法至关重要。这一研究领域（包括实现（规范）对称性）与经典算法开发有所交集，例如张量网络和

机器学习。具体而言，变分量子本征求解器和 VQD 算法与变分张量网络算法相似[→]（参见第 2.2.1 节），如今通过量子电路 $|\psi(\theta)\rangle$ 来实现量子态 [（参见公式（5）], 而非通过张量网络 [（参见公式（2）],），从而以门参数取代张量参数。

5.2 如何为混合量子-经典算法设计最优量子电路 s?

参数化量子电路（示例见图 6）是变分量子算法（参见第 5.1.1 节）的核心。为了高效实现量子计算，设计最优量子电路以求得给定问题哈密顿量的低能谱至关重要。一方面，量子电路应包含足够多的参数化量子门，以表达所需的解。另一方面，为了减少量子计算中的噪声（参见第 4.3 节），量子门的数量应尽可能少。

人们已尝试多种方法来高效设计量子电路，尤其是用于具有物理对称性的格点场论应用（例如参见文献 [8, 9, 13–17、19、21、104–107]）。文献 [106, 107], 提出了一种通用方法，用于设计精简且表达能力最强的量子电路，称为维度表达能力分析。这种分析提供了一种实用、系统的方法来优化给定的量子电路，包括移除冗余参数、纳入物理对称性、消除非期望对称性，以及测试量子电路是否具有足够的表达能力。

下面简要介绍维度表达能力分析的核心概念。[→]量子电路 $C(\theta)$ 包含依赖于参数 θ 的幺正门，因此可以理解为从参数空间到量子设备状态空间的映射。由此可以定义两个流形：(i) 量子电路能够到达的状态 $|C(\theta)$ 所构成的流形 M，以及 (ii) 量子设备所有物理态所构成的流形 S。为了获得最小且具有最大表达能力的电路，该电路只能生成物理态（$M \subseteq S$），

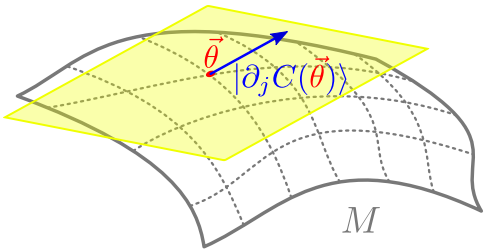


图5： 参数化量子电路可到达的态 $|C(\theta)$ 所构成的流形 M（以灰色表示）在点 θ（红点）处的切空间（以黄色表示），由切向量 $|\partial_j C(\theta)$（蓝色箭头）张成。图及图注改编自参考文献 [108]。

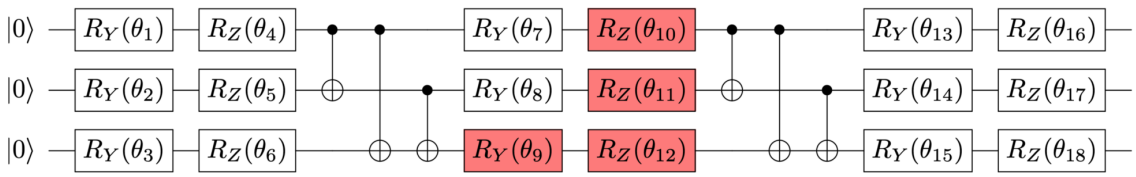


图6： QISKIT 的 EfficientSU2 2-局部电路，包含 2 层。彩色量子门是在进行维度表达能力分析后可以移除的量子门。图及图注改编自参考文献 [106]。

参数数量必须等于 $\dim(S)$，并且 M 的余维必须为零。其中，余维定义为 $\mathrm{codim}(M) = \dim(S) - \dim(M)$。利用混合量子-经典算法（详见参考文献 [106] ），可以通过确定给定参数 θ_j 对应的切向量 $|\partial_j C(\theta)\rangle$，并检验其线性无关性来计算余维（示意见图 5）。通过迭代过程，可以识别出冗余参数 θ_k；对于这些参数，$|\partial_k C(\theta)\rangle$ 是 $|\partial_j C(\theta)\rangle$ 与 $j \neq k$ 的线性组合，并将其设为常数值以移除这些参数。该过程得到一个最小量子电路；当剩余参数的数量等于 $\dim(S)$ 时，该电路具有最大表达能力。作为示例，参考文献 [106] 将维度表达能力分析应用于 Qiskit 中常用的 EfficientSU2 2-local 量子电路 [109], , 图 6 以 3 个量子比特为例进行了展示。在该量子电路中，带颜色标记的幺正门最终被证明是冗余的，因此可以从电路中移除。

5.3 如何处理规范场和费米子?

与标准模型相关的场论的哈密顿量格点表述包含两个主要组成部分：费米物质和玻色（规范）场。迄今为止，大多数模拟在实现费米自由度时，都采用 Jordan-Wigner 变换将其转换为量子比特。Jordan-Wigner 映射将每个费米自由度对应到一个量子比特，但对于 (2+1) 维及更高维的模型，它会将原本的局域项转化为以泡利串形式表示的长程相互作用 [8, 18, 21, 22, 110]。已有能够避免长程泡利串的更局域编码 [111–113], , 近期也有研究致力于开发适用于量子计算的保持局域性的映射 [114–116]。不过，与 Jordan-Wigner 方法相比，这些映射通常需要更多量子比特。

为处理规范场，有多种方法可供选择。早期关于数字量子计算的研究主要聚焦于具有开放边界的 (1+1) 维晶格上的规范模型 [18, 117], , 在这类模型中，规范自由度可以被完全积分掉 [118]。这样便可直接在该理论的规范不变子空间上建立表述。在更高维度中，规范场无法再被完全消去，与规范场相关的无限维希尔伯特空间必须截断为有限维。文献中已提出多种此类截断方法。采用电场能对角的基底，可以在规范群的不可约表示中截断模型，同时保持规范对称性 [119]。然而，使用这种方法通常会受限于（色）电场较小的区域，因而无法探索弱耦合常数区域。另一种方法是采用磁基，使哈密顿量的磁项对角化，并将该基底截断为有限个元素 [30, 33]。与不可约表示中的截断类似，这种方法在接近哈密顿量磁项本征态的区域效果最佳，在强耦合下则会失效。另一种已提出的方法是通过选取规范群的离散子群或子集 [120, 121]，将规范自由度数字化。此外，尤其对于非阿贝尔理论，有人提出了环-弦-强子表述，使得可以在局域上求解非阿贝尔规范约束，并且只对规范链路施加阿贝尔约束 [122–124]。此外，量子链模型 [125, 126] 提供了规范理论的表述，其希尔伯特空间维数在构造上是有限的，但代价是引入一个额外维度，必须将其取至无穷大

，才能得到连续极限 [127, 128]。更多详情及参考文献，参见综述文献 [129]。

5.4 哪些场论已经在量子计算机上进行过模拟?

鉴于当前 NISQ设备的规模和噪声水平，利用量子计算模拟标准模型这一雄心勃勃的目标仍遥不可及。尽管如此，首批对（1+1）维规范理论的量子计算已经完成，展现了标准模型的一些相关特征，包括相变 [8–26]。此外，研究人员还开发出了适用于量子计算的规范理论资源高效表述（例如，参见文献 [27–32]）。要在 NISQ设备上进行格点场论计算，可以使用混合量子-经典算法，例如 VQE（见第5.1.1节）和 VQD（见第5.1.2节）。这些算法已广泛应用于研究（1+1）维粒子物理基准模型（综述参见文献 [6, 102, 103] ）。

5.4.1 示例：计算（1+1）维 SU(2)规范理论的强子质量

一个例子是，最近在量子计算机上成功实现了同时包含规范场和物质场的非阿贝尔规范理论 [21]。如图7（a）所示，利用变分量子本征求解器（见第5.1.1节）和 IBM-Q Casablanca 量子处理器，计算了（1+1）维 SU(2)规范理论的强子质量。相应的晶格哈密顿量为

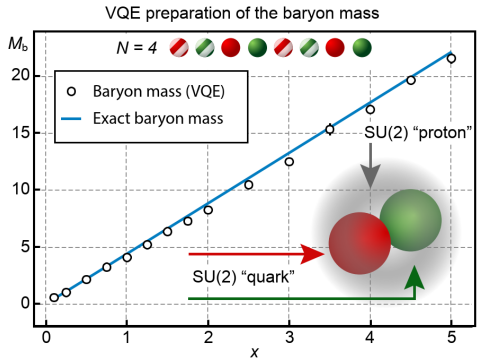
$$\hat{H}_{\mathrm{SU}(2)_{(1+1)\mathrm{D}}} = \frac{1}{2a}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\hat{\phi}_n^\dagger \hat{U}_n \hat{\phi}_{n+1} + \mathrm{h.c.}\right) + m\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \hat{\phi}_n^\dagger \hat{\phi}_n + \frac{ag^2}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\hat{\boldsymbol{L}}_n^2, \tag{10}$$

其中，N 是间距为 a 的格点数量，g 是规范耦合，m 是“夸克”费米子的质量，$\hat{\phi}_n = \left(\hat{\phi}_n^1, \hat{\phi}_n^2\right)^T$ 是位于格点 n 、具有两个色分量（红色和绿色）的交错“夸克”费米子场，$\hat{U}_n$ 是连接格点 n 和 $n+1$的规范链路，而 $\hat{\boldsymbol{L}}_n^2 = \sum_a \hat{L}_n^a \hat{L}_n^a = \sum_a \hat{R}_n^a \hat{R}_n^a$ 是色电场能量，其中 $\hat{L}_n^a$ 和 $\hat{R}_n^a$（$a = x$、y、z）是链路 n上的左、右色电场分量。对于非阿贝尔 SU(2)规范群，右、左色电场并不相同，并通过伴随表示 $\hat{R}_n^a = \sum_b \left(\hat{U}_n^{\mathrm{adj}}\right)_{ab} \hat{L}_n^b$相关联，其中 $\left(\hat{U}_n^{\mathrm{adj}}\right)_{ab} = 2\mathrm{Tr}\left[\hat{U}_n \hat{T}^a \hat{U}_n^\dagger \hat{T}^b\right]$，$\hat{T}^a = \hat{\sigma}^a/2$ 是 SU(2)代数的三个生成元，而 $\hat{\sigma}^a$ 是泡利矩阵。在图 7（a）中，展示了最轻重子的质量 $M_{\mathrm{b}} = E_{\mathrm{b}} - E_{\mathrm{v}}$，其定义为最低重子态 E_{b} 与真空态 E_{v}之间的能隙。为了获得这些结果，文献 [21] 在量子硬件上制备了这两种态，所采用的示例参数为 $N = 4$、$\tilde{m} \equiv am = 1$ 和 $x \equiv 1/(ag)^2 \in [0, 5]$。

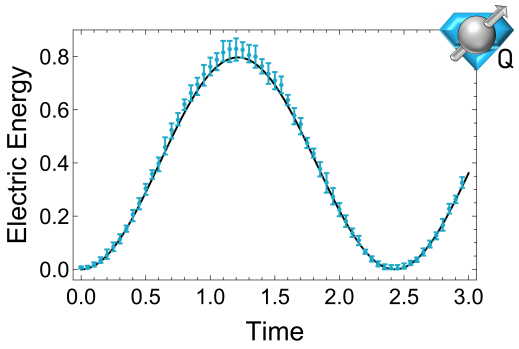
5.4.2 示例：对 (1+1) 维 SU(3) 规范理论进行实时演化 ry

从 SU(2) 推广到 SU(3) 规范理论，文献 [14]最近首次实现了对纯（1+1）维 SU(3) 规范理论动力学的量子计算。我们不再讨论文献 [14], 中考察的原始晶格哈密顿量，而是想给出实际量子计算中使用的最终哈密顿量示例，即应用第5.3节讨论的方法后得到的哈密顿量。采用颜色宇称基中最低的非平凡截断，SU(3) 规范理论的原始晶格哈密顿量被简化为 [14]

$$\hat{H}_{\mathrm{trunc.SU}(3)_{(1+1)\mathrm{D}}} = \left(\frac{4}{3}g^2 + \frac{11}{4g^2}\right)\hat{\mathbb{1}} + \left(-\frac{4}{3}g^2 + \frac{1}{4g^2}\right)\hat{Z} - \frac{1}{\sqrt{2}g^2}\hat{X}, \tag{11}$$



(a)（1+1）维 SU(2) + 物质场 [21]的变分量子本征求解器结果。



(b) （1+1）维纯 SU(3) 的时间演化 [14]。

图 7： （a）对于 $N = 4$ 个格点、“夸克”质量为 $\tilde{m} = am = 1$，且逆耦合常数 $x = 1/(ag)^2 \in [0, 5]$取一系列值时，变分量子本征求解器计算得到的重子质量。该重子是一个 SU(2)“质子”（见插图），误差棒小于标记。经许可转载自参考文献 [21], https://doi.org/10.1038/s41467-021-26825-4，依据 知识共享署名 4.0 国际许可协议。（b）单元格 SU(3) 系统的电场能量变分量子本征求解器结果，该系统根据公式（11）中的哈密顿量进行演化。数据点表示 IBM-Q 的 Athens 量子处理器上四种实现所得的平均值，以及 68% 二项分布置信区间的最大范围。经许可转载自参考文献 [14], https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.094501，版权所有（2021）美国物理学会。

其中， g 是规范耦合常数，$\hat{}X$ 和$\hat{}Z$ 分别是第一和第三个泡利算符。图7(b) 展示了在 IBM-Q 的 Athens 量子处理器上，从电真空态出发进行相应实时演化的结果，参数为 $g = 1$。虽然这些结果是在不含费米子的纯 SU(3) 规范理论中得到的，但值得注意的是，最近首次实现了对 SU(3) 规范理论中四夸克物理实时演化的量子计算，其中包含费米物质场，即（1+1）维“量子色动力学” [22]。此外，NISQ设备上还模拟了（1+1）维一味和两味量子色动力学中的真空动力学及 β衰变 [23, 24]。

5.5 展望：结合量子计算与经典马尔可夫链蒙特卡罗计算 s

在本节中，我们将讨论一个未来将量子计算与经典马尔可夫链蒙特卡罗计算相结合的示例。正如文献 [7], 所提出的，可以将小规模量子计算与大规模马尔可夫链蒙特卡罗计算相结合，以克服马尔可夫链蒙特卡罗方法中的临界减速问题（见第2.1节）。与马尔可夫链蒙特卡罗方法不同，量子计算在研究小格距时不会遇到任何障碍。因此，可以将量子计算获得的短距离量结果，与强耦合区和中等耦合区中马尔可夫链蒙特卡罗模拟得到的结果进行匹配。随后可利用这种匹配来计算例如 Λ参数 [7]。为了确定格距的物理值，需要计算一个可观测量，例如谱隙 $\Delta = E_1 - E_0$。图8展示了采用 VQD 算法（见第2+1）维量子电动力学的谱隙结果，截断级别最高为 $l = 3$；使用了 Qiskit 的 VQD 算法（见第5.1.2节）以及 Qiskit 的 `EfficientSU2` 量子电路（以图 6 中 3 个量子比特和 2 层的示例为例），层数最多为 5 层。图8 中的结果是通过量子硬件的经典模拟器获得的，该模拟器无噪声且具有无限

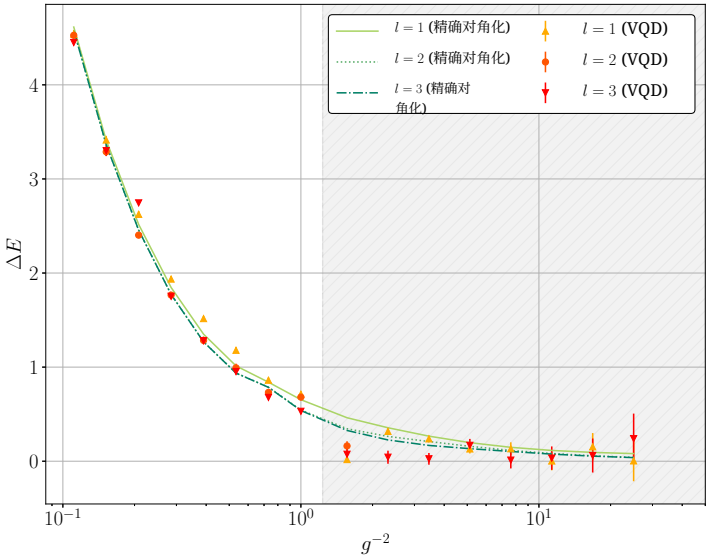


图 8： 电基中 ($\Delta E = E_1 - E_0$)-维量子电动力学的谱隙经典模拟 VQD 结果，2+1在费子质量为零时随规范耦合 g 变化的情况， $m = 0$。图中显示了 VQD 结果（圆点）和精确对角化（ED）结果（曲线），截断级别最高达到$l = 3$。阴影区域表示结果精度不足以可靠估计谱隙的范围。图和图注改编自参考文献 [7]。

次测量次数，以测试该方法在量子比特数量较少时的可行性；未来可将该方法部署在量子硬件上。

有人提出了将小规模量子计算与大规模马尔可夫链蒙特卡罗计算相结合的其他途径，例如，用于解决马尔可夫链蒙特卡罗中的插值算子优化问题 [130, 131]。一般而言，对于结合哈密顿形式和拉格朗日形式的格点结果的计算，需要应对若干挑战。首先，格点场论通常以拉格朗日形式表示，因此需要推导并优化相应的哈密顿形式（例如，参见文献 [132–135]）。其次，需要匹配这两种形式中的不同裸参数和可观测量（例如，参见文献 [136–139]）。第三，需要采用相同的格点费米子形式，但迄今为止，哈密顿形式下的格点计算主要集中于交错费米子。最近，在哈密顿形式中实现威尔逊费米子（例如，参见文献 [140, 141]）以及确定由此产生的质量位移 [66] 方面取得了进展。

6. 总结与展望：我们目前处于什么位置，未来将走向何方？

6.1 简要总结：量子硬件与算法

量子计算有望克服马尔可夫链蒙特卡罗方法面临的挑战，包括符号问题和临界减速问题。在硬件方面，目前已有配备 O(10 – 100) 个含噪量子比特的数字门控量子计算机可用。在算法方面，针对 (1+1) 维和 (2+1) 维规范理论的首批资源高效量子算法

已经开发出来，并且已经完成了针对 (1+1) 维规范理论的首批概念验证量子计算。因此，格点场论量子计算这一研究领域仍处于发展的最初阶段。要实现 (3+1) 维格点场论（尤其是格点量子色动力学）的量子计算，还需要在量子算法和硬件方面进行大量改进。

6.2 讨论与展望：量子计算的未来

量子计算领域最近进入了含噪中等规模量子设备时代，使得人们首次能够在与 Creutz 开创性工作中相当的晶格尺寸上计算格点规范理论 [142]，而那项工作距今已有 40 多年（见图9）。过去 40 年间，利用经典 MCMC 算法研究格点场论取得了巨大进展，如今已能够以夸克质量的物理值模拟前两代夸克的量子色动力学。要达到如今借助超级计算机开展大规模、高精度计算的水平，从而计算轻夸克量子色动力学谱及更多物理量，经典算法和经典硬件都必须得到改进；而从 20 世纪 80 年代的视角来看，这种程度的改进或许曾被认为是不可能的。

因此，我们不禁要问：格点场论量子计算能否像格点场论经典计算一样发展，并在未来几十年达到类似的精度水平？当然，这个问题无法回答，因为答案在很大程度上取决于量子硬件和算法未来的发展，而这两者目前都无法预知。不过，我们可以对量子计算应用于格点量子色动力学的需求作一些粗略估算。目前能够用经典方法模拟的空间格点体积很大，可达 96^3, ；而量子计算则需要$O(10^7 - 10^8)$ 个量子比特 [143]。若采用容错逻辑量子比特，这一数量还需乘以 ~ 1000这一因子，详见第4.3.2节。多家公司的量子计算路线图表明，容错量子计算或许会在本十年或下一个十年成为现实（例如，参见参考文献 [76, 144]）。沿着这些路线图进行推演并向未来外推（这会给量子硬件和纠错带来诸多挑战），到 2040 年代或 2050 年代，或许就能实现空间格点体积为 96^3 的格点量子色动力学量子计算。这个时间跨度虽然很长，但与格点场论经典计算起步至今的时间相当。

此时，我们想强调的是，要让量子计算在格点场论计算中发挥作用，并不需要达到 96^3 这么大的空间格点体积。对于模拟符号问题影响的区域——这些区域既无法用马尔可夫链蒙特卡罗研究，也无法用马尔可夫链蒙特卡罗之外的经典方法（如张量网络方法）研究——只需在小得多的格点体积上进行量子计算即可。例如，在符号问题影响的区域中，量子计算已被证明能够超越当前最好的经典算法，参见（1+1）维格点场论的相关案例，如第3节所述。

6.3 讨论与展望：量子计算与经典计算之间的竞赛

在上一节中，我们提到了经典计算的发展历程与格点场论量子计算可能的未来之间的比较。这一比较引出了一个重要的概念性问题：如果经典算法和硬件在过去取得了如此

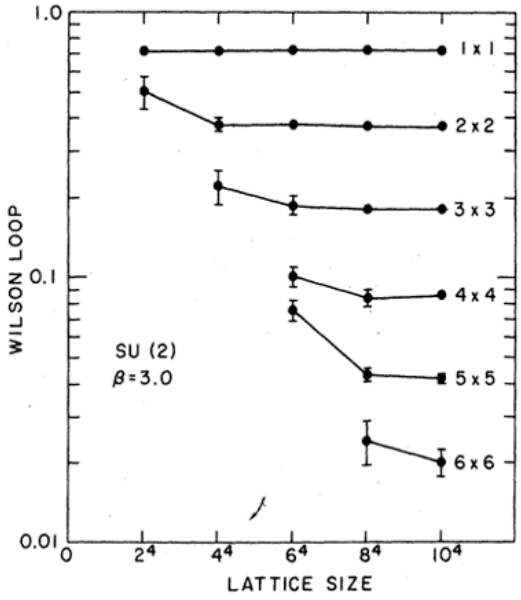


图 9： 首次使用经典蒙特卡洛方法进行的格点场论计算。纯 SU(2) 规范场的威尔逊环，在 $\beta = 3$ 随晶格尺寸变化的函数关系。经参考文献 [142], https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2308授权转载，版权归美国物理学会所有（1980 年）。

巨大的进步，它们未来的发展速度是否可能快到足以赶上量子计算的任何进展？量子计算的发展史上有几个例子：经典算法改进后，量子优势转变成了“经典优势”。例如，文献 [145] 展示了一次使用 53 个量子比特进行的量子计算，耗时 200 秒，远短于经典算法所需的 10,000 年。由于经典算法存在一个漏洞，其运行时间后来缩短到了几天；即使略微增加量子比特数量，运行时间也同样如此 [146], 。随后，文献 [147], 又将其进一步缩短至 304 秒，因此与量子计算的运行时间相当。

格点场论的经典算法，包括基于马尔可夫链蒙特卡罗的方法、张量网络方法、机器学习方法，以及其他克服或缓解符号问题的方法，是否可能在未来几十年内发展得足够迅速，从而不再需要量子计算？这同样是一个无法回答的问题，因为答案很大程度上取决于经典硬件和算法未来的发展，而这两者目前都无法预知。即使经典计算与量子计算能够展开竞争，量子计算仍可能带来优势，例如在格点场论的特定参数区域中，或者更普遍地，由于功耗更低。至关重要的是，每当遇到一个在经典计算上难以指数级求解的问题时，量子计算迈出的一小步都对应着经典计算的一次巨大飞跃。例如，对于非平衡动力学的模拟，正如第3节所述，目前已知的最佳经典算法的误差会随时间呈指数增长。对于高度纠缠的量子系统，我们预计，未来一旦具备足够的资源，量子计算将能够在（3+1）维格点场论中超越经典计算。

致谢

L.F. 部分获得了美国能源部科学办公室国家量子信息科学研究中心、量子优势协同设计中心（C^2QA）的资助，合同编号为 DE-SC0012704；获得美国能源部 QuantiSED 联盟的资助，分包合同编号为 675352；获得美国国家科学基金会合作协议 PHY-2019786 的资助（美国国家科学基金会人工智能与基本相互作用人工智能研究所，http://iaifi.org/）；并获得美国能源部科学办公室核物理办公室的资助，拨款合同编号为 DE-SC0011090 和 DE-SC0021006。S.K. 感谢塞浦路斯研究与创新基金会通过以下项目提供的经费支持：“面向未来超级计算机的科学应用未来保障（FAST）”，合同编号为 COMPLEMENTARY/0916/0048；以及“格点规范理论量子计算（QC4LGT）”，合同编号为 EXCELLENCE/0421/0019。

参考文献

[1] C. E. Berger 等，《物理报告》892，1（2021）。[2] M. Cristoforetti、F. Di Renzo 和 L. Scorzato，《物理评论D》86，074506（2012）。[3] D. Boyda 等，arXiv:2202.05838（2022）。[4] M. C. Bañuls 等，PoS LATTICE2018，022（2018）。[5] M. C. Bañuls 和 K. Cichy，《物理学进展报告》83，024401（2020）。[6] M. C. Bañuls 等，The European Physical Journal D 74（2020）。[7] G. Clemente、A. Crippa 和 K. Jansen，arXiv:2206.12454（2022）。[8] E. A. Martinez 等，Nature 534，516（2016）。[9] B. Yang 等，Nature 587，392（2020）。[10] A. Mil 等，《科学》367，1128（2020）。[11] S. A Rahman、R. Lewis、E. Mendicelli 和 S. Powell，《物理评论D》104，034501（2021）。[12] Z.-Y. Zhou 等，《科学》377，311（2022）。[13] A. N. Ciavarella 和 I. A. Chernyshev，《物理评论D》105，074504（2022）。[14] A. Ciavarella、N. Klco 和 M. J. Savage，《物理评论D》103，094501（2021）。[15] N. Klco、J. R. Stryker 和 M. J. Savage，《物理评论D》101，074512（2020）。[16] N. Klco 等，《物理评论A》98，032331（2018）。[17] W. A. de Jong 等，《物理评论D》106，054508（2022）。

[18] C. Kokail 等，Nature 569，355（2019）。[19] C. Schweizer 等，Nat. Phys. 15，1168（2019）。[20] J. Mildenberger 等，arXiv:2203.08905（2022）。[21] Y. Y. Atas 等，《自然·通讯》12，6499（2021）。[22] Y. Y. Atas 等，arXiv:2207.03473（2022）。[23] R. C. Farrell 等，《物理评论D》107，054512（2023）。[24] R. C. Farrell 等，《物理评论D》107，054513（2023）。[25] E. Huffman、M. García Vera 和 D. Banerjee，《物理评论D》106，094502（2022）。[26] L. Lumia 等，《PRX量子》3，020320（2022）。[27] M. C. Bañuls、K. Cichy、J. I. Cirac、K. Jansen 和 S. Kühn，《物理评论X》7，041046（2017）。[28] A. Celi 等，《物理评论X》10，021057（2020）。[29] D. B. Kaplan 和 J. R. Stryker，《物理评论D》102，094515（2020）。[30] J. F. Haase 等，《量子》5，393（2021）。[31] D. Paulson 等，《PRX量子》2，030334（2021）。[32] T. Armon 等，《物理评论快报》127，250501（2021）。[33] C. W. Bauer 和 D. M. Grabowska，arXiv:2111.08015（2021）。[34] J. Preskill，《量子》2，79（2018）。[35] R. Orús，《物理年鉴》349，117（2014）。[36] M. Troyer 和 U.-J. Wiese，《物理评论快报》94，170201（2005）。[37] S. Schaefer、R. Sommer 和 F. Virotta，Nuclear Physics B 845，93（2011）。[38] A. Ammon 等，《计算物理通讯》198，71（2016）。[39] A. Ammon 等，《物理评论D》94，114508（2016）。[40] R. Abbott 等，arXiv:2208.03832（2022）。[41] T. Hartung、K. Jansen 和 C. Sarti，arXiv:2208.08223（2022）。[42] B. Dittrich 和 P. A. Hoehn，《数学物理杂志》54，093505（2013）。[43] B. Dittrich、S. Mizera 和 S. Steinhaus，《新物理学杂志》18，053009（2016）。[44] M. Asaduzzaman、S. Catterall 和 J. Unmuth-Yockey，《物理评论D》102，054510（2020）。

[45] U. Schollwöck, 《物理年鉴》326，96（2011）。[46] J. C. Bridgeman 和 C. T. Chubb, 《物理学杂志A：数学与理论》50，223001（2017）。[47] G. Vidal, 《物理评论快报》93，040502（2004）。[48] F. Verstraete 和 J. I. Cirac, 《物理评论B》73，094423（2006）。[49] M. B. Hastings, 《统计力学杂志》2007，P08024（2007）。[50] F. Verstraete 和 J. I. Cirac，arXiv:cond-mat/0407066（2004）。[51] Y.-Y. Shi、L.-M. Duan 和 G. Vidal, 《物理评论A》74，022320（2006）。[52] G. Vidal, 《物理评论快报》101，110501（2008）。[53] L. Tagliacozzo、G. Evenbly 和 G. Vidal, 《物理评论B》80，235127（2009）。[54] G. Evenbly 和 G. Vidal, 《物理评论快报》112，240502（2014）。[55] M. C. Bañuls、K. Cichy、K. Jansen 和 J. I. Cirac, 《高能物理杂志》2013，158（2013）。[56] L. Funcke、K. Jansen 和 S. Kühn, 《物理评论D》101，054507（2020）。[57] G. Magnifico、T. Felser、P. Silvi 和 S. Montangero, 《自然·通讯》12，3600（2021）。[58] M. Levin 和 C. P. Nave, 《物理评论快报》99，120601（2007）。[59] S. Yang、Z.-C. Gu 和 X.-G. Wen, 《物理评论快报》118，110504（2017）。[60] G. Evenbly 和 G. Vidal, 《物理评论快报》115，180405（2015）。[61] Y. Kuramashi 和 Y. Yoshimura, 《高能物理杂志》08，023（2019）。[62] P. Silvi、Y. Sauer、F. Tschirsich 和 S. Montangero, 《物理评论D》100，074512（2019）。[63] G. Magnifico 等, 《物理评论B》100，115152（2019），1906.07005。[64] L. Funcke 等，arXiv:2211.13020（2022）。[65] L. Funcke、K. Jansen 和 S. Kühn，PoS LATTICE2021，552（2022）。[66] T. Angelides、L. Funcke、K. Jansen 和 S. Kühn，arXiv:2211.12169（2022）。[67] K. Nakayama 等, 《物理评论D》105，054507（2022）。[68] Y. Kuramashi 和 Y. Yoshimura, 《高能物理杂志》08，023（2019）。[69] T. Felser、P. Silvi、M. Collura 和 S. Montangero, 《物理评论X》10，041040（2020）。[70] P. Calabrese 和 J. Cardy, 《统计力学杂志》2005，P04010（2005）。[71] N. Schuch、M. M. Wolf、K. G. H. Vollbrecht 和 J. I. Cirac, 《新物理学杂志》10，033032（2008）。

[72] M. Lubasch、J. I. Cirac 和 M.-C. Bañuls，《物理评论B》90，064425（2014）。[73] A. J. Daley 等，Nature 607，667（2022）。[74] S. Trotzky 等，Nat. Phys. 8，325（2012）。[75] P. Ball，Nature 599，542（2021）。[76] E. Lucero，《揭晓我们的新量子人工智能园区》，摘自 https://blog.google/technology/ai/unveiling-our-new-quantum-ai-campus/（2021）。[77] P. Shor，《第37届计算机科学基础会议论文集》，56（1996）。[78] A. Y. Kitaev，Annals Phys. 303，2（2003）。[79] E. Knill、R. Laflamme 和 W. H. Zurek，Proc. Roy. Soc. Lond. A 454，365（1998）。[80] D. Aharonov 和 M. Ben-Or，arXiv:quant-ph/9906129（1999）。[81] J. von Neumann，《概率逻辑与从不可靠组件综合可靠有机体》（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，1956），第43–98页。[82] A. Peres，《物理评论A》32，3266（1985）。[83] P. W. Shor，《物理评论A》52，R2493（1995）。[84] D. Gottesman、A. Kitaev 和 J. Preskill，《物理评论A》64，012310（2001）。[85] E. T. Campbell、B. M. Terhal 和 C. Vuillot，Nature 549，172（2017）。[86] S. S. Tannu 和 M. K. Qureshi，《第52届IEEE/ACM微体系结构国际研讨会论文集》，279（2019）。[87] A. Kandala 等，Nature 549，242（2017）。[88] Y. Li 和 S. C. Benjamin，《物理评论X》7，021050（2017）。[89] K. Temme、S. Bravyi 和 J. M. Gambetta，《物理评论快报》119，180509（2017）。[90] S. Endo、S. C. Benjamin 和 Y. Li，《物理评论X》8，031027（2018）。[91] S. Endo、Q. Zhao、Y. Li、S. Benjamin 和 X. Yuan，《物理评论A》99，012334（2019）。[92] A. Kandala 等，Nature 567，491（2019）。[93] K. Yeter-Aydeniz 等，《物理评论A》99，032306（2019）。[94] K. Yeter-Aydeniz、R. C. Pooser 和 G. Siopsis，npj Quantum Inf. 6（2020）。[95] Z. Chen 等，Nature 595，383（2021）。[96] J. Cramer 等，《自然·通讯》7（2016）。

[97] L. Funcke 等, 《物理评论A》105, 062404 (2022).[98] A. Peruzzo 等, 《自然·通讯》5, 1 (2014).[99] J. R. McClean, J. Romero, R. Babbush 和 A. Aspuru-Guzik, 《新物理学杂志》18, 023023 (2016).[100] T. Jones 等, 《物理评论A》99, 062304 (2019).[101] O. Higgott, D. Wang 和 S. Brierley, 《量子》3, 156 (2019).[102] N. Klco, A. Roggero 和 M. J. Savage, 《物理学进展报告》85, 064301 (2022).[103] E. Zohar, 《皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》380, 20210069 (2021).[104] A. Mil 等, 《科学》367, 1128 (2020).[105] N. H. Nguyen 等, arXiv:2112.14262 (2021).[106] L. Funcke, T. Hartung, K. Jansen, S. Kühn 和 P. Stornati, 《量子》5, 422 (2021).[107] L. Funcke 等, 2021年IEEE国际网络服务会议（ICWS）, 693 (2021).[108] L. Funcke 等, 《皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》380, 20210062 (2021).[109] H. Abraham 等, Zenodo (2019).[110] N. Klco 等, 《物理评论A》98 (2018).[111] S. B. Bravyi 和 A. Y. Kitaev, 《物理年鉴》298, 210 (2002).[112] F. Verstraete 和 J. I. Cirac, 《统计力学：理论与实验》2005, P09012 (2005).[113] R. C. Ball, 《物理评论快报》95, 176407 (2005).[114] J. D. Whitfield, V. c. v. Havlíček 和 M. Troyer, 《物理评论A》94, 030301 (2016).[115] M. Steudtner 和 S. Wehner, 《物理评论A》99, 022308 (2019).[116] C. Derby, J. Klassen, J. Bausch 和 T. Cubitt, 《物理评论B》104, 035118 (2021).[117] C. Muschik 等, 《新物理学杂志》19, 103020 (2017).[118] P. Sala 等, 《物理评论D》98, 034505 (2018).[119] E. Zohar 和 M. Burrello, 《物理评论D》91, 054506 (2015).[120] E. J. Gustafson, H. Lamm, F. Lovelace 和 D. Musk, 《物理评论D》106, 114501 (2022).[121] T. Hartung, T. Jakobs, K. Jansen, J. Ostmeyer 和 C. Urbach, 《欧洲物理学杂志C辑》82, 237 (2022).[122] I. Raychowdhury 和 J. R. Stryker, 《物理评论D》101, 114502 (2020).

[123] I. Raychowdhury 和 J. R. Stryker，Physical Review Research 2, 033039 (2020).[124] S. V. Kadam, I. Raychowdhury 和 J. R. Stryker，arXiv:2212.04490 (2022).[125] P. Orland 和 D. Rohrlich，Nuclear Physics B 338, 647 (1990).[126] S. Chandrasekharan 和 U.-J. Wiese，Nuclear Physics B 492, 455 (1997).[127] R. Brower, S. Chandrasekharan 和 U.-J. Wiese，《物理评论D》60, 094502 (1999).[128] R. Brower, S. Chandrasekharan, S. Riederer 和 U.-J. Wiese，Nuclear Physics B 693, 149 (2004).[129] C. W. Bauer 等，arXiv:2204.03381 (2022).[130] A. Avkhadiev, P. E. Shanahan 和 R. D. Young，《物理评论快报》124, 080501 (2020).[131] A. Avkhadiev, P. E. Shanahan 和 R. D. Young，(2022)，2209.01209.[132] A. Kan 等，《物理评论D》104, 034504 (2021).[133] M. Carena, H. Lamm, Y.-Y. Li 和 W. Liu，《物理评论快报》129, 051601 (2022).[134] M. Carena, H. Lamm, Y.-Y. Li 和 W. Liu，《物理评论D》104, 094519 (2021).[135] T. D. Cohen, H. Lamm, S. Lawrence 和 Y. Yamauchi，《物理评论D》104, 094514 (2021).[136] M. Loan, M. Brunner, C. Sloggett 和 C. Hamer，《物理评论D》68, 034504 (2003).[137] T. M. R. Byrnes 等，《物理评论D》69, 074509 (2004).[138] M. Carena, E. J. Gustafson, H. Lamm, Y.-Y. Li 和 W. Liu，arXiv:2208.10417 (2022).[139] L. Funcke 等，arXiv:2212.09627 (2022).[140] T. V. Zache 等，Quantum Science and Technology 3, 034010 (2018).[141] G. Mazzola, S. V. Mathis, G. Mazzola 和 I. Tavernelli，Physical Review Research 3, 043209 (2021).[142] M. Creutz，《物理评论D》21, 2308 (1980).[143] M. C. Bañuls 等，The European Physical Journal D 74, 165 (2020).[144] J. Gambetta，IBM关于量子技术扩展的路线图，取自 https: //research.ibm.com/blog/ibm-quantum-roadmap (2020).[145] F. Arute 等，Nature 574, 505 (2019).[146]E. Pednault, J. Gunnelsa, D. Maslov 和 J. Gambetta，关于“量子霸权”，取自 https://www.ibm.com/blogs/research/2019/ 10/on-quantum-supremacy/ (2019).

[147] Y. A. Liu 等，国际高能物理会议论文集**3**（2021）。