arXiv:2302.00470v1 [cond-mat.mes-hall] 1 Feb 2023

弹道双层石墨烯腔中栅极可调的规则与混沌电子动力学

Lukas Seemann[1], Angelika Knothe[1,2], 和 Martina Hentschel[1]1 *Institute of Physics, Technische Universität Chemnitz, D-09107 Chemnitz, Germany and*[2] *Institut für Theoretische Physik, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Germany*（日期：2023年2月2日）

任何给定材料的色散关系对其电荷载流子的动力学至关重要。针对有带隙双层石墨烯中的全电子栅极定义腔，我们开发了一种轨迹追踪算法，能够考虑材料的电子性质和限域细节。我们展示了双层石墨烯的各向异性色散如何随栅极电压变化而引发混沌或规则动力学，尽管圆形空腔具有高度对称性。我们的结果表明，仅由材料的各向异性特征就能产生非标准的费米子光学。

引言。在二维材料中，维度降低与材料特定的电子性质相结合，往往会产生不同寻常的电荷载流子动力学。尤其是在石墨烯基系统中，低应变和低电荷无序带来的卓越样品质量，使研究者得以观测到跨越数十个 μm 距离[1–4]的弹道电荷载流子动力学。先进的栅控技术能够对电荷载流子和材料的电子性质进行极其精细的控制。近期，这一进展促成了在双层石墨烯中一系列高质量栅定义量子器件内实现电子限域与控制的演示，其中包括量子线和量子点 [3, 5–16],约瑟夫森结、干涉仪和超导量子干涉器件 [17–22]。

此前，人们曾在狄拉克电子光学的框架下讨论单层石墨烯腔中的弹道电荷载流子动力学，并将其类比于光学腔。基于圆锥形狄拉克色散关系和手性电荷载流子的早期石墨烯相对论量子混沌研究讨论了克莱因隧穿和维塞拉戈透镜聚焦、相对论量子疤痕、混沌与自旋的相互作用（表现为依赖自旋的规则散射与混沌散射并存），以及可积腔中电导共振所呈现的束缚态 [22–38]。文献 37 确认了石墨烯系统中轨迹计算与波动计算结果之间的对应关系，这也是本研究的基础。

在本文中，我们展示了有带隙双层石墨烯中圆形全电子栅极定义腔内弹道电荷载流子的粒子轨迹动力学，见图1。双层石墨烯独特的材料性质诱导出新颖的轨迹动力学，其不同于狄拉克体系和光子体系。三角翘曲色散关系导致电荷载流子的速度分布具有各向异性和谷依赖性，并在腔边界处产生异常的斯涅尔定律和菲涅耳定律（包括类反克莱因隧穿 [39–53], 、入射角、反射角和透射角之间的非线性关系，以及由于动量失配或费米能位于带隙内而导致的全反射）。

各向异性导致的奇特动力学和斯涅尔定律

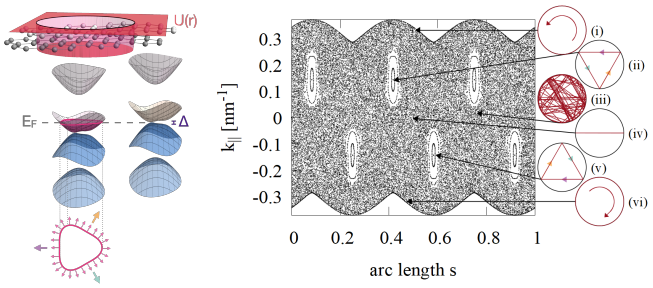


图1。左：双层石墨烯中的圆形腔，由栅极定义势 $U(\mathbf{r})$定义。右：K^+ 谷中 $\Delta = 5$ meV、$E_F = 100$ meV、 $U_0 = 100$ meV条件下的庞加莱截面，其中费米能在腔内（腔外）位于导带（带隙）中。我们发现了混沌动力学（iii）、稳定的三角形周期轨道（ii、v）、沿直径分布的不稳定周期轨道（iv）以及类回音廊轨道（i、vi）。

已观察到色散关系，例如自旋波 [54]、等离激元 [55], 以及各向异性光子晶体中的色散关系 [56,57]。在双层石墨烯中，费米面的各向异性形状会因层间不对称带隙而增强，并且取决于电荷载流子密度 [3, 58]。因此，可以通过外部栅极 [37]调控双层石墨烯中的载流子动力学和散射定律。采用考虑材料特性的轨迹追踪算法，根据所选参数，我们发现：

- 由于双层石墨烯色散关系的旋转对称性破缺和各向异性，即使在圆形腔体中，参数空间的大部分区域内也会出现混沌电荷载流子动力学；
- 由每个谷的三重旋转对称性诱导的稳定周期性三角轨道；
- 沿内边界运动的类回音廊轨迹在最终进入混沌动力学之前，由全内反射使其保持稳定；

我们通过分析腔体内弹道射线轨迹的广义庞加莱截面（PSOS），来展示这些不同的动力学状态（图 1 右图）。截面以沿腔体边界的归一化弧长 $s = \tilde{s}/2\pi R$ （空腔半径为 R）以及每次反射时的守恒动量 $k_{||}$ 为变量

。 [59] 我们通常会发现，每个谷中都存在具有三重对称性的混合相空间。六个不动点对应两条稳定的周期性三角轨道，它们源于三角翘曲色散所诱导的电荷载流子的优选方向（图 1 左侧示意图下方，以颜色标示）。这些三角形轨道的高对称性（见图 1）使其遵循传统反射定律；而一般轨迹的入射角与出射角则不相同。

本文结构如下。首先，我们推导有带隙双层石墨烯中弹道传播以及腔边界处散射的规律。随后，我们介绍粒子追踪算法，该算法将这些材料特有的传播规律纳入考量。利用该算法，我们研究双层石墨烯中的弹道电荷载流子动力学，其体系由有带隙区域（参见图 1）或 np 边界（参见图 2）限定。最后，我们讨论如何通过输运或显微成像手段在实验上检验我们的研究结果。

双层石墨烯中的弹道电子轨迹动力学。我们通过进行考虑材料特性的射线追踪模拟，获得上述双层石墨烯腔体中弹道电荷载流子轨迹动力学的性质。我们的射线追踪算法将四带哈密顿量 [60–62]，所描述的双层石墨烯在两个不等价谷 $K^{\xi}(\xi = \pm 1)$中的低能电子结构纳入考量

$$H^{\xi}_{BLG} = \xi \begin{pmatrix} \xi U - \frac{1}{2}\Delta & v_3\pi & v_4\pi^{\dagger} & v\pi^{\dagger} \\ v_3\pi^{\dagger} & \xi U + \frac{1}{2}\Delta & v\pi & v_4\pi \\ v_4\pi & v\pi^{\dagger} & \xi U + \frac{1}{2}\Delta & \xi\gamma_1 \\ v\pi & v_4\pi^{\dagger} & \xi\gamma_1 & \xi U - \frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

方程 (1) 在谷 K^{+} 中的亚晶格基底 $(A,\ B',\ A',\ B)$ 以及谷 K^{-} 中的亚晶格基底 $(B',\ A,\ B,\ A')$ 下表示，其中 $\pi = p_x + ip_y$, $\pi^{\dagger} = p_x - ip_y$。这里， Δ是层间不对称带隙，而 $U(\mathbf{r}) = U_0\mathcal{H}(\mathbf{r})$ 是高度为 U_0 的势垒，用于局部限定腔边界（其中 $\mathcal{H}$ 表示赫维赛德阶跃函数）。我们纳入了所考虑低能尺度下所有相关耦合，即 $v \approx 1.02 \cdot 10^6$ m/s、 $v_3 \approx 0.12 \cdot v$、$v_4 \approx 0.37 \cdot v_3$以及 $\gamma_1 \approx 0.38$ eV [63]。

由式（1）可知，电子色散具有各向异性，在每个谷中都呈现三角翘曲的等能费米线，如图 1 所示。色散关系的这种各向异性使电荷载流子的实空间轨迹具有各向异性的速度分布 [3, 58, 64]。此外，这种各向异性还决定了电荷载流子在势垒边界处散射时的反射和透射规律。我们通过在腔边界处对陡峭的 [65] 势垒进行波函数匹配，推导出反射率 R 和透射率 $T = 1 - R$– 41, 44–53]。匹配腔体内部（$U \equiv 0$）和外部（$U \equiv U_0$）的式（1）本征态（参见图 1），即可确定反射波和透射波的部分波， Ψ_r 和 Ψ_t 以及相应的反射率，

$$R(\theta) = \frac{\langle \Psi_r | v_{\perp}(\theta) | \Psi_r \rangle}{\langle \Psi_{in} | v_{\perp}(\theta) | \Psi_{in} \rangle}, \tag{2}$$

其中 Ψ_{in} 是入射波的振幅。此外， $v_{\perp}(\theta)$ $= \partial H^{\xi}_{BLG}/\partial p_{\perp}(\theta)$ 是在每个腔体周边的点处，将坐标系旋转 θ 后，局部垂直于腔边界的速度分量，如图 2 所示。波函数匹配计算的详细信息见补充材料。

需要注意的是，由于费米线存在三角翘曲，反射定律和透射定律会区分两个谷，并且取决于边界相对于双层石墨烯晶格的取向。此外，反射系数和透射系数 R 和 T 取决于带隙 Δ、费米能量 E_F 以及势垒高度 U，如图 2 顶行的示例所示。因此，调节这些参数便可通过栅极定义来调控电荷载流子的速度分布和菲涅耳定律，进而调控腔体动力学。

我们的数值射线追踪算法用于生成双层石墨烯台球中的弹道粒子轨迹，具体如下：对于给定的 Δ， E_F 和 U_0，我们根据对每个谷 [66] 中的式（1）进行对角化后得到的费米线，确定注入电荷载流子的初始速度分布。按照这一初始速度分布，我们从腔边界上的 36 个点各发射 20 条轨迹。随后，每当粒子在腔边界发生散射时，我们根据系统参数以及边界在交点处的相对取向 θ ，应用菲涅耳定律来处理反射和透射，见图 2 左侧。每次散射中，沿边界切线方向的局部动量分量 $k_{\|}$ 均守恒。散射后新射线轨迹的速度取向，再根据边界两侧各自的费米线重新计算。我们追踪每条射线轨迹及其强度，共计 100 次反射。

可以区分这样两种情形：费米能位于腔体外部的带隙内（使每个反射点都发生全反射），或位于 np 结边界处（允许散射进入腔体外部的空穴带，见图 2 左侧示意图）。前一种情形通过阻止电荷载流子逃逸来增强腔体内部的动力学（见图 1）；后一种情形则可用于研究远场发射，并提供额外的调节手段，即使腔体边界内外的费米轮廓彼此失配，参见图 2。

在图 2 中，我们给出了采用粒子追踪算法，对具有不同势垒、费米能和带隙的 np型腔体所获得的不同载流子动力学的代表性示例。一般而言，当具有较大守恒动量的电子态在空穴带中找不到对应态时，内外费米等能线之间的强烈失配会促成全反射。这种对全反射的可调控性使我们能够有选择地将某些轨迹捕获在

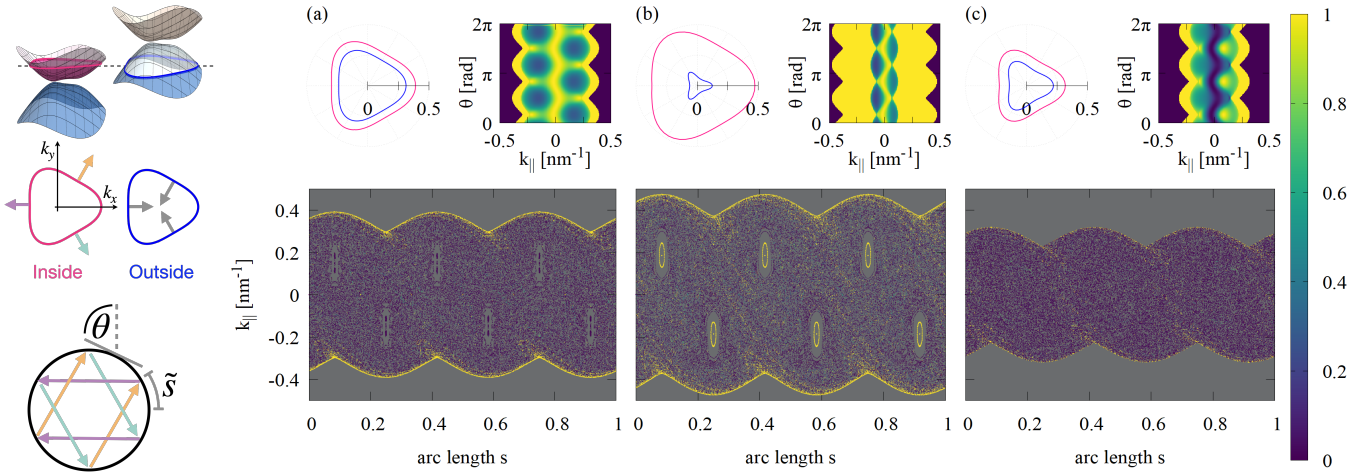


图 2. K^+谷中，不同费米能、势垒和带隙下 np 型腔体的动力学（a： $E_F = 100$ 毫电子伏特， $U_0 = 180$ 毫电子伏特， $\Delta = 5$ 毫电子伏特；b： $E_F = 140$ 毫电子伏特， $U_0 = 150$ 毫电子伏特， $\Delta = 5$ 毫电子伏特；c： $E_F = 70$ 毫电子伏特，$U_0 = 120$ 毫电子伏特， $\Delta = 80$ 毫电子伏特）。左侧示意图展示了腔体内（洋红色）和腔体外（蓝色）的费米线几何形状、局部腔体坐标以及三角形轨迹。上排：腔体内/外费米线（极坐标图），以及反射率 R 随腔边界相对于晶格的取向变化的情况（密度图）。角度 θ 在示意图中定义，其中 $\theta = 0$ 对应扶手椅型取向， $\theta = \pi/2$ 对应锯齿型取向。下排：用于表征腔体内轨迹动力学的强度加权广义庞加莱截面。腔体内外不同的费米线会诱发并稳定不同的电荷载流子动力学。上排反射率图和下排庞加莱截面图中的强度使用相同的色标。在相反的谷中，费米线旋转了 $180°$，从而诱发反向传播的三角形轨迹。相应的 K^- 庞加莱截面见补充材料。

腔体内。例如，在图 2(a) 中，费米面几乎具有相同的大小和形状，由动量失配导致的全反射仅发生在较大动量下，对应于类耳语廊边界模（庞加莱截面边缘处才有高强度的区域）。然而，如果外部费米面小得多，如图 2(b) 所示，全反射区域会扩展到较小动量（庞加莱截面的内部区域），同时也使三角形轨道得以稳定；这些轨道在传播过程中仍保持较高强度。

图 2(c) 展示了当带隙和费米能足够小时，费米线会变为凹形。将三角形费米线的边向内弯曲，会导致电荷载流子的速度分布发生分岔，并破坏此前由三角形平直边所规定的明确优选方向 [3]。因此，在腔体内费米线呈凹形的区域，三角形岛会消失，周期轨道也不复存在。

电荷载流子速度分布的分岔也体现在 np 型腔体的远场特性中。图 3 展示了腔体外费米线分别为凸形和凹形时的远场辐射示例。我们注意到，远场

与一般各向同性源的情形相似，其中所有动量态的占据概率相同，而电荷载流子动力学主要由沿外费米线的速度分布所决定 [3]。

结论及与实验的关系。我们展示了

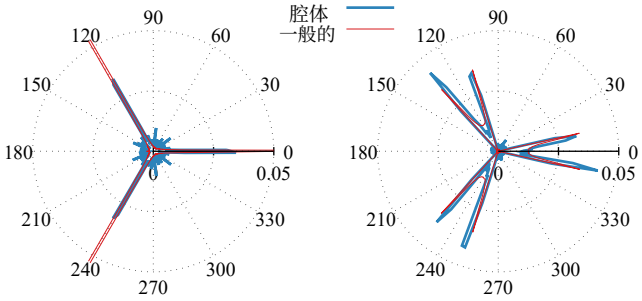


图 3. p掺杂外部区域中费米线为凸形（左）和凹形（右）时，np 型腔体发射的远场。我们比较了双层石墨烯中腔体（蓝色）的发射与一般各向同性源（红色）的发射。

圆形栅极定义双层石墨烯腔体中弹道载流子的射线轨迹动力学。由于色散关系具有各向异性和三角翘曲，我们发现了混沌区域、周期性三角轨道以及回音壁型轨迹。电荷载流子动力学及其对应的庞加莱截面取决于可通过外部栅极调节的系统参数。值得注意的是，这里丰富多样的结构出现在圆形台球的庞加莱截面中，并不需要对腔体形状进行任何变形或引入各向异性 [67–70]。因此，双层石墨烯台球是一个展示材料性质如何诱发混沌的例子。

在本研究中，我们聚焦于一些简单情形：具有尖锐边界的圆形空腔，以及单连通的双层石墨烯费米轮廓。腔体的形状

腔边界和费米轮廓都可进一步调控载流子动力学。例如，可以考虑变形腔体 [67–70], 光滑边界[37, 58, 71], 以及双层石墨烯利夫希茨跃迁以下的费米线；这些情形可由外部栅极或应变诱导 [43, 72–74]。由于我们的分析主要基于各向异性色散及其产生的速度分布，我们预计此处观察到的主要特征——例如材料色散导致的规则与混沌电荷载流子动力学——也会出现在更复杂的体系中。此外，还可以针对具有非圆性色散及相应各向异性的其他二维材料进行同样的分析[2, 4, 64]。这些进一步研究是对本工作的直接推广，将在其他地方讨论。

过去，扫描门显微术已被用于直观呈现石墨烯中的电子轨迹以及电子腔体 [3, 75–80]。我们预计，混沌和周期性的电荷载流子轨迹在输运中也可以进一步区分：根据腔体周围接触电极的位置 [81], , 测得的信号会有所不同——与均匀混沌背景产生的信号相比，周期轨道聚焦至探测器的轨迹会产生不同的信号。在一种使接触电极绕腔体旋转的装置中，任何电导增强区域的数量和位置都将有助于推断费米面的对称性、拓扑和取向。由于双层石墨烯的两个谷与磁场的耦合符号相反 [10, 12, 82], , 可以利用微弱的面外磁场来区分不同谷中的轨迹。

总之，我们已证明，由材料本身固有的各向异性和非线性，可能产生规则和混沌的电荷载流子动力学。在双层石墨烯中，这类材料特性的独特可调控性，以及外部栅极实现的腔体限制，为新型非线性弹道电荷载流子动力学带来了巨大潜力。

致谢。 我们感谢 CarolinGold、Christoph Stampfer、Luca Banszerus、Caio Lewenkopf、Thomas Lane、Rafael A. Molina、Yuriko Baba、Klaus Richter、Christoph Schulz、Ming-Hao Liu 和 Sybille Gemming 的宝贵讨论。

[1] L. Banszerus、M. Schmitz、S. Engels、M. Gold- sche、K. Watanabe、T. Taniguchi、B. Beschoten 和 C. Stampfer, 《化学气相沉积生长石墨烯中超过 28 Mm 的弹道输运》, 《纳米快报》**16**, 1387（2016）。[2] M. Lee、J. R. Wallbank、P. Gallagher、K. Watanabe、T. Taniguchi、V. I. Fal'ko 和 D. Goldhaber-Gordon, 《石墨烯超晶格中的弹道迷你能带传导》, 《科学》**353**, 1526（2016）。[3] C. Gold、A. Knothe、A. Kurzmann、A. Garcia-Ruiz、K. Watanabe、T. Taniguchi、V. Fal'ko、K. Ensslin 和 T. Ihn, 《双层石墨烯中栅极定义通道产生的相干射流》, 《物理评论快报》**127**, 046801（2021）。[4] A. I. Berdyugin、B. Tsim、P. Kumaravadivel、S. G. Xu、A. Ceferino、A. Knothe、R. K. Kumar、T. Taniguchi、K. Watanabe、A. K. Geim、I. V. Grigorieva 和 V. I. Fal'ko, 《通过磁聚焦探测扭转双层石墨烯中的迷你能带》, 《科学进展》**6**, eaay7838（2020）。[5] M. Eich、R. Pisoni、A. Pally、H. Overweg、A. Kurzmann、Y. Lee、P. Rickhaus、K. Watanabe、T. Taniguchi、K. Ensslin 和 T. Ihn, 《双层石墨烯中的耦合量子点》, 《纳米快报》**18**, 5042（2018）。[6] H. Overweg、H. Eggimann、X. Chen、S. Slizovskiy、M. Eich、R. Pisoni、Y. Lee、P. Rickhaus、K. Watanabe、T. Taniguchi、V. Fal'ko、T. Ihn 和 K. Ensslin, 《双层石墨烯中静电诱导的量子点接触》, 《纳米快报》**18**, 553（2018）。[7] H. Overweg、A. Knothe、T. Fabian、L. Linhart、P. Rick-haus、L. Wernli、K. Watanabe、T. Taniguchi、D. S´anchez、J. Burgd¨orfer、F. Libisch、V. I. Fal'ko、K. Ensslin 和 T. Ihn, 《双层石墨烯量子点接触中的拓扑非平庸谷态》, 《物理评论快报》**121**, 257702（2018）。[8] L. Banszerus、B. Frohn、T. Fabian、S. Somanchi、A. Epping、M. M¨uller、D. Neumaier、K. Watanabe、T. Taniguchi、F. Libisch、B. Beschoten、F. Hassler 和 C. Stampfer, 《双层石墨烯量子点接触中的自旋极化电流》, arXiv:1911.13176 [cond-mat] (2019), arXiv:1911.13176 [cond-mat]。[9] L. Banszerus、B. Frohn、A. Epping、D. Neumaier、K. Watanabe、T. Taniguchi 和 C. Stampfer, 《双层石墨烯中栅极定义的电子-空穴双量子点》, 《纳米快报》**18**, 4785（2018）。[10] Y. Lee、A. Knothe、H. Overweg、M. Eich、C. Gold、A. Kurzmann、V. Klasovika、T. Taniguchi、K. Wantan- abe、V. Fal'ko、T. Ihn、K. Ensslin 和 P. Rickhaus, 《双层石墨烯量子点接触中由拓扑轨道磁矩导致的可调谷分裂》, 《物理评论快报》**124**, 126802（2020）。[11] S. M¨oller、L. Banszerus、A. Knothe、C. Steiner、E. Icking、S. Trellenkamp、F. Lentz、K. Watanabe、T. Taniguchi、L. I. Glazman、V. I. Fal'ko、C. Volk 和 C. Stampfer, 《探测双层石墨烯量子点中的双电子多重态》, 《物理评论快报》**127**, 256802（2021）。[12] C. Tong、R. Garreis、A. Knothe、M. Eich、A. Sacchi、K. Watanabe、T. Taniguchi、V. Fal'ko、T. Ihn、K. Ensslin 和 A. Kurzmann, 《石墨烯量子点中的可调谷分裂与双极性操作》, 《纳米快报》**21**, 1068 2021( )。[13] A. Knothe 和 V. Fal'ko, 《双层石墨烯双电子量子点中的四重态》, 《物理评论B》**101**, 235423（2020）。[14] T. L. M. Lane、A. Knothe 和 V. I. Fal'ko, 《双层石墨烯中通过栅极定义点接触的量子输运中的半金属特征》, 《物理评论B》**100**, 115427（2019）。[15] R. Garreis、A. Knothe、C. Tong、M. Eich、C. Gold、K. Watanabe、T. Taniguchi、V. Fal'ko、T. Ihn、K. Ensslin 和 A. Kurzmann, 《双层石墨烯中的壳层填充与三角翘曲》

《石墨烯量子点》，《物理评论快报》126，147703 2021( )。[16] A. Knothe、L. I. Glazman 和 V. I. Fal'ko，《双层石墨烯量子点单电子和双电子态的隧穿理论》，《新物理学杂志》24，043003（2022）。[17] S. Iwakiri、F. K. de Vries、E. Portol´es、G. Zheng、T. Taniguchi、K. Watanabe、T. Ihn 和 K. Ensslin，《双层石墨烯中的栅极定义电子干涉仪》，《纳米快报》22，6292（2022）。[18] D. Rodan-Legrain、Y. Cao、J. M. Park、S. C. de la Bar- rera、M. T. Randeria、K. Watanabe、T. Taniguchi 和 P. Jarillo-Herrero，《魔角石墨烯隧穿器件中的高度可调结与非局域约瑟夫森效应》，《自然·纳米技术》16，769（2021）。[19] F. K. de Vries、E. Portol´es、G. Zheng、T. Taniguchi、K. Watanabe、T. Ihn、K. Ensslin 和 P. Rickhaus，《魔角扭转双层石墨烯中的栅极定义约瑟夫森结》，《自然·纳米技术》16，760（2021）。[20] E. Portol´es、S. Iwakiri、G. Zheng、P. Rickhaus、T. Taniguchi、K. Watanabe、T. Ihn、K. Ensslin 和 F. K. de Vries，《扭转双层石墨烯中的可调单片超导量子干涉仪》（2022），arXiv:2201.13276 [cond-mat]。[21] J. Dauber、K. J. A. Reijnders、L. Banszerus、A. Epping、K. Watanabe、T. Taniguchi、M. I. Katsnelson、F. Has- sler 和 C. Stampfer，《利用阿哈罗诺夫-玻姆振荡探测石墨烯可调 pn 结中的克莱因隧穿》（2021），arXiv:2008.02556 [cond-mat]。[22] M. M. Elahi、Y. Zeng、C. R. Dean 和 A. W. Ghosh，《科尔比诺几何中石墨电子克莱因-反克莱因隧穿的直接证据》（ 2022 2210 10429 ），[ ] arXiv: . cond-mat .[23] V. V. Cheianov、V. Fal'ko 和 B. L. Altshuler，《石墨烯 p-n 结中的电子流聚焦与韦谢拉戈透镜》，《科学》10.1126/science.1138020（2007）。[24] C. P´eterfalvi、A. P´alyi 和 J. Cserti，《双层石墨烯圆形 $n\text{\ensuremath{-}}p$ 结中的电子流》，《物理评论B》80，075416（2009）。[25] H.-Y. Xu、L. Huang 和 Y.-C. Lai，《石墨烯中的相对论量子混沌》，《今日物理》74，44（2021）。[26] H.-Y. Xu、G.-L. Wang、L. Huang 和 Y.-C. Lai，《狄拉克电子光学中的混沌：相对论量子奇美拉的涌现》，《物理评论快报》120，124101（2018）。[27] M. Schneider 和 P. W. Brouwer，《栅极定义混沌量子点中石墨烯的共振散射》，《物理评论B》84，115440（2011）。[28] M. Schneider 和 P. W. Brouwer，《态密度作为探测石墨烯静电约束的手段》，《物理评论B》89，205437（2014）。[29] L. A. Ponomarenko、F. Schedin、M. I. Katsnelson、R. Yang、E. W. Hill、K. S. Novoselov 和 A. K. Geim，《石墨烯量子点中的混沌狄拉克台球》，《科学》320，356（2008）。[30] L. Huang 和 Y.-C. Lai，《相对论量子混沌展望》，《理论物理通讯》72，047601（2020）。[31] J. Heinl、M. Schneider 和 P. W. Brouwer，《栅极定义石墨烯量子点中阿哈罗诺夫-玻姆相位与贝里相位的相互作用》，《物理评论B》87，245426（2013）。[32] C.-D. Han、C.-Z. Wang、H.-Y. Xu、D. Huang 和 Y.-C. Lai，《可积与混沌腔体中半经典无质量狄拉克费米子的衰变》

104308 (2018).[33] Z. Ge、D. Wong、J. Lee、F. Joucken、E. A. Quezada- Lopez、S. Kahn、H.-Z. Tsai、T. Taniguchi、K. Watan- abe、F. Wang、A. Zettl、M. F. Crommie 和 J. J. Ve- lasco，《成像体育场形状的单层与双层石墨烯量子点中的量子干涉》，《纳米快报》**21**，8993 (2021).[34] B. Brun、V.-H. Nguyen、N. Moreau、S. Somanchi、K. Watanabe、T. Taniguchi、J.-C. Charlier、C. Stampfer 和 B. Hackens，《石墨烯耳语电子学：将耳语廊模式转化为电子输运》，《纳米快报》**22**，128 (2022).[35] F. Miao、S. Wijeratne、Y. Zhang、U. C. Coskun、W. Bao 和 C. N. Lau，《石墨烯量子台球中的相干输运》，《科学》**317**，1530 (2007).[36] J. H. Bardarson、M. Titov 和 P. W. Brouwer，《可积石墨烯量子点中电子的静电限域》，《物理评论快报》**102**，226803 2009( ).[37] J.-K. Schrepfer、S.-C. Chen、M.-H. Liu、K. Richter 和 M. Hentschel，《狄拉克费米子光学及单层与双层石墨烯腔中的定向发射》，《物理评论B》**104**，155436 (2021).[38] A. L. R. Barbosa、J. G. G. S. Ramos 和 A. Ferreira，《邻近效应诱导的自旋轨道耦合对石墨烯介观台球的影响》，Phys. Rev. B **103**，L081111 (2021).[39] M. I. Katsnelson、K. S. Novoselov 和 A. K. Geim，《石墨烯中的手性隧穿与克莱因悖论》，《自然·物理》**2**，620 (2006).[40] T. Tudorovskiy、K. J. A. Reijnders 和 M. I. Katsnelson，《单层与双层石墨烯中的手性隧穿》，《物理学文摘》**2012**，014010 (2012).[41] I. Snyman 和 C. W. J. Beenakker，《穿过石墨烯双层的弹道透射》，《物理评论B》**75**，045322 2007( ).[42] R. Du、M.-H. Liu、J. Mohrmann、F. Wu、R. Krupke、H. von L¨ohneysen、K. Richter 和 R. Danneau，《调控双层石墨烯中的反克莱因隧穿与克莱因隧穿》，《物理评论快报》**121**，127706 (2018).[43] D. A. Gradinar、H. Schomerus 和 V. I. Fal'ko，《应变双层石墨烯中利夫希茨跃迁附近的电导异常》，《物理评论B》**85**，165429 (2012).[44] J. Nilsson、A. H. Castro Neto、F. Guinea 和 N. M. R. Peres，《穿过有偏压石墨烯双层势垒的透射》，《物理评论B》**76**，165416 (2007).[45] T. Nakanishi、M. Koshino 和 T. Ando，《倏逝波在单层与双层石墨烯结中谷极化过程中的作用》，Journal of Physics: Con- ference Series **302**，012021 (2011).[46] S. P. Milovanovi´c、M. Ramezani Masir 和 F. M. Peeters，《带 pn 结的双层石墨烯霍尔条》，《应用物理学杂志》**114**，113706 (2013).[47] C.-S. Park，《带隙调控的双层石墨烯 n-p-n 结振荡电导》，《应用物理学杂志》**116**，033702 (2014).[48] T. Nakanishi、M. Koshino 和 T. Ando，《单层与双层石墨烯边界处的透射》，《物理评论B》**82**，125428 (2010).[49] M. Barbier、P. Vasilopoulos 和 F. M. Peeters，《双层石墨烯上的克罗尼希-彭尼模型：能谱及随势垒强度周期变化的透射》，《物理评论B》**82**，235408 (2010).[50] B. Van Duppen 和 F. M. Peeters，《双层石墨烯中的四带隧穿

, 《物理评论B》**98** ,

, 《物理评论B》**87** , 205427

(2013)。[51]J. Sa˜nudo 和 R. Lopez-Ruiz，双层石墨烯中的统计量与克莱因隧穿：倏逝波的影响（2014），arXiv:1408.5333 [cond-mat, physics:nlin, physics:quant-ph]。[52] M. H. Saley、A. E. Mouhafid、A. Jellal 和 A. Siari，AB 堆垛双层石墨烯中的三重势垒克莱因隧穿（2022），arXiv:2206.15446 [cond-mat]。[53] W.-Y. He、Z.-D. Chu 和 L. He，扭转双层石墨烯中的手性隧穿，《物理评论快报》111，066803（2013）。[54] J. Stigloher、M. Decker、H. S. K¨orner、K. Tanabe、T. Moriyama、T. Taniguchi、H. Hata、M. Madami、G. Gubbiotti、K. Kobayashi、T. Ono 和 C. H. Back，自旋波的斯涅尔定律，《物理评论快报》117，037204（2016）。[55] S. Ahn 和 S. Das Sarma，各向异性等离激元理论，《物理评论B》103，L041303（2021）。[56] G. Alagappan、X. W. Sun、P. Shum、M. B. Yu 和 D. den Engelsen，各向异性光子晶体的对称性，《美国光学学会杂志A辑》23，2002（2006）。[57] I. A. Khromova 和 L. A. Melnikov，各向异性光子晶体：广义平面波法与色散对称性，《光学通信》281，5458（2008）。[58] C. G. P´eterfalvi、L. Oroszl´any、C. J. Lambert 和 J. Cserti，双层石墨烯中的带内电子聚焦，《新物理学杂志》14，063028（2012）。[59] 请注意，$k_{\parallel}$ 在这里取代了常用的入射角正弦值作为动量变量 [67? ， 68] 因为在当前各向异性情形下，它是守恒动量；更多详情请参阅补充材料。[60] E. McCann 和 V. I. Fal'ko，双层石墨中的朗道能级简并与量子霍尔效应，《物理评论快报》96，086805（2006）。[61] E. McCann、D. S. Abergel 和 V. I. Fal'ko，双层石墨烯的低能电子能带结构，《欧洲物理学杂志专题辑》148，91（2007）。[62] E. McCann 和 M. Koshino，双层石墨烯的电子性质，《物理学进展报告》76，056503（2013）。[63] A. B. Kuzmenko、I. Crassee、D. van der Marel、P. Blake 和 K. S. Novoselov，利用红外光谱学测定双层石墨烯中栅极可调带隙和紧束缚参数，《物理评论B》80，165406（2009）。[64] R. Kraft、M.-H. Liu、P. B. Selvasundaram、S.-C. Chen、R. Krupke、K. Richter 和 R. Danneau，石墨烯超晶格腔中的反常回旋运动，《物理评论快报》125，217701（2020）。[65] 例如，文献37、58和71讨论了向平滑限制势的推广。进一步讨论请见结论。[66] 我们忽略谷间散射，并分别处理两个谷。鉴于当前双层石墨烯样品质量很高，不存在原子尺度缺陷或突变晶格终止，因此这一处理是合理的。 [3]。[67] M. V. Berry，《经典力学中的规则性与混沌：以圆形台球的三种变形为例》，《欧洲物理学杂志》2，91（1981）。[68] J. D. Meiss，体育场形台球的 Cantori，《混沌：非线性科学跨学科期刊》2，267（1992）。[69]Y.-F. Xiao、C.-L. Zou、Y. Li、C.-H. Dong、Z.-F. Han 和 Q. Gong，《非对称谐振腔及其在光学和光子学中的应用：综述》，《中国光电子学前沿》**3**，109（2010）。[70] J. Wiersig 和 M. Hentschel，《变形微盘中的定向光输出与超低损耗》，《物理评论快报》**100**，033901（2008）。[71] V. V. Cheianov 和 V. I. Fal'ko，《石墨烯中狄拉克电子的选择性透射及 n-p 结的弹道磁阻》，《物理评论B》**74**，041403（2006）。[72] A. Varlet、M. Mucha-Kruczy´nski、D. Bischoff、P. Si- monet、T. Taniguchi、K. Watanabe、V. Fal'ko、T. Ihn 和 K. Ensslin，《双层石墨烯中可调费米面拓扑与利夫希茨跃迁》，《合成金属：石墨烯科学与技术最新进展评论》，**210**，19（2015）。[73] A. Varlet、D. Bischoff、P. Simonet、K. Watanabe、T. Taniguchi、T. Ihn、K. Ensslin、M. Mucha-Kruczy´nski 和 V. I. Fal'ko，《揭示双层石墨烯中可调利夫希茨跃迁的量子霍尔液体反常序列》，《物理评论快报》**113**，116602（2014）。[74] C. Moulsdale、A. Knothe 和 V. Fal'ko，《利用应变和电偏压调控双层石墨烯中电子的拓扑磁矩》，《物理评论B》**101**，085118（2020）。[75] S. Morikawa、Z. Dou、S.-W. Wang、C. G. Smith、K. Watanabe、T. Taniguchi、S. Masubuchi、T. Machida 和 M. R. Connolly，《利用扫描门显微术成像石墨烯中的弹道载流子轨迹》，《应用物理学快报》**107**，243102（2015）。[76] S. Bhandari、M. Kreidel、A. Kelser、G.-H. Lee、K. Watan- abe、T. Taniguchi、P. Kim 和 R. M. Westervelt，《成像石墨烯中从准直接触流出的空穴》，《半导体科学与技术》**35**，09 02 2020LT ( )。[77] R. Steinacher、C. P¨oltl、T. Kr¨ahenmann、A. Hofmann、C. Reichl、W. Zwerger、W. Wegscheider、R. A. Jalabert、K. Ensslin、D. Weinmann 和 T. Ihn，《扫描门实验：从强侵入式探针到弱侵入式探针》，《物理评论B》**98**，075426（2018）。[78] X. Chen、G. Weick、D. Weinmann 和 R. A. Jalabert，《石墨烯纳米结构中的扫描门显微术》（2022），arXiv:2211.14004 [cond-mat]。[79] C. Gold、B. A. Br¨am、M. S. Ferguson、T. Kr¨ahenmann、A. Hofmann、R. Steinacher、K. R. Fratus、C. Reichl、W. Wegscheider、D. Weinmann、K. Ensslin 和 T. Ihn，《电子腔中局域态密度的成像特征》，《物理评论研究》**3**，L032005（2021）。[80] K. R. Fratus、C. Le Calonnec、R. Jalabert、G. Weick 和 D. Weinmann，《弹道电子腔扫描门显微成像中折叠分支的特征》，《SciPost物理学》**10**，069（2021）。[81] 此处，我们未考虑连接到腔体的实际通道中可能存在的态分布，例如文献3中的情况。将这一因素纳入考量，只需对我们的工作进行直接扩展，即可描述任何实际实验装置。[82] A. Knothe 和 V. Fal'ko，《小谷和贝里曲率对有带隙双层石墨烯中静电诱导量子线的影响》，《物理评论B》**98**，155435 2018( )。

补充材料

I. 台球动力学模拟

基于粒子-波对应关系，可以通过轨迹追踪来跟踪腔体中的弹道电子。对于具有硬壁的一般台球，甚至对于光学台球而言，这都是一项直接的任务：入射角和反射角相等，而下一个反射点由轨迹与台球边界的交点确定。然而，由于费米线的三角翘曲所导致的各向异性材料性质，这里的情况要复杂得多。

我们从四带哈密顿量开始，并在此重述：

$$H^{\xi}_{BLG} = \xi \begin{pmatrix} \xi U - \frac{1}{2}\Delta & v_3\pi & v_4\pi^\dagger & v\pi^\dagger \\ v_3\pi^\dagger & \xi U + \frac{1}{2}\Delta & v\pi & v_4\pi \\ v_4\pi & v\pi^\dagger & \xi U + \frac{1}{2}\Delta & \xi\gamma_1 \\ v\pi & v_4\pi^\dagger & \xi\gamma_1 & \xi U - \frac{1}{2}\Delta \end{pmatrix} \tag{S.1}$$

使用 $\pi = p_x + ip_y$ 和 $p = \hbar k$。轨迹追踪算法分为五个步骤，在实空间和动量空间之间切换：

A. 通过选择起点和第一个入射角 χ_{in}，设定初始条件。B. 在实空间中，找出轨迹与腔体边界的下一个交点（或散射点），参见图 S.2。读出入射角 χ_{in}（第一次迭代除外）以及边界取向角 θ。C. 根据 χ_{in}，找出入射的 $\boldsymbol{k}_{in}$、反射的 $\boldsymbol{k}_r$ 和透射的 $\boldsymbol{k}_t$ 波矢，以及相应的动量空间群速度，如图 S.2 所示。注意，$k_\perp$-$k_\parallel$ 坐标系必须旋转 θ，或者也可以旋转费米线 $-\theta$；关于边界取向角 θ，参见图 S.5 中 $\theta = 90°$ 的示例。确定反射角 χ_r。D. 通过波函数匹配计算反射率 R 和透射率 T。E. 使用 χ_r，从步骤 B 重新开始，即寻找下一个反射点。

下面将更详细地介绍该算法。

A. 设置初始条件

具有特定波矢 $\boldsymbol{k}$ 的电子，其群速度方向对应于该点处费米线的法线方向。由于费米线呈三角翘曲，

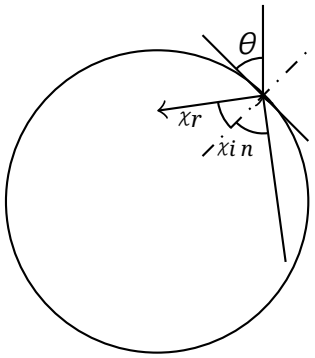


图 S.1. 取向角 θ 表示交点处边界切线与竖直方向之间的夹角，逆时针方向为正。

因此，双层石墨烯中电子源的发射特性表现为三个优选的群速度方向。设置初始条件时必须考虑这一特性，另见下文图 S.3。为此，我们按照极角 φ 均匀扫描费米线，并针对给定的费米能 E_F、四带哈密顿量 H^{ξ}_{BGL}和 4×4 单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，通过求解久期方程（公式（S.2））计算波矢 $\boldsymbol{k}$ 及其对应的群速度 $\boldsymbol{v}_{gr}$

$$\det\left(H^{\xi}_{BLG}(\boldsymbol{k}) - E_F\boldsymbol{I}\right) = 0. \tag{S.2}$$

随后，初始群速度的分布呈现出典型特征，具有三个优先传播方向。

B. 寻找下一个散射点

从最后一个反射点（或第一次迭代时的初始起点）出发，沿群速度方向（该方向由反射角 χ_r 唯一确定），即可在实空间中轻松计算出与几何腔体边界的下一个交点。该边界点处切线相对于竖直方向（“y-轴”）的夹角决定取向角 θ。该角以竖直方向为基准测量，数学意义上的正旋转方向为正，参见图 S.1。

C. 计算新的波矢

已知取向角 θ 后，我们将动量空间中的坐标系旋转 θ，使新的 $k_\parallel$ 轴与当前边界切线平行。利用 $k_{x(y)} = p_{x(y)}/\hbar$，参见式（S.1），新的

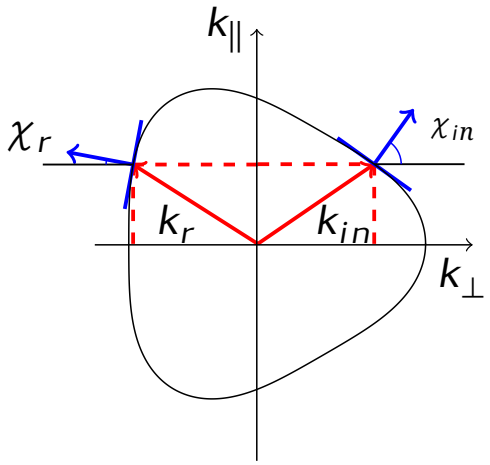


图 S.2. 费米线上的法向量对应群速度。群速度与 x 轴之间的夹角给出入射角，或者更确切地说，是反射角。由于费米线不对称，入射角不等于反射角。

$k_\perp$， $k_\parallel$ 方向于是可写为

$$k_\perp = k_x \cos\theta - k_y \sin\theta \tag{S.3}$$
$$k_\parallel = k_x \sin\theta + k_y \cos\theta. \tag{S.4}$$

平行于边界的波矢分量$k_{\parallel,\ in}$ 在散射过程中守恒，

$$k_{\parallel,in} = k_{\parallel,r} = k_{\parallel,t}. \tag{S.5}$$

这一条件如图 S.2 所示，并结合相应的公式（S.2），给出反射时的完整波矢 $\boldsymbol{k}_r$（考虑内费米线时）以及透射时的完整波矢 $\boldsymbol{k}_t$（考虑外费米线时）。由于散射进入价带，透射电子的行为类似空穴，且波矢与传播方向彼此相反。相应费米线在其与$\boldsymbol{k}_r$ ($\boldsymbol{k}_t$)的交点处的法向量给出群速度的方向，进而确定反射（透射）角。

此外，还可以找到复数解 $\boldsymbol{k}_{r,\ ev}$ 和 $\boldsymbol{k}_{t,\ ev}$，它们对应于倏逝波函数；这些波函数虽被纳入考虑，但不贡献通量。

D. 波函数匹配

为此，我们对所有情形 $\boldsymbol{k}_{in}$、 $\boldsymbol{k}_r$、 $\boldsymbol{k}_t$、$\boldsymbol{k}_{r,\ ev}$ 和 $\boldsymbol{k}_{t,\ ev}$ 求解公式（S.2），得到特征向量 Ψ以及波函数 ψ_{in}、ψ_r、 ψ_t、$\psi_{r,\ ev}$ 和 $\psi_{t,\ ev}$。匹配条件要求所有波函数在边界处取值相同，并可用于确定反射系数和透射系数， r 和 t。令$\Psi_r = r\psi_r$、$\Psi_t = t\psi_t$、 $\Psi_{r,\ ev} = r_{ev}\psi_{r,\ ev}$、 $\Psi_{t,\ ev} = t_{ev}\psi_{t,\ ev}$以及入射波的振幅等于 1，$\Psi_{in} = \psi_{in}$，波函数匹配条件可写为

$$\Psi_{in} + \Psi_r + \Psi_{r,ev} = \Psi_t + \Psi_{t,ev}. \tag{S.6}$$

计算透射率 T和反射率R 需要用到速度算符$v_\perp$的期望值，其表达式为

$$v_\perp = \frac{\partial H^\xi_{BLG}(\theta)}{\partial p_\perp} = \xi \begin{pmatrix} 0 & v_3\Theta & v_4\Theta^\dagger & v\Theta^\dagger \\ v_3\Theta^\dagger & 0 & v\Theta & v_4\Theta \\ v_4\Theta & v\Theta^\dagger & 0 & 0 \\ v\Theta & v_4\Theta^\dagger & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{S.7}$$

其中 $\Theta = \cos\theta - i\sin\theta$，且 $\Theta^\dagger = \cos\theta + i\sin\theta$。透射率 T 和反射率 R 分别为

$$T = \frac{\langle\Psi_t|v_\perp|\Psi_t\rangle}{\langle\Psi_{in}|\Psi_{in}\rangle} \tag{S.8}$$
$$R = \frac{\langle\Psi_r|v_\perp|\Psi_r\rangle}{\langle\Psi_{in}|\Psi_{in}\rangle}. \tag{S.9}$$

如果无法找到透射波的匹配波矢 $\boldsymbol{k}_t$ （因为外费米线上不存在交点），则假定发生全反射， $R = 1$。

E. 出射轨迹

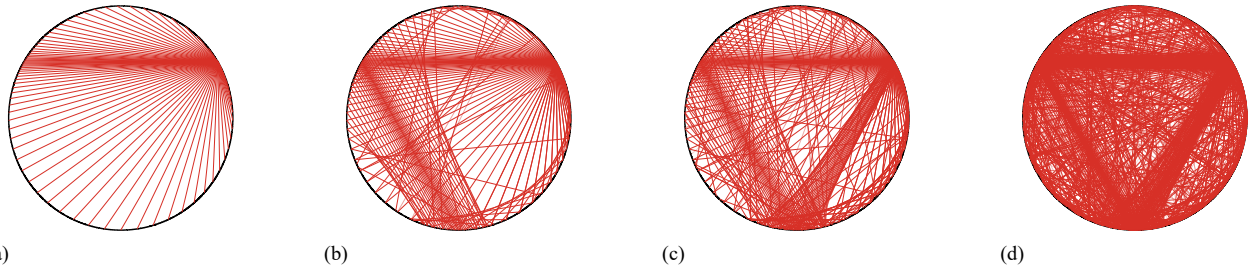
反射轨迹和透射轨迹的特性是步骤 C 的直接结果。反射角和透射角 χ_r 和 χ_t 分别通过相应的群速度定义，而群速度又由内费米线和外费米线的法向量给出。我们指出，在双层石墨烯台球中，光学中广为人知的传统反射和透射定律通常并不成立。

反射角 χ_r 决定反射轨迹的方向，因此也决定沿实空间中的轨迹前进时遇到的下一个散射点。随后算法从 B 处重新开始。

II. 进一步结果

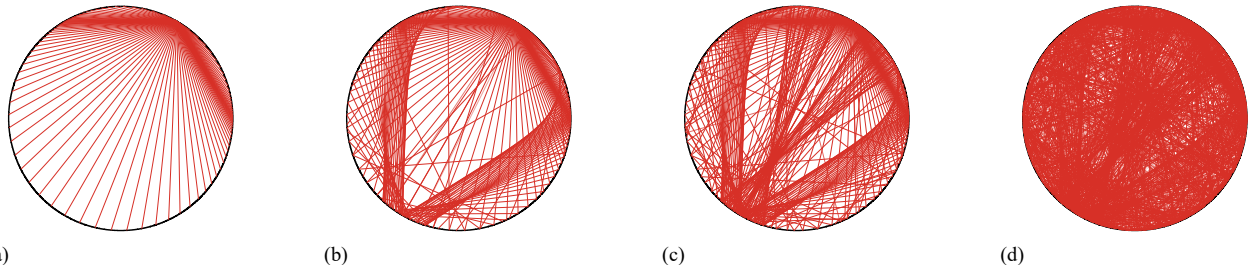
源特性和样本轨迹

我们通过图 S.3 和 S.4 展示了步骤 A–E 所描述的台球动力学。图 S.3(a) 和 S.4(a) 分别展示了置于 $s = 1/12$ 和 $s = 1/6$处的源所产生的发射。显然，正如主文图 2 左侧所示，源发射倾向于沿着对应于费米线平坦区域的方向，这与材料各向异性的影响一致。



(a) (b) (c) (d)

图 S.3. 源位于三角轨道的稳定不动点 $s = 1/12$ 时的源特性示意图。源发射具有各向异性，偏向于费米线扁平区域所对应的方向。图中展示了发射轨迹在第 (a) 次、(b) 第二次、(c) 第三次和 (d) 第十次反射时的演化。三角轨道的形成清晰可见，混沌粒子轨迹的演化亦然。



(a) (b) (c) (d)

图 S.4. 与图 S.3 相同，但源位于 $s = 1/6$。此处无法形成周期轨道，这一点在经过数次反射后的 (d) 图中清晰可见：轨迹均匀地遍布整个腔体。

在图 S.3 中，源位于稳定三角轨道上。追踪图 S.3(b)、(c) 和 (d) 中的轨迹在第二次、第三次和第十次反射后的情况，可以看出三角轨道确实稳定；但其他初始方向会因一般初始条件下产生的混沌轨迹而扰乱其形态。

位于稳定三角轨道之外的源主要产生混沌粒子轨迹。图 S.4 展示了这一现象。此时源位于 $s = 1/6$，经过数次反射后，混沌粒子动力学占据主导。

入射角和反射角

在传统的朴素几何光学中，反射和透射遵循反射定律（$\chi_{in} = \chi_r$）和斯涅尔定律。若费米线为圆形，电子光学也遵循同样的规律。

如果费米线关于k_y（或 $k_\parallel$）轴不对称，那么具有相同 k_y 分量的入射电子和反射电子的群速度就不可能呈镜面对称，参见图 S.1。由于本文所研究的三角翘曲双层石墨烯系统中的费米线具有三重对称性，入射角 χ_{in} 通常不等于反射角χ_r。

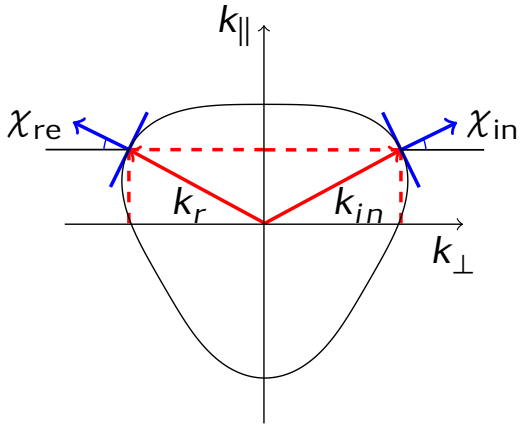


图 S.5. 对于某些角度 θ（此处为 $\theta = 90°$），费米线关于 $k_\parallel$ 轴对称，因此有 $\chi_{in} = \chi_r$。

然而，在特定的取向角 θ 下，费米线的对称性可以恢复，使得常规反射定律 $\chi_{in} = \chi_r$ 成立。图 S.5 展示了这一现象。对于 θ =30°，90°，150°，210°，270°，330°，可以观察到这种行为；这尤其适用于前文讨论的稳定三角轨道，以及

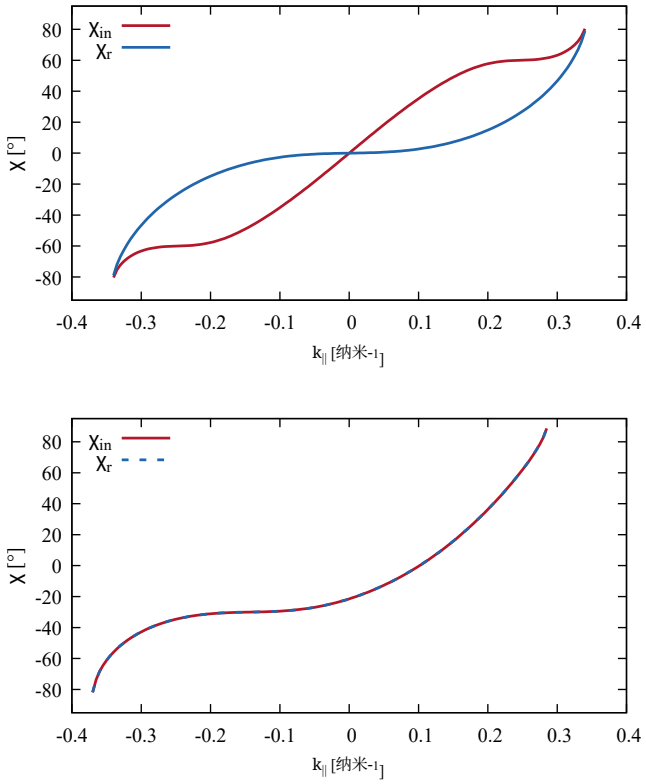


图 S.6. 对于给定的取向角 θ，入射角和反射角 χ_{in} 和 χ_r 与波矢的 y 分量 $k_{\|}$ 之间的关系。对于 $\theta = 0°$（上图），无法满足传统反射定律；而对于 $\theta = 90°$（下图），当费米线关于垂直的（$k_{\|}$）轴对称时，反射定律成立，参见图 S.5。

当沿相反方向行进稳定轨迹时出现的对应不稳定轨道。

这种行为的一个结果是，守恒量通常并非入射角。相反，沿边界的动量分量 $k_{\|}$ 承担了这一角色；$k_{\|}$，χ_{in}与 χ_r 之间存在唯一的对应关系，而这一关系取决于取向角 θ。图 S.6 展示了这一点。

通过带隙调节反射率 R

反射率 R 是双层石墨烯台球中另一项体现其丰富而独特性质的物理量。在对应的光学系统中，反射率 R 由各向同性介质的折射率比 n 决定；而对于双层石墨烯系统，其行为很容易调节，例如可通过改变带隙 Δ来实现。图 S.7 以极坐标图R（χ_{in}）展示了不同Δ 以及两种不同取向角 θ 下的反射率 R。为此，我们利用$k_{\|}$ 与 χ_{in} 之间的关系（见图 S.6），将 R（$k_{\|}$）表示为 R（χ_{in}），这与光学中的常见做法相同。

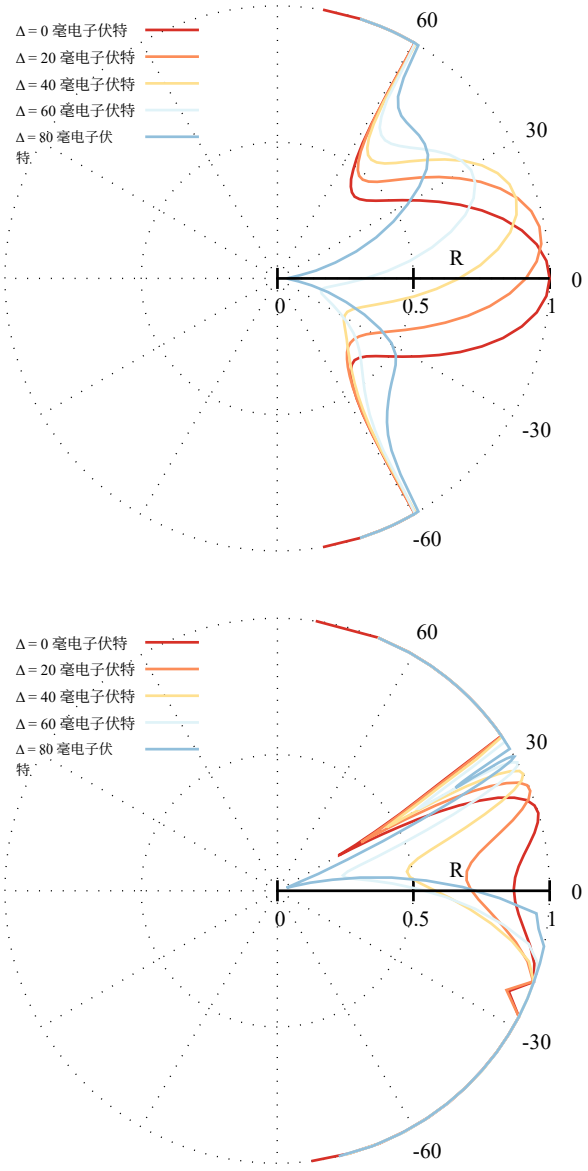


图 S.7. 反射系数 R 随入射角 χ_{in} 变化的极坐标图，参数分别为 Δ 和 $E_F = 100$ 毫电子伏特、$U = 145$ 毫电子伏特。上（下）图中的取向角 θ 为$\theta = 0°$（$30°$）。对于 $\theta = 30°$，三角轨道轨迹的反射率 R（$\chi_{in} = 30°$）对 Δ 的强烈敏感性显而易见。对于 $\theta = 0°$，当 $\chi_{in} = 0°$ 时会发生反克莱因隧穿。

对于 $\theta = 0°$ 和 $\Delta = 0$，反射率关于入射角呈现对称行为，$R(\chi_{in}) = R(-\chi_{in})$，并表现出反克莱因隧穿，$R(\chi_{in} = 0°) = 0$，参见图 S.7 上图。随着 Δ 增大以及取向角 θ变化，这种对称性会受到扰动。因此，某一入射角 χ_{in} 处的反射率可能随 Δ发生显著变化，例如对于 $\theta = 30°$，在 $\chi_{in} = 30°$ 附近，参见图 S.7 下图。请注意，这些正是

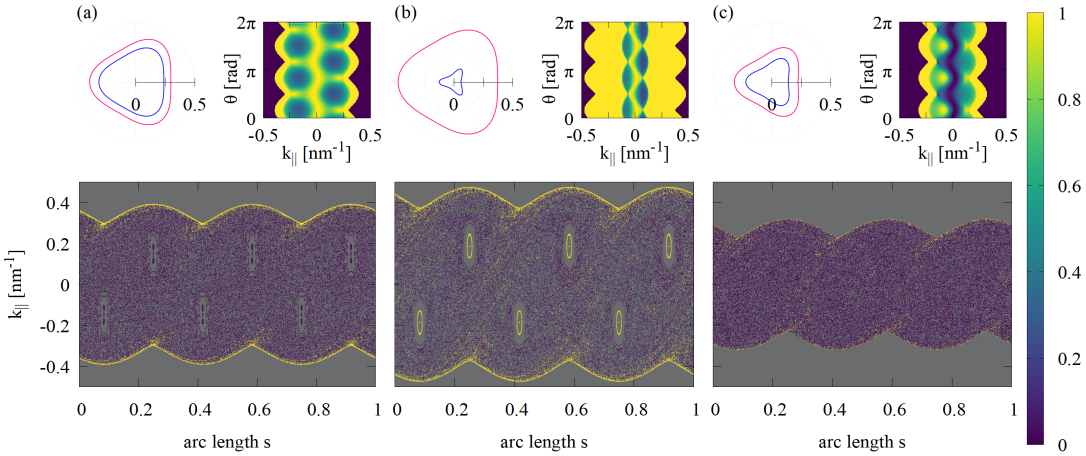


图 S.8. 与正文图 2 相同，但对应于 $\xi = -1$ （K^{-1} 谷）。

三角轨道的参数。其高度可调性可用于输运测量。

另一个谷 K^- 的结果

到目前为止，我们讨论并给出了 K^+ 谷（$\xi = 1$）的结果。在图 S.8 中，我们展示了另一个 K^- 谷（$\xi = -1$）的结果。将谷指数改为 $\xi = -1$后，费米线会旋转 180°，或关于 y 轴镜像对称。因此，结果与主文图 2 中的结果在定性上相同，只是 Poincar´é 截面图沿 $\Delta s/s_0$ =0.5 平移了。