旋转拓扑边缘孤子

SERGEY K. IVANOV,[1],* YAROSLAV V. KARTASHOV[2]

[1]ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques，巴塞罗那科学技术研究所，*08860*，卡斯特尔德费尔斯（巴塞罗那），西班牙[2]
光谱学研究所，俄罗斯科学院，*108840*，特罗伊茨克，莫斯科，俄罗斯 *通讯作者：*sergey.ivanov@icfo.eu*

收稿日期：XXXX年XX月；修订日期：X XXXX年X月X日；录用日期：XXXX年XX月；上线日期：XXXX年XX月（文档编号 XXXXX）；出版日期：XXXX年XX月

我们研究了旋转的苏-施里弗-希格波导阵列中拓扑边缘孤子的形成。非旋转拓扑阵列的线性谱具有拓扑带隙，其中存在两个边缘态。阵列的旋转会显著改变其谱，并可能使这些边缘态移出拓扑带隙。散焦非线性可抵消这一趋势，将这些模式移回拓扑带隙，使其获得拓扑边缘态典型的尾部结构。我们展示了旋转拓扑孤子丰富的分岔结构，并证明它们可以是稳定的。旋转谱中没有边缘态的拓扑平庸阵列，也会导致局域边缘态的出现，不过它们位于平庸半无限带隙中。由平庸线性边缘态分岔而来的旋转边缘孤子族同样存在；足够强的散焦非线性也能将它们推入拓扑带隙，从而定性地改变其尾部结构。

拓扑绝缘是物理学多个领域中都会遇到的一种基本现象。拓扑绝缘体已在不同平台中得到实现，从二聚化的 Su-Schrieffer-Heeger（SSH）晶格，到破坏时间反演对称性的系统、时间周期性弗洛凯系统、各种高阶绝缘体以及许多其他系统。迄今为止，绝大多数拓扑系统实验都是在线性区域中进行的（参见综述 [1,2]）。与此同时，在包括光子系统在内的一些物理系统中，随着激发振幅增大而产生的非线性效应可能会变得足够强，从而显著影响拓扑边缘态的传播动力学，或大幅改变拓扑相（参见综述 [3]）。

拓扑绝缘体中非线性最引人注目的表现之一，是其中可能形成拓扑边缘孤子。它们是独特的态，既具有拓扑保护，又呈现丰富多样的形态和相互作用。在光学领域，人们已预测 [4] 并观测到 [5] 弗洛凯系统中的拓扑类孤子边缘态 [6-8]。针对离散[9,10]和连续 [11-13] 螺旋波导阵列中的拓扑边缘态包络的理论也已建立。在 [14]中，研究者提出了圆形排列的拓扑孤子超晶体及其在微腔中的拓扑表征。人们还预测了狄拉克 [15]和布拉格拓扑孤子 [16,17]，以及二阶绝缘体中形态丰富多样的角态孤子[18,19]。此外，在采用直波导的 SSH 阵列 [20-25], 、拓扑三聚体阵列 [26], 以及截断光子石墨烯 [27] 中，也发现了拓扑孤子。

在本文中，我们采用具有代表性且符合实验实际的参数的 SSH 结构，研究阵列旋转如何影响拓扑边缘孤子的性质。我们强调，以往关于旋转对自持态性质及稳定性的影响仅在拓扑平庸结构中得到过探讨 [28-34]。本文表明，SSH 阵列谱的拓扑带隙中出现的边缘态会因阵列旋转而发生偏移，甚至可能移出该带隙。非旋转的平庸 SSH 阵列会因旋转而获得局域边缘态，但处于半无限带隙中。在聚焦效应下，旋转的拓扑与平庸阵列中由边缘态衍生的边缘孤子会经历丰富的分岔。在某些情况下，若态因旋转而移出带隙，则非线性可使其移回拓扑带隙，同时伴随孤子尾部的定性变化。因此，旋转与非线性的相互作用会定性改变边缘孤子的性质，并可诱导拓扑非平庸相。

我们研究光束在具有散焦立方非线性的介质中沿旋转（绕穿过其中心的轴旋转）的 SSH波导阵列的z轴传播。在这种情况下，无量纲场振幅 ψ 的演化由非线性薛定谔方程描述：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)+i\omega\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\mathcal{R}(x,y)\psi+|\psi|^2\psi \tag{1}$$

其中，$=[\quad\omega\ +\quad\omega\ ]\ _0\ \cos(\ )\ \sin(\ )/\ x\ X\ z\ Y\ z\ w$ 以及$[\cos(\ )\ y\ Y\ z=\quad\omega\ -_0\sin(\ )]/X\,z\,w\omega$ 是在以角频率 ω 与阵列共同旋转的坐标系中的横向坐标。在此处采用的无量纲单位中，x 和 y 以特征宽度 $_0\,10\,\mathrm{m}w=\ \mu$为尺度，而传播距离 z 以波长为 $800\ \mathrm{nm}\lambda=$、背景折射率为$1.5n=$ 时的衍射长度 $_{20}2\ /\ 1.14\ \mathrm{mm}nw\pi\quad\lambda\approx$ 为尺度。这里，无量纲强度 $\psi^{\,2}=1$对应于 $|\ |$

峰值强度 $2202/Inkw\psi=|\ \psi$，其中 $2n$是材料的非线性折射率。请注意，旋转阵列可采用飞秒激光写入技术制造 [7,25]，该技术也适用于具有散焦非线性的材料。函数 $(,)(,)$ $\mathcal{R}\quad=\sum_n\mathcal{Q}\quad-\ _n\quad xyxxy$描述由高斯波导 $\mathcal{Q}=\quad[-\ ^2+\ ^2\quad\sigma^2]\ \exp(\ )/\ xy$组成的“线性”SSH 阵列，其宽度为 $\sigma=0\ 5.$。势阱深度为 $20\max[($ $=\quad\quad 2\pi\quad\lambda\ \delta\quad=\quad/)/\ ]\quad 9\,p\,w\,n\,n$，对应于 $310n$ $\delta\ \approx\ ^-$。我们改变构成 SSH 阵列的二聚体中波导的胞内距离 $1l$和胞间距离 $2l$，使得 $_1+\ _2=2lld$，其中 $2d$为阵列常数。这会影响每个二聚体内以及二聚体之间波导的耦合强度。我们引入二聚化参数 $12(\ )/\Delta=\quad-\quad 2\ ll$，用于量化波导相对于阵列中所有波导间距均为 d的位置偏移。

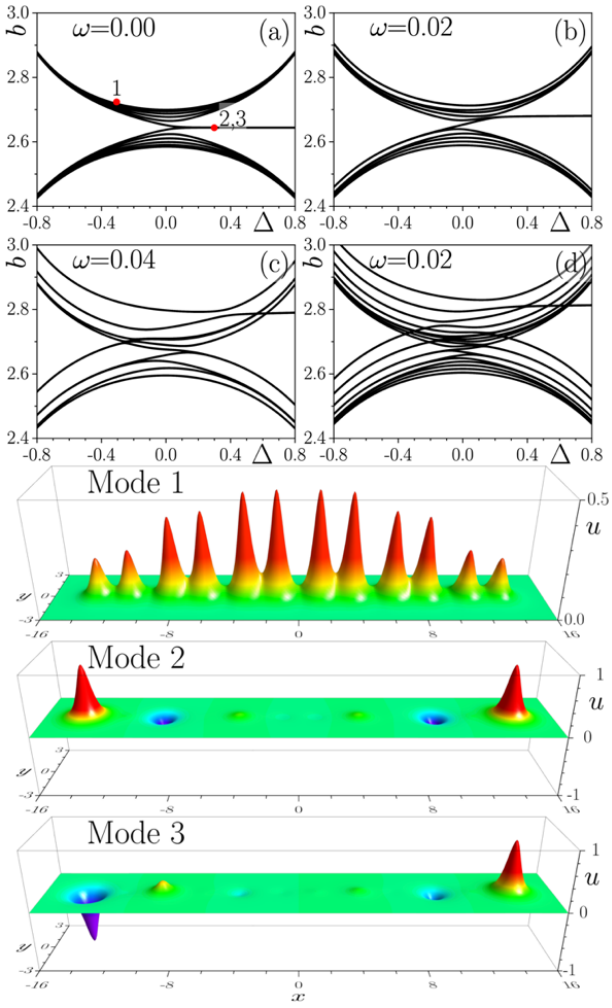

图 1. SSH 阵列线性本征模的传播常数b随二聚化参数Δ 的变化，不同旋转频率下 $\omega=0$ (a)、$\omega=0\ 02$ 。(b) 和 $\omega=0\ 04$ 。(c)对应含 12 根波导的阵列（$=6\ \ N$个二聚体），$\omega=0\ 02$ 。(d)对应含 24 根波导的阵列$(\ 12)N$ =。非拓扑、非旋转($\omega=0$)阵列中体模（模式 1）的示例，$\Delta=-0\ 3$ 。；以及拓扑、非旋转阵列中两个最外侧波导内具有两个同相峰值（模式 2）和两个反相峰值（模式 3）的边缘模示例，$\Delta=0\ 3$。。本征模对应于 (a) 中的红点。此处及下文中，

$=9\quad p$、。$d=$、。。

$2\ 4\quad\sigma=0\ 5$

我们首先在式（1）中忽略非线性项，并寻找线性模式：$(,,)$ $(,)\,ibzxyzuxye\psi\quad\quad=$，其中$b$为传播常数，而函数$u$描述模态轮廓。图 1(a)–(d) 展示了截断 SSH 阵列中，传播常数b随二聚化参数 Δ 变化的代表性关系，涵盖不同的旋转频率 $\quad$ 和晶胞数N。对于非旋转阵列，当 $\omega=0$ [图 (a)] 胞间波导间距小于胞内间距时，$\Delta>0$拓扑带隙中会出现一对拓扑边缘态，其中胞间波导间距为 $2l$，胞内间距为$1l$（拓扑不变量见补充材料1）。图 1 展示了平庸体模式（模式 1）和拓扑模式（模式 2 和 3）的示例。模式 2 表示相对两侧边缘态的同相组合，而模式 3 则表示它们的反相组合。值得注意的是，在拓扑模式中，相邻晶胞的相位反转，从而使尾部呈现特定的交错结构。阵列旋转会改变系统的谱 [图 1(b)、(c)]，导致能带展宽和拓扑能级上移。增加晶胞数N会导致类似的谱变换，因为在固定 ω [的情况下，较大结构中的科里奥利项 $\sim\omega$ 对边缘态的影响更强]图 1(d)。

b 对旋转频率 ω 的依赖关系（对应 $\Delta=0\ 3$ 和 $\Delta=-0\ 3$ ）如图2(a)、(b)所示。蓝点表示局域于阵列边缘的态。对于具有 $\Delta=0\ 3$ 的拓扑阵列，旋转会使边缘能级上移；当 ω 较大时，边缘能级会移出拓扑带隙。在旋转阵列中，本征模 u 变为复数，其在不同 ω 下的实部和虚部示例见图2上方两行。我们仅展示了 ≥0 x 区域内的分布。由于含有 ω 的项，方程(1)在变换 y y→− 下不保持不变，因此当 $\omega\neq0$ 时，模式关于 y 轴呈非对称分布。从图中可以看出，带隙中的模式保留了拓扑态所特有的尾部结构，而半无限带隙中的边缘模则具有同相尾部。平庸非旋转阵列（$\omega=0$ 和 $\Delta=-0\ 3$）不支持边缘态，但在旋转作用下，边缘态会在半无限带隙中出现 [图2(b)]。随着 ω 增大，离心效应使边缘态越来越局域于最外侧波导中（见模式4和5）。尽管平庸阵列中的模式6看似位于带隙中，但它并非真正的边缘态，因为该模式在最外侧边缘波导中的强度始终低于紧邻界面的波导中的强度。

现在，我们考虑在式（1）中存在散焦非线性时边缘孤子的形成。它们可写为$(,,)(,)\,ibzxyzuxye\psi\quad\quad=$的形式，其中$b$现在是一个独立参数，用于确定孤子形状和功率$^2U$ $dxdy=\iint\ \psi$。图3展示了不同阵列参数下的非线性族。图3中的灰色虚线表示线性体模的传播常数。我们追踪从线性边缘态分岔而来的非线性族（及其在谱的其他带隙中的“延续”）：因此，当孤子的传播常数趋近于线性边缘模的传播常数时，其功率U趋于零。在图3(a)中，当$\Delta=0\ 3.$, $\omega=0\ 02$.时，边缘孤子（见态1）从拓扑边缘态分岔而来，因此继承了尾部特有的拓扑结构。当b移入允许带时，会发生与体模的耦合，孤子在阵列中形成长尾。这种耦合导致多个$(\ )Ub$分支出现，其中两个功率最低的分支显示在拓扑带隙下方的带隙中（见补充材料1中的图1S，态1和态2）。请注意，与态1相比，这些态的尾部结构不同——场在相邻波导中改变符号，而不是像拓扑态1中那样每隔一个波导才改变符号。

在较高的旋转频率 $\omega=0.06$ 下，线性边缘态的传播常数移入半无限带隙，而体能带分裂为一组离散的分离能级，如虚线所示[图2(a)]。此时，无阈值边缘孤子从半无限带隙中具有同相尾部的边缘态分岔而来（见补充材料1中的态4）。可以看出，随着旋转频率 ω 升高，孤子族结构的复杂性也随之增加。在图3(b)中，我们省略了一些表示边缘态与体态组合的混合族，因为我们只关注最简单的局域于阵列边缘的孤子。从图3(b)中间一行可以看出，孤子分支2具有拓扑边缘态典型的尾部结构，而其他分支的边缘孤子则呈现不同的分布，令人联想到一维阵列中常规带隙孤子的分布（见补充材料1中的态3和态4）。因此可以得出结论：即使阵列旋转将模式推至拓扑带隙之外，散焦非线性仍能恢复模式的拓扑结构。

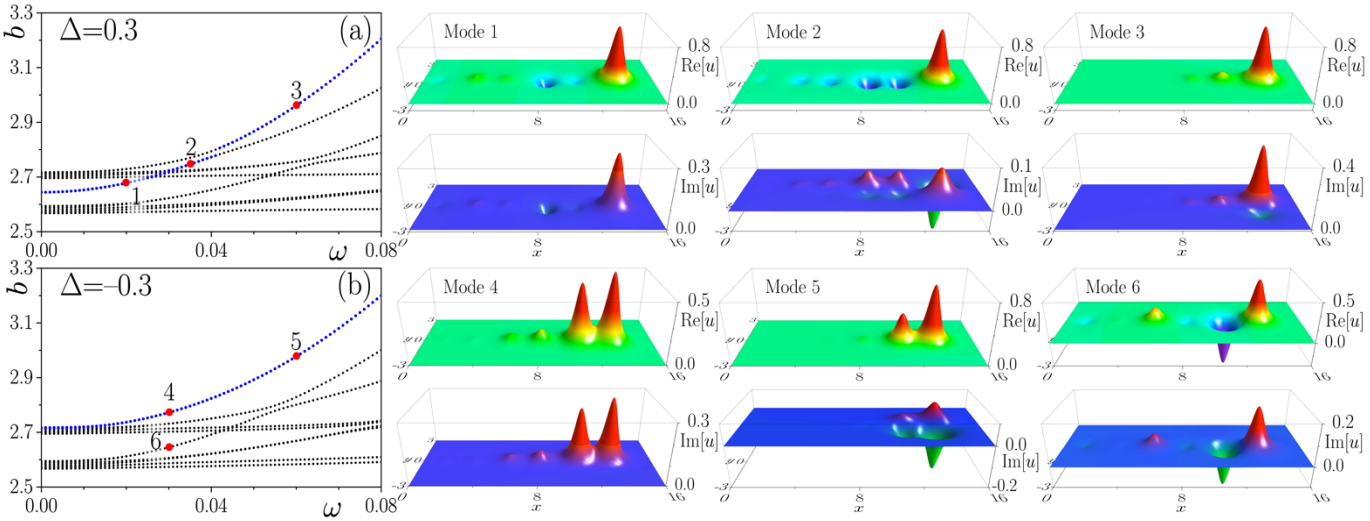

图2. 旋转 SSH 阵列中线性模式的传播常数 b 随旋转频率 ω 的变化关系，适用于不同的二聚化参数 $\Delta=0.3$。(a) 和 $\Delta=-0.3$。(b)。蓝点所示的分支对应于局域在阵列边缘的模式。面板(a)和(b)中红点分别对应的 $\Delta=0.3$。（上方两行）和 $\Delta=-0.3$。（下方两行）处模场的实部和虚部示例。实部和虚部采用不同的颜色标度 u。

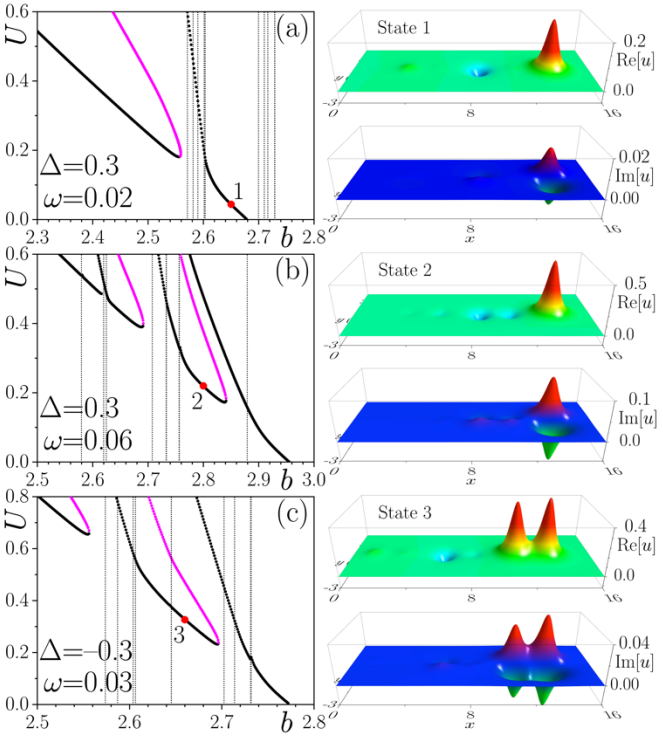

图3. 具有 $\Delta=0.3$ $\omega=0.02$ $\Delta=0.3$ $\omega=0.06$ $\Delta=-0.3$ 0 (a)、(b) 和 $\omega=0.03$ (c) 的旋转阵列中，由线性边缘模式分岔而来的孤子族。黑色分支稳定，洋红色分支不稳定。竖直虚线表示体态的传播常数。右列给出了对应于 (a)–(c) 各图中红点的孤子的场的实部和虚部示例。这些非线性态具有与拓扑边缘态相似的尾部结构。

此外，即使在非拓扑 SSH 阵列中，阵列旋转也会使边缘态出现在半无限带隙中。图3(c)展示了由此类非拓扑边缘态分岔而来的孤子族（见补充材料1中的态6）。在其他 b 区域中还发现了代表上述孤子族“延续”的多个不同分支，其中包括分支3；令人意外的是，该分支上的孤子呈现出类似拓扑模式的尾部。

图3中，黑色分支对应稳定孤子，品红色分支则对应不稳定孤子。我们通过模拟受扰孤子 $\psi|_{=}=1+\delta+\delta)_{z}uxyi$ 在方程（1）中的传播来分析稳定性，其中 $\mathrm{reim}\delta+\delta$ 为小幅噪声，其振幅在区间 $[-0.05,+0.05]$..内均匀分布。图4(a)展示了边缘孤子（包括前文讨论过的具有拓扑结构的态）的稳定传播；图4(b)则展示了一个不稳定态的演化示例，该态因不稳定性而呈现近乎周期性的振幅振荡。

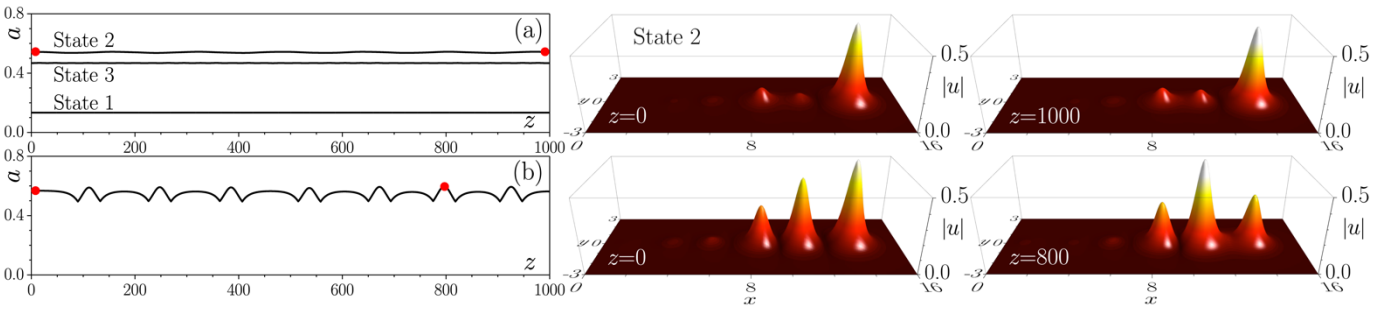

图4. 受扰动的稳定拓扑边缘孤子（上排）和不稳定边缘孤子（下排）的传播动力学。左列显示了（a）稳定非线性态1、2和3以及（b）图3(a)中的不稳定非线性态的峰值振幅a随距离的变化，其中$=25.b$（见补充材~~料1中的态2)~~ 。中列和右列分别显示了不同距离z处的稳定非线性态2（上排）和不稳定态（下排）的场模分布。各分布对应于面板(a)、(b)中的红点。

最后，我们展示了拓扑 SSH 阵列的旋转会显著改变其谱结构，使其从拓扑起源模式转变为由阵列旋转局域化的模式。散焦非线性使稳定边缘孤子得以形成，其内部结构强烈依赖于孤子功率和旋转频率。

资助：俄罗斯科学基金会（资助编号21-12-00096）；由西班牙科学与创新部/西班牙国家研究署/欧洲区域发展基金（MCIN/AEI/10.13039/501100011033/FEDER）资助的项目CEX2019-000910-S和PGC2018-097035-B-I00；以及Cellex基金会、Mir-Puig基金会、加泰罗尼亚自治区政府（CERCA研究中心网络）和AGUR（2021 SGR 01448）。

声明：作者声明不存在利益冲突。

数据可用性。本文所述结果的基础数据目前尚未公开，但可应合理请求向作者索取。

补充文档。支持性内容请参~~见补充材料1~~。

参考文献

1. L. Lu, J. D. Joannopoulos 和 M. Soljačić，《自然·光子学》8, 821–829 (2014)。2. T. Ozawa, H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg 和 I. Carusotto，《现代物理评论》91, 015006 (2019) 3. D. Smirnova, D. Leykam, Y. D. Chong 和 Y. Kivshar，《应用物理评论》7, 021306 2020( )。4. D. Leykam 和 Y. D. Chong，《物理评论快报》117, 143901 (2016)。5. S. Mukherjee 和 M. C. Rechtsman，《物理评论 X》11, 041057 (2021)。6. N. H. Lindner, G. Refael 和 V. Galitski，“半导体量子阱中的 Floquet拓扑绝缘体”，《自然·物理》7, 490 (2011)。7. M. C. Rechtsman, J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev 和 A. Szameit，《自然》496, 196 (2013)。8. L. J. Maczewsky, M. Heinrich, M. Kremer, S. K. Ivanov, M. Ehrhardt, F. Martinez, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, L. Torner, D. Bauer 和 A. Szameit，《科学》370, 701 (2020)。9. M. J. Ablowitz, C. W. Curtis 和 Y.-P. Ma，《物理评论 A》90, 023813 (2014)。10. M.J. Ablowitz 和 J. T. Cole，《物理评论 A》96, 043868 (2017)。11. S. Ivanov, V. V. Konotop, A. Szameit, L. Torner 和 Y. V. Kartashov，《ACS光子学》7, 735–745 (2020)。12. S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, A. Szameit, L. J. Maczewsky 和 V. V. Konotop，《光学快报》 45, 1459 (2020)。13. S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, M. Heinrich, A. Szameit, L. Torner 和 V. V. Konotop，《物理评论 A》103, 053507 (2021)。14. Z. Fan, D. N. Puzyrev 和 D. V. Skryabin，《通讯物理》5, 248 (2022)。15. D. A. Smirnova, L. A. Smirnov, D. Leykam 和 Y. S. Kivshar，《激光与光子学评论》13, 1900223 (2019)。16. W. Zhang, X. Chen, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, and F. Ye，《物理评 254103 (2019). 17. S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, L. J. Maczewsky, A. Szame Konotop，《光学快报》45, 2271 (2020). 18. M. S. Kirsch, Y. Zhang, M. Kre Maczewsky, S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, L. Torner, D. Bauer, A. Szameit, 《自然·物理》17 (2021). 19. Z. C. Hu, D. Bongiovanni, D. Jukic, E. Jajtić, S. Xu, R. Morandotti, H. Buljan, and Z. G. Chen，《光：科学与应用》10, 164 Jukić, N. Wang, D. Smirnova, L. Smirnov, L. Tang, D. Song, A. Szameit, D. Chen, and H. Buljan, Light Sci. Appl. 9, 147 (2020). 21. D. D. Solnyshkov, G. Malpuech，《物理评论快报》118, 023901 (2017). 22. N. Guo, S. Xia, N. Chen, and J. Yang，《光学快报》45, 6466 6469 2020– ( ). 23. S. Q. Xia, D. Smirnova, L. Smirnov, L. Q. Tang, D. H. Song, A. Szameit, D. Leykam, J. Xu Buljan, Light: Science & Applications 9, 147 (2020). 24. D. Bongiovanni, D Lunić, Y. Hu, D. H. Song, R. Morandotti, Z. G. Chen, and H. Buljan，《物理 184101 (2021). 25. A. A. Arkhipova, S. K. Ivanov, S. A. Zhuravitskii, N. N. S Dyakonov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, V. O. Kompanets, S. V. Chekalin, Y. V. N. Zadkov, Nanophotonics 11, 16 (2022). 26. Y. V. Kartashov, A. A. Arkhip Zhuravitskii, N. N. Skryabin, I. V. Dyakonov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, V. O Chekalin, L. Torner, and V. N. Zadkov，《物理评论快报》128, 093901 (202 Wang, Y. Zhang, Y. V. Kartashov, F. Li, H. Zhong, H. Guan, K. Gao, F. Li, Y. Commun. 11, 1902 (2020). 28. D. V. Skryabin, J. M. McSloy, and W. J. Firth 055602(R) (2002). 29. J. Cuevas, B. A. Malomed, and P. G. Kevrekidis, Phys (2007). 30. H. Sakaguchi and B. A. Malomed，《物理评论 A》75, 013609 (Sakaguchi and B. A. Malomed，《物理评论 A》79, 043606 (2009). 32. S. Ji 《物理评论 A》79, 041804 (2009). 33. X. Zhang, F. Ye, Y. V. Kartashov, V. A Chen，《光学快报》, 41, 4106 (2016). 34. C. Milián, Y. V. Kartashov, and L 快报》123, 133902 (2019).

带标题的参考文献。

1 L. Joannopoulos 和 M. Soljačić，“拓扑光子学”，《自然·光子学》8，821–829（2014）。2. T. Ozawa, H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg 和 I. Carusotto，“拓扑光子学”，《现代物理评论》91，015006（2019）3. D. Smirnova, D. Leykam, Y. D. Chong 和 Y. Kivshar，“非线性拓扑光子学”，《应用物理评论》7，021306（2020）。4. D. Leykam 和 Y. D. Chong，“非线性光子拓扑绝缘体中的边缘孤子”，《物理评论快报》117，143901（2016）。5. S. Mukherjee 和 M. C. Rechtsman，“非线性Floquet拓扑绝缘体中单向类孤子边缘态的观测”，《物理评论 X》11，041057（2021）。6. N. H. Lindner, G. Refael 和 V. Galitski，“半导体量子阱中的Floquet拓扑绝缘体”，《自然·物理》7，490（2011）。7. M. C. Rechtsman, J. M. Zeuner, Y. Plotnik, Y. Lumer, D. Podolsky, F. Dreisow, S. Nolte, M. Segev 和 A. Szameit，“光子Floquet拓扑绝缘体”，《自然》496，196（2013）。8. L. J. Maczewsky, M. Heinrich, M. Kremer, S. K. Ivanov, M. Ehrhardt, F. Martinez, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, L. Torner, D. Bauer 和 A. Szameit，“非线性诱导的光子拓扑绝缘体”，《科学》370，701（2020）。9. M. J. Ablowitz, C. W. Curtis 和 Y.-P. Ma，“光学蜂窝晶格中的线性和非线性行进边缘波”，《物理评论 A》90，023813（2014）。10. M.J. Ablowitz 和 J. T. Cole，“一般纵向驱动光子晶格的紧束缚方法：边缘态与孤子”，《物理评论 A》96，043868（2017）。11. S. Ivanov, V. V. Konotop, A. Szameit, L. Torner 和 Y. V. Kartashov，“Floquet绝缘体中的矢量拓扑边缘孤子”，《ACS光子学》7，735–745（2020）。12. S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, A. Szameit, L. J. Maczewsky 和 V. V. Konotop，“Lieb拓扑Floquet绝缘体中的边缘孤子”，《光学快报》45，1459（2020）。13. S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, M. Heinrich, A. Szameit, L. Torner 和 V. V. Konotop，“拓扑偶极Floquet孤子”，《物理评论 A》103，053507 2021（）。14. Z. Fan, D. N. Puzyrev 和 D. V. Skryabin，“拓扑孤子超晶体”，《通讯物理》5，248（2022）。15. D. A. Smirnova, L. A. Smirnov, D. Leykam 和 Y. S. Kivshar，“非线性狄拉克模型中的拓扑边缘态与带隙孤子”，《激光与光子学评论》13，1900223（2019）。16. W. Zhang, X. Chen, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop 和 F. Ye，“边缘态与拓扑布拉格孤子的耦合”，《物理评论快报》123，254103 2019（）。17. S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, L. J. Maczewsky, A. Szameit 和 V. V. Konotop，“拓扑Floquet绝缘体中的布拉格孤子”，《光学快报》45，2271（2020）。18. M. S. Kirsch, Y. Zhang, M. Kremer, L. J. Maczewsky, S. K. Ivanov, Y. V. Kartashov, L. Torner, D. Bauer, A. Szameit 和 M. Heinrich，“非线性二阶光子拓扑绝缘体”，《自然·物理》17（2021）。19. Z. C. Hu, D. Bongiovanni, D. Jukic, E. Jajtić, S. Q. Xia, D. H. Song, J. J. Xu, R. Morandotti, H. Buljan 和 Z. G. Chen，“非线性调控光子高阶连续谱中的拓扑束缚态”，《光：科学与应用》10，164（2021）。20. S. Xia, D. Jukić, N. Wang, D. Smirnova, L. Smirnov, L. Tang, D. Song, A. Szameit, D. Leykam, J. Xu, Z. Chen 和 H. Buljan，“光非平凡地耦合到缺陷：非线性与拓扑的相互作用”，《光：科学与应用》9，147（2020）。21. D. D. Solnyshkov, O. Bleu, B. Teklu 和 G. Malpuech，“玻色二聚体链中拓扑带隙孤子的手征性”，《物理评论快报》118，023901 2017（）。22. N. Guo, S. Xia, N. Wang, D. Song, Z. Chen 和 J. Yang，“Su–Schrieffer–Heeger光子晶格中的弱非线性拓扑带隙孤子”，《光学快报》45，6466–6469（2020）。23. S. Q. Xia, D. Jukic, N. Wang, D. Smirnova, L. Smirnov, L. Q. Tang, D. H. Song, A. Szameit, D. Leykam, J. Xu, Z. G. Chen, H. Buljan，“光非平凡地耦合到缺陷：非线性与拓扑的相互作用”，Light: Science & Applications 9, 147 (2020). 24. D. Bongiovanni, D. Jukić, Z. C. Hu, F. Lunić, Y. Hu, D. H. Song, R. Morandotti, Z. G. Chen, and H. Buljan，“非线性相互作用孤子晶格中动态涌现的拓扑相变”，《物理评论快报》127, 184101 (2021). 25. A. A. Arkhipova, S. K. Ivanov, S. A. Zhuravitskii, N. N. Skryabin, I. V. Dyakonov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, V. O. Kompanets, S. V. Chekalin, Y. V. Kartashov, and V. N. Zadkov，“观测到非线性控制的拓扑边缘态切换”，Nanophotonics 11, 16 (2022). 26. Y. V. Kartashov, A. A. Arkhipova, S. A. Zhuravitskii, N. N. Skryabin, I. V. Dyakonov, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik, V. O. Kompanets, S. V. Chekalin, L. Torner, and V. N. Zadkov，“观测拓扑三聚体阵列中的边缘孤子”，《物理评论快报》128, 093901 (2022). 27. Z. Zhang, R. Wang, Y. Zhang, Y. V. Kartashov, F. Li, H. Zhong, H. Guan, K. Gao, F. Li, Y. Zhang, M. Xiao，“光子石墨烯中的边缘孤子”，Nat. Commun. 11, 1902 (2020). 28. D. V. Skryabin, J. M. McSloy, and W. J. Firth，“哈密顿系统中螺旋孤波的稳定性”，Phys. Rev. E 66, 055602(R) (2002). 29. J. Cuevas, B. A. Malomed, and P. G. Kevrekidis，“旋转晶格中的二维离散孤子”，Phys. Rev. E 76, 046608 (2007). 30. H. Sakaguchi and B. A. Malomed，“旋转光学晶格中的二维物质波孤子”，《物理评论 A》75, 013609 (2007). 31. H. Sakaguchi and B. A. Malomed，“旋转光学晶格中的孤立涡旋与带隙孤子”，《物理评论 A》79, 043606 (2009). 32. S. Jia and J. W. Fleischer，“旋转波导阵列中的非线性光传播”，《物理评论 A》79, 041804 (2009). 33. X. Zhang, F. Ye, Y. V. Kartashov, V. A. Vysloukh, and X. Chen，“旋转波导阵列支持的局域波”，《光学快报》，41, 4106 (2016). 34. C. Milián, Y. V. Kartashov, and L. Torner，“强扭曲波导阵列中的稳健超短光弹”，《物理评论快报》123, 133902 2019( ).