arXiv:2302.00479v1 [math.HO] 31 Jan 2023

异常消去解的刻画

Satvik Saha[1*]、Sohom Gupta[2],Sayan Dutta[1] 和 Sourin Chatterjee[1]

[1]数学与统计系，印度科学教育与研究院加尔各答分院，印度。[2]物理科学系，印度科学教育与研究院加尔各答分院，印度。

*通讯作者。电子邮件：ss19ms154@iiserkol.ac.in；贡献作者：sg19ms141@iiserkol.ac.in；sd19ms148@iiserkol.ac.in；sc19ms170@iiserkol.ac.in；

摘要

分数的异常消去是一种数学上不严谨的方法：通过消去分子和分母中的相同数字，却能正确地约简分数。尽管这种方法看似 *accidentally* 有效，但异常消去这一性质与分母的位数以及分数所采用的基数密切相关。以往的研究大多围绕三位数解或其特定性质展开。本文旨在探讨满足消去性质（记作 $\boldsymbol{P^*_{\ell;\,k}}$）的数的结构，并估算给定基数表示下可能的解的总数。具体而言，本文详细研究了一般情况下解的数量的 *saturation* 以及 $\boldsymbol{p^n}$ 基数（其中 $\boldsymbol{p}$ 为素数）所具有的有趣性质。

关键词：异常消去，丢番图方程

1 引言

对一些有趣数学问题的热忱，引领我们关注到一个非常特

2 异常消去解的刻画

殊的问题：找出所有满足以下性质的奇数位整数 $a_1 \neq 0$（所有 都是数字， $a_1 \neq 0$）。

$$[a_1 a_2 \ldots a_k] \cdot [a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_{2k+1}] = [a_1 a_2 \ldots a_{k+1}] \cdot [a_{k+2} a_{k+2} \ldots a_{2k+1}]$$

一个简单的例子是数字 164，它具有如 $1 \times 64 = 16 \times 4$ 所示的性质。类似地， $24 \times 996 = 249 \times 96$ 表明 24996 也符合我们的问题要求。现在的问题是，能否找到一种生成所有这类数字的方法？暴力算法总是可行，但仅止于此始终令人不满足——证明是数学爱好者的追求。这促使我们查阅现有文献；尽管相关文献不多，却蕴藏着丰富的信息。在前人工作的基础上，我们得出了一些有趣的结果，值得写入本文。本文采用这样的结构：让普通读者能够了解所有精彩结果，而经验丰富的读者则可以转到附录，领略相关证明。所有证明都运用初等数论方法，因此本文面向本科生及更高阶段的读者。

形如 $[ab]_B/[bc]_B$ 的分数的异常消去性质（其中分子和分母是基数为 B 的两位整数）已得到广泛研究 [2]。寻找此类分数相当于求解以下关于 a 的丢番图方程： b， c。

$$(aB + b)c = a(bB + c).$$

我们先简要介绍文献中的一些有趣结果，以便读者了解最新进展。

除 $a = b = c$ 或 $b = c = 0$ 等平凡解外，已有研究证明 b 是最大的数位。据此，变换 $(a,\ b,\ c) \mapsto (b-c,\ b,\ b-a)$ 是非平凡解集合 [5] 上的一个对合。Ekhad [6] 研究了更一般的异常消去性质，其中允许从分子和分母的任意位置消去一个数位。固定基数、分母以及消去过程中所用数位的索引后，寻找所有解的问题便化为一个线性丢番图方程，可轻松求解。

现在我们可以深入探讨本文的工作了。为避免日后产生混淆，我们先花些时间梳理一下文中常用的记号。所有其他符号均取其通常含义。

记号。
设 $B \geq 2$ 为整数进制， x_1、 x_2、...、 x_k 为整数数位，且每个数位均为 $0 \leq x_i < B$。那么，我们将它们的拼接记作

$$x = [x_1 x_2 \ldots x_k] \equiv \sum_{i=1}^{k} x_i B^{k-i}.$$

异常消去解的刻画 3

在我们的问题中，我们考虑以 B 为基数的自然数 $N_{\ell;\,k}$，其中 ℓ、$k \geq 1$。其数位记作

$$N_{\ell;\,k} = [a_1 a_2 \ldots a_\ell\, b\, c_1 c_2 \ldots c_k] = [abc],$$

含数位块

$$a = [a_1 a_2 \ldots a_\ell], \qquad c = [c_1 c_2 \ldots c_k].$$

注意，我们可以写成

$$N_{\ell;\,k} = aB^{k+1} + bB^k + c.$$

定义 1 我们称数 $N_{\ell;\,k}$ 具有性质 $P_{\ell;\,k}$，或称其为$P_{\ell;\,k}$的一个解，如果

$$[a_1 a_2 \ldots a_\ell\, b] \times [c_1 c_2 \ldots c_k] = [a_1 a_2 \ldots a_\ell] \times [b\, c_1 c_2 \ldots c_k].$$

等价地，

$$\frac{[a_1 a_2 \ldots a_\ell\, \not{b}]}{[\not{b} c_1 c_2 \ldots c_k]} = \frac{[a_1 a_2 \ldots a_\ell]}{[c_1 c_2 \ldots c_k]}$$

这意味着数位“b”可以从左侧分数中异常消去，使其*correctly* 化简为右侧方程。这也可以表示为齐次丢番图方程

$$(aB + b)c = a(bB^k + c), \qquad \frac{1}{a} + \frac{B-1}{b} = \frac{B^k}{c}.$$

在特殊情形 $\ell = k$ 下，我们将 $N_{k;\,k} \equiv N_k$ 和 $P_{k;\,k} \equiv P_k$ 简记为。

约定。

对于任意基数 B，$P_{\ell;\,k}$ 都存在某些类型的解。这些解具有以下形式。

- $[dd \ldots dd]$。
- $[a_1 a_2 \ldots a_k\, 0\, 0 \ldots 0]$（特别地，$a$、$b$、$c = 0$ 中任意两个。）

我们将这些称为平凡解。在我们的讨论中，我们忽略这类解，并聚焦于情形 $\ell = k$，也就是说，我们要寻找 P_k 问题的非平凡解。

定义 2 我们称 $N_{\ell;\,k}$ 具有性质 $P^*_{\ell;\,k}$，如果它非平凡地具有 $P_{\ell;\,k}$，即 a、b、$c = 0$ 中任意两个都不相等，并且并非所有数位都是 $a_i = b = c_i$。

2 解的特征。

第一个重要的观察是，可以通过将中心数位 $P_{\ell;\,k}$ 替换为数字 $P_{\ell+1;\,k+1}$，非常简单地将其扩展为 b 的解[bbb]的解。这是 [7]中所述泵引理的一个特例。

4 异常消去解的刻画

命题 1 *Let B be an arbitrary integer base, and let*

$$N = [a_1 a_2 \ldots a_\ell \, b \, c_1 c_2 \ldots c_k], \qquad N^+ = [a_1 a_2 \ldots a_\ell \, b \, b \, b \, c_1 c_2 \ldots c_k].$$

Then N has property $P_{\ell;\,k}$ if and only if N^+ has property $P_{\ell+1;\,k+1}$. We say that，扩展 *N^+ is an* *of N.*

Proof 数 N^+ 具有性质 $P_{\ell+1;\,k+1}$ 当且仅当

$$(aB^2 + bB + b)(bB^k + c) = (aB + b)(bB^{k+1} + bB^k + c),$$

展开并消去后可化简为

$$(aB + b)cB = aB(bB^k + c), \qquad (aB + b)c = a(bB^k + c),$$

这恰好表明 N 具有性质 $P_{\ell;\,k}$。 □

这表明，在特定基数 B 下， P_k^* 的解的数量不会随着 k 的增加而减少。一个自然的问题是，这类解的数量是否会变得任意大；我们能否不断构造出 P_k 问题的新解，而不只是旧解的扩展？为回答这个问题，我们将证明，任何此类解的数字都必须遵循非常严格的规则，最终得到以下结论。

定理 2 *Let B be an arbitrary integer base and let N_k have property P_k^*. Then, the digits must satisfy the following constraints.*

1. $a_1 < B/2$。 *2.* $b = c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} > c_k > 1$。 *3.* 最大公约数$(c_k, B) > 1$。 *4.* 最大公约数$(a_k - b, B) > 1$，若 $a_k \neq b$。

定理 2 的证明将结合推论12以及引理14、15、17来完成，这些结果将在后文证明。

一个直接推论是， P_k^* 的所有解都具有如下形式

$$[a_1 a_2 \ldots a_k \, b \, b \ldots b c_k].$$

这意味着数位块的形式如下

$$a = \frac{bM}{B} + \frac{bc_k B^{k-1}}{bB - (B-1)c_k}, \qquad c = bM + c_k, \qquad M = \frac{B^k - B}{B - 1}.$$

定理2保证，当基数 B 为偶数时，代入 $b = B-1$，$c_k = B-2$ 对应于 P_k^*的最大解，

$$a = \frac{1}{2}B^k - 1, \qquad b = B - 1, \qquad c = B^k - 2.$$

例如，在基数 $B = 10$ 中，P_3^* 的最大解是 4999998。

定理 2 还给出了一个简洁的判据，用于判断解 P_k^* 是否存在。

Th理 3 *The P_k^* problem admits solutions if and only if the base B is composit e.*

Proof 若基数 $B = mn$ 对于 $m,\ n > 1$，则 $N_k = [abc]$ 满足

$$(a, b, c) = (mB^{k-1} - 1, B - 1, B^k - n)$$

具有性质 P_k^*。反之，若基数 $B = p$ 对于素数 p，则任意解 N_k 的P_k^*都必须满足 $0 < c_k < p$ 且 $\gcd(c_k,\ p) > 1$，根据命题 2，这同时成立，矛盾。□

3 解的饱和。

在第 2 节中，我们已经证明，P_k^* 的每个候选解都可以完全用两个单个数字 b 和 c_k表示。这里，我们称 (b, c_k) 生成这样的 P_k^*解。图 1 通过这类生成元组，展示了 P_{101}^* 在基数 $B = 126$ 下的解空间。因此，寻找解就等同于检验数对 (b, c_k)，其中 $1 < c_k < b < B$。重要的是，这个搜索空间仅取决于 B，而非 k (！) 因此，对于给定的基数 B，P_k^* 的解的数量达到饱和。

命题 4 *Let B be an arbitrary integer base. There are at most*

$$\frac{(B-2)(B-3)}{2}$$

solutions of P_k^*, for any $k \geq 1$.

Proof 对于每个 b，都有 $2 \leq c_k < b$，即有 $b-2$ 种选择。令 $3 \leq b < B$，则总共得到 $1 + 2 + \cdots + (B-3) = (B-2)(B-3)/2$ 个候选元组（b, c_k）。□

上述估计显然非常粗略：我们只用到了关系$b = c_{i<k} > c_k$。事实上，数值证据表明可以得到精确得多的界。为说明这一点，对于基数 $B = 10$，P_k^* 的全部解都是以下各项的扩展（按出现顺序排列，且 k递增）。

$$164,\ 265,\ 195,\ 498,\ 21775,\ 24996,\ 1249992,\ 340277776.$$

接下来，我们将说明何时能够得到基数 B 对应的全部解。

定理 5 *Let B be an arbitrary integer base. Then, the number of solutions of P_k^* become constant beyond*

$$k = \max\{5,\ 2\log_2(B-1) + 2\}.$$

6 异常消去解的刻画

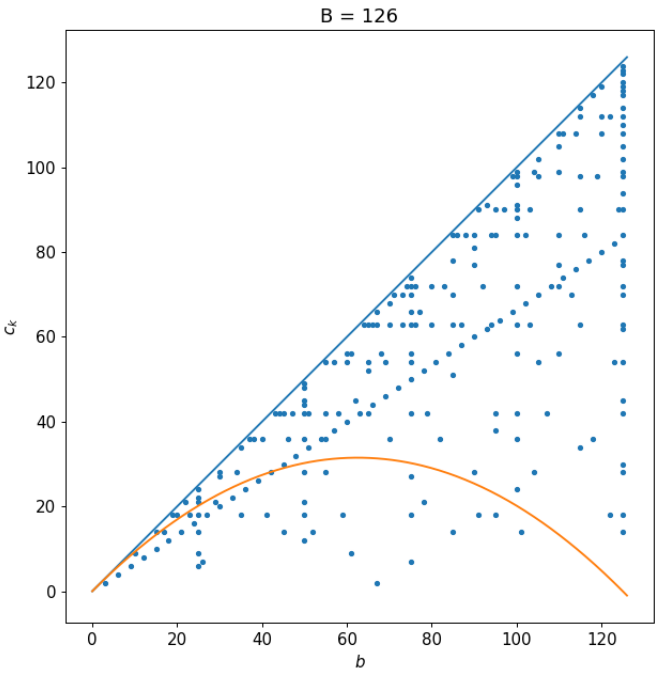

图 1 $P^*_{\ell;\,k}$ 关于 $B = 126$、 $k = 101$的生成元组，以蓝点表示。橙色曲线上方的点生成 P^*_k 关于候选块 $a \geq B^{k-1}$的解。橙色曲线下方的点生成 $P^*_{\ell;\,k}$ 关于 $\ell < k$的解。

这意味着，对于 k 超过上述饱和点之后， P^*_k 的所有解都只是旧解的扩展。定理 5 的证明见附录 D。

的界在定理5 中有所描述；特别是，对于某个基族，该界尤其差。当 $B = p^n$ 对于素数 p， $n \geq 2$时， P^*_k的解在第一步就达到饱和， $k = 1$。

定理

6 *Let $B = p^n$ for prime p. Then all solutions of P^*_k are extensions of, those of P^*_1.*

Proof 根据引理 18，任意一个 N_k 关于 P^*_k 都具有如下形式

$$N_k = [a_1 b \ldots b\, b\, b \ldots b c_k].$$

命题 1 可使用 $k - 1$ 次，将其化简为解 $[a_1 b c_k]$ 的 P^*_1。

□

例如， P_k^* 在基数 $B = 3^2$ 下的唯一解具有如下形式

$$14\ldots43, \quad 28\ldots86.$$

4 讨论。

我们的主要目标是刻画异常消去问题 P_k^* 的所有解，但这似乎仍遥不可及。不过，我们已成功刻画了某些特殊基数下的解，并对其数量给出了初步界限。我们的主要发现总结如下。

- 对于素数基数， P_k^* 没有解。
- 对于素数幂基数 p^n ， P_k^* 的唯一解是 P_1^* 的解的扩展。

- 对于合数基数 B ，解的数量至少与 B 的非平凡因子数量一样多。这些解的形式为 $[abc]$ ，其中

$$(a, b, c) = (mB^{k-1} - 1, B - 1, B^k - n)$$

当 $B = mn$、 $m,\ n > 1$、 $M = (B^k - B)/(B - 1)$。

从数值解中观察到了一些非常有趣且奇特的现象；虽然本文尚未证明这些现象，但未来仍有很大的拓展空间。

- 假设在基数 B下，$(2k + 1)$ 位数字中没有新的非平凡解（扩展除外）。我们观察到，$(2k + 3)$ 位数字中也不会出现新的解。换言之，只要解的数量尚未饱和，就会持续增加。

- 目前，对于给定基数 B 下可能出现的解的总数，我们有一个二次上界，但观察到的解的数量远小于该上界。

- 讨论的一个有趣结果是，合数基数必定存在形式为 $(a,\ B - 1,\ c)$ 的解。因此，若找不到这种形式的解，就能保证该基数为素数。虽然目前的搜索空间与蛮力法所能达到的相当，但若能找到一些与 b 和 c_k 相关的更好思路，或许就能大幅加快素性测试。

致谢。 作者谨此感谢 Soumya Bhattacharya 教授仔细审阅稿件，并就本文主题进行了许多有益的讨论。

附录 A 平凡解。

本节重点讨论 $P_{\ell;\,k}$ 的平凡解。我们提出了几条判据，可根据候选解的一部分数字，快速判断其是否为平凡解。

8 异常消去解的刻画

引理 7 *Let $N_{\ell;\,k}$ have property $P_{\ell;\,k}$. Then,*

1. $a \mid bc$。 *2.*
$b \mid ac\ (B-1)$ 。
3. $c \mid abB^k$。

Proof 利用 N 具有 $P_{\ell;\,k}$ 性质这一事实，我们有

$$(aB+b)c = a(bB^k + c).$$

将 a、b、c依次移至等式一侧并合并，可将其改写为$a(bB^k - (B-1)c) = bc,$
$b(aB^k - c) = ac(B-1) \qquad c(a(B-1)+b) = abB^k,$

由此可得所需的规则。 □

引理 8 *Let $N_{\ell;\,k}$ have property $P_{\ell;\,k}$. If any one of a,*
b $c = 0$ *then at least one ,,, of the others is also* 0 *i.e. N is a trivial solution for the $P_{\ell;\,k}$ problem.*

Proof 这由引理7中的整除条件得出。 □

引理 9 *Let N_k have property P_k and at least one of the following hold.*

1. $a = c$. *2.* 对所有 $1 \le i \le k,$
$a_i = b$ 。*3.* 对所有 $1 \le i \le k,$
$c_i = b$ 。
Then, all the digits $a_i = c_i = b$, i.e. N is a trivial solution for the P_k problem.

Proof 令 N 具有性质 P_k，于是 $(aB+b)c = a(bB^k + c)$。记

$$I = [\underbrace{11\ldots1}_{k}] = \frac{B^k - 1}{B-1}.$$

1. 代入 $a = c,$

$$a = \frac{B^k - 1}{B-1} \cdot b, \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i B^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} bB^{k-i}.$$

根据基数 B 中表示的唯一性，每个 $a_i = b$。 2. 令 $a = bI,$

$$c = \frac{abB^k}{a(B-1)+b} = \frac{b^2 I B^k}{b(I(B-1)+1)} = bI.$$

3. 令 $c = bI$,

$$a = \frac{bc}{bB^k - (B-1)c} = \frac{b^2 I}{bB^k - b(B-1)I} = \frac{b^2 I}{b(B^k - (B^k - 1))} = bI.$$

□

附录B 不均匀数位块。

尽管本文主要讨论 P_k^* 的解，但为了证明定理 $P_{\ell;\,k}^*$问题，我们有必要稍作迂回，考察更一般的 2。

引理 10 *Let B be an arbitrary integer base and let $N_{\ell;\,k}$ have property $P_{\ell;\,k}$. If $c_k = 0$, then the number*

$$N^- = [a_1 a_2 \dots a_\ell\, b\, c_1 c_2 \dots c_{k-1}]$$

has property $P_{\ell;\,k-1}$

Proof 记

$$c' = [c_1 c_2 \dots c_{k-1}], \qquad c = c'B + c_k = c'B.$$

由于 N 具有性质 $P_{\ell;\,k}$，我们有 $(aB+b)c = a(bB^k + c)$，因此

$$(aB+b)c'B = a(bB^k + c'B) \qquad (aB+b)c' = a(bB^{k-1} + c'),$$

这恰好说明 N^- 具有性质 $P_{\ell;\,k-1}$。 □

引理

11 *Let B be an arbitrary integer base and let $N_{\ell;\,k}$ have property $P_{\ell;\,k}^*$. ,, Then $\ell \le k$. In other words there are no solutions of $P_{\ell;\,k}^*$ when $\ell > k$.*

*Proof*若 $N_{\ell;\,k}$具有性质 $P_{\ell;\,k}^*$，则 $a, b, c > 0$,

$$(aB+b)c = a(bB^k + c), \qquad a(bB^k + c - Bc) = bc.$$

令 $bB^k + c - Bc = bc/a = d$，这是一个正整数。假设 $1 \le d < B$，即 d 是以 B 为基数的单个数字。展开 $bB^k + c = cB + d$，得

$$bB^k + c_1 B^{k-1} + \dots + c_{k-1}B + c_k = c_1 B^k + c_2 B^{k-1} + \dots + c_k B + d.$$

根据以 B 为基数的整数表示的唯一性，我们令系数 $b = c_1, c_1 = c_2, \dots, c_{k-1} = c_k$, $c_k = d$相等；具体而言， $b = d$。因此， $a = bc/d = c$，故根据引理 9，该解是平凡解。

这意味着，要使 N 成为非平凡解，我们必须有 $d \ge B$。现在，$0 < b < B$ 和 $0 < c < B^k$，因此

$$a = \frac{bc}{d} < \frac{B \cdot B^k}{B} = B^k.$$

这表明 a 最多可以有 k 位数字，因此 $\ell \le k$。 □

推论 12 *If N_k has property P_k^*, then $c_k \neq 0$.*

Proof 如果 $c_k = 0$, 我们可以看到

$$N^- = [a_1 a_2 \dots a_k\, b\, c_1 c_2 \dots c_{k-1}]$$

具有性质 $P_{k;\,k-1}$, 因此根据引理 11, 它必定是一个平凡解。此外, 它必须在以下意义上是平凡的: 其中一个 a、b、$c = 0$; 否则, 引理中的 $a < B^{k-1}$ 将与 a 是一个 k 位数的数这一事实矛盾。因此, 原数 N_k 也是一个平凡解。 □

推论 13 *If N_k has property $P^*_{\ell;\,k}$, then the integer $d = bc/a \geq B$.*

引理 11 中使用的方法可用于对解 a 的前导块 N_k给出更精确的上界。

引理 14 *Let B be an arbitrary integer base and let N_k have property P_k^*. Then, $a < B^k/2$. As a result, the leading digit $a_1 < B/2$.*

*Proof*沿用引理 11证明中的思路, 假设 N_k 具有性质 P_k^*。那么 $a, b, c > 0$,

$$(aB + b)c = a(bB^k + c), \qquad a(bB^k + c - Bc) = bc,$$

并且 $bB^k + c - Bc = bc/a = d$ 是一个正整数。我们已经看到, 当 $1 \leq d < B$时, 解 N 是平凡的。此外, 当 $d \geq 2B - 2$时, 注意到

$$a = \frac{bc}{d} \leq \frac{(B-1)\cdot(B^k-1)}{2B-2} = \frac{1}{2}(B^k - 1).$$

现在考察剩余的情形 $B \leq d < 2B-2$。令 $d' = d - B$, 则有 $0 \leq d' < B-2$, 即 d' 是基数为 B中的一个单个数字。展开 $bB^k + c = cB + d$可得

$$\begin{aligned} bB^k + c_1 B^{k-1} + \dots + c_{k-1}B + c_k \\ = c_1 B^k + c_2 B^{k-1} + \dots + c_k B + (B + d'). \end{aligned}$$

这意味着 $B \mid c_k - d'$; 但 $0 \leq |c_k - d'| < B$ 迫使 $c_k = d'$。由于 $k \geq 1$, 我们可以减去 $c_k = d'$ 并除以 B, 得到

$$\begin{aligned} bB^{k-1} + c_1 B^{k-2} + \dots + c_{k-1} \\ = c_1 B^{k-1} + c_2 B^{k-2} + \dots + c_{k-1}B + d' + 1. \end{aligned} \qquad (\star)$$

由于 $d' < B - 2$, 数 $d' + 1 < B - 1$ 是单个数字, 因此我们可以比较系数, 得到 $b = c_1, c_1 = c_2, \dots, c_{k-2} = c_{k-1}, c_{k-1} = d' + 1$, 从而 $b = c_1 = \dots = c_{k-1} = d' + 1$。换言之, $c+1$ 的所有数字恰好都是 $d' + 1$, 因此如果我们设

$$I = [1_1 1_2 \dots 1_k] = \frac{B^k - 1}{B - 1},$$

那么 $c+1=(d'+1)I$。于是,

$$a=\frac{bc}{d}=\frac{(d'+1)[(d'+1)I-1]}{B+d'}<\frac{d'\cdot[(B-1)I-1]}{2d'}=\frac{1}{2}[(B-1)I-1]$$

因此，令 $(B-1)I=B^k-1$，得到

$$a<\frac{1}{2}(B^k-2).$$

□

附录 C 尾块。

本节讨论解 N_k 的尾块 c，它几乎可以完全用中心块 b 来描述。

引理 15 *Let B be an arbitrary integer base and let N_k have property P_k^*. Then, the digits in the last block satisfy $c_k<c_{i<k}=b$. In other words all solutions of P_k^*, look like*

$$N=[a_1a_2\dots a_k\,b\,bb\dots bc_k]$$

*Proof*如前所述，假设 N_k 具有性质 P_k^*。那么 a, b, $c>0$,

$$(aB+b)c=a(bB^k+c),\qquad a(bB^k+c-Bc)=bc,$$

且 $bB^k+c-Bc=bc/a=d$ 是一个正整数。由推论 13，可得 $d\geq B$。由于

$$d=\frac{bc}{a}<\frac{(B-1)\cdot B^k}{B^{k-1}}<(B-1)B<B^2,$$

我们有 $d=qB+d'$，其中 $0<q$, $d'<B$; $q>0$ 这一事实由 $d\geq B$得出。展开 $bB^k+c=cB+d$，可得

$$\begin{aligned}bB^k+c_1B^{k-1}+\dots+c_{k-1}B+c_k\\=c_1B^k+c_2B^{k-1}+\dots+c_kB+(qB+d').\end{aligned}\qquad(\star)$$

我们有 $B\mid c_k-d'$，从而推出 $c_k=d'$。

考虑情形 $k=1$，此时我们的方程变为 $bB+c=cB+d$，因此 $bB+d'=d'B+qB+d'$，所以 $bB=(d'+q)B$。于是， $b=d'+q>d'=c$，如所需。

N现在令 $k\geq 2$。从等式（$\star$）两边减去 $c_k=d'$，再除以 B，得到 es

$$\begin{aligned}bB^{k-1}+c_1B^{k-2}+\dots+c_{k-2}B+c_{k-1}\\=c_1B^{k-1}+c_2B^{k-2}+\dots+c_{k-1}B+d'+q.\end{aligned}$$

注意到 $2\leq d'+q\leq 2B-2<2B$，因此将 $d'+q=q'B+r$ 展开为某个 $0\leq r<B$, 且 $q'=0$, 1。若 $q'=0$，则

$$\begin{aligned}bB^{k-1}+c_1B^{k-2}+\dots+c_{k-2}B+c_{k-1}\\=c_1B^{k-1}+c_2B^{k-2}+\dots+c_{k-1}B+r,\end{aligned}$$

因此，我们可以比较系数，得到 $b=c_1$, $c_1=c_2$ $c_{k-2}=c_{k-1}$ $c_{k-1}=$ $r=d'+q=c_k+q>c_k$ $b=c_{i<k}>c_k$,...,,. 换句话说，所有的 .

否则， $q' = 1$，并且

$$bB^{k-1} + c_1 B^{k-2} + \cdots + c_{k-2}B + c_{k-1} = c_1 B^{k-1} + c_2 B^{k-2} + \cdots + (c_{k-1}+1)B + r.$$

这给出 $B \mid c_{k-1} - r$，因此无论如何都有 $c_{k-1} = r$。现在，若 $r = B-1$，则我们会得到 $d' + q = q'B + r = 2B - 1$；这与 $q' + d \le 2B - 2$ 矛盾。因此， $r \le B-2$，所以 $c_{k-1} + 1 = r + 1 \le B - 1$ 是基数 B 中的一个单个数字。比较各项系数，得 $b = c_1$，

$c_1 = c_2$ $c_{k-2} = c_{k-1} = r$ $c_k = d' = q'B + r - q = B - q + r <, \ldots, 。$ 此外，( ) ( )。因此，

$r = c_{k-1}$ $b = c_{i<k} > c_k$ □

我们再次得到 。

Cor论推 16 *Let B be an arbitrary integer base and let N_k have property P_k^*. The n,*

$$a = \frac{bM}{B} + \frac{bc_k B^{k-1}}{bB - (B-1)c_k}, \qquad c = bM + c_k, \qquad M = \frac{B^k - B}{B-1}.$$

Since $bM/B = b(B^{k-1} - 1)/(B-1)$ is an integer for $k > 1$, so is $bc_k B^{k-1}/($ $bB - (B-1)c_k)$。

Proof 回想一下，

$$(aB + b)c = a(bB^k + c), \qquad a(bB^k + c - Bc) = bc.$$

由于 $b = c_{i<k}$ 根据引理 15，我们可以写成

$$c = [bb \ldots b\, c_k] = bB^{k-1} + \cdots + bB + c_k = b\frac{B^k - B}{B-1} + c_k = bM + c_k.$$

因此，

$$a = \frac{bc}{bB^k - (B-1)c} = \frac{b(bM + c_k)}{bB^k - (b(B^k - B) + (B-1)c_k)} = \frac{b(bM + c_k)}{bB - (B-1)c_k}.$$

现在，注意到

$$(bB - (B-1)c_k)\frac{M}{B} = bM - (B^{k-1} - 1)c_k = bM + c_k - B^{k-1}c_k.$$

因此，

$$\frac{bM + c_k}{bB - (B-1)c_k} = \frac{M}{B} + \frac{c_k B^{k-1}}{bB - (B-1)c_k},$$

由此

$$a = \frac{b(bM + c_k)}{bB - (B-1)c_k} = \frac{bM}{B} + \frac{bc_k B^{k-1}}{bB - (B-1)c_k}.$$

□

关于末位数位的以下观察 c_k 完成了定理2的证明。这需要深入研究基数 B的质因数分解。

引理 17 *Let B be an arbitrary integer base and let N_k have property P_k^*.* ,最大公约数(c_k *i.e. the last digit c_k must share some factor $p > 1$ with B.*) ,,,(,) *Furthermore if $a_k \neq b$ then gcd $a_k - b$ $B > 1$.*

*Proof*假设 N_k 具有性质 P_k^*。那么 $a, b, c > 0$, $c_k > 0$, 并且

$$(aB + b)c = a(bB^k + c), \qquad (ac - abB^{k-1})B = (a - b)c.$$

这给出 $B \mid (a - b)c$; 记

$$a' = [a_1 a_2 \dots a_{k-1}], \qquad a = a'B + a_k,$$
$$c' = [c_1 c_2 \dots c_{k-1}], \qquad c = c'B + c_k,$$

我们有 $B \mid (a - b)(c'B + c_k)$, 因此 $B \mid (a - b)c_k = (a'B + a_k - b)c_k$, 故 $B \mid (a_k - b)c_k$。设

$$B = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

为 B 的素因数分解, 其中每个 $\alpha_i \geq 1$。于是, 对于 B 的每个素因数 p_i, $p_i^{\alpha_i} \mid (a_k - b)c_k$。设 β_i 是满足 $p_i^{\beta_i} \mid c_k$ 的最大整数。于是, 我们必须有 $p_i^{\alpha_i - \beta_i} \mid a_k - b$; 否则, 整除 $(a_k - b)c_k$ 的 p_i 的最大幂将严格小于 $\beta_i + (\alpha_i - \beta_i) = \alpha_i$, 这就产生了矛盾。

显然, 不可能所有 $\beta_i \geq \alpha_i$ 都成立; 若如此, 则所有 $p_i^{\alpha_i} \mid c_k$ 都成立, 从而乘积为 $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} = B \mid c_k$, 但 $0 < c_k < B$, 矛盾。因此, 必定存在某个

$\beta_j < \alpha_j$ $a_k - b$ B $\geq$, 与之对应的 $p^{\alpha_j - \beta_j} \mid a_k - b$, 故 $p_j > 1$
gcd(,)。这就证明了引理的第二部分。

为证明第一部分, 我们对块大小 k使用归纳法。考虑 $k = 1$, 其中 $a_k = a$, $c_k = c$, 并假设所有 $\beta_i = 0$。这迫使所有 $p_i^{\alpha_i - \beta_i} = p_i^{\alpha_i} \mid a - b$, 因此它们的乘积 $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} = B \mid a - b$。但是 $0 \leq |a - b| < B$, 从而 $a - b = 0$。由引理9, 这给出一个平凡解, 矛盾。因此, 必定存在某个$\beta_{j'} > 0$, 因此 $\gcd(c, B) \geq p_j^{\beta'_j} > 1$。

接下来, 假设该命题对某个 $k \geq 1$ 成立, 并令

$$N = [a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1}\, b\, c_1 c_2 \dots c_{k+1}] = [a\, b\, c]$$

具有性质 P_{k+1}^*。那么, a, b, c, > 0, $c_{k+1} > 0$, 且 $B \mid (a_{k+1} - b)c_{k+1}$。同样地, 若所有 $\beta_i = 0$, 那么我们必有所有 $p_i^{\alpha_i - \beta_i} = p_i^{\alpha_i} \mid a_{k+1} - b$, 因此它们的乘积 $B \mid a_{k+1} - b$。由于 $0 \leq |a_{k+1} - b| < B$, 我们有 $a_{k+1} - b = 0$。但根据引理 $b = c_1 > c_{k+1}$, 我们还有15。由命题1, 去掉数位a_{k+1}, $c_1 = b$ 后得到的数, 即

$$N' = [a_1 a_2 \dots a_k\, b\, c_2 \dots c_{k+1}],$$

必须满足 P_k^*性质（每个块都保持非零, 因此 $b > c_{k+1}$并非所有数字都相同）。应用归纳假设, 我们有 $\gcd(c_{k+1}, B) > 1$。

因此, 根据归纳法, 我们的命题对所有 $k \geq 1$都成立。 □

附录D 饱和点的估计。

现在我们可以使用推论 5 来证明定理 16。

*Proof of Theorem 5*假设这些数字 b, c_k根据引理 15, 生成了该 P_k^*问题的一个解; 进一步假设它们确实 *not* 为该 P_{k-1}^* 问题生成了一个解。那么, 推论 16 保证:

$$\frac{bc_k B^{k-1}}{bB - (B-1)c_k}$$

14 异常消去解的刻画

is 一个整数。由于 b, c_k 没有为该 P_{k-1}^* 问题生成解, r

$$\frac{bc_kB^{k-2}}{bB-(B-1)c_k}$$

不是整数，或者第一块 a' 太小，即该块

$$a'=\frac{b(B^{k-2}-1)}{B-1}+\frac{bc_kB^{k-2}}{bB-(B-1)c_k}<B^{k-2}.$$

第一种情况下的整除条件足以得出 k 与 B 和 bc_k的素因子之间的某些关系。第二种情况下对 k 的界只需通过直接代数运算即可得到。

考虑前一种情况，并将其因式分解为

$$B=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r},\qquad bc_k=p_1^{\beta_1}\cdots p_r^{\beta_r},$$

其中 $p_1,\ldots,p_r$ 为素数，且每个 $\alpha_i,\beta_i\geq 0$。那么，分母

$$bB-(B-1)c_k\mid bc_kB^{k-1}=p_1^{\alpha_1(k-1)+\beta_1}\cdots p_r^{\alpha_r(k-1)+\beta_r},$$

因此，其素因数分解中不可能包含除 $p_1,\ldots,p_r$ 之外的任何素数。记

$$bB-(B-1)c_k=p_1^{\gamma_1}\cdots p_r^{\gamma_r}$$

对 $\gamma_i\geq 0$ 成立。另一方面，分母

$$bB-(B-1)c_k\nmid bc_kB^{k-2}=p_1^{\alpha_1(k-2)+\beta_1}\cdots p_r^{\alpha_r(k-2)+\beta_r}.$$

这意味着必定存在某个 j，使得 $\gamma_j>\alpha_j(k-2)+\beta_j$。此外，$\gamma_j\leq\alpha_j(k-1)+\beta_j$，从而满足第一个整除条件，确保 $\alpha_j\neq 0$。现在，

$$(B-1)^2\geq(B-1)(B-c_k)\geq bB-(B-1)c_k\geq p_j^{\gamma_j}>p_j^{\alpha_j(k-2)+\beta_j},$$

由此得到

$$(B-1)^2>p_j^{\alpha_j(k-2)+\beta_j}\geq 2^{\alpha_j(k-2)},\qquad 2\log_2(B-1)>\alpha_j(k-2).$$

由于 $\alpha_j\geq 1$,

$$k-2<\frac{2\log_2(B-1)}{\alpha_j}\leq 2\log_2(B-1),\qquad k<2\log_2(B-1)+2.$$

接下来，我们考虑后一种情况，即 P_{k-1}^* 问题的块 a' 太小，因此

$$a'=\frac{b(B^{k-2}-1)}{B-1}+\frac{bc_kB^{k-2}}{bB-(B-1)c_k}<B^{k-2}.$$

Ho然而，对于 P_k^* 问题，相应的块 a 大小恰当，因此

$$a=\frac{b(B^{k-1}-1)}{B-1}+\frac{bc_kB^{k-1}}{bB-(B-1)c_k}\geq B^{k-1}.$$

收集 B 的各次幂，得到方程组

$$B^{k-2}\left[\frac{b^2B}{(B-1)(bB-(B-1)c_k)}-1\right]<\frac{b}{B-1},$$
$$B^{k-1}\left[\frac{b^2B}{(B-1)(bB-(B-1)c_k)}-1\right]\geq\frac{b}{B-1}.$$

注意，根据第二个方程，方括号中的项必须为正。因此，我们可以将第一个方程除以该项，得到估计

$$\begin{aligned} B^{k-2} &< \frac{b}{B-1}\cdot\frac{(B-1)(bB-(B-1)c_k)}{b^2B-(B-1)(bB-(B-1)c_k)} \\ &= \frac{b^2B-(B-1)bc_k}{b^2B-bB(B-1)+(B-1)^2c_k} \\ &\le b^2B-(B-1)bc_k \\ &\le (B-1)^3. \end{aligned}$$

因此，

$$(B-1)^{k-2} < B^{k-2} \le (B-1)^3, \qquad k-2<3, \qquad k<5.$$

这意味着，随着 k 的增加，不会出现新的解，

$$k \ge 2\log_2(B-1)+2, \quad \text{and} \quad k \ge 5,$$

也就是说，

$$k \ge \max\{5,\, 2\log_2(B-1)+2\}.$$

□

附录 E 素数幂。

在本节中，我们考察 P_k^* 的解，其中基数为 $B=p^n$，且 p 为素数，$n\ge 2$。

引理 18 *Let $B=p^n$ where p is prime, $n>1$. If N_k has property P_k^* for $k\ge 1$, then $a_{i\ne 1}=b=c_{i\ne k}$. Furthermore $p\mid c_k$.*

*Proof*设 N_k 具有性质 P_k^*，其中 $k>1$。那么，a，b，$c>0$ 由引理 8，末位数字 $c_k>0$，并且 $p\mid c_k$ 利用引理 17。由推论 16，写作

$$(a,b,c)=\left(\frac{bM}{B}+\frac{bc_kB^{k-1}}{bB-(B-1)c_k}, b, bM+c_k\right), \qquad M=\frac{B^k-B}{B-1}.$$

具体而言，

$$\frac{bc_kB^{k-1}}{bB-(B-1)c_k}=q$$

是一个整数。设 $B=p^n$，且 $c_k=p^rc_k'$、$q=p^sq'$、$b=p^tb'$ 满足 $p\nmid c_k'$，q'，b'。由于 $c_k<B=p^n$ 是单个数字，我们必有 $r<n$。现在，我们有

$$bc_kp^{n(k-1)}=q(bp^n-(p^n-1)c_k)=q((b-c_k)p^n+c_k),$$

因此

$$bc_k'p^rp^{n(k-1)}=q((b-c_k)p^n+p^rc_k'), \qquad bc_k'p^{n(k-1)}=q((b-c_k)p^{n-r}+c_k').$$

Now,

$$b'c_k'p^tp^{n(k-1)}=q'p^s((b-c_k)p^{n-r}+c_k'),$$

因此

$$b'c_k'p^{n(k-1)+t-s}=q'(b-c_k)p^{n-r}+q'c_k'.$$

注意，等式两边都是整数。由于 $r < n$，我们有 $p \mid q'(b - c_k)p^{n-r}$；但根据构造， $p \nmid q'c'_k$。因此，左边 $p \nmid b'c'_k p^{n(k-1)+t-s}$。再次，由于 $p \nmid b'c'_k$，所以我们有 $s = n(k-1) + t$。因此，

$$\frac{bc_k}{bB - (B-1)c_k} = \frac{q}{p^{n(k-1)}} = q'p^{s-n(k-1)} = q'p^t$$

是一个整数。

现在，数 $N_* = [a_*\, b_*\, c_*]$，其中

$$(a_*, b_*, c_*) = \left(\frac{bc_k}{bB - (B-1)c_k}, b, c_k\right)$$

具有性质 P_1^*。为此，注意到 $c_k < b$ 给出

$$a_* = \frac{bc_k}{bB - (B-1)c_k} < \frac{bc_k}{bB - (B-1)b} = c_k < B$$

确保 a_* 是单个数字，并且

$$\frac{1}{a_*} + \frac{B-1}{b_*} = \frac{bB - (B-1)c_k}{bc_k} + \frac{B-1}{b} = \frac{B}{c_k} = \frac{B^1}{c_*},$$

满足该 P_k 性质。

根据命题1，其扩展

$$N_*^+ = [a_* b_* \ldots b_*\, b_*\, b_* \ldots b_* c] = [a_* b \ldots b\, b\, b \ldots b c_k] = [a_*^+\, b\, c]$$

具有性质 P_k^*。然而，数字 b， c_k 唯一确定了第一块 a_*^+，而我们已经有一个由 b, c_k生成的解 $N = [a\, b\, c]$。这迫使 $a = a_*^+$，因此所有 $a_{i\neq 1} = b$ 都如我们所愿。换言之，我们原来的关于 P_k 的解 N，是关于 P_1的解 N_* 的扩展。□

参考文献

[1] Sholander, M. (1961). 问题与疑问。《数学杂志》, 34(6): 363—373. doi:10.1080/0025570x.1961.11975268[2]Boas, R. P. (1972). 异常消去。《两年制大学数学期刊》,3(2): 21–24.doi:10.2307/3026913

[3] Ogilvy, C.S, Anderson J. T.（1996）。数论漫步。牛津大学出版社，纽约。

[4]N. J. A. Sloane，在线整数数列百科全书，https://oeis.org

[5]Michael Glickman。《Think Logically! Anomalous Cancella- tion in Depth》，2021年7月23日，Challenging Math 视频，41:02，https://youtu.be/0PCqkbGs5E -

[6] Ekhad, Shalosh B.（2017年）。异常消去的自动生成。*arXiv*。doi:10.48550/ARXIV.1709.03379

[7] Fried, M. N.,& Goldberg, M. (2010). A用于分数无效约分的泵引理。《大学数学杂志》, 41(5): 357–364. doi:10.4169/074683410x521955

[8] Stuffelbeam, R. (2013). 怪分数有多奇怪? 《大学数学杂志》,44(3): 202—209.doi:10.4169/college.math.j.44.3.2