arXiv:2302.00490v1 [math.CV] 1 Feb 2023

Siegel 上半空间乘积上的 Hardy 空间及双参数 Hardy 空间的分解定理

WEI WANG† 和 QINGYAN WU‡

Abstract. Siegel 上半空间的乘积是 Siegel 域，其 Shilov 边界具有海森堡群乘积的结构 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$。借助与次拉普拉斯算子相关的双参数热核再生公式，我们证明了此类区域上的全纯 Hardy 空间函数 H^1 的边界值属于双参数 Hardy 空间 $H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。借助 $H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$的原子分解和双参数调和分析，我们证明 Cauchy-Szeg˝o 投影是从 $H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$到全纯 Hardy 空间 H^1的有界算子，并且任意全纯 H^1 函数都可以分解为全纯原子的和。$\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 上的双参数原子比单参数原子更复杂，全纯原子也是如此。

1. Introduction

Coifman-Rochberg-Weiss [7] 证明了H^1 单位球上的全纯 Hardy 空间的原子分解定理。Garnett-Latter [13] 将其结果推广到了 H^p $0 < p <$1 的情形。Dafni [9], 、Krantz-Li [24] [25], 和 Grellier-Peloso [17]分别建立了有界强伪凸域上的全纯 H^p 函数、 $\mathbb{C}^2$ 中的有限型伪凸域以及 $\mathbb{C}^n$ 中的有限型凸域上的原子分解。全纯 Hardy 空间的分解定理具有各种有趣的应用（例如参见 [1] [25] [29]）。

另一方面，尽管双圆盘是一个边界不光滑的简单西格尔域，但早在20世纪70年代末，Malliavins [27] 和Gundy-Stein [18]就已知其上全纯函数的边界行为以及全纯 Hardy 空间比圆盘上的情形复杂得多。此后，这推动了多参数调和分析的发展（例如参见 [3] [4] [22] [28]）。值得注意的是，多参数原子的定义比单参数原子的定义复杂得多。由于西格尔域通常具有包含多参数伸缩在内的自同构群，因此有理由相信，Silov边界上的多参数调和分析将在理解此类区域上的全纯函数和 Hardy 空间的边界行为方面发挥重要作用。本文研究Siegel上半空间的乘积，并借助Heisenberg群的乘积上的双参数Hardy空间的原子分解，建立此类区域上全纯 Hardy 空间的分解定理。

两个 Siegel上半空间的乘积为 $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$，其中

$$\mathcal{U}_\alpha = \left\{(\widetilde{w}_\alpha, \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n_\alpha}; \rho_\alpha(\widetilde{w}_\alpha, \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha) := \operatorname{Im} \widetilde{w}_\alpha - |\widetilde{\mathbf{z}}_\alpha|^2 > 0\right\}, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{1.1}$$

是 Siegel上半空间。 $\mathcal{U}$ 的 Shilov边界是由 $\rho_1 = \rho_2 = 0$定义的 CR子流形。考虑其平坦模型 $\mathscr{U}$ 较为方便: $= \mathbb{R}^2_+ \times \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$，其中 $\mathscr{H}_\alpha$ 是海森堡群，

Key words and phrases. 全纯 Hardy 空间；原子分解定理；Siegel上半空间的乘积；双参数 Hardy 空间；双参数热核；Heisenberg群的乘积。

† 浙江大学数学系，浙江 310027，中国，电子邮箱：wwang@zju.edu.cn；
‡ 临沂大学数学系，山东 276005，中国，电子邮箱：qingyanwu@gmail.com。

$\alpha=1$, 2. 存在一个二次变换 π，将 $\mathscr{U}$ 映射到 $\mathcal{U}$。我们考虑 $\mathscr{U}$ 上的全纯函数，这些函数通过 π 拉回的复结构定义（参见命题 2.1）。全纯 Hardy 空间 $H^p(\mathscr{U})$ 是所有在 $\mathscr{U}$ 上满足以下条件的全纯函数 f 所组成的空间：

$$\|f\|_{H^p(\mathscr{U})}:=\left(\sup_{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+^2}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^{n_1+n_2}}|f(\mathbf{s}+\mathbf{it},\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)|^p\,d\mathbf{s}d\mathbf{z}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Shilov边界是具有双参数膨胀群的海森堡群的乘积 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$。近年来，齐性型空间的乘积 [5] [8] [19] [20] [21], 上的 Hardy 空间理论得到了发展，其中包括海森堡群乘积这一特殊情形。我们需要双参数 Hardy 空间 $H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$的原子分解。设 $\triangle_\alpha$ 是 $\mathscr{H}_\alpha$ 上的次拉普拉斯算子，且 N为正整数。若函数 $a\in L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$满足以下条件，则称其为一个$(2,N)$-原子：

(1) 存在 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 中的一个有限测度开集 Ω，使得 $\operatorname{supp}a\subset\Omega$；(2) a 还可以进一步分解为

$$a=\sum_{R\in m(\Omega)}a_R$$

其中， $m(\Omega)$是所有包含于 Ω 中的极大二进矩形的集合；对于每个 $R\in m(\Omega)$，存在一个函数 b_R，它属于 $L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$中$\triangle_1^{\sigma_1}\otimes\triangle_2^{\sigma_2}$的定义域，对所有 $\sigma_1,\sigma_2\in\{0,1,\dots,N\}$均成立，并且满足

(i) $a_R=(\triangle_1^N\otimes\triangle_2^N)b_R$；(ii) $\operatorname{supp}(\triangle_1^{\sigma_1}\otimes\triangle_2^{\sigma_2})b_R\subset\overline{C}R$，其中 $\overline{C}>1$ 是一个固定常数；(iii) $\|a\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\le|\Omega|^{-\frac{1}{2}}$ 并且

$$\sum_{R=I\times J\in m(\Omega)}\ell(I)^{4\sigma_1-4N}\ell(J)^{4\sigma_2-4N}\|(\triangle_1^{\sigma_1}\otimes\triangle_2^{\sigma_2})b_R\|^2_{L^2(\mathscr{H})}\le|\Omega|^{-1}. \tag{1.2}$$

设 $\mathcal{P}$ 是从 $L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 到全纯 Hardy 空间 $H^2(\mathscr{U})$ 的柯西–施瓦茨投影。若存在一个定义在 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 上的 $(2,N)$-原子 a，使得 $A=\mathcal{P}(a)$，则称定义在 $\mathscr{U}$ 上的全纯函数 A 为一个全纯 $(2,N)$-原子。原子全纯 Hardy 空间 $H^1_{at,N}(\mathscr{U})$ 是由所有形如 $\sum_{j=1}^\infty\lambda_jA_j$ 的全纯函数构成的空间，其中 $\lambda_j\in\mathbb{C}$, $\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|<+\infty$，每个 A_j 都是一个全纯 $(2,N)$-原子，且这样的级数收敛到一个全纯函数。此外，$f\in H^1_{at,N}(\mathscr{U})$ 的范数是对 f 的所有可能分解取 $\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|$ 的下确界。

我们有如下对全纯 Hardy 空间 $H^1(\mathscr{U})$ 的刻画。

定理 1.1. 对于 $N>\max\{n_1+1,n_2+1\}/2$, $H^1_{at,N}(\mathscr{U})=H^1(\mathscr{U})$，它们具有等价范数。

Geller [15] 通过在复双曲空间上使用 Beltrami-Laplace 算子，研究了 Siegel 上半空间上的全纯 Hardy 空间 H^1。相应 Dirichlet 问题的解公式可以重现全纯函数，在欧氏情形中发挥 Poisson 积分的作用，并可用于证明属于海森堡群 [15]上的 Hardy 空间 H^1 的全纯 H^1 函数的边界值。Graham [16] 将这一 Dirichlet 问题推广到了对 Beltrami-Laplace 算子作某些修改的情形。

另一方面，Folland-Stein [12] 利用热核建立了齐次群上的 Hardy 空间 H^p理论。热核作为一种便利的工具，其优势在于它是齐次群上的 Schwartz 函数，因此可与广义函数进行良定义的卷积。通过将 Siegel 上半空间 $\mathcal{U}_\alpha$ 与 $\mathscr{U}_\alpha=\mathbb{R}_+\times\mathscr{H}_\alpha$等同起来，我们证明全纯函数

在 $\mathscr{U}_\alpha$ 上满足与海森堡群上的次拉普拉斯算子相关的热方程。这一现象最早在 [2], 中得到观察，其中证明了多个变量的四元数正则函数在四元数 Siegel 上半空间的平坦模型上满足热方程。

命题 **1.1.** 函数 f 在 $\mathscr{U}=\mathbb{R}_+^2\times\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 上全纯且满足热方程 s

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\alpha}+\triangle_\alpha\right)f=0,\qquad \alpha=1,2. \tag{1.3}$$

若双参数热核在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上连续，则它可再生 H^1 上的全纯函数 $\mathscr{U}$（参见命题 2.3）。与 Geller [15] 所用的解公式相比，这个再生公式更加简单方便。

若 u 是 $\mathscr{U}$ 上的连续函数，则在 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 上定义极大函数 u^* 如下:

$$u^*(\mathbf{g}):=\sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}}|u(\mathbf{t},\mathbf{h})|\,, \tag{1.4}$$

其中 $\Gamma_{\mathbf{g}}$ 是点 $\mathbf{g}=(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2)\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 处的非切向区域，定义如下

$$\Gamma_{\mathbf{g}}:=\left\{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\mathbb{R}_+^2\times\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2;\|\mathbf{h}_1^{-1}\mathbf{g}_1\|_1^2<t_1,\|\mathbf{h}_2^{-1}\mathbf{g}_2\|_2^2<t_2\right\}. \tag{1.5}$$

双参数 Hardy 空间 $H^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 由满足 $u^*\in L^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 的 $g\in\mathcal{S}'(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 构成，其中 $u(\mathbf{t},\mathbf{g})=h_{\mathbf{t}}*g(\mathbf{g})$，且 $h_{\mathbf{t}}$ 是 $e^{-t_1\triangle_1}e^{-t_2\triangle_2}$ 的双参数热核，$\mathbf{t}=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2$，$\mathbf{g}\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$。其范数为 $\|g\|_{H^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}=\|u^*\|_{L^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}$。

次调和性的抛物型版本使我们能够证明

命题 **1.2**。设 $f\in H^1(\mathscr{U})$ 且在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上连续。那么对于 $0<q\le 1$，有

$$|f(\mathbf{t},\mathbf{g})|^q\le\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}h_{\mathbf{t}}(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{g})|f(\mathbf{0},\mathbf{h})|^q d\mathbf{h}. \tag{1.6}$$

我们需要 ab 利用关于 $q<1$ 的不等式 **(1.6)** 来证明，$\mathscr{U}$ 上的全纯 H^1 函数 f 满足

$$f^*\in L^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2). \tag{1.7}$$

这是最微妙的部分，正如经典 Hardy 空间理论中关于在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上被广义 Cauchy-Riemann 算子湮灭的函数的情形（参见第 7] 章第 [30, 节）。一旦证明了 **(1.7)**，便可应用双参数调和分析的方法。我们可以证明，存在一个边界分布 $f^b\in\mathcal{S}'(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$，其意义见 $f(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdot)$，满足 $\to f^b$ 属于 $\mathcal{S}'(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$，其中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$，并且

$$f(\mathbf{t},\mathbf{g})=h_{\mathbf{t}}*f^b(\mathbf{g})$$

在定理 5.1 中。因此，$f^b\in H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$。接着，我们推得，对于每个边界 $(2,N)$-原子 a，$\mathcal{P}(a)$ 是一个全纯 $H^1(\mathscr{U})$ 函数，并且 Cauchy-Szeg˝o 投影 $\mathcal{P}$ 从 $H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 到 $H^1(\mathscr{U})$ 是有界的。边界分布 f^b 具有原子分解 $f^b=\sum_k\lambda_k a_k$，其中 $\|f^b\|_{H^1(\mathscr{H})}\approx\sum_k|\lambda_k|$，且每个 a_k 都是一个 $(2,N)$-原子。最后，我们得到全纯原子分解

$$f=\sum\lambda_k\mathcal{P}(a_k).$$

本文的组织结构如下。第 2 节中，我们明确描述了 Siegel 上半空间乘积的平坦模型 $\mathscr{U}=\mathbb{R}_+^2\times\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$，并证明 $\mathscr{U}$ 上的全纯函数满足热方程。第 3 节中，我们根据一般西格尔域上的柯西–塞格核的已知公式，推导出 $\mathscr{U}$ 上的柯西–塞格核；它是.....的乘积

$\mathscr{U}_1$ 和 $\mathscr{U}_2$ 上的柯西–塞格核。随后，我们证明柯西–塞格核 ″

$$S((\mathbf{t},\mathbf{g}),\mathbf{g}'), \qquad \mathbf{g},\mathbf{g}'\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$$

对所有 t 一致满足粗糙双参数 Calder´on-Zygmund 核的条件。利用这一点，我们可以证明，对于第 4 节中群 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 上任意一个 $(2,N)$-原子 a， $\mathcal{P}(a)$ 属于 $H^1(\mathscr{U})$。因此，Cauchy-Szeg″o 投影 $\mathcal{P}$ 是从 $H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 到全纯 Hardy 空间 $H^1(\mathscr{U})$ 的有界算子。在第 5 节中，我们证明 $H^1(\mathscr{U})$ 函数具有边界分布 $f^b\in H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$。它有原子分解，而 Cauchy-Szeg″o 投影 $\mathcal{P}$ 的作用将其转化为全纯原子分解。在第 6 节中，我们利用 $|f|^p$ 的抛物型最大值原理和次调和性的抛物型版本证明命题 1.2。

2. the Flat model

2.1. 平坦模型 $\mathscr{U}$。令 $\mathscr{H}_\alpha$ 为海森堡群 $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n_\alpha}$。我们将 $\mathscr{H}_\alpha$ 中的一个点写作 $\mathrm{g}_\alpha:=(s_\alpha,\mathrm{z}_\alpha)$，其中 $s_\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $\mathrm{z}_\alpha=(z_{\alpha1},\dots,z_{\alpha n_\alpha})\in\mathbb{C}^{n_\alpha}$，这里 $z_{\alpha j}=x_{\alpha j}+\mathbf{i}x_{\alpha(n_\alpha+j)}$， $j=1$， ...， n_α。其乘法定义为

$$(s_\alpha,\mathbf{z}_\alpha)(s'_\alpha,\mathbf{z}'_\alpha)=\left(s_\alpha+s'_\alpha+2\mathrm{Im}\langle\mathbf{z}_\alpha,\mathbf{z}'_\alpha\rangle,\mathbf{z}_\alpha+\mathbf{z}'_\alpha\right), \tag{2.1}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $\mathbb{C}^{n_\alpha}$上的标准厄米内积。

$\mathscr{H}_\alpha$ 的单位元是原点 $\mathbf{0}_\alpha$，而 $\mathrm{g}_\alpha=(s_\alpha,\mathrm{z}_\alpha)$ 的逆元为 $\mathrm{g}_\alpha^{-1}=(-s_\alpha,-\mathrm{z}_\alpha)$。$\mathrm{g}_\alpha$ 的齐次范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 定义为

$$\|\mathbf{g}_\alpha\|_\alpha:=(|\mathbf{z}_\alpha|^4+|s_\alpha|^2)^{\frac14}.$$

那么， $\|\mathbf{h}_\alpha^{-1}\mathbf{g}_\alpha\|_\alpha$ 是 g_α、$\mathrm{h}_\alpha\in\mathscr{H}_\alpha$之间的距离。我们将 $\mathscr{H}_\alpha$ 中的球定义为

$$B_\alpha(\mathbf{g}_\alpha,r):=\left\{\mathbf{h}_\alpha\in\mathscr{H}_\alpha;\|\mathbf{h}_\alpha^{-1}\mathbf{g}_\alpha\|_\alpha<r\right\}.$$

海森堡群 $\mathscr{H}_\alpha$是一个齐次群，其膨胀为 $\delta_r^{(\alpha)}(s_\alpha,\mathrm{z}_\alpha)=(r^2s_\alpha,r\mathrm{z}_\alpha)$ $r>0$.勒贝格测度 $d\mathrm{g}_\alpha$ 是 $\mathscr{H}_\alpha$上的不变测度。因此，对任意可测集 $E\subset\mathscr{H}_\alpha|\delta_r^{(\alpha)}(E)|=r^{Q_\alpha}|E|$，其中 $Q_\alpha=2n_\alpha+2$ 是 $\mathscr{H}_\alpha$的齐次维数。记 $\tau_{\mathbf{h}_\alpha}$ 为 $\mathscr{H}_\alpha$ 上由 h_α给出的左平移，即 $\tau_{\mathbf{h}_\alpha}(\mathrm{g}_\alpha)=\mathrm{h}_\alpha\mathrm{g}_\alpha$.

乘积 $\mathscr{H}:=\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 是一个二阶幂零李群。我们将 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$中的点写作 $\mathrm{g}=(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2)$，其中 $\mathrm{g}_\alpha\in\mathscr{H}_\alpha$, $\alpha=1,2$。它具有双参数膨胀 $\delta_{\mathbf{r}}(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2):=(\delta_{r_1}^{(1)}(\mathrm{g}_1)\ \delta_{r_2}^{(2)}(\mathrm{g}_2))$，其中 $\mathbf{r}=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}_+^2$，以及左平移 $\tau_{\mathbf{h}}(\mathrm{g}):=(\tau_{\mathbf{h}_1}(\mathrm{g}_1)\ \tau_{\mathbf{h}_2}(\mathrm{g}_2))$，其中 $\mathrm{h}=(\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2)$，$\mathrm{g}=(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2)\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$。勒贝格测度 $d\mathrm{g}=d\mathrm{g}_1d\mathrm{g}_2$也是 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$上的不变测度。其上两个函数 u 和 v 的卷积定义为

$$u*v(\mathbf{g}):=\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}u(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{g})v(\mathbf{h})d\mathbf{h}.$$

我们将 $\mathscr{U}_\alpha$ 中的一个点记作 $(t_\alpha,\mathrm{g}_\alpha)$， $\alpha=1$， 2，其中 $t_\alpha\in\mathbb{R}_+$， $\mathrm{g}_\alpha=(s_\alpha,\mathrm{z}_\alpha)\in\mathscr{H}_\alpha$。对于 $\mathscr{U}_\alpha$ 中的一个点，使用复坐标 $(w_\alpha,\mathrm{z}_\alpha)$ 也很方便，其中 $w_\alpha=s_\alpha+\mathbf{i}t_\alpha$。我们可以通过二次变换 π_α 将 $\mathcal{U}_\alpha$ 与 $\mathscr{U}_\alpha$ 识别起来： $\mathscr{U}_\alpha=\mathbb{R}_+\times\mathscr{H}_\alpha\to\mathcal{U}_\alpha$ 给出为

$$(w_\alpha,\mathbf{z}_\alpha)\mapsto(\widetilde{w}_\alpha,\widetilde{\mathbf{z}}_\alpha)=\left(w_\alpha+\mathbf{i}|\mathbf{z}_\alpha|^2,\mathbf{z}_\alpha\right). \tag{2.2}$$

因此，我们可以通过二次变换 $\pi=\pi_1\times\pi_2$: $\mathscr{U}=\mathbb{R}_+^2\times\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2\to\mathcal{U}$，将 $\mathcal{U}$与 $\mathscr{U}$识别起来，

$$(\mathbf{w},\mathbf{z})\mapsto(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\mathbf{z}})=(w_1+\mathbf{i}|\mathbf{z}_1|^2,w_2+\mathbf{i}|\mathbf{z}_2|^2,\mathbf{z}). \tag{2.3}$$

此处及下文中，我们将 $\mathscr{U}$中的一个点记作 (w, z)，其中 $\mathsf{w} := (w_1, w_2)$，$\mathsf{z} := (\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2)$；或记作 (t, g) $=(t_1, t_2, \mathsf{g}_1, \mathsf{g}_2)$。对于 $\mathcal{U}$上的对象，我们在相应的 $\mathscr{U}$记号上加波浪号。令

$$\frac{\partial}{\partial \overline{w}_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial s_\alpha} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\right) \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{\alpha j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha j}} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha(n_\alpha+j)}}\right). \tag{2.4}$$

注意，$\mathrm{Im}\langle \mathsf{z}_\alpha, \mathsf{z}'_\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n_\alpha}(-x_{\alpha j}x'_{\alpha(n_\alpha+j)} + x_{\alpha(n_\alpha+j)}x'_{\alpha j})$。于是

$$X_{\alpha j} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha j}} + 2x_{\alpha(n_\alpha+j)}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}, \qquad X_{\alpha(n_\alpha+j)} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha(n_\alpha+j)}} - 2x_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial s_\alpha},$$

$j = 1, \dots, n_\alpha$, 是群 $\mathscr{H}_\alpha$ 上的左不变向量场，并且

$$\left[X_{\alpha j}, X_{\alpha(n_\alpha+j)}\right] = -4\frac{\partial}{\partial s_\alpha}, \tag{2.5}$$

且所有其他括号均为零。海森堡群 $\mathscr{H}_\alpha$ 上的次拉普拉斯算子为 $\triangle_\alpha := -\frac{1}{4n_\alpha}\sum_{j=1}^{2n_\alpha} X_{\alpha j}^2$。记 $\overline{Z}_{\alpha j} = \frac{1}{2}(X_{\alpha j} + \mathbf{i}X_{\alpha(n_\alpha+j)})$。于是

$$\overline{Z}_{\alpha j} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_{\alpha j}} - \mathbf{i}z_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}.$$

以下命题刻画了由 π 拉回的复结构。也就是说，函数 f 在 $\mathscr{U}$ 上关于此复结构全纯，当且仅当满足 (2.6)。

~ ~命题 2.1。函数 f 在 $\mathcal{U}$ 上全纯，当且仅当 $f := \pi^* f$ 满足 s

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{w}_\alpha} = 0 \qquad \text{and} \qquad \overline{Z}_{\alpha j} f = 0, \tag{2.6}$$

~ ~在 $\mathscr{U}$ 上，其中 $j = 1, \dots, n_\alpha$, $\alpha = 1, 2$，且 $(\pi^* f)(\mathsf{w}, \mathsf{z}) = f(\pi(\mathsf{w}, \mathsf{z}))$。

证明。回顾一下，对于 $\mathscr{U}$ 上的向量场 X，$\mathcal{U}$ 上的推前向量场 $\pi_* X$ 定义为

$$(\pi_* X)\psi|_{\pi(\mathbf{w},\mathbf{z})} = X[\psi(\pi(\mathbf{w}, \mathbf{z}))]$$

对于 $\mathcal{U}$ 上的任意标量函数 ψ。若将 $\mathcal{U}$ 的坐标写作 (~w ~z)，其中 $\tilde{\mathsf{w}} = (w_1, w_2)$，$\tilde{\mathsf{z}} = (\tilde{\mathsf{z}}_1, \tilde{\mathsf{z}}_2)$，以及 $\widetilde{w}_\alpha = \widetilde{s}_\alpha + \mathbf{i}t_\alpha$, $\tilde{\mathsf{z}}_\alpha = (\widetilde{z}_{\alpha 1}, \dots, \widetilde{z}_{\alpha n_\alpha})$，$\widetilde{z}_{\alpha j} = \widetilde{x}_{\alpha j} + \mathbf{i}\widetilde{x}_{\alpha(n_\alpha+j)}$，则 (2.3) 中的变换 π 由下式给出

$$\widetilde{s}_\alpha = s_\alpha, \qquad \widetilde{t}_\alpha = t_\alpha + \sum_{j=1}^{2n_\alpha}|x_{\alpha j}|^2, \qquad \widetilde{x}_{\alpha j} = x_{\alpha j}.$$

不难验证，

$$\begin{aligned} \pi_*\frac{\partial}{\partial s_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \widetilde{s}_\alpha}, \qquad & \pi_*\frac{\partial}{\partial t_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \widetilde{t}_\alpha}, \\ \pi_*\frac{\partial}{\partial x_{\alpha j}} &= \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}} + 2\widetilde{x}_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial \widetilde{t}_\alpha}, \qquad & j &= 1, \cdots, 2n_\alpha. \end{aligned} \tag{2.7}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \pi_*\overline{Z}_{\alpha j} =& \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{\alpha j}} - \mathbf{i}z_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}} + \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{\alpha(n_\alpha+j)}}\right) + (\widetilde{x}_{\alpha j} + \mathbf{i}\widetilde{x}_{\alpha(n_\alpha+j)})\frac{\partial}{\partial \widetilde{t}_\alpha} - \mathbf{i}\widetilde{z}_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial \widetilde{s}_\alpha} \\ =& \frac{\partial}{\partial \overline{\widetilde{z}}_{\alpha j}} - 2\mathbf{i}\widetilde{z}_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial \overline{\widetilde{w}}_\alpha}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial\overline{\widetilde{w}}_\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\widetilde{s}_\alpha}+\mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial\widetilde{t}_\alpha}\right)$。因此，

$$\overline{Z}_{\alpha j}(\pi^*\widetilde{f})\Big|_{(\mathbf{w},\mathbf{z})}=\pi_*\overline{Z}_{\alpha j}\widetilde{f}\Big|_{\pi(\mathbf{w},\mathbf{z})}=\left(\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\overline{\widetilde{z}}_{\alpha j}}-2\mathbf{i}\widetilde{z}_{\alpha j}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\overline{\widetilde{w}}_\alpha}\right)\Big|_{\pi(\mathbf{w},\mathbf{z})},$$

$$\frac{\partial(\pi^*\widetilde{f})}{\partial\overline{w}_\alpha}\Big|_{(\mathbf{w},\mathbf{z})}=\left(\pi_*\frac{\partial}{\partial\overline{w}_\alpha}\right)\widetilde{f}\Big|_{\pi(\mathbf{w},\mathbf{z})}=\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\overline{\widetilde{w}}_\alpha}\Big|_{\pi(\mathbf{w},\mathbf{z})}.$$

~我们看到，f 是 ~ ~全纯的，在 $\mathcal{U}$ 上，即 $\frac{\partial f}{\partial\overline{\widetilde{z}}_{\alpha j}}=0$, $\frac{\partial f}{\partial\overline{\widetilde{w}}_\alpha}=0$，当且仅当 (2.6) 对 $f=\pi^*\widetilde{f}$ 成立。 □

注 2.1。 $\pi_*\overline{Z}_{\alpha j}$ 是一个与边界 $\partial\mathcal{U}_\alpha$相切的向量场，因为根据定义，$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial\overline{\widetilde{z}}_{\alpha j}}-2\mathbf{i}\widetilde{z}_{\alpha j}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial\overline{\widetilde{w}}_\alpha}=0, j=1,\ldots,n_\alpha$, $\alpha=1,2$。

~全纯 Hardy 空间 $H^p(\mathcal{U})$ 是由 $\mathcal{U}$ 上满足以下条件的所有全纯函数 f 构成的空间

$$\|\widetilde{f}\|_{H^p(\mathcal{U})}=\left(\sup_{\widetilde{t}_1,\widetilde{t}_2>0}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^{n_1+n_2}}\left|\widetilde{f}\left(\widetilde{s}_1+\mathbf{i}(\widetilde{t}_1+|\widetilde{\mathbf{z}}_1|^2),\widetilde{s}_2+\mathbf{i}(\widetilde{t}_2+|\widetilde{\mathbf{z}}_2|^2),\widetilde{\mathbf{z}}_1,\widetilde{\mathbf{z}}_2\right)\right|^p d\widetilde{s}_1 d\widetilde{s}_2 d\widetilde{\mathbf{z}}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

(2.3) 中的微分同胚 π 诱导了 Hardy 空间之间的同构 $\pi^*\colon H^p(\mathcal{U})\longrightarrow H^p(\mathscr{U})$，其定义为

$$\widetilde{f}\mapsto\left(\pi^*\widetilde{f}\right)(\mathbf{w},\mathbf{z}):=\widetilde{f}(w_1+\mathbf{i}|\mathbf{z}_1|^2,w_2+\mathbf{i}|\mathbf{z}_2|^2,\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2),\tag{2.9}$$

在保留 $\|\cdot\|$ 的情况下。

命题 2 .2. 存在一个仅取决于 Q_1、Q_2 和 $p>0$ 的正常数 C，使得

$$|f(\mathbf{t},\mathbf{g})|\le C\|f\|_{H^p(\mathscr{U})}t_1^{-\frac{Q_1}{2p}}t_2^{-\frac{Q_2}{2p}},\tag{2.10}$$

对于任意 $f\in H^p(\mathscr{U})$ 以及任意 $(\mathbf{t},\mathbf{g})\in\mathscr{U}$。

^证明：注意，如果 $f\in H^p(\mathscr{U})$，那么对于固定的 $\mathbf{g}$，$f(\mathbf{t},\mathbf{h}):=f(\mathbf{t},\mathbf{gh})$ 在 $\mathscr{U}$ 上也是全纯的，因为

$$\overline{Z}_{\alpha j}\widehat{f}(\mathbf{t},\mathbf{h})=(\overline{Z}_{\alpha j}f)(\mathbf{t},\mathbf{gh})=0,\qquad\text{and}\qquad\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\overline{w}_\alpha}(\mathbf{t},\mathbf{h})=\frac{\partial f}{\partial\overline{w}_\alpha}(\mathbf{t},\mathbf{gh})=0,$$

由 f 在 $\mathscr{U}$ 上的全纯性以及 $\overline{Z}_{\alpha j}$ 和 $\frac{\partial}{\partial\overline{w}_\alpha}$的左不变性可知。此外，我们还有

$$\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}|\widehat{f}(\mathbf{t},\mathbf{h})|d\mathbf{h}=\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}|f(\mathbf{t},\mathbf{h})|d\mathbf{h},$$

根据测度 $d\mathbf{h}$ 的不变性，我们得到 $\widehat{f}\in H^1(\mathscr{U})$。因此，只需对 $\mathbf{g}=\mathbf{0}$ 证明 (2.10)。

为了在应用平均值定理时避免奇异性，我们需要将 f 变换为一个全纯函数 ~

$$\widetilde{f}(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\mathbf{z}}):=f(\widetilde{w}_1-\mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_1|^2,\widetilde{w}_2-\mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_2|^2,\widetilde{\mathbf{z}})\tag{2.11}$$

根据 (2.9)，属于 $H^1(\mathcal{U})$，且范数相同。令 $D(z,r)$ 为 $\mathbb{C}$ 中半径为 r、中心为 z的圆盘。由于多圆盘 $D_\alpha:=D(\mathbf{i}t_\alpha,t_\alpha/2)\times D(\mathbf{0},\sqrt{t_\alpha/4n_\alpha})\times\cdots\times D(\mathbf{0},\sqrt{t_\alpha/4n_\alpha}))\subset\mathcal{U}_\alpha$，我们有

$$\widetilde{f}(\mathbf{it},\mathbf{0})=\frac{1}{|D_1||D_2|}\int_{D_1}\int_{D_2}\widetilde{f}(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\mathbf{z}})d\widetilde{\mathbf{w}}d\widetilde{\mathbf{z}},$$

根据平均值公式，其中 $\mathbf{t}=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2_+$ 且

$$D_\alpha\subset\{(\widetilde{w}_\alpha,\widetilde{\mathbf{z}}_\alpha)\in\mathcal{U}_\alpha;t_\alpha/4<\operatorname{Im}\widetilde{w}_\alpha-|\widetilde{\mathbf{z}}_\alpha|^2<2t_\alpha\}$$

根据定义。因此我们有

$$\begin{aligned}|\widetilde{f}(\mathbf{it},\mathbf{0})| &\le \frac{C}{t_1^{n_1+2}t_2^{n_2+2}}\int_{t_1/4<\operatorname{Im}\widetilde{w}_1-|\widetilde{\mathbf{z}}_1|^2<2t_1}\int_{t_2/4<\operatorname{Im}\widetilde{w}_2-|\widetilde{\mathbf{z}}_2|^2<2t_2}\left|\widetilde{f}(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\mathbf{z}})\right|d\widetilde{\mathbf{w}}d\widetilde{\mathbf{z}}\\ &= \frac{C}{t_1^{n_1+2}t_2^{n_2+2}}\int_{\operatorname{Im}\widetilde{w}_1\in(t_1/4,2t_1)}\int_{\operatorname{Im}\widetilde{w}_2\in(t_2/4,2t_2)}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^{n_1}\times\mathbb{C}^{n_2}}\left|\widetilde{f}\left(\widetilde{w}_1+\mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_1|^2,\widetilde{w}_2+\mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_2|^2,\widetilde{\mathbf{z}}\right)\right|d\widetilde{\mathbf{w}}d\widetilde{\mathbf{z}}\\ &= \frac{C}{t_1^{n_1+2}t_2^{n_2+2}}\int_{t_1/4}^{2t_1}dt_1\int_{t_2/4}^{2t_2}dt_2\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}|f(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\ &\le \frac{4C}{t_1^{n_1+1}t_2^{n_2+1}}\|f\|_{H^1(\mathscr{U})},\end{aligned}$$

由式 (2.11) 得出，其中在第一个等式中，我们使用了坐标变换 $(\widetilde{\mathbf{w}}\ \widetilde{\mathbf{z}})\mapsto(\widetilde{w}_1+\mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_1|^2,\widetilde{w}_2+\mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_2|^2,\widetilde{\mathbf{z}})$，该变换显然保持体积形式。由定义 (2.11)，估计可由 $f(\mathbf{it},0)=f(\mathbf{it},0)$ 得出。□

2.2. 热方程。$\mathscr{H}_\alpha$ 上的热算子为

$$\mathcal{L}_\alpha:=\frac{1}{4n_\alpha}\sum_{j=1}^{2n_\alpha}X_{\alpha j}^2-\frac{\partial}{\partial t_\alpha}.$$

命题 1.1 的证明。注意到

$$\begin{aligned}4\sum_{j=1}^{n_\alpha}Z_{\alpha j}\overline{Z}_{\alpha j} &= \sum_{j=1}^{n_\alpha}\left(X_{\alpha j}-\mathbf{i}X_{\alpha(n_\alpha+j)}\right)\left(X_{\alpha j}+\mathbf{i}X_{\alpha(n_\alpha+j)}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{2n_\alpha}X_{\alpha j}^2+\mathbf{i}\sum_{j=1}^{n_\alpha}\left[X_{\alpha j},X_{\alpha(n_\alpha+j)}\right]=\sum_{j=1}^{2n_\alpha}X_{\alpha j}^2-4n_\alpha\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\end{aligned}$$

由 (2.5) 中的括号可得。因此

$$\begin{aligned}4n_\alpha\mathcal{L}_\alpha f &= \sum_{j=1}^{2n_\alpha}X_{\alpha j}^2f-4n_\alpha\frac{\partial f}{\partial t_\alpha}=4\sum_{j=1}^{n_\alpha}Z_{\alpha j}\overline{Z}_{\alpha j}f+4n_\alpha\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial s_\alpha}-4n_\alpha\frac{\partial f}{\partial t_\alpha}\\ &= 4\sum_{j=1}^{n_\alpha}Z_{\alpha j}\overline{Z}_{\alpha j}f+8n_\alpha\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial\overline{w}_\alpha}=0,\end{aligned}$$

由 $\frac{\partial}{\partial\overline{w}_\alpha}$ 在 (2.4) 中的表达式及命题 2.1 可得，因为 f 在 $\mathscr{U}$ 上全纯。 □

设 $h_{t_\alpha}^{(\alpha)}(\mathrm{g})$ 是 $e^{-t_\alpha\triangle_\alpha}$ 在 $\mathscr{H}_\alpha$ 上的热核。那么，$h_{\mathbf{t}}(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2)=h_{t_1}^{(1)}(\mathrm{g}_1)h_{t_2}^{(2)}(\mathrm{g}_2)$ 是 $e^{-t_1\triangle_1}e^{-t_2\triangle_2}$ 的双参数热核，其中 $\mathrm{t}=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}_+^2$。

命题 2.3. 设 $f\in H^p(\mathscr{U})$，其中 $p\ge1$，且 f 在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上连续。那么

$$f(\mathbf{t},\mathbf{g})=\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}h_{\mathbf{t}}(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{g})f(\mathbf{0},\mathbf{h})d\mathbf{h}. \tag{2.12}$$

该公式对 $f\in H^p(\mathscr{U}_\alpha)$、$\alpha=1$、2 也成立。

将使用 $p=1$,2 的再生公式。我们将在第 6 节使用最大值原理和 $|f|^p$ 的次调和性的抛物型版本来证明这一命题及命题 1.2。

3. The Cauchy-Szegő kernel and associated integral operators

3.1. 柯西-塞格″奥核。我们将根据一般西格尔域 [23] 上柯西-塞格″奥核的已知公式，推导出 $\mathscr{U}$ 上的柯西-塞格″奥核。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 为一个正则锥，即它是一个非空开凸集，顶点为 0，且不包含任何整条直线。对偶锥 Ω^* 是所有满足 $\langle \lambda, x\rangle > 0$（对所有 $x \in \Omega \setminus \{0\}$）的 $\lambda \in (\mathbb{R}^m)^*$ 组成的集合。给定一个正则锥 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$，若厄米形式 $\Phi: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 满足：对于任意 $z \in \mathbb{C}^n$，$\Phi(z,z) \in \Omega$，且 $\Phi(z,z) = 0$ 仅当 $z = 0$时成立，则称其为 Ω-正形式。区域

$$\mathcal{D} := \{\zeta = (\zeta', \zeta'') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n; \operatorname{Im}\zeta' - \Phi(\zeta'', \zeta'') \in \Omega\}$$

称为由 Φ 和 Ω 确定的西格尔域。其 Shilov边界 $\mathcal{S}$ 是由方程 $\operatorname{Im}\zeta' - \Phi(\zeta'', \zeta'') = 0$定义的 CR子流形，具有二阶幂零李群的结构。

全纯 Hardy 空间 $H^2(\mathcal{D})$ 由所有定义在 $\mathcal{D}$ 上的全纯函数 f 组成，使得 t

$$\|f\|^2_{H^2(\mathcal{D})} = \sup_{y\in\Omega} \int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{C}^n} |f(x + \mathbf{i}y + \mathbf{i}\Phi(\zeta'', \zeta''), \zeta'')|^2 dx d\zeta'' < \infty. \tag{3.1}$$

从 $L^2(\mathcal{S})$ 到 $H^2(\mathcal{D})$ 的 Cauchy-Szeg″o 投影 $\mathcal{P}$ 具有再生核 $S(\zeta,\eta)$，即 Cauchy-Szeg″o 核；它关于 $\zeta \in \mathcal{D}$ 全纯，关于 $\eta \in \mathcal{D}$ 反全纯。也就是说，对于 $f \in H^2(\mathcal{D})$，有

$$f(\zeta) = \int_{\mathcal{S}} S(\zeta,\eta) f(\eta) d\beta(\eta), \tag{3.2}$$

其中 $d\beta$ 是与 (3.1) 中的 $dxd\zeta''$ 对应的测度。

对于 $\lambda \in \Omega^*$，记 $B_\lambda(\zeta'', \eta'') := 4\langle \lambda, \Phi(\zeta'', \eta'')\rangle$，这是定义在 $\mathbb{C}^n$ 上的一个厄米形式，其对应的厄米矩阵也记为 B_λ。$S(\zeta,\eta)$ 的显式公式 [23, Theorem 5.1] 被称为

$$S(\zeta,\eta) = \int_{\Omega^*} e^{-2\pi\langle \lambda, \rho(\zeta,\eta)\rangle} \det B_\lambda \, d\lambda, \tag{3.3}$$

对于 $\zeta = (\zeta', \zeta'') \in \mathcal{D}, \eta = (\eta', \eta'') \in \mathcal{S}$，其中

$$\rho(\zeta,\eta) = \mathbf{i}\left(\overline{\eta'} - \zeta'\right) - 2\Phi(\zeta'', \eta'').$$

式（1.1）中两个 Siegel上半空间 $\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$ 的乘积 $\mathcal{U}$ 是一个带有锥 $\Omega = \mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$, $m = 2$, $n = n_1 + n_2$的西格尔域，并且

$$\Phi(\widetilde{\mathbf{z}}, \widetilde{\mathbf{z}}') = (\Phi_1(\widetilde{\mathbf{z}}_1, \widetilde{\mathbf{z}}'_1), \Phi_2(\widetilde{\mathbf{z}}_2, \widetilde{\mathbf{z}}'_2)), \qquad \widetilde{\mathbf{z}} = (\widetilde{\mathbf{z}}_1, \widetilde{\mathbf{z}}_2) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2} = \mathbb{C}^n,$$

其中 $\Phi_\alpha(\widetilde{\ }\mathbf{z}_\alpha, \widetilde{\ }\mathbf{z}'_\alpha) := \langle \widetilde{\ }\mathbf{z}_\alpha, \widetilde{\ }\mathbf{z}'_\alpha\rangle$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是标准厄米内积，而 $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ 满足

$$\rho_\alpha(\zeta,\eta) = \mathbf{i}\left(\overline{\widetilde{w}'_\alpha} - \widetilde{w}_\alpha\right) - 2\langle \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha, \widetilde{\mathbf{z}}'_\alpha\rangle, \tag{3.4}$$

对于 $\zeta = (\zeta', \zeta'') = (\quad \widetilde{\ }\mathbf{w}\ \widetilde{\ }\mathbf{z}) \in \mathcal{D}, \eta = (\eta', \eta'') = (\widetilde{\ }\mathbf{w}', \widetilde{\ }\mathbf{z}') \in \mathcal{S}$。于是，$B_\lambda(\widetilde{\ }\mathbf{z}\ \widetilde{\ }\mathbf{z}') = 4\lambda_1\langle \widetilde{\ }\mathbf{z}_1, \widetilde{\ }\mathbf{z}'_1\rangle + 4\lambda_2\langle \widetilde{\ }\mathbf{z}_2, \widetilde{\ }\mathbf{z}'_2\rangle$，即

$$B_\lambda = 4\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{pmatrix},$$

因此，$\det B_\lambda = 4^{n_1+n_2}\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}$。由 (3.3) 可得

$$S(\zeta,\eta) = \int_{\mathbb{R}^2_+} e^{-2\pi\sum_{\alpha=1}^2 \lambda_\alpha\rho_\alpha(\zeta,\eta)} 4^{n_1+n_2}\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2} d\lambda = \prod_{\alpha=1}^2 \frac{c_\alpha}{\rho_\alpha(\zeta,\eta)^{n_\alpha+1}}, \qquad c_\alpha := \frac{n_\alpha!}{4(\frac{\pi}{2})^{n_\alpha+1}}, \tag{3.5}$$

通过应用

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\pi s\theta} s^m ds = \frac{m!}{(2\pi\theta)^{m+1}}$$

对于 $\theta \in \mathbb{C}$，其中 $\operatorname{Re}\theta > 0$。

我们需要将 $\mathcal{U}$ 上的 Cauchy-Szegő 核 (3.5) 变换为 $\mathscr{U}$ 上的相应形式。

推论 3.1。Cauchy-Szegő 投影 $\mathcal{P}$ 在 $\mathscr{U}$ 上的 Cauchy-Szegő 核为

$$S((\mathbf{t},\mathbf{g}),\mathbf{g}') = \prod_{\alpha=1}^{2} S_\alpha\left(t_\alpha, \mathbf{g}_\alpha'^{-1}\mathbf{g}_\alpha\right), \tag{3.6}$$

对于 $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$、$\mathbf{g}' = (\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2') \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 和 $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2$，其中

$$S_\alpha(t_\alpha, \mathbf{h}_\alpha) = \frac{c_\alpha}{(|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha+1}}, \tag{3.7}$$

若我们写作 $\mathbf{h}_\alpha = (s_\alpha, \mathbf{z}_\alpha) \in \mathscr{H}_\alpha$ 是 Cauchy-Szegő 投影 $\mathcal{P}_\alpha$ on $\mathscr{U}_\alpha$ 的 Cauchy-Szegő 核 .

~证明。回忆一下，对于 $f \in H^2(\mathscr{U})$，由 (2.11) 定义的函数 f 属于 $H^2(\mathcal{U})$。利用 $\mathcal{U}$ 上的 Cauchy-~Szegő 核 (3.5)，并将再生公式 (3.2) 应用于 f，我们得到

(3.8)

$$f(\widetilde{w}_1 - \mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_1|^2, \widetilde{w}_2 - \mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_2|^2, \widetilde{\mathbf{z}}) = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^{n_1+n_2}} f(\widetilde{w}_1' - \mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_1'|^2, \widetilde{w}_2' - \mathbf{i}|\widetilde{\mathbf{z}}_2'|^2, \widetilde{\mathbf{z}}') \prod_{\alpha=1}^{2} \frac{c_\alpha}{\rho_\alpha(\zeta,\eta)^{n_\alpha+1}} d\operatorname{Re}\widetilde{\mathbf{w}}' d\widetilde{\mathbf{z}}',$$

对于 $\zeta = (\widetilde{\mathbf{w}}\ \widetilde{\mathbf{z}}) \in \mathcal{U}, \eta = (\widetilde{\mathbf{w}}', \widetilde{\mathbf{z}}') \in \mathcal{S}$。记

$$\widetilde{w}_\alpha = s_\alpha + \mathbf{i}t_\alpha + \mathbf{i}|\mathbf{z}_\alpha|^2, \qquad \widetilde{w}_\alpha' = s_\alpha' + \mathbf{i}|\mathbf{z}_\alpha'|^2, \qquad \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha = \mathbf{z}_\alpha, \qquad \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha' = \mathbf{z}_\alpha', \tag{3.9}$$

其中 $t_\alpha > 0$。根据定义 (3.4)，我们有

$$\begin{aligned}
\rho_\alpha(\zeta,\eta) &= \mathbf{i}\left(\overline{\widetilde{w}_\alpha'} - \widetilde{w}_\alpha\right) - 2\Phi_\alpha(\widetilde{\mathbf{z}}_\alpha, \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha') \\
&= -\mathbf{i}(s_\alpha - s_\alpha') + \operatorname{Im}\widetilde{w}_\alpha + \operatorname{Im}\widetilde{w}_\alpha' - 2\langle\widetilde{\mathbf{z}}_\alpha, \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha'\rangle \\
&= -\mathbf{i}(s_\alpha - s_\alpha') + t_\alpha + |\mathbf{z}_\alpha|^2 + |\mathbf{z}_\alpha'|^2 - 2\langle\mathbf{z}_\alpha, \mathbf{z}_\alpha'\rangle \\
&= -\mathbf{i}\left(s_\alpha - s_\alpha' - 2\operatorname{Im}\langle\mathbf{z}_\alpha', \mathbf{z}_\alpha\rangle\right) + t_\alpha + |\mathbf{z}_\alpha - \mathbf{z}_\alpha'|^2.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

将 (3.9)-(3.10) 代入 (3.8)，得到再生公式

$$f(\mathbf{w},\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}^{n_1+n_2}} f(\mathbf{s}',\mathbf{z}') \prod_{\alpha=1}^{2} \frac{c_\alpha}{(|\mathbf{z}_\alpha - \mathbf{z}_\alpha'|^2 + t_\alpha - \mathbf{i}(s_\alpha - s_\alpha' - 2\operatorname{Im}\langle\mathbf{z}_\alpha', \mathbf{z}_\alpha\rangle))^{n_\alpha+1}} d\mathbf{s}' d\mathbf{z}'.$$

该结果由海森堡群 $\mathscr{H}_\alpha$的乘法律 (2.1) 得出。 □

3.2. 与 Cauchy-Szegő 核相关的积分算子估计。对于核为 $K(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2')$、作用于 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 上的积分算子 T，即

$$Tf(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2) = \int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2} K(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_1',\mathbf{g}_2') f(\mathbf{g}_1',\mathbf{g}_2') d\mathbf{g}_1' d\mathbf{g}_2',$$

对于固定的 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1'$，我们用 $K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1')$ 表示作用于 $\mathscr{H}_2$ 上函数、核为

$$K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1')(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_2') := K(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_1',\mathbf{g}_2').$$

积分算子 $K^{(2)}(\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_2')$ 的定义类似。

算子 T 与 $e^{-\tau_1\triangle_1}$ 的复合是算子 $T \circ e^{-\tau_1\triangle_1}$，其核为 nel

$$K_{\tau_1,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}') := \int_{\mathscr{H}_1} K(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{h}_1,\mathbf{g}_2') h_{\tau_1}^{(1)}(\mathbf{h}_1^{-1}\mathbf{g}_1') d\mathbf{h}_1$$

由 $h^{(1)}_{\tau_1}(\mathbf{h}_1^{-1}) = h^{(1)}_{\tau_1}(\mathbf{h}_1)$ 给出，其中 $\mathbf{h}_1 \in \mathscr{H}_1$ （参见 [14]）。类似地，$K_{0,\ \tau_2}(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$ 和 $K_{\tau_1,\ \tau_2}(\mathbf{g}, \mathbf{g}')$ 分别是 $T \circ e^{-\tau_2 \triangle_2}$ 和 $T \circ e^{-\tau_1 \triangle_1} \circ e^{-\tau_2 \triangle_2}$的积分核。

对固定的 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2_+$，记

$$K(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) := S((\mathbf{t}, \mathbf{g}), \mathbf{g}').$$

我们证明，对所有 $\mathbf{t}$，$K(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t})$ 一致满足粗糙双参数 Calder´on-Zygmund 核的条件，这使得我们能够在下一节证明，Cauchy-Szeg˝o 投影将 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$上的一个 $(2, N)$-原子映射为一个 $H^1(\mathscr{U})$ 函数。关于粗糙 Calder´on-Zygmund 算子，参见 [10] [11] 。粗糙双参数 Calder´on-Zygmund 核的结构尤其适合估计相应算子对乘积空间上 $(2, N)$-原子的作用。

命题 3.1. 对任意 $\gamma_1, \tau_1, \gamma_2, \tau_2 > 0$，存在一个绝对常数 $C > 0$，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{\|\mathbf{g}_1'^{-1}\mathbf{g}_1\|_1 > \gamma_1\tau_1} \left\| K^{(1)}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1'; \mathbf{t}) - K^{(1)}_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1'; \mathbf{t}) \right\|_{L^2(\mathscr{H}_2) \to L^2(\mathscr{H}_2)} d\mathbf{g}_1 \le C\gamma_1^{-2}, \\
&\int_{\|\mathbf{g}_2'^{-1}\mathbf{g}_2\|_2 > \gamma_2\tau_2} \left\| K^{(2)}(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2'; \mathbf{t}) - K^{(2)}_{0,\tau_2^2}(\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_2'; \mathbf{t}) \right\|_{L^2(\mathscr{H}_1) \to L^2(\mathscr{H}_1)} d\mathbf{g}_2 \le C\gamma_2^{-2}, \\
&\int_{\substack{\|\mathbf{g}_1'^{-1}\mathbf{g}_1\|_1 > \gamma_1\tau_1 \\ \|\mathbf{g}_2'^{-1}\mathbf{g}_2\|_2 > \gamma_2\tau_2}} \left| K(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) - K_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) - K_{0,\tau_2^2}(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) + K_{\tau_1^2,\tau_2^2}(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) \right| d\mathbf{g} \le C\gamma_1^{-2}\gamma_2^{-2}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

证明。注意，(3.7) 中的 Cauchy-Szeg˝o 核 $S_\alpha(t_\alpha, \mathbf{g}_\alpha)$ 属于全纯 Hardy 空间$H^2(\mathscr{U}_\alpha)$。因此，对固定的 $t_\alpha > 0$，$S_\alpha(t_\alpha + \cdot, \cdot)$ 具有光滑的边界值 $S_\alpha(t_\alpha, \cdot)$，并且根据定义也属于全纯 Hardy 空间 $H^2(\mathscr{U}_\alpha)$。于是，由于 $\mathscr{U}_\alpha$，根据命题 2.3，我们有

$$S_\alpha(t_\alpha + s_\alpha, \mathbf{g}_\alpha) = \int_{\mathscr{H}_\alpha} h^{(\alpha)}_{s_\alpha}(\mathbf{h}_\alpha^{-1}\mathbf{g}_\alpha) S_\alpha(t_\alpha, \mathbf{h}_\alpha)\, d\mathbf{h}_\alpha \tag{3.12}$$

注意到，根据推论 3.1 中的表达式，$S_\alpha\left(t_\alpha, \mathbf{h}_\alpha^{-1}\right) = S_\alpha(t_\alpha, \mathbf{h}_\alpha)$，我们得到

$$\begin{aligned}
K_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) &= \int_{\mathscr{H}_1} h^{(1)}_{\tau_1^2}(\mathbf{h}_1^{-1}\mathbf{g}_1') S_1\left(t_1, \mathbf{h}_1^{-1}\mathbf{g}_1\right) d\mathbf{h}_1 \cdot S_2\left(t_2, \mathbf{g}_2'^{-1}\mathbf{g}_2\right) \\
&= \overline{\int_{\mathscr{H}_1} h^{(1)}_{\tau_1^2}(\mathbf{h}_1^{-1}\mathbf{g}_1') S_1\left(t_1, \mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{h}_1\right) d\mathbf{h}_1} \cdot S_2\left(t_2, \mathbf{g}_2'^{-1}\mathbf{g}_2\right) \\
&= \overline{S_1\left(t_1 + \tau_1^2, \mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{g}_1'\right)} S_2\left(t_2, \mathbf{g}_2'^{-1}\mathbf{g}_2\right) \\
&= S_1\left(t_1 + \tau_1^2, \mathbf{g}_1'^{-1}\mathbf{g}_1\right) S_2\left(t_2, \mathbf{g}_2'^{-1}\mathbf{g}_2\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

利用 (3.12) 以及 $h^{(1)}$ 的实性，得到

$$K(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) - K_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g}, \mathbf{g}'; \mathbf{t}) = \left[S_1\left(t_1, \mathbf{g}_1'^{-1}\mathbf{g}_1\right) - S_1\left(t_1 + \tau_1^2, \mathbf{g}_1'^{-1}\mathbf{g}_1\right)\right] S_2\left(t_2, \mathbf{g}_2'^{-1}\mathbf{g}_2\right). \tag{3.14}$$

现在，若我们将 $\mathbf{g}_\alpha'^{-1}\mathbf{g}_\alpha = (s_\alpha, \mathbf{z}_\alpha) \in \mathscr{H}_\alpha$ 写作，则

$$\begin{aligned}
&\left|S_\alpha\left(t_\alpha, \mathbf{g}_\alpha'^{-1}\mathbf{g}_\alpha\right) - S_\alpha\left(t_\alpha + \tau_\alpha^2, \mathbf{g}_\alpha'^{-1}\mathbf{g}_\alpha\right)\right| \\
=&c_\alpha \left| \frac{(|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha + \tau_\alpha^2 - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha+1} - (|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha+1}}{(|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha+1}(|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha + \tau_\alpha^2 - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha+1}} \right| \\
=&c_\alpha \left| \frac{\tau_\alpha^2 \sum_{a=0}^{n_\alpha} (|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha + \tau_\alpha^2 - \mathbf{i}s_\alpha)^a (|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha - a}}{(|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha+1}(|\mathbf{z}_\alpha|^2 + t_\alpha + \tau_\alpha^2 - \mathbf{i}s_\alpha)^{n_\alpha+1}} \right| \\
\le& c'_\alpha \frac{\tau_\alpha^2}{||\mathbf{z}_\alpha|^2 - \mathbf{i}s_\alpha|^{n_\alpha+2}} = c'_\alpha \frac{\tau_\alpha^2}{\|\mathbf{g}_\alpha'^{-1}\mathbf{g}_\alpha\|_\alpha^{Q_\alpha+2}}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

根据推论 3.1，其中 $c'_\alpha := c_\alpha(n_\alpha+1)$。因此，对于 $f\in L^2(\mathscr{H}_2)$，

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}'_1;\mathbf{t})-\ K^{(1)}_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}'_1;\mathbf{t})\right]f\right\|_{L^2(\mathscr{H}_2)}\\
=&\left(\int_{\mathscr{H}_2}\left|\int_{\mathscr{H}_2}[K(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})]f(\mathbf{g}'_2)d\mathbf{g}'_2\right|^2 d\mathbf{g}_2\right)^{\frac12}\\
=&\left|S_1\left(t_1,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)-S_1\left(t_1+\tau_1^2,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)\right|\left(\int_{\mathscr{H}_2}\left|\int_{\mathscr{H}_2}S_2\left(t_2,{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\right)f(\mathbf{g}'_2)d\mathbf{g}'_2\right|^2 d\mathbf{g}_2\right)^{\frac12}\\
=&\left|S_1\left(t_1,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)-S_1\left(t_1+\tau_1^2,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)\right|\|(\mathcal{P}_2f)(t_2,\cdot)\|_{L^2(\mathscr{H}_2)}\\
\le&c'_1\frac{\tau_1^2}{\|{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1^{Q_1+2}}\|f\|_{L^2(\mathscr{H}_2)}
\end{aligned}$$

由 (3.14)-(3.15)，其中对于任意 $t_2>0$, $f\mapsto(\mathcal{P}_2f)(t_2,\cdot)$，Cauchy-Szeg˝o 投影 $\mathcal{P}_2$ 在 $\mathscr{U}_2$ 上是 $L^2(\mathscr{H}_2)$ 有界的，其范数为 ≤ 1。因此，

$$\begin{aligned}
&\int_{\|{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1>\gamma_1\tau_1}\left\|K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}'_1;\mathbf{t})-K^{(1)}_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}'_1;\mathbf{t})\right\|_{L^2(\mathscr{H}_2)\to L^2(\mathscr{H}_2)}d\mathbf{g}_1\\
\le&\int_{\|{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1>\gamma_1\tau_1}\frac{c'_1\tau_1^2}{\|{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1^{Q_1+2}}d\mathbf{g}_1=\frac{c'_1}{\gamma_1^2}\int_{\|\mathbf{h}_1\|_1>1}\frac{1}{\|\mathbf{h}_1\|_1^{Q_1+2}}d\mathbf{h}_1=C\gamma_1^{-2},
\end{aligned}$$

通过重新缩放并利用测度 $d\mathbf{g}_1$ 的不变性。式 (3.11) 中的第一个估计得证。类似地可证明式 (3.11) 中的第二个估计。

与 (3.13) 一样，我们有

$$\begin{aligned}
K_{0,\tau_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})&=S_1\left(t_1,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)S_2\left(t_2+\tau_2^2,{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\right),\\
K_{\tau_1^2,\tau_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})&=S_1\left(t_1+\tau_1^2,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)S_2\left(t_2+\tau_2^2,{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\right).
\end{aligned}\tag{3.16}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\left|K(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{0,\tau_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})+K_{\tau_1^2,\tau_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\right|\\
=&\left|\left[S_1\left(t_1,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)-S_1\left(t_1+\tau_1^2,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)\right]S_2\left(t_2,{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\right)\right.\\
&\quad\left.-\left[S_1\left(t_1,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)-S_1\left(t_1+\tau_1^2,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)\right]S_2\left(t_2+\tau_2^2,{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\right)\right|\\
=&\left|S_1\left(t_1,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)-S_1\left(t_1+\tau_1^2,{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\right)\right|\left|S_2\left(t_2,{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\right)-S_2\left(t_2+\tau_2^2,{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\right)\right|\\
\le&\prod_{\alpha=1}^2\frac{c'_\alpha\tau_\alpha^2}{\|{\mathbf{g}'_\alpha}^{-1}\mathbf{g}_\alpha\|_\alpha^{Q_\alpha+2}}
\end{aligned}$$

由估计式 (3.15) 可得。于是，

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\|{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1>\gamma_1\tau_1\\ \|{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\|_2>\gamma_2\tau_2}}\left|K(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{\tau_1^2,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{0,\tau_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})+K_{\tau_1^2,\tau_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\right|d\mathbf{g}_1d\mathbf{g}_2\\
\le&c'_1c'_2\int_{\substack{\|{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1>\gamma_1\tau_1\\ \|{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\|_2>\gamma_2\tau_2}}\frac{\tau_1^2\tau_2^2}{\|{\mathbf{g}'_1}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1^{Q_1+2}\|{\mathbf{g}'_2}^{-1}\mathbf{g}_2\|_2^{Q_2+2}}d\mathbf{g}_1d\mathbf{g}_2\\
\le&\frac{c'_1c'_2}{\gamma_1^2\gamma_2^2}\int_{\substack{\|\mathbf{h}_1\|_1>1\\ \|\mathbf{h}_2\|_2>1}}\frac{1}{\|\mathbf{h}_1\|_1^{Q_1+2}\|\mathbf{h}_2\|_2^{Q_2+2}}d\mathbf{h}_1d\mathbf{h}_2=\frac{C}{\gamma_1^2\gamma_2^2}
\end{aligned}$$

通过重新缩放并再次利用测度 $d\mathsf{g}_1 d\mathsf{g}_2$ 的不变性。 □

4. The boundedness of the Cauchy-Szegő projection from $H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ to $H^1(\mathscr{U})$

4.1. 齐性型空间中的 Journ´e 覆盖引理。我们需要在齐性型空间上构造一个类似于 Christ 的欧氏二进立方体网格的对应物。

引理**4.1.** [6] 设 (X, d, μ) 是一个齐性型空间。那么存在一个集族 $\{I_\alpha^k \subset X;\ \alpha \in \mathcal{I}_k, k \in \mathbb{Z}\}$，由 X 的开子集组成，其中 $\mathcal{I}_k$ 是某个可数指标集，且存在常数 $C_1, C_2 > 0$，使得

(i) $\mu(X \setminus \bigcup_\alpha I_\alpha^k) = 0$ 对每个固定的 k 均成立，且当 $\alpha \neq \beta$ 时 $I_\alpha^k \bigcap I_\beta^k = \emptyset$；(ii) 对所有满足 $l \geq k$ 的 α, β, k, l，要么 $I_\alpha^k \bigcap I_\beta^l = \emptyset$，要么 $I_\alpha^k \supset I_\beta^l$；(iii) 对每个 (k, α) 及每个 $l < k$，存在唯一的 β 使得 $I_\alpha^k \subset I_\beta^l$；(iv) $l(I_\alpha^k) := \mathrm{diam}(I_\alpha^k) \leq C_1 2^{-k}$；(v) 每个 I_α^k 都包含某个球 $B(z_\alpha^k, C_2 2^{-k})$，其中 $z_\alpha^k \in X$。

我们可以将 $(2, N)$-原子的定义中的绝对常数 $\overline{C}$ 取得足够大，从而在 (iv)-(v) 中取 $C_1 = \overline{C}$ 和 $C_2 = \overline{C}^{-1}$。点 z_α^k 称为集合 I_α^k 的中心。我们也称 I_α^k 为一个二进立方体，其直径约为 $\overline{C} 2^{-k}$，中心为 z_α^k。我们将集合 λI_α^k 称为与 I_α^k 同中心、直径为 $\lambda \mathrm{diam}(I_\alpha^k)$ 的立方体。令 $\{I_\alpha^k;\ \alpha \in \mathcal{I}_k, k \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\{J_\beta^l;\ \beta \in \mathcal{J}_l, l \in \mathbb{Z}\}$ 分别为海森堡群 $\mathscr{H}_1$ 和 $\mathscr{H}_2$ 上由引理**4.1**给出的二进立方体。开集 $I_\alpha^k \times J_\beta^l$（其中 $\alpha \in \mathcal{I}_k, \beta \in \mathcal{J}_l (k, l \in \mathbb{Z})$）称为 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 中的二进矩形。

对于 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 中具有有限测度的开集 Ω 和每个矩形 $R = I \times J$，令 I^* 为 $\mathscr{H}_1$ 中包含 I 且满足 $I^* \times J \subset \Omega$ 的最大˜二进立方体，其中 $\Omega := \{\mathsf{g} \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 : M_S(\chi_\Omega)(\mathsf{g}) > 1/2\}$，而 M_S 表示强极大函数。接下来，令 J^* 为 $\mathscr{H}_2$ 中包含˜ ∼ ∼J 且满足 $I^* \times J^* \subset \Omega$ 的最大二进立方体，其中 $\Omega := \{\mathsf{g} \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2; M_S(\chi_{\tilde{\Omega}})(\mathsf{g}) > 1/2\}$。现在令

$$R^* = \breve{C} I^* \times \breve{C} J^*, \qquad \text{where} \quad \breve{C} = 2\overline{C}^3.$$

强极大函数定理的一个应用表明

$$\left| \bigcup_{R \subset \Omega} R^* \right| \leq C \left| \tilde{\tilde{\Omega}} \right| \leq C|\tilde{\Omega}| \leq C|\Omega|.$$

引理 **4.2.** [19] 用 $m_\alpha(\Omega)$ 表示满足 g_α-方向上的极大性且 $R \subset \Omega$ 的二进矩形族，其中 $\alpha = 1, 2$。设 Ω 为 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 中具有有限测度的开子集，且 $\kappa > 0$。那么

$$\begin{aligned} \sum_{R = I \times J \in m_1(\Omega)} |R| \left(\frac{\ell(J)}{\ell(J^*)} \right)^\kappa &\leq C|\Omega|, \\ \sum_{R = I \times J \in m_2(\Omega)} |R| \left(\frac{\ell(I)}{\ell(I^*)} \right)^\kappa &\leq C|\Omega|, \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中某个与 Ω 无关的常数 C。

4.2. Cauchy-Szeg˝o 投影对 $(2, N)$-原子的作用。

定理 **4.1.** 对群 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$上的任意 $(2, N)$-原子 a， $\mathcal{P}(a)$ 属于 $H^1(\mathscr{U})$，且

$$\|\mathcal{P}(a)\|_{H^1(\mathscr{U})} \leq C_{Q_1, Q_2, N}$$

其中某个常数 $C_{Q_1, Q_2, N}$ 仅取决于 Q_1, Q_2, N。

证明。设 $a=\sum_{R\in m(\Omega)} a_R$。注意，对于固定的 $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^2_+$,

$$\|\mathcal{P}a(\mathbf{t},\cdot)\|_{L^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}=\|\mathcal{P}a(\mathbf{t},\cdot)\|_{L^1(\cup R^*)}+\|\mathcal{P}a(t,\cdot)\|_{L^1((\cup R^*)^c)}.$$

由于 $\mathcal{P}$ 是从 $L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 到 $H^2(\mathscr{U})$ 的有界算子，根据 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}a(\mathbf{t},\cdot)\|_{L^1(\cup R^*)}&=\int_{\cup R^*}|\mathcal{P}a(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\le C|\cup R^*|^{\frac12}\left(\int_{\cup R^*}|\mathcal{P}a(\mathbf{t},\mathbf{g})|^2d\mathbf{g}\right)^{\frac12}\\&\le C|\Omega|^{\frac12}\|a\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\le C|\Omega|^{\frac12}|\Omega|^{-\frac12}=C.\end{aligned}\tag{4.2}$$

因此，要证明该定理，只需验证 $\|\mathcal{P}a(t,\cdot)\|_{L^1((\cup R^*)^c)}$ 的一致有界性。记

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}a(\mathbf{t},\cdot)\|_{L^1((\cup R^*)^c)}&=\int_{(\cup R^*)^c}|\mathcal{P}a(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\le\sum_{R\in m(\Omega)}\int_{(R^*)^c}|\mathcal{P}a_R(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\&\le\sum_{R\in m(\Omega)}\int_{(\check{C}I^*)^c\times\mathscr{H}_2}|\mathcal{P}a_R(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}+\sum_{R\in m(\Omega)}\int_{\mathscr{H}_1\times(\check{C}J^*)^c}|\mathcal{P}a_R(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\&=:\sum_{R\in m(\Omega)}I_1^R+\sum_{R\in m(\Omega)}I_2^R.\end{aligned}\tag{4.3}$$

对于 $R=I\times J$，记 $\ell_1=l(I)$、$\ell_2=l(J)$，以及

$$a_{R,1}:=\left(\triangle_1^N\otimes\triangle_2^{N-1}\right)b_R,\qquad a_{R,2}:=\left(\triangle_1^{N-1}\otimes\triangle_2^N\right)b_R.$$

于是，我们有

$$a_R=(\triangle_1\otimes\mathrm{Id}_2)\,a_{R,2}=(\mathrm{Id}_1\otimes\triangle_2)\,a_{R,1},$$

其中，Id_α 是 $L^2(\mathscr{H}_\alpha)$上的恒等算子，$\alpha=1,\ 2$。

现在，对于项 I_1^R，我们可以写成

$$I_1^R=\int_{(\check{C}I^*)^c\times\check{C}J^*}|\mathcal{P}a_R(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}+\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}|\mathcal{P}a_R(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}=:I_{11}^R+I_{12}^R.$$

我们将 $L^2(\mathscr{H}_1)$上的恒等算子分解如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_1&=\left(\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}sds\right)\mathrm{Id}_1\\&=\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}s(\mathrm{Id}_1-e^{-s^2\triangle_1})ds+\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}se^{-s^2\triangle_1}ds=:\mathrm{Id}_{\ell_1,1}+\mathrm{Id}_{\ell_1,2}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

于是，对于 I_{11}^R，我们有

$$\begin{aligned}I_{11}^R&=\int_{(\check{C}I^*)^c\times\check{C}J^*}|\mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_1(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\&\le\int_{(\check{C}I^*)^c\times\check{C}J^*}|\mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,1}(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}+\int_{(\check{C}I^*)^c\times\check{C}J^*}|\mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,2}(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\&=:I_{111}^R+I_{112}^R.\end{aligned}$$

对于 I_{111}^R，我们有

$$I_{111}^R\le\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}\int_{(\check{C}I^*)^c\times\check{C}J^*}\left|\mathcal{P}\circ(\mathrm{Id}_1-e^{-s^2\triangle_1})(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})\right|d\mathbf{g}sds.$$

现在我们使用以下记号：对于定义在 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 上的给定函数 f，以及固定的 $\mathbf{g}_1\in\mathscr{H}_1$，令 $f_{\mathbf{g}_1}$ 为定义在 $\mathscr{H}_2$ 上的函数，其定义为 $f_{\mathbf{g}_1}(\mathbf{g}_2):=f(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2)$。于是，

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\circ(\mathrm{Id}_1-e^{-s^2\triangle_1})(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2)&=\left[\left(\mathcal{P}-\mathcal{P}\circ e^{-s^2\triangle_1}\right)(a_R)\right]_{\mathbf{g}_1}(\mathbf{t},\mathbf{g}_2)\\&=\int_{\overline{C}I}\left[K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})-K^{(1)}_{s^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})\right](a_R)_{\mathbf{g}_1'}(\mathbf{g}_2)d\mathbf{g}_1'\end{aligned}$$

根据算子 $K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})$ 和 $K^{(1)}_{s^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})$ 对固定 $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^2_+$ 的定义。因此，由 H¨older 不等式和 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}I^R_{111}&\le\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}sds\int_{(\breve{C}I^*)^c\times\breve{C}J^*}\left|\left[\left(\mathcal{P}-\mathcal{P}\circ e^{-s^2\triangle_1}\right)(a_R)\right]_{\mathbf{g}_1}(\mathbf{t},\mathbf{g}_2)\right|d\mathbf{g}_1d\mathbf{g}_2\\&\le\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}sds\int_{(\breve{C}I^*)^c}d\mathbf{g}_1\left(\int_{\breve{C}J^*}\left|\left[\left(\mathcal{P}-\mathcal{P}\circ e^{-s^2\triangle_1}\right)(a_R)\right]_{\mathbf{g}_1}(\mathbf{t},\mathbf{g}_2)\right|^2d\mathbf{g}_2\right)^{\frac12}|\breve{C}J^*|^{\frac12}\\&\le\frac{C|J|^{\frac12}}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}sds\int_{(\breve{C}I^*)^c}d\mathbf{g}_1\int_{\overline{C}I}\left(\int_{\breve{C}J^*}\left|\left[K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})-K^{(1)}_{s^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})\right](a_R)_{\mathbf{g}_1'}(\mathbf{g}_2)\right|^2d\mathbf{g}_2\right)^{\frac12}d\mathbf{g}_1'\\&\le\frac{C|J|^{\frac12}}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}sds\int_{(\breve{C}I^*)^c}d\mathbf{g}_1\int_{\overline{C}I}\left\|K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})-K^{(1)}_{s^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})\right\|_{L^2\to L^2}\|(a_R)_{\mathbf{g}_1'}\|_{L^2(\mathscr{H}_2)}d\mathbf{g}_1'.\end{aligned}$$

令 $I=I^k_\alpha$。那么，$I^*=\lambda I^k_\alpha$ 对于某个 $\lambda\ge1$。根据二进立方体的定义，我们有 $\breve{C}I^*\supset B(z^k_\alpha,2\overline{C}^2\lambda2^{-k})$，因此 $\mathbf{g}_1\in(\breve{C}I^*)^c\subset B(z^k_\alpha,2\overline{C}^2\lambda2^{-k})^c$，而 $\mathbf{g}_1'\in\overline{C}I^k_\alpha\subset B(z^k_\alpha,\overline{C}^2 2^{-k})$。因此，

$$\|{\mathbf{g}_1'}^{-1}\mathbf{g}_1\|_1>\overline{C}l(I^*)=\overline{C}\frac{l(I^*)}{l(I)}\ell_1\ge\overline{C}\frac{l(I^*)}{l(I)}s.$$

记 $\gamma_1(R):=\overline{C}^{l(I^*)}\frac{}{l(I)}$ 那么我们得到

$$\begin{aligned}I^R_{111}&\le\frac{C|J|^{\frac12}}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}sds\int_{\overline{C}I}d\mathbf{g}_1'\int_{\|{\mathbf{g}_1'}^{-1}\mathbf{g}_1\|>\gamma_1(R)s}\left\|K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})-K^{(1)}_{s^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})\right\|_{L^2\to L^2}\|(a_R)_{\mathbf{g}_1'}\|_{L^2}d\mathbf{g}_1\\&\le\frac{C|J|^{\frac12}}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1}sds\int_{\overline{C}I}\gamma_1(R)^{-2}\|(a_R)_{\mathbf{g}_1'}\|_{L^2(\mathscr{H}_2)}d\mathbf{g}_1'\\&\le C\gamma_1(R)^{-2}|J|^{\frac12}\left(\int_{\overline{C}I}\|(a_R)_{\mathbf{g}_1'}\|^2_{L^2(\mathscr{H}_2)}d\mathbf{g}_1'\right)^{\frac12}|I|^{\frac12}\\&\le C\gamma_1(R)^{-2}|R|^{\frac12}\|a_R\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)},\end{aligned}$$

利用命题 3.1。应用 Journ´e 的覆盖引理 4.2，得到

$$\begin{aligned}\sum_{R\in m(\Omega)}I^R_{111}&\le C\left(\sum_{R\in m_2(\Omega)}\gamma_1(R)^{-4}|R|\right)^{\frac12}\left(\sum_{R\in m(\Omega)}\left\|(\triangle_1^N\otimes\triangle_2^N)b_R\right\|^2_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\right)^{\frac12}\\&\le C|\Omega|^{\frac12}|\Omega|^{-\frac12}=C,\end{aligned}$$

根据（1.2）中关于 $\sigma_1=N,\sigma_2=N$ 的 $(2,N)$-原子条件。

为了估计 I_{112}^R，注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_{\ell_1,2}(a_R) &= \left(\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1} s e^{-s^2\triangle_1} ds\right)(\triangle_1\otimes \mathrm{Id}_2)\, a_{R,2} = \left(\frac{2}{\ell_1^2}\int_0^{\ell_1} s\triangle_1 e^{-s^2\triangle_1} ds\right) a_{R,2}\\ &= \frac{1}{\ell_1^2}\left(\mathrm{Id}_1 - e^{-\ell_1^2\triangle_1}\right) a_{R,2}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

因此我们有

$$I_{112}^R \le \frac{1}{\ell_1^2}\int_{(\check{C}I^*)^c\times \check{C}J^*} \left|\mathcal{P}\circ\left(\mathrm{Id}_1 - e^{-\ell_1^2\triangle_1}\right)(a_{R,2})(\mathbf{t},\mathbf{g})\right| d\mathbf{g}.$$

与我们对 I_{111}^R 所做的类似，可得

$$\begin{aligned} I_{112}^R &\le \frac{C}{\ell_1^2}|J|^{\frac12}\int_{(\check{C}I^*)^c} d\mathbf{g}_1 \int_{\overline{C}I} \left\|K^{(1)}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t}) - K^{(1)}_{\ell_1^2,0}(\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_1';\mathbf{t})\right\|_{L^2(\mathscr{H}_2)\to L^2(\mathscr{H}_2)} \|(a_{R,2})_{\mathbf{g}_1'}\|_{L^2(\mathscr{H}_2)} d\mathbf{g}_1'\\ &\le \frac{C}{\ell_1^2}\gamma_1(R)^{-2}|J|^{\frac12}\int_{\overline{C}I}\|(a_{R,2})_{\mathbf{g}_1'}\|_{L^2(\mathscr{H}_2)} d\mathbf{g}_1'\\ &\le C\frac{1}{\ell_1^2}\gamma_1(R)^{-2}|J|^{\frac12}\left(\int_{\overline{C}I}\|(a_{R,2})_{\mathbf{g}_1'}\|_{L^2(\mathscr{H}_2)}^2 d\mathbf{g}_1'\right)^{\frac12}|I|^{\frac12}\\ &\le \frac{C}{l(I)^2}\gamma_1(R)^{-2}|R|^{\frac12}\|a_{R,2}\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}.\end{aligned}$$

应用 Journ´e 的覆盖引理 引理 4.2，可得

$$\begin{aligned}\sum_{R\in m(\Omega)} I_{112}^R &\le C\left(\sum_{R\in m_2(\Omega)}\gamma_1(R)^{-4}|R|\right)^{\frac12}\left(\sum_{R=I\times J\in m(\Omega)} l(I)^{-4}\|(\triangle_1^{N-1}\otimes\triangle_2^N)b_R\|_{L^2(\mathscr{H})}^2\right)^{\frac12}\\ &\le C|\Omega|^{\frac12}|\Omega|^{-\frac12} = C,\end{aligned}$$

根据（1.2）中 $\sigma_1 = N-1, \sigma_2 = N$ 对 N-原子的条件。因此，$\sum_{R\in m(\Omega)} I_{11}^R$ 是有界的。现在来估计 I_{12}^R。我们将 $L^2(\mathscr{H}_2)$ 上的恒等算子分解如下：

$$\mathrm{Id}_2 = \frac{2}{\ell_2^2}\int_0^{\ell_2} s(\mathrm{Id}_2 - e^{-s^2\triangle_2})ds + \frac{2}{\ell_2^2}\int_0^{\ell_2} s e^{-s^2\triangle_2} ds =: \mathrm{Id}_{\ell_2,1} + \mathrm{Id}_{\ell_2,2}.$$

与（4.5）中一样

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_{\ell_2,2}(a_R) &= \left(\frac{2}{\ell_2^2}\int_0^{\ell_2} s e^{-s^2\triangle_2} ds\right)(\mathrm{Id}_1\otimes\triangle_2)\, a_{R,1} = \left(\frac{2}{\ell_2^2}\int_0^{\ell_2} s\triangle_2 e^{-s^2\triangle_2} ds\right) a_{R,1}\\ &= \frac{1}{\ell_2^2}\left(\mathrm{Id}_2 - e^{-\ell_2^2\triangle_2}\right) a_{R,1}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

若记

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_1\circ\mathrm{Id}_2 = \mathcal{P}\circ(\mathrm{Id}_{\ell_1,1}+\mathrm{Id}_{\ell_1,2})\circ(\mathrm{Id}_{\ell_2,1}+\mathrm{Id}_{\ell_2,2})\\ &= \mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,1}\circ\mathrm{Id}_{\ell_2,1} + \mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,1}\circ\mathrm{Id}_{\ell_2,2} + \mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,2}\circ\mathrm{Id}_{\ell_2,1} + \mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,2}\circ\mathrm{Id}_{\ell_2,2}\\ &=: \mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_3+\mathcal{P}_4,\end{aligned}$$

于是我们有

$$I_{12}^R \le \sum_{j=1}^4 \int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c} |\mathcal{P}_j(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})| d\mathbf{g} =: \sum_{j=1}^4 I_{12j}^R.$$

注意到

$$\begin{aligned}
I^R_{121} &= \frac{4}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_0^{\ell_2} s_2ds_2\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c} |\mathcal{P}(\mathrm{Id}_1-e^{-s_1^2\triangle_1})(\mathrm{Id}_2-e^{-s_2^2\triangle_2})(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\
&\le \frac{4}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_0^{\ell_2} s_2ds_2\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c} \left|(\mathcal{P}-\mathcal{P}e^{-s_1^2\triangle_1}-\mathcal{P}e^{-s_2^2\triangle_2}+\mathcal{P}e^{-s_1^2\triangle_1}e^{-s_2^2\triangle_2})(a_R)\right| d\mathbf{g}\\
&= \frac{4}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_0^{\ell_2} s_2ds_2\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c} \left|\int_{\overline{C}R}\Big(K(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{s_1^2,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{0,s_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\right.\\
&\qquad\qquad \left.+K_{s_1^2,s_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\Big)(a_R)(\mathbf{g}')d\mathbf{g}'\right| d\mathbf{g}\\
&\le \frac{4}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_0^{\ell_2} s_2ds_2\int_{\overline{C}R} d\mathbf{g}'\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}\Big|K(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{s_1^2,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{0,s_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\\
&\qquad\qquad +K_{s_1^2,s_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\Big||a_R(\mathbf{g}')|d\mathbf{g}\\
&\le C\gamma_1(R)^{-2}\gamma_2(R)^{-2}\frac{1}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_0^{\ell_2} s_2ds_2\int_{\overline{C}R}|a_R(\mathbf{g}')|d\mathbf{g}'\\
&\le C\gamma_1(R)^{-2}\gamma_2(R)^{-2}|R|^{\frac{1}{2}}\|a_R\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}
\end{aligned}$$

再次利用命题 3.1，其中 $\gamma_2(R):=\overline{C}^{\,l(J^*)\,l(J)}$。对于 I^R_{122}，由 (4.4) 和 (4.6)，我们得到

$$\begin{aligned}
I^R_{122} &= \int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}|\mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,1}\circ\mathrm{Id}_{\ell_2,2}(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\
&\le \frac{2}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}|\mathcal{P}(\mathrm{Id}_1-e^{-s_1^2\triangle_1})(\mathrm{Id}_2-e^{-\ell_2^2\triangle_2})(a_{R,1})(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\
&\le \frac{2}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_{\overline{C}R}d\mathbf{g}'\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}\Big|K(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{s_1^2,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{0,\ell_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\\
&\qquad\qquad +K_{s_1^2,\ell_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\Big||(a_{R,1})(\mathbf{g}')|d\mathbf{g}\\
&\le C\gamma_1(R)^{-2}\gamma_2(R)^{-2}\frac{1}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_0^{\ell_1} s_1ds_1\int_{\overline{C}R}|(a_{R,1})(\mathbf{g}')|d\mathbf{g}'\\
&\le C\gamma_1(R)^{-2}\gamma_2(R)^{-2}l(J)^{-2}|R|^{\frac{1}{2}}\|a_{R,1}\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}.
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$I^R_{123}\le C\gamma_1(R)^{-2}\gamma_2(R)^{-2}l(I)^{-2}|R|^{\frac{1}{2}}\|a_{R,2}\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}.$$

通过 $\triangle_1$ 交换 $\triangle_2$,

$$\begin{aligned}
I^R_{124} &= \int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}|\mathcal{P}\circ\mathrm{Id}_{\ell_1,2}\circ\mathrm{Id}_{\ell_2,2}(a_R)(\mathbf{t},\mathbf{g})|d\mathbf{g}\\
&\le \frac{1}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}\left|\mathcal{P}(\mathrm{Id}_1-e^{-\ell_1^2\triangle_1})(\mathrm{Id}_2-e^{-\ell_2^2\triangle_2})(\triangle_1^{N-1}\otimes\triangle_2^{N-1})b_R\right|(\mathbf{t},\mathbf{g})d\mathbf{g}\\
&\le \frac{1}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_{\overline{C}R}d\mathbf{g}'\int_{(\check{C}I^*)^c\times(\check{C}J^*)^c}\left|K(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{\ell_1^2,0}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})-K_{0,\ell_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})+K_{\ell_1^2,\ell_2^2}(\mathbf{g},\mathbf{g}';\mathbf{t})\right|\\
&\qquad\qquad \left|(\triangle_1^{N-1}\otimes\triangle_2^{N-1})b_R(\mathbf{g}')\right|d\mathbf{g}.
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} I_{124}^R &\le C\gamma_1(R)^{-2}\gamma_2(R)^{-2}\frac{1}{\ell_1^2\ell_2^2}\int_{\overline{C}R}\left|(\triangle_1^{N-1}\otimes\triangle_2^{N-1})b_R(\mathbf{g}')\right|d\mathbf{g}' \\ &\le C\gamma_1(R)^{-2}\gamma_2(R)^{-2}l(I)^{-2}l(J)^{-2}|R|^{\frac{1}{2}}\|(\triangle_1^{N-1}\otimes\triangle_2^{N-1})b_R\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}. \end{aligned}$$

应用 Journ´e 的覆盖引理 4.2、H¨older 不等式以及 (1.2) 中 $(2,N)$-原子的条件，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{R=I\times J\in m(\Omega)} I_{124}^R \le& C\left(\sum_{R\in m_2(\Omega)}\gamma_1(R)^{-8}|R|\right)^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{R\in m_1(\Omega)}\gamma_2(R)^{-8}|R|\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\cdot\left(\sum_{R=I\times J\in m(\Omega)} l(I)^{-4}l(J)^{-4}\|(\triangle_1^{N-1}\otimes\triangle_2^{N-1})b_R\|^2_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \le& C|\Omega|^{\frac{1}{4}}|\Omega|^{\frac{1}{4}}|\Omega|^{-\frac{1}{2}} = C. \end{aligned}$$

对 $\sum_{R\in m(\Omega)} I_{12j}^R$, $j=1,2,3$ 也有类似的估计。因此

$$\sum_{R\in m(\Omega)} I_{12}^R \le \sum_{R\in m(\Omega)}\sum_{j=1}^4 I_{12j}^R \le C,$$

因此 $\sum_{R\in m(\Omega)} I_1^R$一致有界。通过交换变量 g_1 和 g_2，即可得到 (4.3) 中关于 $\sum_{R\in m(\Omega)} I_2^R$ 的估计。命题得证。□

4.3. 原子 Hardy 空间。我们称 $f=\sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j$ 是 f 的一个 $(2,N)$-原子表示，如果每个 a_j 都是一个 $(2,N)$-原子，$\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|<+\infty$，且该级数在 $L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 中收敛。令

$$\mathbb{H}^1_{at,N}(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)=\{f; f \text{ has a } (2,N)\text{-atomic representation}\}$$

其范数定义为对 f 的所有可能表示中 $\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|$ 的下确界。于是，原子双参数 Hardy 空间 $H^1_{at,\ N}(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 定义为在此范数下 $\mathbb{H}^1_{at,\ N}(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 的完备化。根据 [5, 定理 2.9] [8, 命题 3.5、5.2、5.3], , 分层李群上的双参数 Hardy 空间可由原子分解、面积函数或极大函数刻画，且它们彼此等价。

定理 4.2。假设 $N>\max\{Q_1,Q_2\}/4$。那么，$H^1_{at,\ N}(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)=H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$，且它们具有等价范数。

根据定义，$H^1_{at,\ N}(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 的一个元素 f 可写为

$$f=\sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j, \tag{4.7}$$

该级数作为广义函数收敛，其中每个 a_j 都是一个 $(2,N)$-原子，且 $\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|<+\infty$。$f\in H^1_{at,\ N}(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 的范数是对 f 的所有可能分解中 $\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|$ 的下确界。

Pro命题 4.1. $\mathcal{P}$ 可以扩展为从 $H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 到 $H^1(\mathscr{U}$ 的有界算子).

证明。对于任意由 $(2,N)$-原子组成的有限和 $S=\sum_{k=1}^M\lambda_k a_k$，利用定理 4.1，我们有

$$\|\mathcal{P}(S)\|_{H^1(\mathscr{U})}\le\sum_{k=1}^M\|\mathcal{P}(a_k)\|_{H^1(\mathscr{U})}|\lambda_k|\le C\sum_{k=1}^M|\lambda_k|. \tag{4.8}$$

由于由 $(2,N)$-原子组成的有限和在 $H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 中稠密，因此结论成立。 □

5. Holomorphic atomic decomposition

5.1. $H^1(\mathscr{U})$函数的极大函数。下面的估计是 [12, 引理 8.5]的双参数推广。

引理 5.1. 假设 u 在 $\mathscr{U}$ 上满足热方程 $(\partial_{t_\alpha}+\triangle_\alpha)\,u=0,\ \ \alpha=1,\ 2,$ 且 $u^*\in L^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$。那么，存在一个仅依赖于 p、Q_1、Q_2的常数 $C>0$，使得

$$|u(\mathbf{t},\mathbf{g})|\le C\|u^*\|_{L^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\,t_1^{-\frac{Q_1}{2p}}t_2^{-\frac{Q_2}{2p}},$$

对于任意 $(\mathbf{t},\mathbf{g})\in\mathscr{U}$。

证明。由于当 $\|\mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{h}_1\|_1^2<t_1$、$\|\mathbf{g}_2^{-1}\mathbf{h}_2\|_2^2<t_2$时，$|u(\mathbf{t},\mathbf{g})|\le u^*(\mathbf{h})$，因此我们有

$$\begin{aligned}|u(\mathbf{t},\mathbf{g})|^p&\le\frac{1}{|B_1(\mathbf{g}_1,\sqrt{t}_1)||B_2(\mathbf{g}_2,\sqrt{t}_2)|}\int_{B_1(\mathbf{g}_1,\sqrt{t}_1)\times B_2(\mathbf{g}_2,\sqrt{t}_2)}|u^*(\mathbf{h})|^p dV(\mathbf{h})\\&\le C\|u^*\|^p_{L^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\,t_1^{-\frac{Q_1}{2}}t_2^{-\frac{Q_2}{2}},\end{aligned}$$

其中常数 C 仅依赖于 p、Q_1、Q_2。 □

命题 5.1. 若 $f\in H^1(\mathscr{U})$，则 $\|f^*\|_{L^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\lesssim\|f\|_{H^1(\mathscr{U})}$。

证明。注意到 f 在 $\mathscr{U}$ 上光滑，因为 $(\pi^{-1})^*f$ 在 $\mathcal{U}$ 上全纯，且 π 是微分同胚。固定 $\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{R}^2_+$，根据定义，$f(\boldsymbol{\varepsilon}+\cdot,\cdot)\in H^1(\mathscr{U})\cap C(\overline{\mathscr{U}})$。将命题 1.2 应用于 $f(\boldsymbol{\varepsilon}+\cdot,\cdot)$，得到

$$|f(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{g})|^q\le\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}h_{\mathbf{t}}(\mathbf{g}'^{-1}\mathbf{g})|f(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{g}')|^q d\mathbf{g}'$$

若取 $0<q<1$，则 $r=\frac{1}{q}>1$、$|f(\boldsymbol{\varepsilon},\cdot)|^q\in L^r(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$，并且

$$\sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}}|f(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{h})|^q\le\sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}}\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2}h_{\mathbf{t}}(\mathbf{g}'^{-1}\mathbf{h})|f(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{g}')|^q d\mathbf{g}'\lesssim M_2M_1\left(|f(\boldsymbol{\varepsilon},\cdot)|^q\right)(\mathbf{g}),$$

其中 $\Gamma_{\mathbf{g}}$ 是 $\mathbf{g}\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 处的非切向区域 (1.5)，而 M_α 是 $\mathscr{H}_\alpha$ 上的 Hardy-Littlewood 极大函数。因此，

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}}|f(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{h})|^q\right\|_{L^r(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}&\lesssim\left\|M_2M_1\left(|f(\boldsymbol{\varepsilon},\cdot)|^q\right)(\mathbf{g})\right\|_{L^r(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\\&\lesssim\|\,|f(\boldsymbol{\varepsilon},\cdot)|^q\,\|_{L^r(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\le\|f\|_{H^1(\mathscr{U})},\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中隐含常数与 f 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 无关。令 (5.1) 中的 ε_1、$\varepsilon_2\to0$，可得

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}}|f(\mathbf{t},\mathbf{h})|\right\|_{L^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}&=\left\|\sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}}|f(\mathbf{t},\mathbf{h})|^q\right\|_{L^r(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\\&\le\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to0}\left\|\sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}}|f(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{h})|^q\right\|_{L^r(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}\\&\lesssim\|f\|_{H^1(\mathscr{U})}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

根据法图定理。 □

5.2. 边界分布的存在性。以下边界分布的存在性是 [12, 定理 8.8] 的双参数推广。

定理 5.1. 假设 $f \in H^1(\mathscr{U})$。那么存在 $f^b \in \mathcal{S}'(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，使得 $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdot) \to f^b$属于 $\mathcal{S}'(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，当 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ 时。

证明. 注意到，根据命题 1.1，f 在 $\mathscr{U}$ 上满足 $(\partial_{t_\alpha} + \triangle_\alpha) f = 0$；根据命题 5.1，$f^* \in L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。对于 $\psi \in \mathcal{S}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，令

$$F(\mathbf{t}) := \int_{\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} f(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \psi(\mathbf{g}) dV(\mathbf{g})$$

当 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2_+$ 时。由引理 5.1 可知，该积分显然收敛。于是

$$\partial_{t_1}^{k_1} \partial_{t_2}^{k_2} F(\mathbf{t}) = \int_{\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} \partial_{t_1}^{k_1} \partial_{t_2}^{k_2} f(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \psi(\mathbf{g}) d\mathbf{g} = \int_{\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} f(\mathbf{t}, \mathbf{g}) (-\triangle_1)^{k_1} (-\triangle_2)^{k_2} \psi(\mathbf{g}) d\mathbf{g},$$

通过分部积分。因此，

$$\begin{aligned} |\partial_{t_1}^{k_1} \partial_{t_2}^{k_2} F(\mathbf{t})| &\le \|f(\mathbf{t}, \cdot)\|_{L^\infty(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)} \int_{\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} |(-\triangle_1)^{k_1} (-\triangle_2)^{k_2} \psi(\mathbf{g})| d\mathbf{g} \\ &\lesssim \|\psi\|_{k_1, k_2} \|f\|_{H^1(\mathscr{U})} t_1^{-\frac{Q_1}{2}} t_2^{-\frac{Q_2}{2}} \end{aligned} \tag{5.3}$$

由引理 5.1 得。特别地，$\partial_{t_1}^{k_1} \partial_{t_2}^{k_2} F(\mathbf{t}) \to 0$ 当 $t_1 \to +\infty$ 或 $t_2 \to +\infty$时。因此，

$$\partial_{t_1}^{k_1 - 1} \partial_{t_2}^{k_2} F(\mathbf{t}) = -\int_{t_1}^{+\infty} \partial_{s_1}^{k_1} \partial_{t_2}^{k_2} F(s_1, t_2) ds_1.$$

取 $k_1 = N_1 := \frac{Q_1}{2} + 1, N_1 - 1, \ldots, 2$，可得

$$|\partial_{t_1}^2 \partial_{t_2}^{k_2} F(\mathbf{t})| \lesssim \|\psi\|_{N_1, k_2} \|f\|_{H^1(\mathscr{U})} t_1^{-1} t_2^{-\frac{Q_2}{2}},$$

因此

$$|\partial_{t_1} \partial_{t_2}^{k_2} F(\mathbf{t})| \le |\partial_{t_1} \partial_{t_2}^{k_2} F(1, t_2)| + \int_{t_1}^1 |\partial_{t_1}^2 \partial_{t_2}^{k_2} F(s_1, t_2)| ds_1 \lesssim \|\psi\|_{N_1, k_2} \|f\|_{H^1(\mathscr{U})} (1 + |\log t_1|) t_2^{-\frac{Q_2}{2}} \tag{5.4}$$

对 $k_1 = 1, t_1 = 1$使用 (5.3)，于是得到。对 t_2 应用相同的论证，可得

$$|\partial_{t_1} \partial_{t_2} F(\mathbf{t})| \lesssim \|\psi\|_{N_1, N_2} \|f\|_{H^1(\mathscr{U})} (1 + |\log t_1|)(1 + |\log t_2|),$$

其中 $N_2 := \frac{Q_2}{2} + 1$。我们还有

$$|\partial_{t_1} F(t_1, 1)| \lesssim \|\psi\|_{N_1, N_2} \|f\|_{H^1(\mathscr{U})} (1 + |\log t_1|),$$

对 $k_2 = 0, t_2 = 1$使用 (5.4)，因此，

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} F(\varepsilon_1, 1) = F(1, 1) - \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\varepsilon_1}^1 \partial_{t_1} F(t_1, 1) dt_1$$

存在且由 $\|\psi\|_{N_1,\ N_2} \|f\|_{H^1(\mathscr{U})}$ 有界。$\lim_{\varepsilon_2 \to 0} F(1, \varepsilon_2)$ 也如此。最后，我们看到

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -F(1, 1) + \lim_{\varepsilon_1 \to 0} F(\varepsilon_1, 1) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} F(1, \varepsilon_2) + \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \int_{\varepsilon_1}^1 \int_{\varepsilon_2}^1 \partial_{t_1} \partial_{t_2} F(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

存在且由 $\|\psi\|_{N_1, N_2} \|f\|_{H^1(\mathscr{U})}$ 有界。因此，该极限定义了 f^b 上的一个广义函数 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$，且 $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} f(\varepsilon, \cdot) = f^b$ 在广义函数意义下成立。□

推论 5.1。若 $f \in H^1(\mathscr{U})$，则 $f^b \in H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 且 $f(\mathrm{t}\ \cdot) = h_{\mathbf{t}} * f^b$。

证明。考虑 $f_k(\mathrm{t}, \mathrm{g}) := f(\mathrm{t} + \varepsilon_k, \mathrm{g})$，其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_k := (\varepsilon_k, \varepsilon_k)$，$\varepsilon_k := 1/k$。根据定义，我们有 $f_k \in H^1(\mathscr{U})$，且在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上是光滑的。令 $F_k(\mathrm{h}) := f_k(0, \mathrm{h}) \in L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。于是，我们有

$$f_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = h_{\mathbf{t}} * F_k(\mathbf{g})$$

by 命题 2.3。记 $\check{h}_{\mathbf{t};\mathbf{g}}(\mathrm{h}) := h_{\mathbf{t}}(\mathrm{h}^{-1}\mathrm{g})$，它也属于 $\mathcal{S}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。于是

$$f(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = \lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = \lim_{k\to\infty} h_{\mathbf{t}} * F_k(\mathbf{g}) = \lim_{k\to\infty} \langle F_k, \check{h}_{\boldsymbol{\varepsilon};\mathbf{g}} \rangle = \langle f^b, \check{h}_{\boldsymbol{\varepsilon};\mathbf{g}} \rangle = (h_{\mathbf{t}} * f^b)(\mathbf{g})$$

由 f 在 $(\mathrm{t}, \mathrm{g}) \in \mathscr{U}$ 处的连续性，以及根据定理 5.1，广义函数 $F_k \to f^b$ 的收敛性。 □

命题 5.2。 [12, 定理 2.7] 设 $u \in \mathcal{S}'(\mathcal{N})$ 定义在齐次群 $\mathcal{N}$ 上。若存在 $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{N})$，满足 $\int_{\mathcal{N}} \phi = 1$，使得 $\sup_t |\phi_t * u| \in L^1(\mathcal{N})$，则 $u \in L^1(\mathcal{N})$。

$\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 是一个齐次群，其膨胀为 $\hat{}\ \delta_r(\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2) := (\delta_r^{(1)}(\mathrm{g}_1)\ \delta_r^{(2)}(\mathrm{g}_2))$。我们可以将这个命题应用于 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 和热核，从而得到

推论 5.2. 对于广义函数 $u \in H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，有 $u \in L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。

5.3. 定理 1.1 的证明。由推论 5.1 和推论 5.2 可知，$f^b \in H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2) \cap L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。将定理 4.2 应用于 f^b，可得一个原子分解 $f^b = \sum_k \lambda_k a_k$ with $\|f^b\|_{H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)} \approx \sum_k |\lambda_k|$。由于该求和在 $\mathcal{S}'(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 中收敛，因此得到

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g}) = h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * f^b(\mathbf{g}) = \langle f^b, \check{h}_{\boldsymbol{\varepsilon};\mathbf{g}} \rangle = \sum_k \left\langle \lambda_k a_k, \check{h}_{\boldsymbol{\varepsilon};\mathbf{g}} \right\rangle = \sum_k \lambda_k h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k(\mathbf{g}). \tag{5.5}$$

注意，对于 $a_k \in H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，我们有 $h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k \in H^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，其中

$$\|h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k\|_{H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)} \le \|a_k\|_{H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)} \le C_3, \tag{5.6}$$

其中某个绝对常数为 $C_3 > 0$。这是因为

$$[h_{\mathbf{t}} * (h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k)]^* (\mathbf{g}) = \sup_{(\mathbf{t},\mathbf{h})\in\Gamma_{\mathbf{g}}} \left| h_{\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k \right| (\mathbf{h}) \le (h_{\mathbf{t}} * a_k)^*(\mathbf{g}),$$

并且根据定理 4.2，$(2, N)$-原子的 H^1-范数一致有界。因此，对于固定的 $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, $h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k \in L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 和 $\|h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k\|_{L^\infty(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)}$ 由引理 5.1 可知是有界的。因此，$h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k \in L^2(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 的 L^2范数被一个与 k 无关的常数所界。此外，根据 $\sum_k |\lambda_k|^2$ 的收敛性，$\sum_k \lambda_k h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k$ 在 $L^2(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 中收敛，而 $\sum_k |\lambda_k|^2$ 的收敛性又由 $\sum_k |\lambda_k|$ 的收敛性得出。因此，我们可以在 (5.5) 两边应用 Cauchy-Szeg˝o 投影 $\mathcal{P}$，得到

$$\mathcal{P}(f(\boldsymbol{\varepsilon}, \cdot))(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = \sum_k \lambda_k \mathcal{P}\left(h_{\boldsymbol{\varepsilon}} * a_k\right)(\mathbf{t}, \mathbf{g}). \tag{5.7}$$

对于固定的 $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, $f(\boldsymbol{\varepsilon}, \cdot)$, $\in L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 有界，这由命题 2.2 或引理 5.1 得出。因此，$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \cdot) \in L^2(\mathscr{H})$。注意，$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \cdot)$ 是 $f(\boldsymbol{\varepsilon} + \cdot, \cdot)$ 的边界值，而后者在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上光滑。因此

$$\mathcal{P}(f(\boldsymbol{\varepsilon}, \cdot))(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = f(\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{g})$$

由 Cauchy-Szeg˝o 投影的再生公式可知，因此

$$\lim_{\boldsymbol{\varepsilon}\to 0} \mathcal{P}(f(\boldsymbol{\varepsilon}, \cdot))(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = f(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \tag{5.8}$$

对于固定的 t、g，由于 f 的光滑性。

下面证明（5.7）右端的级数在 $\varepsilon \in (0,1) \times (0,1)$ 上一致收敛。我们声称，对于固定的 t、g 以及任意给定的 $\eta > 0$，存在正整数 M，使得

$$\left| \mathcal{P}(f(\varepsilon,\cdot))(\mathbf{t},\mathbf{g}) - \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \mathcal{P}\left(h_\varepsilon * a_k\right)(\mathbf{t},\mathbf{g}) \right| < \eta \tag{5.9}$$

对 $\varepsilon \in (0,1)^2$ 一致成立。这是因为

$$\begin{aligned}
\sum_{k>M} |\lambda_k| \left|\mathcal{P}\left(h_\varepsilon * a_k\right)(\mathbf{t},\mathbf{g})\right| &\le C \sum_{k>M} |\lambda_k| \left\|\mathcal{P}(h_\varepsilon * a_k)\right\|_{H^1(\mathscr{U})} t_1^{-\frac{Q_1}{2}} t_2^{-\frac{Q_2}{2}} \\
&\le C\|\mathcal{P}\|_{H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)\to H^1(\mathscr{U})} t_1^{-\frac{Q_1}{2}} t_2^{-\frac{Q_2}{2}} \sum_{k>M} |\lambda_k| \left\|h_\varepsilon * a_k\right\|_{H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)} \\
&\le CC_3\|\mathcal{P}\|_{H^1(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)\to H^1(\mathscr{U})} t_1^{-\frac{Q_1}{2}} t_2^{-\frac{Q_2}{2}} \sum_{k>M} |\lambda_k| \le \eta
\end{aligned}$$

如果 M 很大，根据命题 P roposition 4.1 和 (5.6)。注意，对任意 $F \in L^2(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$、$\mathcal{P}(F) \in H^2(\mathscr{U})$，因此

$$|\mathcal{P}(F)(\mathbf{t},\mathbf{g})| \le Ct_1^{-\frac{Q_1}{4}} t_2^{-\frac{Q_2}{4}} \|\mathcal{P}(F)\|_{H^2(\mathscr{U})} \le Ct_1^{-\frac{Q_1}{4}} t_2^{-\frac{Q_2}{4}} \|F\|_{L^2(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)},$$

利用命题 2.2。因此，对于任意固定的 (t, g)，$\in \mathscr{U}$, $F \mapsto \mathcal{P}(F)$(t, g) 是 $L^2(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 上的连续线性泛函。令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ 取 (5.9) 中的值，得到

$$\left| f(\mathbf{t},\mathbf{g}) - \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \mathcal{P}\left(a_k\right)(\mathbf{t},\mathbf{g}) \right| \le \eta \tag{5.10}$$

根据 (5.8) 和 $h_\varepsilon * a_k \to a_k$ 属于 $L^2(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。最后，令 $M \to +\infty$，得到全纯原子分解。□

6. Parabolic maximum principle and parabolic version of subharmonicity

6.1. 抛物型最大值原理。热方程的最大值原理已由 Folland-Stein [12, 命题 8.1] 用于齐性群上的 Hardy 空间理论中。这里给出其证明，因为我们需要证明在某些点不光滑的函数的情形。

命题 6.1.（最大值原理）设 D 是 $\mathscr{H}_\alpha$ 中的有界域，且 $\Omega = (0,T) \times D$ 对于 $T > 0$ 成立。假设 $v \in C^2(\Omega)$，$v|_{[0,T)\times\partial D} \le 0$, $v|_{\{0\}\times D} \le 0$，且 $\mathcal{L}_\alpha v \ge 0$ 在 Ω 中成立。那么 $v \le 0$ 在 Ω 中成立。

证明。其证明与经典情形的 [26, 引理 2.1]相同。若将 v 替换为 $v - \kappa_1 t_\alpha - \kappa_2$，其中 κ_1、$\kappa_2 > 0$满足一定条件，则不妨设 $v|_{[0,T)\times\partial\Omega} < 0$、$v|_{\{0\}\times\Omega} < 0$ 且 $\mathcal{L}v > 0$。假设在 Ω 中某处有 $v > 0$。令

$$t_\alpha^* := \inf\{t_\alpha \mid v(t_\alpha, \mathbf{g}_\alpha) > 0 \text{ for some } \mathbf{g}_\alpha \in \overline{\Omega}\}.$$

由 v 在边界 $[0,T) \times \partial\Omega \cup \{0\} \times \Omega$上的连续性和负性可知，存在某个 $(t_\alpha^*, \mathbf{g}_\alpha^*) \in \Omega$，使得 $v(t_\alpha^*, \mathbf{g}_\alpha^*) = 0$。我们必有 $v(t_\alpha, \mathbf{g}_\alpha) < 0$，对 $0 < t_\alpha < t_\alpha^*$ 和 $\mathbf{g}_\alpha \in \Omega$均成立，因此

$$\partial_{t_\alpha} v(t_\alpha^*, \mathbf{g}_\alpha^*) \ge 0. \tag{6.1}$$

另一方面，$v(t_\alpha^*, \cdot)$ 在 $\mathbf{g}_\alpha^*$ 处取得最大值，这意味着 $X_{\alpha j} v(t_\alpha^*, \mathbf{g}_\alpha^*) = 0$，并且

$$X_{\alpha j}^2 v(t_\alpha^*, \mathbf{g}_\alpha^*) = \frac{d^2}{ds^2} v\left(t_\alpha^*, \mathbf{g}_\alpha^* \gamma_s\right)\Big|_{s=0} \le 0, \tag{6.2}$$

$j = 1, \ldots, 2n_\alpha$，其中 $\gamma_s = (\ldots, 0, s, 0, \ldots)$（只有第 $(j+1)$ 个分量非平凡）是与向量场 $X_{\alpha j}$ 相关联的一参数李子群。因此，由 (6.1)-(6.2) 可得 $\mathcal{L}_\alpha v(t_\alpha^*, \mathbf{g}_\alpha^*) \le 0$，

这与 Ω 中的 $\mathcal{L}_\alpha v > 0$ 矛盾。因此 $v - \kappa_1 t_\alpha - \kappa_2 \le 0$。现在令 $\kappa_1, \kappa_2 \to 0+$，即可得到所需结果。□

命题 2.3 的证明。对于 $f \in H^p(\mathscr{U})$，考虑 $f_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) := f(\mathbf{t} + \varepsilon_k, \mathbf{g})$，如推论 5.1 的证明中所述，其中 $\varepsilon_k = (\varepsilon_k, \varepsilon_k)$，$\varepsilon_k := 1/k$。它在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上光滑，并满足热方程 $\mathcal{L}_\alpha f_k = 0$, $\alpha = 1, 2$，由命题 1.1 得出。根据定义，$f(\varepsilon_k, \cdot) \in L^p(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。另一方面，由命题 2.2，$f(\varepsilon_k, \cdot) \in L^\infty(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。因此，由于 $p \ge 1$，$f(\varepsilon_k, \cdot) \in L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。令

$$\widetilde{f}_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = [h_{\mathbf{t}} * f_k(\mathbf{0}, \cdot)](\mathbf{g}),$$

~它在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上也光滑，且由 $h \in \mathcal{S}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 可知 $f_k(0, \cdot) = f_k(0, \cdot)$，并在 $\mathscr{U}$ 上满足 $\mathcal{L}_\alpha f_k = 0$。

为证明 $f_k = \widetilde{f}_k$ 在 $\mathscr{U}$ 上，我们需要依次两次应用最大值原理，分别作用于 $\mathbf{g}_1$ 和 $\mathbf{g}_2$。首先，我们证明

$$f_k(t_1, 0, \mathbf{g}) = \widetilde{f}_k(t_1, 0, \mathbf{g}) \tag{6.3}$$

对于任意 $t_1 > 0$，$\mathbf{g} \in \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$。记

$$f_{k(0,\mathbf{g}_2)}(t_1, \mathbf{g}_1) := f_k(t_1, 0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$
$$\widetilde{f}_{k(0,\mathbf{g}_2)}(t_1, \mathbf{g}_1) := \widetilde{f}_k(t_1, 0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$

对于固定的 $\mathbf{g}_2$，将其视为定义在 $\mathscr{U}_1$ 上的函数。为了对实部应用最大值原理，写作 $f_{k(0,\mathbf{g}_2)} = f^1_{k(0,\mathbf{g}_2)} + \mathbf{i} f^2_{k(0,\mathbf{g}_2)}$ 以及 $\widetilde{f}_{k(0,\mathbf{g}_2)} = \widetilde{f}^1_{k(0,\mathbf{g}_2)} + \mathbf{i}\widetilde{f}^2_{k(0,\mathbf{g}_2)}$。于是，

$$\left[f^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{f}^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)}\right]\Big|_{\{0\}\times\mathscr{H}_1} = 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_1\left[f^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{f}^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)}\right] = 0,$$

在 $\mathscr{U}_1$ 上，$\beta = 1, 2$。我们声称，对于给定的 $T > 0$ 和 $\eta > 0$，存在 $r_0 > 0$，使得

$$\left|f^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{f}^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)}\right| \le \eta \qquad \text{on} \quad [0, T) \times \partial B_1(\mathbf{0}_1, r), \tag{6.4}$$

对于 $r \ge r_0$。然后，我们可以在 $\mathcal{L}_1$ 上将命题 6.1 中的最大值原理应用于 $f^\beta_{k\ (0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{f}^\beta_{k\ (0,\mathbf{g}_2)} - \eta$，从而得到 $f^\beta_{k\ (0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{f}^\beta_{k\ (0,\mathbf{g}_2)} \le \eta$ 在 $[0, T) \times B_1(\mathbf{0}_1, r$ 上。因此，令 $r \to \infty$、$T \to \infty$ 和 $\eta \to 0$，可得

$$f^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)} \le \widetilde{f}^\beta_{k(0,\mathbf{g}_2)}$$

在 $\mathscr{U}_1$ 上。同样的论证给出反向不等式。因此，$f^\beta_{k\ (0,\mathbf{g}_2)} = \widetilde{f}^\beta_{k\ (0,\mathbf{g}_2)}$ 在 $\mathscr{U}_1$ 上，即成立。 (6.3)

现在固定 $t_1 > 0$、$\mathbf{g}_1 \in \mathscr{H}_1$，对 $\mathscr{U}_2$ 上的函数应用 $\mathcal{L}_2$ 的最大值原理

$$f_{k(t_1,\mathbf{g}_1)}(t_2, \mathbf{g}_2) := f_k(t_1, t_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$
$$\widetilde{f}_{k(t_1,\mathbf{g}_1)}(t_2, \mathbf{g}_2) := \widetilde{f}_k(t_1, t_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$

如上所述的~，我们发现 $f_{k(t_1,\mathbf{g}_1)} = f_{k(t_1,\mathbf{g}_1)}$ 在 $\mathscr{U}_2$ 上。因此，$f_k = f_k$ 在 $\mathscr{U}$ 上，即。

$$f(\mathbf{t} + \varepsilon_k, \mathbf{g}) = \int_{\mathscr{H}} h_{\mathbf{t}}(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{g}) f(\varepsilon_k, \mathbf{h})\, d\mathbf{h}. \tag{6.5}$$

由于 $L^p(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 对于 $p > 1$ 是自反的，根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，$\{f(\varepsilon_k, \cdot)\}$ 存在一个子列，其弱收敛于某个 $f \in L^p(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。由 $\overline{\mathscr{U}}$ 上 f 的连续性，必有 $f(\mathbf{h}) = f(\mathbf{0}, \mathbf{h})$。若 $p = 1$，我们将巴拿赫-阿劳格鲁定理应用于 $C(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 的对偶空间，该空间包含 $L^1(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，从而得到 $\{f(\varepsilon_k, \cdot)\}$ 的一个子列，它弱收敛于 $\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2$ 上的一个有界测度；由 $\overline{\mathscr{U}}$ 上 f 的连续性，该测度为 $f(\mathbf{0}, \mathbf{h})d\mathbf{h}$。令 $k \to +\infty$ 时，在 (6.5) 中取极限，即得所求结果。

为证明断言 (6.4) 中的边界条件，注意到如命题 5.1 的证明中所示，对于$\|\mathbf{g}_1\|_1 = r \geq r_0/2$, $t_1 \in [0,T]$ 和 $t_2 = 0$，我们有

$$|f_k(\mathbf{t},\mathbf{g})| = |f(\mathbf{t}+\boldsymbol{\varepsilon}_k,\mathbf{g})| \leq \left(\frac{1}{|B_1(\mathbf{g}_1,\sqrt{\varepsilon_k})||B_2(\mathbf{g}_2,\sqrt{\varepsilon}_k)|}\int_{B_1(\mathbf{g}_1,\sqrt{\varepsilon_k})\times B_2(\mathbf{g}_2,\sqrt{\varepsilon}_k)}|f^*(\mathbf{h})|^p d\mathbf{h}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_k\left(\int_{B_1(\mathbf{0}_1,r_0/4)^c\times\mathscr{H}_2}|f^*(\mathbf{h})|^p d\mathbf{h}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\eta}{4},$$

当 $r_0 > 0$ 充分大时，由 $f^* \in L^p(\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2)$ 可得，其中 C_k 是一个仅依赖于 ε_k、Q_1、Q_2 的常数。因此，我们有

$$|\widetilde{f}_k(\mathbf{t},\mathbf{g})| = \left|\int_{\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2} h_{\mathbf{t}}(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{g}) f(\boldsymbol{\varepsilon}_k,\mathbf{h})\, d\mathbf{h}\right| \leq \frac{\eta}{2} \tag{6.6}$$

对于 $\|\mathbf{g}_1\|_1 \geq r \geq r_0$ 和 t_1、$> \varepsilon_k$、$t_2 = 0$，其中 r_0 充分大，因为热核衰减很快 y. □

6.2. 次调和性的抛物型版本。我们需要以下关于 $|u|^p$ 次调和性的抛物型版本（参见 [30, 第 7] 章第 3.2.1 节的欧几里得情形）。

命题 6.2. 假设 f 在 $\mathscr{U}_\alpha$ 上全纯。那么对于任意 $p > 0$，我们有

$$\mathcal{L}_\alpha |f|^p(t_\alpha,\mathbf{g}_\alpha) \geq 0, \tag{6.7}$$

对于 $(t_\alpha,\mathbf{g}_\alpha) \in \mathscr{U}_\alpha$，满足 $f(t_\alpha,\mathbf{g}_\alpha) \neq 0$。

证明。由于固定 $\mathbf{h}_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha$ 时 $\tau^*_{\mathbf{h}_\alpha} f$ 也是全纯函数，且 $\mathcal{L}_\alpha$ 在平移下不变，我们只需证明点 $(t_\alpha,\mathbf{0}_\alpha)$ 处的 (6.7)。

注意

$$X_{\alpha j}|f|^p = \frac{p}{2}\left(f\cdot\overline{f}\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(X_{\alpha j}f\cdot\overline{f} + f\cdot\overline{X_{\alpha j}f}\right),$$

以及 $X_{\alpha j}f\cdot\overline{f} + f\cdot\overline{X_{\alpha j}f} = 2\mathrm{Re}\,\left(X_{\alpha j}f\cdot\overline{f}\right)$。于是，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n_\alpha} X_{\alpha j}^2|f|^p =& \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)|f|^{p-4}4\sum_{j=1}^{2n_\alpha}\left(\mathrm{Re}(X_{\alpha j}f\cdot\overline{f})\right)^2 \\ &+ \frac{p}{2}|f|^{p-2}\sum_{j=1}^{2n_\alpha}\left(X_{\alpha j}^2 f\cdot\overline{f} + f\cdot\overline{X_{\alpha j}^2 f}\right) + p|f|^{p-2}\sum_{j=1}^{2n_\alpha}|X_{\alpha j}f|^2.\end{aligned} \tag{6.8}$$

(6.8) 减去

$$\partial_{t_\alpha}|f|^p = \frac{p}{2}|f|^{p-2}\left(\partial_{t_\alpha}f\cdot\overline{f} + f\cdot\overline{\partial_{t_\alpha}f}\right), \tag{6.9}$$

乘以 $4n_\alpha$ 后得到

$$4n_\alpha\mathcal{L}_\alpha|f|^p = p\,(p-2)\,|f|^{p-4}\sum_{j=1}^{2n_\alpha}\left(\mathrm{Re}(X_{\alpha j}f\cdot\overline{f})\right)^2 + p|f|^{p-2}\sum_{j=1}^{2n_\alpha}|X_{\alpha j}f|^2 \tag{6.10}$$

根据 $4n_\alpha\mathcal{L}_\alpha f = \sum_{j=1}^{2n_\alpha} X_{\alpha j}^2 f - 4n_\alpha\partial_{t_\alpha}f = 0$ 定理 1.1。

回顾一下，对于区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$上的全纯函数 u，$\ln|u|$，因此 $|u|^p$ 对于 $p>0$ 在 Ω 上是次调和的。为了应用这一性质，我们考虑 $F := (\pi_\alpha^{-1})^* f$，根据命题 2.1，它在 $\mathcal{U}_\alpha$ 上是全纯的。于是，$|F|^p$ 是多重次调和的。因此

$$\sum_{j=1}^{2n_\alpha} \frac{\partial^2 |F|^p}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}^2}(\widetilde{w}_\alpha, \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha) \geq 0, \tag{6.11}$$

当 $F(\widetilde{w}_\alpha, \widetilde{\mathbf{z}}_\alpha) \neq 0$ 时。与 (6.8) 中类似，这种次调和性意味着

$$0 \leq \sum_{j=1}^{2n_\alpha} \frac{\partial^2 |F|^p}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}^2} = p\,(p-2)\,|F|^{p-4} \sum_{j=1}^{2n_\alpha} \left(\mathrm{Re}\left(\frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}} \cdot \overline{F} \right) \right)^2 + p|F|^{p-2} \sum_{j=1}^{2n_\alpha} \left| \frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}} \right|^2, \tag{6.12}$$

通过使用

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \widetilde{x}_{\alpha (n_\alpha + j)}^2} = 0,$$

$j = 1, \ldots, n_\alpha$，因为 F是全纯的。将 (6.12) 应用于 (6.10)，由此得到 $\mathcal{L}_\alpha |f|^p(t_\alpha, \mathbf{0}_\alpha) \geq 0$

$$X_{\alpha j} f(t_\alpha, \mathbf{0}_\alpha) = \frac{\partial F}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}}(t_\alpha, \mathbf{0}_\alpha),$$

因为 $\pi_{\alpha *} X_{\alpha j}|_{(t_\alpha, \mathbf{0}_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_{\alpha j}}|_{(t_\alpha, \mathbf{0}_\alpha)}$，根据 (2.7)。命题 6.2 的证明至此完成。 □

推论 6.1. 设 f 在 $\mathscr{U}$上全纯。那么对于任意 $p>0$，有

$$\mathcal{L}_\alpha |f|^p(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \geq 0, \tag{6.13}$$

对于 $(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \in \mathscr{U}$其中 $f(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \neq 0$。

6.3. 命题 1.2 的证明。由于 $|f|^q$ 在 $|f|=0$上不光滑，不能直接对其应用最大值原理。要像第 7] 章 [30, 3.2.1 节那样构造一个辅助函数来克服这一困难并不容易。不过，可以很容易地将最大值原理证明中的论证调整到这种情形，如下所示。与之前一样，令 $f_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) := f(\mathbf{t} + \varepsilon_k, \mathbf{g})$，并令

$$\begin{aligned} v_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) &:= |f_k(\mathbf{t}, \mathbf{g})|^q - \kappa t_1 - \kappa t_2, \\ \widetilde{v}_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) &:= [h_{\mathbf{t}} * v_k(\mathbf{0}, \cdot)](\mathbf{g}), \end{aligned} \tag{6.14}$$

对于 $\kappa > 0$。这里 $v_k(\mathbf{0}, \cdot) = |f_k(\mathbf{0}, \cdot)|^q \in L^{\tilde{q}}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$，其中 $\tilde{q} = 1/q > 1$。因此，$\widetilde{v}_k(\mathbf{t}, \mathbf{g})$ 在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上光滑，

$$v_k(\mathbf{0}, \cdot) = \widetilde{v}_k(\mathbf{0}, \cdot) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{L}_\alpha \widetilde{v}_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) = 0 \quad \text{for} \quad (\mathbf{t}, \mathbf{g}) \in \mathscr{U}.$$

由 Fubini 定理，$v_k(\mathbf{0}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = |f_k(\mathbf{0}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)|^q$ 对几乎所有 $\mathbf{g}_2 \in \mathscr{H}_2$ 都属于 $L^{\tilde{q}}(\mathscr{H}_1)$。现在固定这样一个 $\mathbf{g}_2 \in \mathscr{H}_2$，并将 $\mathscr{U}_1$ 上的函数记为：

$$\begin{aligned} v_{k(0,\mathbf{g}_2)}(t_1, \mathbf{g}_1) &:= v_k(t_1, 0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2), \\ \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)}(t_1, \mathbf{g}_1) &:= \widetilde{v}_k(t_1, 0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2). \end{aligned}$$

与命题 2.3 的证明中式 (6.4) 一样，对于给定的 $T>0$ 和 $\eta > 0$，存在 $r_0 > 0$，使得$|v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)}| \leq \eta$在边界 $[0,T) \times \partial B_1(\mathbf{0}_1, r)$ 上对 $r \geq r_0$成立。于是，

$$\mathcal{L}_1 \left[v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta \right](t_1, \mathbf{g}_1) > 0 \tag{6.15}$$

当 $v_k(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \neq 0$ 时，由 $\mathcal{L}_1(-\kappa t_1) = \kappa > 0$。此外，$v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta$ 在边界上为负$[0,T) \times \partial B_1(\mathbf{0}_1, r) \cup \{0\} \times B_1(\mathbf{0}_1, r)$。

假设在某点 $(t_1, \mathbf{g}_1) \in (0,T) \times B_1(0_1, r)$ 处，$\left[v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta\right](t_1, \mathbf{g}_1) \geq 0$。那么，仿照命题 6.1 的证明进行论证，我们可以找到 $(t_1^*, \mathbf{g}_1^*) \in (0,T) \times B_1(0_1, r)$，使得

$$\left[v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta\right](t_1^*, \mathbf{g}_1^*) = 0, \qquad \left[v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta\right](t_1, \mathbf{g}_1) < 0, \tag{6.16}$$

对于 $0 < t_1 < t_1^*$，$\mathbf{g}_1 \in B_1(0_1, r)$。注意，我们必须有 $f_k(t_1^*, 0, \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_2) \neq 0$。否则，根据定义 (6.14) 和 $v_{k(0,\mathbf{g}_2)}(t_1^*, \mathbf{g}_1^*) < 0$，我们有

$$\left[v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta\right](t_1^*, \mathbf{g}_1^*) < 0. \tag{6.17}$$

这与 (6.16) 矛盾。(6.17) 成立，因为根据 (6.14) 中的第三个公式，$\widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)}(t_1^*, \mathbf{g}_1^*) \geq 0$，又因为 $v_k(0, \mathbf{g}) = |f_k(0, \mathbf{g})|^q \geq 0$，以及热核 [12, 的非负性，命题 1.68]。因此，$v_{k(0,\mathbf{g}_2)}$，所以 $v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta$ 在 $(t_1^*, \mathbf{g}_1^*)$ 处光滑。如同 (6.1)–(6.2) 中那样，我们得到

$$\mathcal{L}_1\left[v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta\right](t_1^*, \mathbf{g}_1^*) \leq 0,$$

这与 (6.15) 矛盾。因此，对于任意固定的 $\eta, T > 0$，当 $(t_1, \mathbf{g}_1) \in (0,T) \times B_1(0_1, r)$ 时，有 $\left[v_{k(0,\mathbf{g}_2)} - \widetilde{v}_{k(0,\mathbf{g}_2)} - 2\eta\right](t_1, \mathbf{g}_1) < 0$。令 $r \to \infty, T \to \infty$ 和 $\eta \to 0$，得到 $v_k(t_1, 0, \mathbf{g}) \leq \widetilde{v}_k(t_1, 0, \mathbf{g})$，对于 $(t_1, \mathbf{g}_1) \in \mathscr{U}_1$ 以及几乎所有 $\mathbf{g}_2$，都成立，因此由连续性可知，对所有 $\mathbf{g}_2 \in \mathscr{H}_2$ 均成立。

对.....应用相同的论证

$$v_{k(t_1,\mathbf{g}_1)}(t_2, \mathbf{g}_2) := v_k(t_1, t_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$
$$\widetilde{v}_{k(t_1,\mathbf{g}_1)}(t_2, \mathbf{g}_2) := \widetilde{v}_k(t_1, t_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2),$$

将其视为定义在 $\mathscr{U}_2$ 上、固定 $t_1, \mathbf{g}_1$, 的函数，并应用相同的论证，可得 $v_{k(t_1,\mathbf{g}_1)} \leq \widetilde{v}_{k(t_1,\mathbf{g}_1)}$。因此，

$$|f_k(\mathbf{t}, \mathbf{g})|^q \leq \int_{\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2} h_{\mathbf{t}}\left(\mathbf{h}^{-1}\mathbf{g}\right) |f_k(\mathbf{0}, \mathbf{h})|^q d\mathbf{h} \tag{6.18}$$

对任意 $(\mathbf{t}, \mathbf{g}) \in \mathscr{U}$，令 $\kappa \to 0$ 即可得到。

由于 $|f(\varepsilon_k, \cdot)|^q \in L^{\tilde{q}}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 在 $\tilde{q} = 1/q > 1$ 且 $L^{\tilde{q}}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$ 的条件下是自反的，根据巴拿赫-阿劳格鲁定理，存在一个$\tilde{}$子列弱收敛到某个 $f \in L^{\tilde{q}}(\mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2)$。由 f 在 $\overline{\mathscr{U}}$ 上的连续性，我们必有$_\sim f = |f(0, \cdot)|^q$。在（6.18）中取极限，即得不等式（1.6）。□

基金资助：第一作者部分获得国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12171221、12071197）及山东省自然科学基金资助（项目编号：ZR2021MA031、2020KJI002）；第二作者部分获得国家自然科学基金委员会资助（项目编号：11971425）。

References

[1] Bonami, A., Peloso, M. and Symesak, F., 凸域上 Hardy 空间的因子分解与 Hankel算子， $\mathbb{C}^n$, *J. Geom. Anal.* **11** (2001), 363-397。[2] Chang, D.-C., Duong, X. T., Li, J., Wang, W. and Wu, Q. Y., 四元数 Siegel 上半空间上 Cauchy–Szeg˝o 投影的基本性质及其应用，arXiv:2110.12210。[3] Chang, S.-Y. and Fefferman, R., 双圆盘上 H^1 与 BMO 对偶关系的连续版本， *Ann. Math.* **112**(1980), 179-201。[4] Chang, S.-Y. and Fefferman, R., 乘积域上的傅里叶分析与 H^p理论的一些最新进展，*Bull. Amer. Math. Soc.* **12**(1985), 1-43。[5] Chen, P., Duong, X. T., Li, J., Ward, L. and Yan, L., 齐性型空间上具有热核界的算子所对应的乘积Hardy空间， *Math. Z.* **282**(2016), 1033-1065。[6] Christ, M., 一个 $T(b)$ 定理及关于解析容量和 Cauchy积分的评注， *Colloq. Math.* **60** (1990), 601-628。

[7] Coifman, R. R, Rochberg, R. and Weiss, G., 多复变数 Hardy 空间的因子分解定理， *Ann.Math.* **103** (1976), 611-635。[8] Cowling, M., Fan, Z., Li, J. and Yan, L., 通过奇异积分和极大函数刻画分层群上的乘积Hardy空间，arXiv 2210.01265v1。[9] Dafni, G. 某些伪凸域上的 Hardy 空间， *J. Geom. Anal.* **4** (1994), 273–316。[10] Duong, X. T. and MacIntosh, A., 非规则域上具有非光滑核的奇异积分算子， *Rev.Mat. Iberoam* **15**(1999), 233-265。[11] Duong, X. T., Li, J. and Yan, L., 乘积空间上具有非光滑核的奇异积分的端点估计，arXiv:1509.07548。[12] Folland, G. and Stein, E.M., *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*, 数学札记第 28 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州, 1982。[13] Garnett, J. and Latter, R., 多复变数 Hardy 空间的原子分解， *Duke J. Math.*45 (1978), 815–845。[14] Gaveau B., 最小作用量原理、热传播以及某些幂零群上的次椭圆估计， *Acta Math.* **139** (1979), 95-153。[15] Geller, D., 海森堡群上 H^p 理论的一些结果， *Duke Math. J.* **47** (1980), 365-390。[16] Graham, C. R., 伯格曼拉普拉斯算子的 Dirichlet 问题 I， *Comm. PDE* **8** (1983), 305-317。[17] Grellier, S. and Peloso, M., 有限型凸域上 Hardy 空间的分解定理， *Ill. J.Math.* **46** (2002), 207-232。[18] Gundy, R. and Stein, E.M., H^p 多圆盘上的理论, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **76** (1979), 1026-1029。[19] Han, Y. S., Li, J. and Lu, G., Carnot-Carath´eodory 空间及齐性型乘积空间上的多参数Hardy空间理论， *Trans. Amer. Math. Soc.* **365**(2013), 319-360。[20] Han, Y. S., Li, J., Pereyra, M. C. and Ward, L. A., 通过齐性型空间上的小波基对乘积Hardy空间进行原子分解， *New York J. Math.* **27**(2021), 1173-1239。[21] Han, Y. S., Li, J. and Ward, L. A., 通过正交归一小波基建立齐性型空间上的 Hardy 空间理论, *Appl. Comp. Harm. Anal.* **45**(2018), 120-169。[22] Journé, J.-L., 乘积空间的覆盖引理， *Proc. Amer. Math. Soc.* **96** (1986), 593-598。[23] Koranyi, A. and Stein, E. M., H^2-广义半平面的空间， *Studia Math.* **44**(1972), 379-388。[24] Krantz, S. G. and Li, S.-Y., 关于 $\mathbb{C}^n$ 中区域上的 Hardy 空间分解定理及其应用， *J.Fourier Anal. and Appl.* **2** (1995), 65-107。[25] Krantz, S. G. and Li, S.-Y., $\mathbb{C}^n$中有限型凸域上的 Hardy 空间与伯格曼空间的对偶定理, *Ann. Inst. Fourier* **45**(1995), 1305-1327。[26] Lieberman, G. *Second order parabolic differential equations*, 新加坡，世界科学出版社，(1996)。[27] Malliavin, M.-P. and Malliavin, P., 双调和函数的 Int´egrales de Lusin-Calderon, *Bull. Sci. Math.*101 (1977), 357-384。[28] Pipher, J., Journ´e 覆盖引理及其向高维的推广， *Duke Math. J.* **53** (1986), 683-690。[29] Peloso, M. and Valencourt, H., 凸域上 Hardy-Sobolev空间中全纯函数的边界行为， $\mathbb{C}^n$, *Colloq. Math.* **118**(2010), 649-668。[30] Stein E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*, 普林斯顿数学丛书第 30 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970。[31] Stein E. M., *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*, 数学札记，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1972。