arXiv:2302.00501v2 [math.RA] 7 Feb 2023

正交群与辛群中两个对合的乘积

克莱芒·德·塞甘·帕齐斯

2023年2月8日

摘要

群的一个元素若是该群中两个对合（即阶为 1 或 2 的元素）的乘积，则称为双反射的。若一个元素是双反射的，则它与其逆元共轭。

已知，二次型的正交群中的所有元素都是双反射的（[16] 对于特征不为 2, [6] 对于特征为 2 的域）。F. B¨unger [3] 刻画了酉群（定义在特征不为 2 的域上）中哪些元素是双反射的。然而，在特征不为 2 的域上的辛群中，一般而言，存在与其逆元共轭但并非双反射的元素（不过，在特征为 2 的域上，辛群的每个元素都是双反射的，见 [6]）。

本文在特征不为 2 的域上，用 Wall 不变量刻画了辛群的双反射元：这一结果在 B¨unger 的博士论文中被引用但未给出证明，并归功于 Klaus Nielsen。我们还利用这一方法，为 Wonenburger 关于正交群和一般线性群的相应结果给出了一个简化证明。

AMS 分类：15A23；11E04

关键词：正交群、辛群、分解、对合、规范形、Wall 不变量。

*凡尔赛-圣康坦-伊夫林大学，凡尔赛数学实验室，美国大道 45 号，78035 凡尔赛 Cedex，法国

†电子邮箱地址：dsp.prof@gmail.com

1 引言

1.1 问题

定义 1.1. 设 G 是一个群。 G 的对合是满足 $x^2 = 1_G$ 的元素 x 。当 G 中的一个元素是 G 中两个对合的乘积时，称其为双反射的。

一个基本的观察是，每个双反射元都与其逆元共轭：事实上，如果 $g = ab$ where $a^2 = b^2 = 1_G$，那么 $g^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba = bgb^{-1}$。

设 $\mathbb{F}$ be 一个特征不为 2 的域，其单位群记为 $\mathbb{F}^*$。本文中，所考虑的所有向量空间均假设为有限维。

设 V be 这样一个向量空间。下文中，我们考虑一个双线性型b: $V \times V \to \mathbb{F}$，它要么是对称的（$\forall (x, y) \in V^2,\ b(x, y) = b(y, x)$），要么是交错的（即 $\forall x \in V,\ b(x, x) = 0$）。注意，当且仅当 b 是斜对称的，也就是 $\forall (x, y) \in V^2,\ b(x, y) = -b(y, x)$ 时， b 才是交错的（请注意，这种等价关系在特征为 2 的域上不成立，但本文不考虑此类域）。

我们还假设 b 是非退化的，这意味着 0_V 是唯一满足 $b(x, -) = 0$的向量 x 。当 b 非退化且交错时，我们称其为辛型。如果 b 非退化，那么对于所有 $u \in \mathrm{End}(V)$，都存在唯一的 $u^\star \in \mathrm{End}(V)$，称为 u 的 b- 伴随，使得

$$\forall (x, y) \in V^2,\ b(u^\star(x), y) = b(x, u(y)).$$

这里，我们着重讨论等距变换群

$$\mathrm{Isom}(b) := \{u \in \mathrm{GL}(V) :\ \forall (x, y) \in V^2,\ b(u(x), u(y)) = b(x, y)\}$$

即双线性型 b的等距变换群（也就是所有满足 $u^\star = u^{-1}$的自同构 u 构成的群）。当 b 为对称型时，该群也记作 $\mathrm{O}(b)$（ b的正交群）；当 b 为交错型时，则记作 $\mathrm{Sp}(b)$（ b的辛群）。

在 [16], Wonenburger 证明，若 b 是对称且非退化的，则 $\mathrm{O}(b)$ 中的每个元素都是双反射元（她的论文也因证明以下结论而广为人知：在特征不为 2 的域上的一般线性群中，双反射元恰好是与其逆共轭的元素）。她还指出，这一结果在特征不为 2 的域上的辛群中并不成立（即使不考虑显而易见的二维

空间情形，其中唯一的辛对合是 $\pm \mathrm{id}_V$）。然而，Gow [6]证明，在特征为 2 的域上，辛群中的每个元素都是双反射元，正则二次型的正交群中的每个元素也都是如此。最后，在他的博士论文中，[3], B¨unger 刻画了特征不为 2 的域上的酉群中的双反射元（另见[2]）。

让我们回到辛群 Sp(b) 的特殊情形：此时 b 是辛的（请记住，$\mathbb{F}$ 的特征不为 2）。在 [9], de La Cruz 在复数域上展示了一个辛群，其中存在一个不能分解为三个对合之积的元素。此外，他还对 Sp(b) 中的双反射元给出了完整刻画（根据其有理标准形）。Awa 和他最近证明 [1]，这一刻画在实数域上基本上不成立，因为存在一个实辛矩阵，它是两个复对合辛矩阵之积，却不能表示为两个实对合辛矩阵之积。事实上，Sp(b) 中双反射元素的完整刻画，早在二十多年前就由 B¨unger 在其博士论文 [3] 中宣布，并引用了 K. Nielsen 一篇神秘的文章（见其中的参考文献 56）。然而，Nielsen 的文章最终并未发表，这促使我们撰写本文以填补这一空白。由于所用技巧相当相似，而且最近人们重新关注这类问题（见 [1, 9, 11, 12, 13]），我们将借此机会清晰阐述 Wonenburger 的结果的证明（B¨unger 关于酉群的结果也可以用类似方法证明，但证明过长，无法纳入本文）。在即将发表的一篇文章中，我们将研究相应的情形，其中对合被指标为 2 的幺幂自同构所取代（即满足 $(u - \mathrm{id}_V)^2 = 0$ 的自同构 u）。

我们的许多结果（以及方法）都涉及正交群和辛群中共轭类的 Wall 分类 [15]：基本不变量将在接下来的三节中回顾。

1.2 配对的视角

对于我们的问题，考虑由一个型和该型的一个等距变换构成的配对，似乎是更有效的视角。具体而言：

定义 1.2。1-等对 (b, u) 由有限维向量空间 V 上的非退化对称双线性型 b（其上定义于 $\mathbb{F}$）以及一个等距变换

$u \in \mathsf{O}(b)$。

一个 -1-等对 (b,u) 由有限维向量空间 V 上的辛双线性形式 b 以及一个等距变换 $u \in \mathsf{Sp}(b)$ 组成。

设 $\varepsilon \in \{-1,1\}$。底层向量空间分别为 U 和 V的两个 ε-等对 (b,u) 和 (c,v)，若存在一个向量空间同构 $\varphi\colon U \xrightarrow{\simeq} V$ 使得

$$\forall (x,y) \in U^2,\ c(\varphi(x),\varphi(y)) = b(x,y) \quad \text{and} \quad \varphi \circ u \circ \varphi^{-1} = v.$$

这在 $\mathbb{F}$上的所有 ε-等对的集合上定义了一个等价关系。

接下来，底层向量空间分别为 U和 V的两个 ε-等对 (b,u) 和 (c,v) 的正交和定义为对 $(b,u)\perp(b',u') := (b\perp b', u\oplus u')$，使得

$$\forall (x,y) \in U\times V,\ \forall (x',y') \in U\times V, \quad (b\perp b')((x,y),(x',y')) = b(x,x') + b'(y,y')$$

and

$$\forall (x,y) \in U\times V,\ (u\oplus u')(x,y) = (u(x),u'(y)).$$

容易验证，正交和与等距变换相容（即用一个与某个直和项等距的直和项替换它，会得到等距的正交和）。

最后，设 (b,u) 是一个 ε-等对，其底层向量空间为 U，且 V 是 U 的一个 b-正则线性子空间（即 $V\cap V^{\perp_b} = \{0\}$），因此 b 在 V 上诱导出一个非退化双线性型 b_V，并且 V 在 u 作用下也保持不变，从而在 V 上诱导出端omorphism u_V。那么，$(b,u)^V := (b_V,u_V)$ 是一个 ε-等对，$(b,u)^{V^{\perp_b}}$ 也同样如此。

定义 1.3. 若一个 ε-等对 (b,u) 满足：u 在 b 的等距变换群中是双反射的，则称其为双反射的；也就是说，存在底层向量空间 (b,u) 上的对合 s_1 和 s_2，使得 $u = s_1 s_2$，且 (b,s_1) 和 (b,s_2) 均为 ε-等对。

注 1. 如果一个 ε-等距对是双反射的，那么任何与它等距的 ε-等距对也都是双反射的。

注 2. 设 (b,u) 和 (b',u') 是双反射的 ε-等对。取 b 的等距变换群中的对合 s_1, s_2，以及 b' 的等距变换群中的对合 s_1', s_2'，使得 $u = s_1 s_2$ 和 $u' = s_1' s_2'$。于是，令 $S_1 := s_1 \oplus s_1'$ 和 $S_2 := s_2 \oplus s_2'$，可见 $u\oplus u' = S_1 S_2$，并且 S_1 和 S_2 是 $b\perp b'$ 的等距变换群中的对合。因此，ε-等对 $(b,u)\perp(b',u')$ 是双反射的。

反过来则不成立。理论上，$(b,u)\perp(b',u')$ 可以是双反射的，而 (b,u) 和 (b',u') 都不是双反射的。

定义 1.4. 若一个 ε-等对非平凡（即定义在非零向量空间上），且不等距于两个非平凡等对的正交直和，则称其为不可分解的（换言之，在空间 V 上的等对 (b,u) 非零，且不存在 b-正交分解 $V = V_1 \overset{\perp_b}{\oplus} V_2$，使得 V_1 和 V_2 均非零并且在 u 下稳定时，该等对不可分解）。

1.3 共轭类与双线性型的扩张回顾

我们用 $\mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 表示所有满足 $p \neq t$ 的不可约多项式 $p \in \mathbb{F}[t]$ 的集合（注意，在 [14] 中，这种记号并未排除多项式 t）。

设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间。代数 $\mathrm{End}(V)$ 中共轭类的分类众所周知：这里我们将采用主不变量的观点。V 上的每个自同态 u 都是若干循环端同态的直和，其最小多项式是首一不可约多项式的幂：这些最小多项式在置换意义下唯一确定，称为 u 的主不变量。对于 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}) \cup \{t\}$ 和 $r \geq 1$，我们用 $n_{p,\,r}(u)$ 表示这种分解中最小多项式为 p^r 的直和项数（这是附属于对 (p,r) 的 u 的若尔当数）。于是，u 的相似类由族 $(n_{p,\,r}(u))_{p\in\mathrm{Irr}(\mathbb{F})\cup\{t\},\ r\geq 1}$ 的数据确定。

现在，设 u 是一个 b-等距变换。若要使 u 在 $\mathrm{Isom}(b)$ 中是双反射的，必要条件是 u 与 u^{-1} 相似。然而，对于 b-等距变换，这一条件自动成立，因为经典地，$u^\star$ 与 u 相似！

给定一个次数为 d 的首一多项式 $p(t)$，满足 $p(0) \neq 0$，记

$$p^\sharp(t) := p(0)^{-1} t^d p(1/t)$$

p 的倒数多项式（注意 $(p^\sharp)^\sharp = p$），若 p 满足 $p^\sharp = p$，则称其为回文多项式。对于不可约回文多项式 $p \in \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$，要么 $p = t \pm 1$，要么 p 的次数为偶数且 $p(0) = 1$。向量空间 V 上的自同构 u 与其逆相似，当且仅当对于所有满足 $p^\sharp \neq p$ 的 $p \in \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$，以及所有 $r \geq 1$，都有 $n_{p,\,r}(u) = n_{p^\sharp,\,r}(u)$。

现在，令 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 为一个既不同于 $t+1$ 也不同于 $t-1$ 的回文多项式。记 $2d$ 为 p 的次数，已知对于唯一的

$R \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$，其次数为 d。考虑域 $\mathbb{L} := \mathbb{F}[t]/(p)$。 t 及其逆的类是 p 在 $\mathbb{L}$ 中的根，因此存在唯一的域自同构$x \mapsto x^\bullet$，它是 $\mathbb{F}$-代数的自同构，并将 t 的类映为其逆。这使我们可以将 $\mathbb{L}$视为带有非恒等对合的域；本文余下部分将考虑关于此对合的 $\mathbb{L}$ 上的厄米形式。此外，子域 $\mathbb{K} := \{\lambda \in \mathbb{L} : \ \lambda^\bullet = \lambda\}$ 通过同构 ψ 与 $\mathbb{F}[t]/(R)$ 同构，该同构将类 $\overline{t} + \overline{t}^{-1}$ 映为模 R 的 t 的类。我们考虑 $\mathbb{F}$-线性形式 $e_R : \mathbb{F}[t]/(R) \to \mathbb{F}$，它将 1 的类映为 1，并将所有 $k \in [\![1, d-1]\!]$ 的 t^k 的类映为 0，最后定义

$$f_p : \lambda \in \mathbb{L} \mapsto e_R(\psi(\lambda + \lambda^\bullet)) \in \mathbb{F}.$$

因此， f_p 是定义在 $\mathbb{F}$-向量空间 $\mathbb{L}$上的一个非零线性形式，并且在对合 $\lambda \mapsto \lambda^\bullet$作用下保持不变。

下一步是给出一个一般构造：设 V 是一个 $\mathbb{L}$-向量空间，且$B : V^2 \to \mathbb{F}$ 是一个 $\mathbb{F}$-双线性型，满足 $\forall (x, y) \in V^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{L}$, $B(\lambda^\bullet x, y) = B(x, \lambda y)$。对于所有 $(x, y) \in \mathbb{L}^2$，映射 $\lambda \mapsto B(x, \lambda y)$ 是 V 上的一个 $\mathbb{F}$-线性形式，因此可写为 $\lambda \mapsto f_p(\lambda B^{\mathbb{L}}(x, y))$，其中存在唯一的 $B^{\mathbb{L}}(x, y) \in \mathbb{L}$。这给出了一个映射 $B^{\mathbb{L}} : V^2 \to \mathbb{L}$，可以验证它是 $\mathbb{F}$-双线性的，甚至是$\mathbb{L}$-右线性的。此外，若 B 非退化，则 $B^{\mathbb{L}}$也非退化。现在，假设 B 非退化且对称。令 $(x, y) \in V^2$。那么，对于所有 $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$B(y, \lambda x) = B(\lambda^\bullet y, x) = B(x, \lambda^\bullet y) = f_p\big(\lambda^\bullet B^{\mathbb{L}}(x, y)\big) = f_p\big(\lambda B^{\mathbb{L}}(x, y)^\bullet\big)$$

因此， $B^{\mathbb{L}}(y, x) = B^{\mathbb{L}}(x, y)^\bullet$。同样，若 B是斜对称且非退化的，则可得 $B^{\mathbb{L}}(y, x) = -B^{\mathbb{L}}(x, y)^\bullet$。总之：

- 若 B 是对称且非退化的，则 $B^{\mathbb{L}}$ 是定义在 $\mathbb{L}$-向量空间 V上的非退化厄米型；
- 若 B 是辛的，则 $B^{\mathbb{L}}$ 是定义在 $\mathbb{L}$-向量空间 V上的非退化斜厄米形式。

最后请记住，斜厄米型与厄米型一一对应：取一个满足 $\eta^\bullet = -\eta$ 的元素 $\eta \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ （这样的元素总是存在，例如 $\overline{t} - \overline{t}^{-1}$），厄米型 h 可导出斜厄米型 ηh，反之亦然。

1.4 正交群和辛群中共轭类的回顾

现在设 (b,u) 是一个 ε-等谱对，并令 $r\geq 1$ 为一个正整数。设 $p\in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})\setminus\{t+1,t-1\}$ 是一个次数为 $2d$ 的不可约回文多项式，并写作 $p(t)=t^d m(t+t^{-1})$，其中 $m\in\mathbb{F}[t]$ 是首一且不可约的。置 $v=u+u^{-1}=u+u^{\star}$，它是 b-自伴的。

我们用 $V_{p,r}$ 表示以下（单射）线性映射的余核

$$\operatorname{Ker} m(v)^{r+1}/\operatorname{Ker} m(v)^{r}\longrightarrow \operatorname{Ker} m(v)^{r}/\operatorname{Ker} m(v)^{r-1}$$

由 $m(v)$诱导。这个余核自然地等同于商空间 $\operatorname{Ker} m(v)^r/(\operatorname{Ker} m(v)^{r-1}+(\operatorname{Im} m(v)\cap\operatorname{Ker} m(v)^r))$。我们考虑由下式诱导的双线性型

$$b_{p,r}:(x,y)\mapsto b(x,m(v)^{r-1}[y])$$

在 $\operatorname{Ker} m(v)^r$ 上。注意到 $m(v)$ 是 b-自伴的，我们得到：当 $\varepsilon=1$ 时，$b_{p,r}$ 是对称的；当 $\varepsilon=-1$ 时，则是斜对称的。$b_{p,r}$ 的根是 $\operatorname{Ker} m(v)^r$ 与 $(\operatorname{Ker} m(v)^r)^{\perp_b}=\operatorname{Im} m(v)^r$ 在 $m(v)^{r-1}$ 下的原像的交集，并且容易验证这个原像等于 $\operatorname{Ker} m(v)^{r-1}+(\operatorname{Ker} m(v)^r\cap\operatorname{Im} m(v))$。因此，$b_{p,r}$ 诱导出定义在 $V_{p,r}$ 上的~~非~~退化 $\mathbb{F}$-双线性型 $b_{p,r}$；当 $\varepsilon=1$ 时该型是对称的，当 $\varepsilon=-1$ 时则是斜对称的。

商空间 $\operatorname{Ker} m(v)^{r+1}/\operatorname{Ker} m(v)^r$ 和 $\operatorname{Ker} m(v)^r/\operatorname{Ker} m(v)^{r-1}$自然地视为 $\mathbb{L}$ 上的向量空间，余核 $V_{p,r}$ 也如此。由于 u 是一个 b-等距变换，因此对于所有 $\lambda\in\mathbb{L}$ 以及所有 $(x,y)\in(V_{p,r})^2$，有 $b_{p,r}(x,\lambda y)=b_{p,r}(\lambda^{\bullet}x,y)$。于是，利用第 1.3 节中描述的扩张过程，我们在 $\mathbb{L}$-向量空间 $V_{p,r}$ 上得到一个非退化型 $b_{p,r}{}^{\mathbb{L}}$；当 b 对称时，该型为厄米型；当 b 为辛型时，该型为斜厄米型。无论哪种情况，我们都将此型记为 $(b,u)_{p,r}$，并称之为附属于 (p,r) 的 (b,u) 的厄米 Wall 不变量。

以下事实很容易验证：

- 给定一个与 (b,u) 等价的 ε-等距对 (b',u')，则厄米型或斜厄米型 $(b,u)_{p,r}$ 与 $(b',u')_{p,r}$ 等价；
- 给定另一个 ε-等对 (b',u')，则有 $((b,u)\perp(b',u'))_{p,r}\simeq(b,u)_{p,r}\perp(b',u')_{p,r}$。

还有两组额外的不变量，在此我们必须更深入地区分对称型与交错型。首先假设 $\varepsilon=1$，并令 $r=2k+1$ 为一个奇正整数。同样地，我们设

$v := u + u^{-1}$，并注意到 $(v - 2\mathrm{id}_V)^k = (-1)^k (u - \mathrm{id}_V)^k (u^{-1} - \mathrm{id}_V)^k$。与上文类似，对称双线性型 $(x, y) \mapsto b(x, (v - 2\mathrm{id}_V)^k(y))$ 在 $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^r / \big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^{r-1} + \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})^r \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}) \big)$ 上诱导出一个非退化对称双线性型 $(b, u)_{t-1, 2k+1}$。同样地，$(\ ,\ )_{t+1, 2k+1}$。这些就是 (b, u) 的二次 Wall 不变量。

1-等对偶对的分类由下一个定理给出。证明 Wonenburger 定理时并不需要此定理，但将其与辛群中相应的结果并列陈述，仍然很有意义。

定理 1.1（正交群的 Wall 定理，见 [15]）。设 (b, u) 和 (b', u') 是域 $\mathbb{F}$ 上的两个 1-等对偶对，且其特征不等于 2。要使 (b, u) 与 (b', u') 等距，当且仅当以下条件全部成立：

(i) 对所有满足 $p \neq p^\sharp$ 的 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 以及所有 $r \geq 1$，有 $n_{p,\,r}(u) = n_{p,\,r}(u')$; (ii) 对所有满足 $p = p^\sharp$ 的 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}) \setminus \{t + 1, t - 1\}$ 以及所有 $r \geq 1$，厄米形式 $(b, u)_{p,\,r}$ 和 $(b', u')_{p,\,r}$ 等价；(iii) 对每个 $\eta \in \{-1, 1\}$ 以及每个奇数 $r \geq 1$，对称双线性形式 $(b, u)_{t-\eta,\,r}$ 和 $(b', u')_{t-\eta,\,r}$ 等价。

接下来，我们陈述 -1-等对的分类。设 (b, u) 为这样的等对，并令 $v := u + u^{-1}$。设 $r = 2k + 2$ 为偶正整数。双线性型 $(x, y) \mapsto b(x, (u - u^{-1})(v - 2\mathrm{id}_V)^k(y))$ 是对称的。注意到 $(u - u^{-1})(v - 2\mathrm{id}_V)^k = (-1)^k u^{-(k+1)} (u + \mathrm{id}_V)(u - \mathrm{id}_V)^{2k+1}$，可知该双线性型在商空间 $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_V)^r / \big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_V)^{r-1} + (\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_V) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_V)^r)\big)$ 上诱导出一个非退化对称双线性型，我们将其记为 $(b, u)_{t-1, r}$。同理，$(x, y) \mapsto b(x, (u - u^{-1})(v + 2\mathrm{id}_V)^k(y))$ 在商空间 $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_V)^r / \big(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_V)^{r-1} + (\mathrm{Im}(u + \mathrm{id}_V) \cap \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_V)^r)\big)$ 上诱导出一个非退化对称双线性型，我们将其记为 $(b, u)_{t+1, r}$。这些就是 (b, u) 的二次 Wall 不变量。

定理 1.2（辛群的 Wall 定理，见 [15]）。设 (b, u) 和 (b', u') 是域 $\mathbb{F}$ 上的两个 -1-等对，且该域的特征不为 2。(b, u) 与 (b', u') 等距的充要条件是：

(i) 对所有满足 $p \neq p^\sharp$ 的 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 以及所有 $r \geq 1$，都有 $n_{p,\,r}(u) = n_{p,\,r}(u')$；(ii) 对所有满足 $p = p^\sharp$ 的 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}) \smallsetminus \{t+1, t-1\}$ 以及所有 $r \geq 1$，斜厄米形式 $(b,u)_{p,\,r}$ 和 $(b',u')_{p,\,r}$ 等价；(iii) 对每个 $\eta \in \{-1,1\}$ 以及每个偶整数 $r \geq 2$，对称双线性形式 $(b,u)_{t-\eta,\,r}$ 和 $(b',u')_{t-\eta,\,r}$ 等价。

注3. 设 (b,u) 是一个 -1-等对偶对。可以证明，对于每个回文多项式$p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}) \smallsetminus \{t+1, t-1\}$ 和每个整数 $r \geq 1$，厄米 Wall 不变量 $(b,u^{-1})_{p,\,r}$ 等价于 $-(b,u)_{p,\,r}$；同样，对于每个偶整数 $r \geq 1$和每个 $\eta = \pm 1$，二次 Wall 不变量 $(b,u^{-1})_{t-\eta,\,r}$ 等价于 $-(b,u)_{t-\eta,\,r}$。由此可知，u 与其逆元在 $\mathrm{Sp}(b)$ 中共轭，当且仅当 (b,u) 的每个 Wall 不变量都等价于其相反数。

与此形成鲜明对比的是，Wall 对 1-等对偶对的分类表明，正交群中的每个元素都与其逆元共轭；Wonenburger 的结果进一步强化了这一结论 [16]：共轭自同构可以选为上述正交群中的某个对合！

最后，我们从另一个角度来考察，这种角度非常适合我们要解决的问题：对不可分解对的描述。

定理 1.3. 假设 $\chi(\mathbb{F}) \neq 2$。每个不可分解的 1-等距对 (b,u) 都满足以下性质之一：

- u 是循环的，其最小多项式为 p^r，其中某个回文多项式 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}) \smallsetminus \{t+1, t-1\}$，且存在某个 $r \geq 1$；
- u 是循环的，其最小多项式为 $(pp^\sharp)^r$，其中某个 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 满足$p \neq p^\sharp$，且存在某个 $r \geq 1$；
- u 是循环的，其最小多项式为 $(t-\eta)^r$，其中某个奇整数 r，且存在某个 $\eta = \pm 1$；
- u 恰有两个主不变量，二者均为 $(t-\eta)^r$，其中某个偶整数 r，且存在某个 $\eta = \pm 1$。

定理 1.4。假设 $\chi(\mathbb{F}) \neq 2$。每个不可分解的 -1-isopair (b,u) 都满足以下性质之一：

- u 是循环的，最小多项式为 p^r，其中某个回文多项式 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}) \smallsetminus \{t+1, t-1\}$ 以及某个 $r \geq 1$；

- u 是循环的，最小多项式为 $(pp^\sharp)^r$ ，其中某个 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 满足$p \neq p^\sharp$，以及某个 $r \geq 1$;
- u 是循环的，其最小多项式为 $(t-\eta)^r$ ，其中 r 是某个偶整数， $\eta = \pm 1$ 是某个.....;
- u 恰有两个主不变量，且二者都等于 $(t-\eta)^r$ ，其中 r 是某个奇整数，$\eta = \pm 1$是某个.....。

1.5 主要结果

现在我们可以刻画辛群中的双反射元了 .

定理 1.5（尼尔森定理）。设 b 是域上的一个辛形式，且该域的特征不等于 2。设 $u \in \mathrm{Sp}(b)$。要使 u 成为 $\mathrm{Sp}(b)$ 中两个对合的乘积，充要条件是 (b, u) 的所有（二次或 Hermite）Wall 不变量都是双曲的，并且 u的所有 Jordan 数都是偶数。

我们还引用 Wonenburger 的结果，并将借助用于证明尼尔森定理充分性条件的技巧重新证明该结果。

定理 1.6（Wonenburger）。设 b是特征不为 2 的域上的非退化对称双线性型。设 $u \in \mathrm{O}(b)$。那么 u 是 $\mathrm{O}(b)$ 中两个对合的乘积。

如注3所示，辛自同构 $u \in \mathrm{Sp}(b)$ 在 $\mathrm{Sp}(b)$ 中与其逆元共轭，当且仅当 (b, u) 的每个 Wall 不变量都等价于其相反数。而且， u 可以在 $\mathrm{Sp}(b)$ 中与其逆元共轭，同时其某些若尔当数为奇数。例如，在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中（它是 $\mathbb{C}^2$ 上任意辛形式对应的（矩阵）辛群），对角矩阵 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中与其逆元共轭（因为它所有的 Wall 不变量都是平凡的），但它不是双反射的（事实上，在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 中只有 $\pm I_2$ 是双反射的）。

此外，即使 u 的若尔当数全为偶数， u 是双反射的这一条件，通常也不能仅由 $u \in \mathrm{Sp}(b)$ 在 $\mathrm{Sp}(b)$ 中与其逆元共轭推出。事实上，二次型/厄米型通常可以与其相反型等价，却并非双曲型。例如，若 $\mathbb{F}$ 是一个其中 -1 为平方的有限域，那么 $\mathbb{F}$ 的有限扩张上的每个二次型都

与其相反型等价，而存在偶数维的非双曲二次型。

相比之下，在实数域或复数域上，只要 u 的所有若尔当数均为偶数，且它与其逆元在 Sp(b) 中共轭，它就是双反射的。在实数域上，这是因为每个与其相反型等价的非退化实二次型都是双曲的；复数域上的厄米形式也同样如此。在复数域上，这是因为每个偶秩的复非退化二次型都是双曲的。最后请注意，在特征不为 2 的代数闭域上，每个辛变换都与其逆元共轭。

最后，我们引用一般线性群的相应结果。我们给出一个简短证明，因为之后会再次运用其证明思路来重新证明定理 1.6。

定理 1.7（Wonenburger、Djokovi´c 和 Hoffman和Paige [8]）。设V 为有限维向量空间。GL(V) 中的元素是双反射的，当且仅当它与其逆元相似。

证明。直接的蕴含关系（在任意群中）已为人所知。因此，设 $u \in$GL(V) 与其逆相似。将其不变因子记为 $p_1, \dots, p_r$。那么 u^{-1} 的相应不变因子为 $p_1^\sharp, \dots, p_r^\sharp$。因此，对所有 $i \in [\![1, r]\!]$，都有 $p_i = p_i^\sharp$；由此可知，u 是若干循环自同构的直和，且每个自同构的最小多项式都是回文多项式。只需证明每个直和项都是双反射的（在相应的一般线性群中）即可。

因此，我们只需在特殊情形下证明该结论：u 是循环的，且其最小多项式 p 是回文多项式。于是，考虑 u的一个循环向量 x。我们将所有系数取自 $\mathbb{F}$的劳朗多项式所构成的 $\mathbb{F}$-代数记为 $R = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$。由 u 诱导的 V 上的 $\mathbb{F}[t]$-模结构，同构于 R 模由 p 生成的理想所得的商（通过一个同构，将 t^k 的等价类映为对所有 $k \in \mathbb{Z}$均成立的 $u^k(x)$）。注意，由 $t \mapsto t^{-1}$ 诱导的 R 这一 $\mathbb{F}$-代数上的自然对合，将 p 映为 $p(t^{-1}) = p(0)t^{-d}p^\sharp$，其中$d := \deg(p)$，因此它保持由 p 生成的理想不变。这便在 V 这一 $\mathbb{F}$-向量空间上得到一个对合 s：$V \to V$，它对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 均将 $u^k(x)$ 映为 $u^{-k}(x)$。接着注意到，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，us 将 $u^k(x)$映为 $u^{1-k}(x)$；由此可知，us 是 V这一 $\mathbb{F}$-向量空间上的对合。因此，$u = (us)s$ 在 GL(V)中是双反射的。 □

1.6 文章结构

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们将介绍研究正交群和辛群中双反射元素的主要工具：向量空间自同构的正交扩张或辛扩张。大多数作者倾向于用分块矩阵来描述这一构造，但我们更愿意像 [14]那样通过对偶理论加以说明。利用这些工具，定理 1.5 将在第 3 节中得到证明；而借助定理 1.3 对不可分解的 1-等距对的描述，定理 1.6 则可在第 4 节中轻松证明。

2 自同态的正交扩张与辛扩张

全文中，设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，且 $\chi(\mathbb{F}) \neq 2$。我们用 $V^\star$ 表示其对偶空间，即 V 上所有线性形式构成的空间。给定 V 上的一个端omorphism u，我们用 u^t 表示 $V^\star$ 上相应的转置端omorphism，其定义如下：

$$\forall \varphi \in V^\star,\ u^t(\varphi) = \varphi \circ u.$$

2.1 定义

设 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$。在乘积空间 $V \times V^\star$ 上，我们考虑双线性型

$$H_V^\varepsilon : \begin{cases} (V \times V^\star)^2 & \longrightarrow \mathbb{F} \\ ((x,\varphi),(y,\psi)) & \longmapsto \varphi(y) + \varepsilon\psi(x). \end{cases}$$

注意，H_V^1 是非退化双曲对称双线性形式，而 H_V^{-1} 是辛形式。

令 $u \in \mathrm{GL}(V)$。我们考虑端omorphism

$$h(u) : \begin{cases} V \times V^\star & \longrightarrow V \times V^\star \\ (x,\varphi) & \longmapsto \big(u(x), (u^{-1})^t(\varphi)\big), \end{cases}$$

即 $h(u) = u \oplus (u^{-1})^t$。注意，对于 $V \times V^\star$ 中任意的 (x,φ) 和 (y,ψ)，

$$\begin{aligned} H_V^\varepsilon(h(u)[x,\varphi], h(u)[y,\psi]) &= (u^{-1})^t(\varphi)[u(y)] + \varepsilon\,(u^{-1})^t(\psi)[u(x)] \\ &= \varphi(y) + \varepsilon\psi(x) \\ &= H_V^\varepsilon\big((x,\varphi),(y,\psi)\big). \end{aligned}$$

因此，$(H_V^\varepsilon, h(u))$ 是一个 ε-等距对，我们将其记为 $H_\varepsilon(u)$。

接下来，我们考察 $H_\varepsilon(u)$ 关于相似和直和的性质。设 $v \in \mathrm{End}(V)$ 和 $w \in \mathrm{End}(W)$ 是相似的自同态，并设 $\varphi\colon V \xrightarrow{\sim} W$ 是一个同构，满足 $w = \varphi \circ v \circ \varphi^{-1}$。那么，对于从 $V \times V^\star$ 到 $W \times W^\star$ 的同构 $\Phi := \varphi \oplus (\varphi^{-1})^t$，对所有属于 $V \times V^\star$ 的 (x, f) 和 (y, g)，我们有，

$$\begin{aligned} H_W^\varepsilon\big(\Phi(x,f), \Phi(y,g)\big) &= H_W\big((\varphi(x), f\circ\varphi^{-1}), (\varphi(y), g\circ\varphi^{-1})\big) \\ &= (f\circ\varphi^{-1})(\varphi(y)) + \varepsilon(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &= f(y) + \varepsilon g(x) = H_V^\varepsilon\big((x,f),(y,g)\big). \end{aligned}$$

此外，对所有 $(x, f) \in V \times V^\star$，我们有

$$\begin{aligned} h(w)[\Phi(x,f)] &= \big((\varphi\circ v\circ\varphi^{-1})[\varphi(x)], (\varphi\circ v^{-1}\circ\varphi^{-1})^t[f\circ\varphi^{-1}]\big) \\ &= (\varphi(v(x)), f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ v^{-1}\circ\varphi^{-1}) \\ &= (\varphi(v(x)), f\circ v^{-1}\circ\varphi^{-1}) \\ &= \Phi(h(v)[x,f]), \end{aligned}$$

从而得到 $h(w) = \Phi \circ h(v) \circ \Phi^{-1}$。因此，我们证明了

$$H_\varepsilon(v) \simeq H_\varepsilon(w).$$

换言之，数对 $H_\varepsilon(v)$ 的等距变换“类”仅取决于 ε 以及 v 的相似“类”。

最后，我们考察 $H_\varepsilon(v)$ 关于直和的性质。设 $u_1 \in \mathrm{GL}(V_1)$ 和 $u_2 \in \mathrm{GL}(V_2)$ 是自同构。我们考虑直和 $u := u_1 \oplus u_2 \in \mathrm{GL}(V_1 \times V_2)$。我们将证明

$$H_\varepsilon(u_1 \oplus u_2) \simeq H_\varepsilon(u_1) \perp H_\varepsilon(u_2).$$

为此，我们引入典范嵌入 $i_1\colon\ V_1 \hookrightarrow V_1 \times V_2$ 和 $i_2\colon V_2 \hookrightarrow V_1 \times V_2$，并考虑同构

$$\Psi : \begin{cases} (V_1\times V_2)\times(V_1\times V_2)^\star & \longrightarrow (V_1\times V_1^\star)\times(V_2\times V_2^\star) \\ ((x_1,x_2),\varphi) & \longmapsto \big((x_1,\varphi\circ i_1),(x_2,\varphi\circ i_2)\big). \end{cases}$$

设 $G := H_{V_1}^\varepsilon \perp H_{V_2}^\varepsilon$。对于 $V_1 \times V_2$ 中的所有 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2)，以及所有 $\varphi, \psi \in (V_1 \times V_2)^\star$，可得

$$\begin{aligned} G\big(\Psi((x_1,x_2),\varphi), \Psi((y_1,y_2),\psi)\big) &= \varphi(y_1,0) + \varepsilon\psi(x_1,0) + \varphi(0,y_2) + \varepsilon\psi(0,x_2) \\ &= \varphi(y_1,y_2) + \varepsilon\psi(x_1,x_2) \end{aligned}$$

因此， Ψ 是从 $H^{\varepsilon}_{V_1\times V_2}$ 到 G 的等距变换。最后，对于所有 $(x_1,x_2)\in V_1\times V_2$ 以及所有 $\varphi\in(V_1\times V_2)^\star$，有

$$(h(u_1)\oplus h(u_2))\big(\Psi((x_1,x_2),\varphi)\big)=\Big(\big(u_1(x_1),\varphi\circ i_1\circ u_1^{-1}\big),\big(u_2(x_2),\varphi\circ i_2\circ u_2^{-1}\big)\Big)$$

而

$$h(u_1\oplus u_2)[(x_1,x_2),\varphi]=\big((u_1(x_1),u_2(x_2)),\varphi\circ(u_1^{-1}\oplus u_2^{-1})\big)$$

以便

$$\begin{aligned}\Psi(h(u_1\oplus u_2)[(x_1,x_2),\varphi])&=\big((u_1(x_1),\varphi\circ(u_1\oplus u_2)^{-1}\circ i_1),(u_2(x_2),\varphi\circ(u_1\oplus u_2)^{-1}\circ i_2)\big)\\&=\big((u_1(x_1),\varphi\circ i_1\circ u_1^{-1}),(u_2(x_2),\varphi\circ i_2\circ u_2^{-1})\big).\end{aligned}$$

因此，我们已证明 $h(u_1)\oplus h(u_2)=\Psi\circ h(u_1\oplus u_2)\circ\Psi^{-1}$，由此得到所声称的等距变换。

注 4. 自同构 $h(u)\in\mathrm{GL}(V\times V^\star)$ 的相似“类”很容易由 u 推出，因为 u^t 与 u 相似。具体来说，对于所有 $p\in\mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 以及所有 $k\geq 1$，都有 $n_{p,\,k}(h(u))=n_{p,\,k}(u)+n_{p^\sharp,\,k}(u)$。

命题 2.1. 设 $u\in\mathrm{GL}(V)$ 与其逆相似。那么 $h(u)$ 在 $\mathrm{O}(H_V^1)$ 和 $\mathrm{Sp}(H_V^{-1})$ 中都是两个对合的乘积。

证明。事实上，由定理 1.7， $u=s_1s_2$ 在群 $\mathrm{GL}(V)$ 中存在对合 s_1、s_2。于是 $h(u)=h(s_1)h(s_2)$，并且 $h(s_1)$ 和 $h(s_2)$ 都是对合，且同时属于 $\mathrm{O}(H_V^1)$ 和 $\mathrm{Sp}(H_V^{-1})$。 □

2.2 κ 构造

现在，设 $b\colon\ V\times V\to\mathbb{F}$ 是一个非退化双线性形式，并设 $\varepsilon\in\{1,-1\}$。我们考虑同构 $L_b\colon\ x\in V\mapsto b(-,x)\in V^\star$，并令

$$\kappa(b):\begin{cases}V\times V^\star&\longrightarrow V\times V^\star\\(x,\varphi)&\longmapsto\big(L_b^{-1}(\varphi),L_b(x)\big).\end{cases}$$

显然， $\kappa(b)$ 是一个对合，它交换 $V\times\{0\}$ 和 $\{0\}\times V^\star$。

现在，假设当 $\varepsilon = 1$ 时， b 是对称的，否则是交错的。令 (x,φ) 和 (y,ψ) 属于 $V \times V^\star$。那么，

$$\begin{aligned} H_V^\varepsilon\big(\kappa(b)[x,\varphi],\kappa(b)[y,\psi]\big) &= L_b(x)[L_b^{-1}(\psi)] + \varepsilon\, L_b(y)[L_b^{-1}(\varphi)] \\ &= b(L_b^{-1}(\psi),x) + \varepsilon\, b(L_b^{-1}(\varphi),y) \\ &= \varepsilon\, b(x,L_b^{-1}(\psi)) + b(y,L_b^{-1}(\varphi)) \\ &= \varepsilon\, L_b(L_b^{-1}(\psi))[x] + L_b(L_b^{-1}(\varphi))[y] \\ &= \varepsilon\,\psi(x) + \varphi(y) \\ &= H_V^\varepsilon\big((x,\varphi),(y,\psi)\big). \end{aligned}$$

因此，$(H_V^\varepsilon, \kappa(b))$ 是一个 ε-同型对。

反过来，设 v 是 $V\times V^\star$ 的一个对合，使得 (H_V^ε, v) 是一个 ε-同型对，且 v 交换 $V\times\{0\}$ 和 $\{0\}\times V^\star$。于是，我们有一个向量空间同构 $f\colon V \xrightarrow{\sim} V^\star$，使得

$$\forall (x,\varphi)\in V\times V^\star,\ v(x,\varphi) = (f^{-1}(\varphi), f(x)).$$

考虑双线性型 $b\colon (x,y)\in V^2 \mapsto f(y)[x]$。那么 $v = \kappa(b)$。对所有 $(x,y)\in V^2$，我们有

$$\begin{aligned} b(y,x) = f(x)[y] = H_V^\varepsilon\big((0,f(x)),(y,0)\big) &= H_V^\varepsilon\big(v(x,0),v(0,f(y))\big) \\ &= H_V^\varepsilon\big((x,0),(0,f(y))\big) = \varepsilon\, f(y)[x] = \varepsilon\, b(x,y). \end{aligned}$$

因此，当 $\varepsilon = 1$ 时， b 是对称的；否则是交错的。

2.3 将扩展对拆分

现在，设 b 和 c 是 V 上的两个非退化双线性型，它们要么都对称，要么都交错。令 $\eta := 1$，若 b、c 是对称的；否则令 $\eta := -1$。我们有 $L_b^t = \eta\, L_b \circ i_V^{-1}$ 和 $L_c^t = \eta\, L_c \circ i_V^{-1}$，其中 $i_V\colon V \xrightarrow{\sim} V^{\star\star}$ 是典范双对偶同构。令 $u := L_b^{-1}L_c \in \mathrm{GL}(V)$，可得 $u^t = L_c^t(L_b^t)^{-1} = L_cL_b^{-1}$，因此 $(u^t)^{-1} = L_bL_c^{-1}$。由此可知

$$\kappa(b)\circ\kappa(c) = h(u).$$

注 5. 令 $u\in \mathrm{GL}(V)$. 根据 Frobenius 定理 [5]，我们记得，对于所有 $u\in \mathrm{GL}(V)$，在 V上存在非退化对称双线性型 b, c，使得 $u = L_b^{-1}L_c$。因此，前述构造表明 $h(u)$ 在 $\mathrm{O}(H_V^1)$ 中是双反射的。不过，在定理 1.6 的证明中不会用到这一构造。

2.4 双曲扩张的厄米不变量

下面我们将证明以下结果：

命题 2.2. 设 $u \in \mathrm{GL}(V)$。那么 $H_{-1}(u)$ 的所有 Wall 不变量都是双曲的。

证明。利用第 2.1 节最后一部分以及 Wall 不变量与直和相容这一事实，我们发现只需考虑以下情况：u 是循环的，其最小多项式为 p^r，其中 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$，且 $r \geq 1$。若进一步有 $p \neq p^\sharp$，则 $h(u)$ 恰有两个主不变量，即 p^r 和 $(p^\sharp)^r$，因此 $H_{-1}(u)$ 的所有二次和厄米不变量都为零。

这样只剩下三种情况。

情况1： $p = (t-\eta)^r$，其中 $r \geq 1$ 为奇数，且 $\eta = \pm 1$。
那么 $h(u)$ 恰有两个 Jordan 块，它们都对应于 $t-\eta$，且大小均为 r，因此 $H_{-1}(u)$ 的所有 Wall 不变量都为零。

情形 2： $p^\sharp = p$ 和 $p \notin \{t+1, t-1\}$。
于是，$h(u)$恰有两个 Jordan 块，二者都对应于 (p,r)。配对 $P := H_{-1}(u)$恰有一个非零 Wall 不变量，即 $P_{p,r}$，它定义在 $W := (V \times V^\star)/\mathrm{Im}\ p(h(u))$ 上；这是一个维数为 2 的 $\mathbb{L}$-向量空间，对于$\mathbb{L} := \mathbb{F}[t]/(p)$而言。还要注意，$\mathrm{Im}\ p(h(u)) = \mathrm{Im}\, p(u) \times \mathrm{Im}\ p(u^{-1})^t$。令 $v := h(u) + h(u)^{-1}$。为证明斜厄米形式 $P_{p,r}$ 是双曲的，只需找出它的一个非零各向同性向量。取 $x \in V \setminus \mathrm{Im}\, p(u)$。记 $2d$ 为 p 的次数，并令 $m \in \mathbb{F}[t]$ 满足 $p(t) = t^d m(t + t^{-1})$。对所有 $q \in \mathbb{F}[t]$，$q(h(u))\, m(v)^{r-1}[x, 0]$ 的第二个分量显然为零，因此

$$H_V^{-1}\big((x,0), q(h(u))m(v)^{r-1}[x,0]\big) = 0.$$

这导出 $\forall \lambda \in \mathbb{L}$, $c(X, \lambda X) = 0$，其中 X 表示 W中 $(x, 0)$ 的等价类，而 c 是由 b 在 W上诱导的 $\mathbb{F}$-双线性型：$(x', y') \mapsto H_V^{-1}\big(x', m(v)^{r-1}(y')\big)$。这导出 $P_{p,r}(X, X) = 0$。由于 $X \neq 0$，我们推得 $P_{p,\,r}$ 是各向同性的，因此是双曲的。

情形 3： $p = (t-\eta)^r$，其中 $r \geq 1$ 为某个偶数，且 $\eta \geq 1$为某个数。
在这种情况下，$P := H_{-1}(u)$ 的所有厄米 Wall 不变量都为零，除 $P_{t-\eta,r}$ 外的所有二次 Wall 不变量也都为零；后者是二维空间 $(V \times V^\star)/\mathrm{Im}(h(u) - \eta\,\mathrm{id})$ 上的非退化对称双线性型。然后，采用与情形 2 类似的证明，选取

$x \in V \setminus \mathrm{Im}(u - \eta\,\mathrm{id}_V)$，并可得，$(V \times V^\star)/\mathrm{Im}(h(u) - \eta\,\mathrm{id})$ 中 $(x, 0)$ 的等价类 X 是 $P_{t-\eta,r}$ 的一个非零各向同性向量，这表明该型是双曲的。

□

3 可表示为两个辛对合乘积的辛自同构

本节中，我们证明定理 1.5。事实上，我们将证明一个更具启发性的结果：

定理 3.1. 设 (b, u) 是一个 -1-等距对。以下条件等价：

(i) u 是 $\mathrm{Sp}(b)$ 中两个对合的乘积。

(ii) (b, u) 的所有 Wall 不变量都是双曲的，并且 u 的所有 Jordan 数都是偶数。

(iii) (b, u) 与 $H_{-1}(v)$ 等距，其中 V 是某个向量空间，v 是 V 的某个自同构，且它与其逆相似（即在 $\mathrm{GL}(V)$ 中是双反射的）。

蕴含关系 (iii) $\Rightarrow$ (i) 是命题 2.1 的直接推论。现在我们证明 (ii) 蕴含 (iii)。假设条件 (ii) 成立。由于 u 的所有若尔当数都是偶数，我们可以选取一个向量空间V 以及其上的自同构 v，使得对所有$p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$和所有 $r \geq 1$，$n_{p,r}(v) = \frac{1}{2} n_{p,r}(u)$。我们将证明 $(b, u) \simeq H_{-1}(v)$。

首先，对所有 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$和所有 $r \geq 1$，$n_{p,r}(v) = \frac{1}{2} n_{p,r}(u) = \frac{1}{2} n_{p^\sharp,r}(u) = n_{p^\sharp,r}(v) = n_{p,r}(v^{-1})$，从而 v 在 $\mathrm{GL}(V)$ 中与 v^{-1} 共轭。此外，对所有 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$和所有 $r \geq 1$，$n_{p,r}(h(v)) = n_{p,r}(v) + n_{p^\sharp,r}(v) = n_{p,r}(u)$。根据 Wall 对辛群中共轭类的分类，只需证明 $h(v)$ 和 u具有等价的 Wall 不变量。为此，注意对于所有满足 $p^\sharp = p$的 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$，双线性型或斜厄米形式 $H_{-1}(v)_{p,r}$ 以及 $(b, u)_{p,r}$ 都是双曲的（前者由命题 2.2 得出，后者由条件 (ii) 得出），并且它们具有相同的秩 $n_{p,r}(u)$，因此二者等价。我们得到 $(b, u) \simeq H_{-1}(v)$，这就证明了条件 (iii)。

现在仍需证明条件 (i) 蕴含条件 (ii)。因此，设 $u = ss'$ 对于某些对合 s、s' 成立，其中它们属于 $\mathrm{Sp}(b)$。我们将忽略 s'，只需注意到 $sus^{-1} = u^{-1}$（因为 $s's = u^{-1}$）。

厄米 Wall 不变量

设 $p \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 为一个次数为 $2d$ 的偶次回文多项式，并写作 $p(t) = t^d m(t+t^{-1})$，其中某个次数为 d 的首一 $m \in \mathbb{F}[t]$。令 $r \geq 1$ 为非负整数。我们将考虑 $(b,u)_{p,r}$ Wall 不变量。设 $\mathbb{L} := \mathbb{F}[t]/(p)$，并将其取 t 的类到其逆的对合记为$\lambda \mapsto \lambda^\bullet$。

设 $v := u + u^{-1}$，并注意到 s 与 v 可交换。因此，s 在底层的 $\mathbb{F}$-向量空间 V_p 上诱导出一个端omorphism $\overline{s}$，r 属于 $(b,u)_{p,r}$，但它不是 $\mathbb{L}$-线性的，而是 $\mathbb{L}$-半线性的，因为 $sus^{-1} = u^{-1}$。我们将考察 $\overline{s}$ 关于型 $(b,u)_{p,r}$ 的性质。首先，回顾一下，该型是借助由 $(x,y) \mapsto b(x, m(v)^{r-1}(y))$ 诱导的 $\mathbb{F}$-双线性型 $c\colon V_p^{2},_r \to \mathbb{F}$ 定义的。注意，s 关于此型是对称的。此外，对所有属于 V 的 x, y，我们有

$$b\big(s(x), m(v)^{r-1}(s(y))\big) = b\big(x, s^{-1}(m(v)^{r-1}(s(y)))\big) = b\big(x, m(v)^{r-1}(y)\big),$$

由此可知，$\overline{s}$ 是关于 c 的等距变换。最后，设 x, y 属于 $V_{p,\ r}$。那么，对所有 $\lambda \in \mathbb{L}$,

$$c(\overline{s}(x), \lambda\overline{s}(y)) = c(\overline{s}(x), \overline{s}(\lambda^\bullet y)) = c(x, \lambda^\bullet y) = f_p(\lambda^\bullet (b,u)_{p,r}(x,y)) = f_p(\lambda (b,u)_{p,r}(x,y)^\bullet)$$

因此

$$(b,u)_{p,r}(\overline{s}(x), \overline{s}(y)) = (b,u)_{p,r}(x,y)^\bullet = -(b,u)_{p,r}(y,x).$$

现在，考虑子域 $\mathbb{K} := \{\lambda \in \mathbb{L} :\ \lambda^\bullet = \lambda\}$: 有 $[\mathbb{L} :\ \mathbb{K}] = 2$，且$\overline{s}$ 是一个 $\mathbb{K}$-线性映射。由上述恒等式可知，$(b,u)_{p,\ r}$ 在 $\mathbb{K}$-向量空间 $W := \mathrm{Ker}(\overline{s} - \mathrm{id})$ 上诱导出一个交替双线性形式。因此，我们可以选取 W 的一个 $\mathbb{K}$-线性子空间 Z，使得 $\dim_{\mathbb{K}} Z \geq \dim_2^{\mathbb{K}} W$，且 $(b,u)_{p,\ r}$ 在 Z^2 上恒为零。

现在取 $\alpha \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ 使得 $\alpha^\bullet = -\alpha$。由于 $\overline{s}$ 是 $\mathbb{L}$-半线性的，映射 $x \mapsto \alpha x$ 诱导出一个从 W 到 $\mathrm{Ker}(\overline{s} + \mathrm{id})$ 的 $\mathbb{K}$-线性同构，因此 $Z + \alpha Z$ 是 V_p中的一个r 线性子空间，其维数至少为 $\mathbb{K}$ 上的 $\text{维数}_{\mathbb{K}} V_{p,\ 2}{}^{\ r}$，因此其在 $\mathbb{L}$ 上的维数至少为 $\text{维数}_{\mathbb{L}} V_{p,\ 2}{}^{\ r}$。由于 $(b,u)_{p,\ r}$是半双线性的，显然它在 $(Z + \alpha Z)^2$, 上处处为零，由此我们得出它是双曲的。

二次 Wall 不变量

接下来，我们考虑 Wall 不变量 $(b,u)_{t-\eta,2r}$，其中取某个 $\eta \in \{-1, 1\}$ 和某个 $r \geq 1$。该不变量是由下式给出的（非退化）对称双线性形式

c它由（x,y） $\mapsto b\big(x$、（$u-u^{-1}$）（$v-2\eta\mathrm{id}$）$^{r-1}$（y）$\big)$在商空间$V_{t-\eta,2r}:=$ Ker（$u-\eta\mathrm{id}$）$^{2r}/\big($Ker（$u-\eta\mathrm{id}$）$^{2r-1}+$（Im（$u-\eta\mathrm{id}$）$\cap$Ker（$u-\eta\mathrm{id}$）^{2r}）$\big)$上诱导而得。端omorphism s 在$V_{t-\eta,2r}$上诱导出一个端omorphism $\overline{s}$。这一次，我们注意到 s 与 w 反对易：$=$（$u-u^{-1}$）（$v-2\eta\mathrm{id}$）$^{r-1}$，因此c（$\overline{s}$（x） $\overline{s}$（y））$=-c$（x,y），对所有 x,y 属于$V_{t-\eta,2r}$均成立。特别地，子空间 Ker（$\overline{s}-\mathrm{id}$）和 Ker（$\overline{s}+\mathrm{id}$）都是全 c-各向同性的；由于它们中至少有一个的维数大于或等于 1 2 dim$V_{t-\eta,2r}$，我们推得 c是双曲的（注意，由于 c 非退化，这表明 Ker（$\overline{s}-\mathrm{id}$）和 Ker（$\overline{s}+\mathrm{id}$）实际上具有相同的维数）。

Jordan 数

最后，我们证明 u 的 Jordan 数全为偶数。由于 u 的厄米 Wall 不变量和二次 Wall 不变量全都是双曲的，因此所有相应的 Jordan 数都是偶数，所以只需考察 u 的一种类型的 Jordan 数：形如 $n_{p,\,r}(u)$ 的那些，其中 $p\in\mathrm{Irr}(\mathbb{F})$ 满足 $p\neq p^\sharp$，且 $r\geq 1$。对于任意 $p\in\mathrm{Irr}(\mathbb{F})$，记 $E_p:=\bigcup\mathrm{Ker}\,p(u)^k$ 为特征 $k\geq 0$

子空间，它附属于 p。由于 u 是一个 b-等距变换，已知 E_p 的 b-正交补是 $\bigoplus E_q$；特别地，若 $p\neq p^\sharp$，则 $_{q\in\mathrm{Irr}(\mathbb{F})\setminus\{p^\sharp\}}E_p\oplus E_{p^\sharp}$ 是 b-正则的，而 E_p 和 $E_{p^\sharp}$ 则是全 b-奇异的。

现在，固定满足 $p\neq p^\sharp$ 的 $p\in\mathrm{Irr}(\mathbb{F})$，并令 $V:=E_p$、$V':=E_{p^\sharp}$ 和 $W:=V\oplus V'$。注意到 $sus^{-1}=u^{-1}$，可知 $sp(u)s^{-1}=p(u^{-1})$，由此得出 s 将 V 映入 V'，并将 V' 映回 V。由于 V 和 V' 是全b-奇异的，而 W 是 b-正则的，因此该映射

$$\varphi:\begin{cases}V' & \longrightarrow V^\star\\ x' & \longmapsto b(x',-)_{|V}\end{cases}$$

是一个向量空间同构，因此

$$\Phi:\begin{cases}W & \longrightarrow V\times V^\star\\ x+x' & \longmapsto (x,\varphi(x'))\end{cases}$$

也是一个向量空间同构。设 x、$y\in V$，且 x'、$y'\in V'$。那么

$$H_V^{-1}(\Phi(x+x'),\Phi(y+y'))=b(x',y)-b(y',x)=b(x',y)+b(x,y')=b(x+x',y+y'),$$

其中最后一个不等式是因为 b 在 V 和 V' 上都是全奇异的。因此，Φ 是由 b 在 $\overline{b}$ 上诱导的辛形式的等距变换

W到 H_V^{-1}。记由 u 诱导的 W 的自同构为 v，我们推得 -1-等距对 $(\overline{b}, v)$ 与 $(H_V^{-1}, \Phi \circ v \circ \Phi^{-1})$ 等距，并且 $a := \Phi \circ s \circ \Phi^{-1}$ 是 $\mathrm{Sp}(H_V^{-1})$ 的一个对合，它交换 $V \times \{0\}$ 和 $\{0\} \times V^\star$。如第 2.2 节所示，这给出某个定义在 V 上的辛形式 B 所对应的 $a = \kappa(B)$。同样，$a^{-1} \circ \Phi \circ v \circ \Phi^{-1}$ 是 $\mathrm{Sp}(H_V^{-1})$ 的一个对合，它交换 $V \times \{0\}$ 和 $\{0\} \times V^\star$，因此它等于某个定义在 V 上的辛形式 C 所对应的 $\kappa(C)$。

由此我们得出，对于 $w := L_B^{-1} L_C$，$\Phi \circ v \circ \Phi^{-1} = \kappa(B) \circ \kappa(C) = h(w)$。由于 B 和 C 是 V 上的辛形式，众所周知，w 的所有 Jordan 数都是偶数（例如参见 [10]）。因此，v 的所有 Jordan 数都是偶数。特别地，$n_{p,\,r}(v)$（它等于 $n_{p,\,r}(u)$）是偶数。定理 1.5 的证明至此完成。

4 正交群中的双反射性

在这一简短的小节中，我们借助前面构造的契机，简要证明 Wonenburger 关于正交群的结果（定理 1.6）。同样，只需考虑 (b, u) 是不可分解的 1-等距对的情形。我们在定理 1.3 中已经看到，这类不可分解对有四种类型；为便于证明，我们将它们重新归为两种情形：要么 u 是循环的，且其最小多项式是回文多项式；要么 u 恰有两个不变因子，且二者都等于 $(t-\eta)^{2r}$，其中 $\eta = \pm 1$ 是某个元素，$r \geq 1$ 是某个整数。

情况1：u 恰有两个不变因子，二者都等于 $(t-\eta)^{2r}$，其中 $\eta = \pm 1$，且 $r \geq 1$为某个整数。

选取一个循环端同态 v，其最小多项式为 $(t-\eta)^{2r}$（底层向量空间为 W）。那么 v 与其逆相似，由命题 2.1 可知，$h(v)$在 $\mathrm{O}(H_W^1)$ 中是双反射的。此外，$H_1(v)$和(b, u)的所有 Wall 不变量均为零，且它们具有相同的 Jordan 数。因此，$H_1(v) \simeq (b, u)$，由此得出 u 在 $\mathrm{O}(b)$ 中是双反射的。

情形 2：u 是循环的，且其最小多项式是回文多项式。

记 V为 (b, u) 的底层向量空间，并为 u 选取一个循环向量x。我们在定理 1.7 的证明中已经看到，存在一个对合 $s \in \mathrm{GL}(V)$，使得对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，$s(u^k(x)) = u^{-k}(x)$，并且 us 也是一个对合。更进一步，s 是一个 b- 等距变换：事实上，对于 $\mathbb{Z}$ 中的任意 k、l，我们有

$$b\big(s(u^k(x)), s(u^l(x))\big) = b\big(u^{-k}(x), u^{-l}(x)\big) = b\big(u^l(x), u^k(x)\big) = b\big(u^k(x), u^l(x)\big).$$

由此我们推出， us 也是关于 b 的等距变换，最后， $u = (us)s$ 在 O(b) 中是双反射的。

注6。Klaus Nielsen教授指出，Wonenburger 对定理 1.6 的证明中存在一个严重错误 [16]： 在第337页最后一行，如果 n为偶数且 S 是正交变换，则向量 w 不属于 P_1 ，而是属于 Q_1。这实质上对应于上文的情况1。

参考文献

[1] D. Awa，R.J. de La Cruz，每个实辛矩阵都是辛对合的乘积，Linear Algebra Appl. 589 (2020), 85–95.[2] F. B¨unger，《酉群中对合的乘积》，《第四届国际几何学大会》论文集，雅典科学院，塞萨洛尼基亚里士多德大学，第93-100页，1997年。[3] F. B¨unger，《对合在酉群中的生成作用》，博士论文，基尔大学，1997年。[4] D.˘Z. Djokovi´c，《两个对合的乘积》，Arch. Math. (Basel) 18 (1967), 582–584..[5] G. Frobenius，《与一个矩阵可交换的矩阵》，Sitzungs- ber. Preuss. Akad. Wiss. (1910), 3–15.[6] R. Gow，《特征2经典群中两个对合的乘积》，J. Algebra 71 (1981), 583–591.[7] W.H. Gustafson，P.R. Halmos，H. Radjavi，《对合的乘积》，Linear Algebra Appl. 13 (1976), 157–162.[8] F. Hoffman，E.C. Paige，《一般线性群中两个对合的乘积》，Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 1017–1020.[9] R.J. de La Cruz，每个辛矩阵都是四个辛对合的乘积，Linear Algebra Appl. 466 (2015), 382–400.[10] W. Scharlau，《交错形式对》，Math. Z. 147 (1976), 13–19.[11] C. de Seguins Pazzis，两个二次矩阵之和与积：正则情形，Adv. Appl. Clifford Algebras 32 (2022)。

[12] C. de Seguins Pazzis, 《两个二次矩阵之和：例外情形》, Linear Algebra Appl. 653 (2022), 357–394.[13] C. de Seguins Pazzis, 《关于三个平方零矩阵之和的注记》, 《线性多重线性代数》65 (2017), 787–805.[14] C. de Seguins Pazzis, 《两个平方零自伴或斜自伴端同态之和》, 预印本, arXiv, https://arxiv.org/abs/2210.03955[15] G.E. Wall, 《关于正交群、辛群和酉群中的共轭类》, 《澳大利亚数学会杂志》3-1 (1963), 1–62.[16] M.J. Wonenburger, 《两个对合之积的变换》, 《数学与力学杂志》16 (1966), 327–338。