arXiv:2302.00502v2 [math.PR] 4 Sep 2023

具有¨非退化赫尔德扩散系数的抛物型随机偏微分方程支撑定理

YI HAN

Abstract. 本文研究如下形式的抛物型随机偏微分方程

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) + g(t,x,u) + \sigma(t,x,u)\dot{W}(t,x)$$

并满足诺伊曼边界条件，其中 $x \in [0,1]$, $\dot{W}(t,x)$ 是定义在 $(t,x) \in [0,\infty)$ 上的时空白噪声，$\times [0,1]$, g 一致有界，且解 $u \in \mathbb{R}$ 取实值。假设扩散系数 σ 一致椭圆，但关于 u 仅为 H¨赫尔德连续。此前，随机偏微分方程的支撑定理仅在假设 σ 关于 u 利普希茨连续的情况下得到证明。借助近期建立的随机积分尖锐双边估计，我们在这一 σ H¨赫尔德连续情形下得到了新的支撑定理和小球概率结果。

1. Introduction

随机过程的支撑定理由来已久。其中一种最简单的形式可以表述如下：设 B_t 为一个从 0 出发的 d维布朗运动，则对任意 $\epsilon, t > 0$ ，有

$$\mathbb{P}(\sup_{s\le t} |B_s| < \epsilon) > 0.$$

这可由布朗运动的反射原理得出。通过 Girsanov 测度变换，我们可以推知，对任意满足 $\psi(0) = 0$ 的连续 $\psi\colon [0,t] \to \mathbb{R}^d$ ，都有

$$\mathbb{P}(\sup_{s\le t} |B_s - \psi(s)| < \epsilon) > 0.$$

例如参见 [3], 第 59–60 页，式 (6.5) 和 (6.6)。这两条结论都依赖于过程 B的高斯结构。

还有另一种概念，通常称为随机过程的 Stroock–Varadhan 支撑定理，其风格有所不同。考虑具有周期边界条件的抛物型随机偏微分方程

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) + g(t,x,u) + \sigma(t,x,u)\dot{W}(t,x), \quad x \in [0,1]. \tag{1.1}$$

记 $\mathcal{H} := \{h\colon [0,T]\times[0,1] \to \mathbb{R}, h$ 绝对连续的 $\dot{h} \in L^2([0,T]\times[0,1])\}$ 为布朗片的 Cameron-Martin 空间。 $\mathcal{H}$ 是一个赋范为

$$\|h\|_{\mathcal{H}} := \|\dot{h}\|_{L^2([0,T]\times[0,1])}$$

的希尔伯特空间。令 $S(h)$ 表示在给定的 $h \in \mathcal{H}$ 下，以 $\dot{h}$ 替代白噪声 W 时，方程 (1.1) 的解。若假设 σ 是利普希茨的， $u(0,\cdot)$ 是 H¨older 连续的，且 g 具有足够多阶导数，则文献 [2] 已证明，随机变量 u 在 $\mathcal{C}^\alpha([0,T]\times[0,1])$ 中的概率律的拓扑支撑（对某个 $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$ 而言）等于 $\cup_{h\in\mathcal{H}} S(h)$ 的闭包。这里，$\mathcal{C}^\alpha([0,T]\times[0,1])$ 是赋予了 α-H¨older 拓扑的维纳空间。

本研究获得英国工程与物理科学研究委员会资助，项目编号 EP/W524141/1。

从 [13], 开始，人们已针对其他随机偏微分方程实例证明了此类支撑定理；另见 [4], [5] 和 [7], ，它们也得出了相同结论：解 u 的拓扑支撑是 $S(h)$ 的闭包，其中 h 是以控制 h 替代噪声后，由该控制驱动的随机偏微分方程的解。奇异随机偏微分方程的支撑定理由 [10], 得出，其特点是重整化群中的陪集结构在刻画解的拓扑支撑时发挥关键作用。在上述所有工作中，系数 g 和 σ 足够良好，因此控制问题 $S(h)$ 可以得到妥善求解，而方程 (1.1) 的支撑也可以用控制问题 $S(h)$ 的解来刻画。

本文从噪声正则化现象的视角研究随机偏微分方程的支撑定理。在（1.1）的设定下，这意味着系数 g or σ （或二者）不一定是局部利普希茨连续的。通常要求 σ 一致椭圆，这样驱动噪声的粗糙性便能恢复方程的适定性。由于控制过程 $S(h)$ 所对应的常微分方程或偏微分方程通常不适定，因此一般无法得到 Stroock–Varadhan 支撑定理。不过，仍然可以证明解具有全支撑，或得到小球概率估计

对于加性噪声，即 $\sigma = I_d$，并假设漂移项 g 的奇异性不太强，我们可以通过吉尔萨诺夫变换消去漂移项，并利用白噪声具有全支撑这一性质，证明解也具有全支撑。关于具有奇异漂移项的有限维随机微分方程，相关例子见 [12]。当 σ 是利普希茨连续且一致椭圆时，情况也相同。

我们尤其关注支撑定理的稳健性，即在剩下的（最困难的）情形下， σ 在 u中仅为 α-H¨older连续，其中 $\alpha \in (0, 1]$。更准确地说，我们假设存在某些 $\mathcal{C}_1$、 $\mathcal{C}_2$、 $\mathcal{D} > 0$ ，使得

$$|\sigma(t, x, u) - \sigma(t, x, v)| \le \mathcal{D}|u - v|^\alpha, \quad \mathcal{C}_1 \le |\sigma(t, x, u)| \le \mathcal{C}_2.$$

对任意 $t > 0$、 $x \in [0, 1]$ 以及 u、 $v \in \mathbb{R}$均成立。在这种情况下，吉尔萨诺夫变换或控制过程 $S(h)$ 无法像之前那样为我们揭示答案。

在陈述我们的支撑定理之前，讨论(1.1)的适定性问题至关重要。对于 σ 在 u中为 α-H¨older连续的情形， $\alpha > \frac{3}{4}$，强解存在性和强唯一性已在 [15] 中得到确立（另见 [11] ，其中从不同角度进行了讨论，也考虑了 $\alpha > \frac{3}{4}$ ）。一般而言，即使不了解弱唯一性，我们也可以考虑(1.1)的概率弱解（弱解存在性由 [9]推出）。只要 $\alpha > 0$，我们的主定理中的下界仍然成立。特别地，将(1.1)的每个弱解视为 $\mathcal{C}([0, T] \times [0, 1])$上的概率律（赋予上确界范数）时，它都具有满拓扑支撑，即其支撑为 $\{w(t, x) \in \mathcal{C}([0, T] \times [0, 1]) : w(0, x) = u(0, x)\}$。

我们刻画（1.1）支撑集的策略如下。由于 σ 非退化，预计（1.1）属于与线性随机热方程相同的普适类

$$\partial_t u(t, x) = \partial_x^2 u(t, x) + \dot{W}(t, x), \tag{1.2}$$

这也被称为 Edwards-Wilkinson 普适类。在这一普适类中，我们观察到在 1:2:4 标度关系 $u(t, x) \mapsto \epsilon^{-1} u(\epsilon^{-4} t, \epsilon^{-2} x)$.[1] 下存在非平凡的极限行为。根据这一标度关系，即使 σ 不是

[1] 严格来说，1:2:4 标度并不直接适用于空间区域 $[0, 1]$，上的随机偏微分方程，但我们将采用对 1:2:4 标度更灵活的解释：考虑小尺度下关于布朗片的随机积分，更具体地说，在空间尺度 $[0, \epsilon^2]$ 和时间尺度 $[0, \epsilon^4]$ 下，该随机积分通常取值于尺度 $[-\epsilon, \epsilon]$，并具有良好的尾部估计（见 [1], 引理 3.4）。随后，我们将从这些小尺度估计推出一个宏观估计。

u 中的常数，也可以预期，在小尺度上，方程 (1.1) 的解具有相当精确的双侧概率估计。相关计算已在 [1], 中完成，得到了方程 (1.1) 的解的匹配小球概率估计，其中 σ 关于 u 是利普希茨连续的，且利普希茨常数足够小。

当 σ 仅为 H¨older 连续时，我们预期它会以如下方式导致时空发生高度非线性的拉伸：若在保持 1:2 抛物标度的时空网格上，用另一个高斯场 u' 近似 u，当 σ 是利普希茨连续且利普希茨常数较小时，我们可以通过随机演算证明，在所需尺度下 u 与 u' 保持接近；但当 σ 仅为 H¨older 连续时，我们无法以高概率证明 u 在该尺度下仍接近 u'。为克服这一问题，我们在保持空间尺度不变的同时缩短时间尺度，从而调整 1:2 时空抛物标度。因此，我们仍能获得关于解的细尺度性质的非平凡概率估计（上界和下界），而这已足以证明支撑定理。然而，在这种 H¨older 连续情形下，小球概率的上下界在 ϵ中并不具有相同的指数，这反映了 σ的不规则性会导致时空发生高阶拉伸。我们指出，对于线性随机热方程 (1.2)，可以得到上下界具有相同 ϵ指数的小球概率，见 [6],第 168 页，定理 5.1。

现在陈述主要定理。

记由形如 $f(x,t,\omega) = X(\omega)\cdot 1_A(x)\cdot 1_{(a,b]}(t)$ 的函数生成的噪声 $W(t,x)$ 的可预测 σ-域为 $\mathcal{P}$，其中 $A\subset[0,1]$，且 X 是一个 $\mathcal{F}_a$-可测随机变量。若 $h\in\mathcal{P}$，并且几乎必然有 h、$\partial_t h$、$\partial_x^2 h$ 均被某个固定常数 C所界，则称 $h\in\mathcal{PC}_b^2$。

在陈述定理之前先作一条重要说明：假设对于任意 $\alpha>0$， σ 关于 u 是 α-H¨older 连续的，那么通过紧性论证，方程 (1.3) 总存在概率弱解，参见例如 [9]。然而，文献中尚无证明表明对于一般的 α，该解是唯一的。关于某些情形下 α 的逐路径适定性结果，参见注 1.3。

定理 1.1。考虑满足诺伊曼边界条件的随机热方程的解 $u(t,x)\in\mathbb{R}$，其中 $[0,1]$

$$\partial_t u(t,x)=\frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x)+g(t,x,u(t,x))+\sigma(t,x,u(t,x))\dot{W}(t,x),\quad u(0,x)=u_0(x). \tag{1.3}$$

假设 $u_0, h\in\mathcal{PC}_b^2$ 满足

$$\sup_{x\in[0,1]}|u_0(x)-h(0,x)|<\epsilon/2,$$

并且对于某些常数 $D,\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2>0$, $\alpha\in(\frac{3}{4},1],$, 有

$$|\sigma(t,x,u)-\sigma(t,x,v)|\le\mathcal{D}|u-v|^\alpha,$$

$$\mathcal{C}_1\le|\sigma(t,x,u)|\le\mathcal{C}_2$$

对于所有 $x\in[0,1]$, $u,v\in\mathbb{R}$ 和 $t\ge0$，并且

$$\sup_{t>0,x\in[0,1],u\in\mathbb{R}}|g(t,x,u)|<\infty.$$

那么，对于任意 $\beta>2-\alpha$，我们可以找到正常数 C_0、C_1、C_2、C_3 和 ϵ_0，它们依赖于 β、$\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 以及 $\sup_{t,x,u}|g(t,x,u)|$，使得对于任意 $0<\epsilon<\epsilon_0$，都有

$$C_0\exp(-\frac{C_1T}{\epsilon^{2+4\beta}})\le P(\sup_{0\le t\le T,x\in[0,1]}|u(t,x)-h(t,x)|\le\epsilon)\le C_2\exp(-\frac{C_3T}{(1+\mathcal{D}^2)\epsilon^{4+2\alpha}}). \tag{1.4}$$

如果我们仅假设 $\alpha > 0$，那么 (1.4) 中的下界成立，即，

$$C_0 \exp(-\frac{C_1 T}{\epsilon^{2+4\beta}}) \leq P(\sup_{0\leq t\leq T, x\in[0,1]} |u(t,x) - h(t,x)| \leq \epsilon). \tag{1.5}$$

此外，存在一个仅依赖于 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 的 $\mathcal{D}_0 > 0$，使得只要满足 $\mathcal{D} < \mathcal{D}_0$，上述估计 (1.4) 和 (1.5) 对 $\beta = 2 - \alpha$ 即成立（各数值常数的取值可能有所变化。）

由于 h 是任意的，这尤其意味着解 u 在维纳空间上关于上确界范数具有全支撑。更准确地说：

推论 1.2. 假设 $\alpha \in (0, 1]$。令 μ 表示偏微分方程 (1.3) 在 $\mathcal{C}([0,T]\times[0,1])$ 上任意可能的弱解的概率律。记

$$\Omega_{u_0}([0,T]\times[0,1]) = \{w(t,x) \in \mathcal{C}([0,T]\times[0,1]) : w(0,x) = u_0(x)\},$$

那么，对任意这样的 μ，都有

$$\operatorname{Supp}\mu = \Omega_{u_0}([0,T]\times[0,1]),$$

其中，$\mathcal{C}([0,T]\times[0,1])$ 配备由上确界范数生成的拓扑。

定理 1.1 尚不令人满意，因为（1.4）中的上界和下界相差甚大，因此很可能不是最优的。这与 [1] , 中的主要结果形成对比：只要 σ 的利普希茨常数足够小，上界和下界就具有相同的 ϵ 次幂。我们认为，（1.4）中可能非最优的估计源于纯粹的技术限制，但在我们的无限维情形中，这些技术限制很难消除。事实上，对于没有漂移项的有限维扩散，可以将解表示为经过时间变换的布朗运动，因此支撑定理很容易得到。然而，随机偏微分方程并非如此；对于随机偏微分方程，我们通常只能像 [1] 和本文所做的那样，用一些高斯变量逼近解。（这或许也解释了为什么有限维扩散的小球概率估计早已为人所知且易于证明，而随机偏微分方程相应的估计直到最近才得以建立。）如脚注 1 所述，在小尺度上，一维高斯场预期具有 1:2:4 标度，但若将该高斯场与一个非利普希茨的 H¨older 连续函数复合，1:2:4 标度就会发生扭曲。我们关注这一精细尺度性质，主要是因为我们将用高斯场 u' 逼近解 u ；如果这一最优的 1:2:4 标度不成立，我们的证明只能给出 u 和 u' 之间距离的上界，而该上界的量级远大于通常认为的最优量级。总之，这种微观尺度上的高斯逼近过程正是需要 1:2:4 标度的环节，因此会导致针对 H¨older 连续 σ 的非最优估计。如果我们能够不借助这一高斯逼近过程，直接证明支撑定理和小球概率估计，就有望得到更精确、甚至上下界匹配的估计，从而改进（1.4）。

注 1.3. 技术假设 $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1]$ 仅用于与 [15] 中的适定性结果相匹配（另见 [11]）。

对于第 2.3 节中将要证明的上界，我们不确定该证明是否对任意 $\alpha > 0$ 都适用，因为我们必须在同一概率空间上求解另一个随机偏微分方程 (2.4) [2]。这一过程要求所有具有给定 H¨older 连续性的扩散系数都满足强适定性。

[2]其中扩散系数 σ 在解变量上仅 α- H¨older 连续

注 1.4。为简便起见，我们在单位区间 $[0,1]$, 上进行讨论，但所有结论都可推广到任意有限区间 $[0,J]$。本文假设解 u 为实值，但至少下界 (1.5) 无需改动即可推广到向量值情形 $\mathbf{u}(t,x) \in \mathbb{R}^d$,$d \in \mathbb{N}_+$。当 σ 为利普希茨连续时，这些推广可见 [1]。由于缺少相应的逐路径适定性结果，(1.4) 中的上界可能难以推广到高维情形。

还有几个尚待解决的问题。其中之一是，能否在 H¨older 半范数下（而非上确界范数下）获得支撑定理。当 σ 在 u 中利普希茨连续时，已有相当精确的结果（近期进展见 [8]）；但要将现有文献中的估计推广到我们的 H¨older 连续 σ，似乎有些困难。另一个更根本的问题是：如果假设 σ 一致椭圆，那么 H¨older 指数 $\alpha > \frac{3}{4}$ 这一假设是否为（强或弱）适定性（1.3）所必需，目前尚不清楚。我们认为，对于弱适定性， $\alpha > 0$ 这一条件已经足够，但无法给出证明。请注意，若不假设 σ 一致椭圆，那么 $\alpha > \frac{3}{4}$ 是一个尖锐条件；对于情形 $\alpha < \frac{3}{4}$., 参见 [14]

2. Proof of main theorem

2.1. 化归到简单情形。为完整起见，我们引用 [1], 第 2.2 节中的相关化归步骤。我们首先证明，经过一些简单的化归后，可以假设$g = 0$ 和 $h = 0$。这些化归由吉尔萨诺夫定理和 σ 的非退化性得出。

(1.3) 的解可以改写为

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,x) + \sigma(t,x,u(t,x))[\dot{W}(t,x) + \sigma^{-1}g(t,x,u(t,x))].$$

对每个 $t > 0$，令 P_t 为限制在滤过 $\mathcal{F}_t$ 上的 $\mathcal{P}$。考虑如下定义的概率律Q_t：

$$\frac{dQ_t}{dP_t} = \int_0^t \int_0^1 \sigma^{-1}g(t,x,u(t,x)) \cdot W(t,x) - \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^1 (\sigma^{-1}g(t,x,u(t,x))^2 dxdt. \tag{2.1}$$

根据吉尔萨诺夫定理， $\dot{W}(t,x) + \sigma^{-1}g(t,x,u(t,x))$ 关于 Q_t 是一个时空白噪声。记事件 A 为

$$A = \{\sup_{s\in[0,T],y\in[0,1]} |u(s,y) - h(s,y)| < \epsilon\},$$

于是，由柯西-施瓦茨不等式

$$Q_T(A) = E^{P_T}[1_A \frac{dQ_T}{dP_T}] \le \sqrt{P_T(A)}\sqrt{E(\frac{dQ_T}{dP_T})^2} \le \sqrt{P_T(A))}M, \tag{2.2}$$

其中， M仅依赖于 T、$\mathcal{C}_1$和 $\sup_{t,\ x,\ y}|g(t,x,y)|$. 这意味着，(1.4) 中一般情形下 g 的下界可由 $g = 0$ 情形下的下界推出。

对于上界，类似的论证同样成立：只需在 (2.2) 中交换 P 和 Q，并在 (2.1) 中用 $-g$ 替换 g。

现在我们说明为什么可以取 $h = 0$。 [1] 的第 6 页对此有概述，但为完整起见，我们在此重述。令 $H := \partial_t - \frac{1}{2}\partial_x^2$，并考虑过程

$$w(t,x) = u(t,x) - u_0(x) - h(t,x) + h_0(x),$$

使得 $w(0,x) = 0.$。若令 $\sigma_1(t,x,w) = \sigma(t,x,u)$，并且

$$g_1(t,x,w) = g(t,x,u) - Hu_0(x) - Hh(t,x) + Hh_0(x),$$

我们有

$$\partial_t w(t,x) = \frac{1}{2}\partial_x^2 w(t,x) + g_1(t,x,w) + \sigma_1(t,x,w)\cdot \dot{W}(t,x).$$

由于 $u_0, h \in \mathcal{PC}_b^2$, $\sup_{t,x,\omega}|g_1(t,x,\omega)| < \infty$，因此我们只需考虑 $h = 0$ and $u(0,x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$ 的情形。

2.2. 精确的双边估计。回顾一下，$[0,1]$ 上的热核由下式给出

$$G(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi t)^{-1/2}\exp(-\frac{(x+n)^2}{2t}).$$

考虑如下定义的噪声项 N

$$\mathbf{N}(t,x) := \int_0^t \int_0^1 G(t-s, x-y)\sigma(s,y,u(s,y))W(dyds).$$

我们引用 [1]，命题 3.4 和注 3.1 中的以下大偏差估计，它对高斯过程的 1:2:4 标度给出了非常精确的表述：

命题 2.1. 假设 $\sup_{s,\ y}|\sigma(s,y,u(s,y))| \le \mathcal{C} < \infty$。那么我们可以找到普适常数 K_1 和 K_2，使得对于任意 α、λ、$\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le \alpha\epsilon^4, x\in[0,\epsilon^2]} |\mathbf{N}(t,x)| > \lambda\epsilon\right) \le \frac{K_1}{1\wedge\sqrt{\alpha}}\exp(-K_2\frac{\lambda^2}{\mathcal{C}^2\sqrt{\alpha}}). \tag{2.3}$$

注 2.2. 如果上确界取遍所有满足 $k\epsilon^2 \le 1$ 的 $x \in [(k-1)\epsilon^2,\ k\epsilon^2]$ $k \in \mathbb{N}_+$，估计式 (2.3) 仍然成立。这是因为，[1] 中对 (2.3) 的证明仅使用了 $\mathbf{N}(t,x)$ 在 t 和 x 中的连续模估计（参见引理 3.3 中关于 [1], 的论证），而该估计与 x 在 $[0,1]$ 中的位置无关。此外还使用了从 $(0,0)$ 到 (t,x) 的一条网格点路径；在这种情况下，可以将其替换为一条从 $(0,(k-1)\epsilon^2)$ 出发的路径。

我们固定一个充分小的 $c_0 > 0$，使得 $0 < c_0 < \max\{(\frac{K_2}{36\ \text{~~对数}\ K_1\mathcal{C}_2^2})^2, 1\}$，并定义离散化的时间网格如下：[3]

$$t_n = nc_0\epsilon^4, \quad n \ge 0,$$

并将编号为 n 的时间区间记作 $I_n := [t_n, t_{n+1}]$。选取某个充分大的 $\theta = \theta(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) > 0$（精确条件见 [1], (2.11)），并固定$c_1^2 = \theta c_0$，空间网格点选取为

$$x_n = nc_1\epsilon^2, n \ge 0.$$

该时空网格遵循抛物型 1:2 标度。固定一个终止时间 $T > 0$，并定义终止指标

$$n_1 := \min\{n \ge 1 : t_n > T\}, \quad n_2 := \min\{n \ge 1 : x_n > 1\}.$$

记为 $p_{i,j} = (t_i, x_j)$，并考虑以下两列事件

$$A_n = \{|u(t_{n+1},x)| \le \frac{\epsilon}{3}, \quad x\in[0,1], \text{ and } |u(t,x)| \le \epsilon, t \in I_n, x \in [0,1]\},$$

[3]稍后我们将介绍另一种划分时间区间的方案，该方案不遵循 1:2 抛物标度。

and

$$F_n = \{|u(p_{nj})| < \epsilon \text{ for all } j \le n_2 - 2\}.$$

证明策略是先固定 σ 的 u 分量，并在高斯情形下得到一个估计，然后通过插值论证推导一般情形。对于高斯情形（即 σ 不依赖于 u 的情形），我们引用 [1],命题 2.1 中的以下结果:

命题 2.3. 在定理 1.1 的假设下，进一步假设 $g = 0, u_0(x) \equiv 0$ 和 $\sigma(t,x,u)$ 不依赖于 u。

于是存在常数 $\epsilon_0, C_4, C_5 > 0$，它们仅依赖于 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$，使得对任意 $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

$$P(F_n \mid \cap_{k=0}^{n-1} F_k) \le C_4 \exp(-C_5 \epsilon^{-2}),$$

并且我们可以找到仅依赖于 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 的常数 $C_6, C_7 > 0$，使得对任意 $0 < \epsilon < \epsilon_0$,

$$P(A_n \mid \cap_{k=0}^{n-1} A_k) \ge C_6 \exp(-C_7 \epsilon^{-2}).$$

现在我们证明一般情形（即 σ 依赖于 u）。

2.3. 上界，一般情形。定义一个函数

$$f_\epsilon(z) = \begin{cases} z, & |z| < \epsilon, \\ \frac{\epsilon}{|z|} z, & |z| > \epsilon, \end{cases}$$

因此 $|f_\epsilon(z)| \le \epsilon$，且 f_ϵ 是利普希茨连续的。我们求解以下随机偏微分方程

$$\partial_t v(t,x) = \frac{1}{2} \partial_x^2 v(t,x) + \sigma(t,x,f_\epsilon(v(t,x))) \cdot \dot{W}(t,x) \tag{2.4}$$

其初值为 $v(0,x) = u_0(x)$。该方程适定，因为 $\sigma(t,x,f_\epsilon(u))$ 关于 u 是 α-H¨older 连续的，其中 $\alpha > \frac{3}{4}$。

只要对所有 $x \in [0,1]$ 和 $t \in [0,t_1]$ 都有 $|u(t,x)| \le \epsilon$，就有 $v(t,x) = u(t,x)$，因此我们继续证明 v 的情形。

关键在于将 v 与由下式定义的辅助过程 v_g 进行比较

$$\partial_t v_g(t,x) = \frac{1}{2} \partial_x^2 v_g(t,x) + \sigma(t,x,f_\epsilon(u_0(x))) \cdot \dot{W}(t,x),$$

其初值为 $v_g(0,x) = u_0(x)$，其中扩散系数与 v_g 无关。记号 v_g 中的下标 g 表示高斯。

差过程 $D(t,x) := v(t,x) - v_g(t,x)$ 是一个满足以下条件的随机积分

$$D(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G(t-s, x-y)[\sigma(s,y,f_\epsilon(v(s,y)) - \sigma(s,y,f_\epsilon(u_0(y))] \cdot W(dyds).$$

定义

$$H_j = \{v(p_{1j})| \le \epsilon\}$$

并考虑以下事件

$$A_{1,j} = \{|v_g(p_{1j})| \le 2\epsilon\},$$
$$A_{2,j} = \{|D(p_{1j})| \ge \epsilon\}.$$

显然，$H_j \subset A_{1,j} \cup A_{2,j}$。定义另一个事件序列

$$B_n = \{|u(t,x)| \le \epsilon, t \in I_{n-1}, x \in [0,1].\}, \quad n \ge 1.$$

那么显然， $B_n \subset F_n$ 且在 B_n 上，我们有 $u(t_n, x) = v(t_n, x)$。因此

$$P(B_1) \leq P(\cap_{j=1}^{n_2-2} H_j) \leq P(\cap_{j=1}^{n_2-2}(A_{1,j} \cup A_{2,j})).$$

由一个简单的集合包含论证可知

$$P(B_1) \leq P(\cap_{j=1}^{n_2-2} A_{1,j}) + \sum_{j=1}^{n_2-2} P(A_{2,j}).$$

现在将命题 2.3 应用于过程 v_g，从而得出

$$P(\cap_{j=1}^{n_2-2} A_{1,j}) = P(|v_g(p_{1,j})| \leq 2\epsilon, \quad j = 1, \cdots, n_2 - 2) \leq C_2 \exp(-C_3\epsilon^{-2}).$$

由 u 中 σ 的 H¨older 连续性，我们可得

$$|\sigma(s, y, f_\epsilon(v(s, y))) - \sigma(s, y, f_\epsilon(v_0(y)))| \leq \mathcal{D}(2\epsilon)^\alpha,$$

因此，由命题 2.1 和注 2.2 可知，对于 $j = 1$、$\cdots$、$n_2 - 2$，

$$P(A_{2,j}) \leq K_1 \exp(-\frac{K_2}{4\epsilon^{2\alpha}\mathcal{D}^2\sqrt{c_0}}).$$

因此

$$\begin{aligned} P(B_1) &\leq C_2 \exp(-C_3\epsilon^{-2}) + \sum_{j=1}^{n_2-2} K_1 \exp(-\frac{K_2}{4\epsilon^{2\alpha}\mathcal{D}^2\sqrt{c_0}}) \\ &\leq C_2 \exp(-C_3\epsilon^{-2}) + \frac{1}{c_1\epsilon^2} K_1 \exp(-\frac{K_2}{4\epsilon^{2\alpha}\mathcal{D}^2\sqrt{c_0}}) \\ &\leq C_4 \exp\left(-\frac{C_5}{8(1+\mathcal{D}^2)\epsilon^{2\alpha}\sqrt{c_0}}\right), \end{aligned}$$

当 ϵ 足够小时，指数中的 $\epsilon^{-2\alpha}$ 项会胜过 ϵ^{-2} 项，因此我们保留前者。[4] C_4 和 C_5 是仅依赖于 $\mathcal{C}_2$ 的普适常数。

该表达式表明，当 σ 仅为 H¨older 连续，即 $\alpha < 1$ 时，上界中的 $\epsilon^{2\alpha}$ 项占主导地位。我们得到的上界和下界在 ϵ 的指数上并不匹配（若 $\alpha = 1$，则二者匹配），但两个界都非平凡，尤其是它们导出了所需的支撑定理。

根据马尔可夫性质，对每个 $n \leq n_1$，

$$P(B_n \mid \cap_{j=1}^{n-1} B_j) \leq \exp(-\frac{C_7}{(1+\mathcal{D}^2)\epsilon^{2\alpha}})$$

其中 C_7 仅依赖于 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{D}$。

因此

$$\begin{aligned} P(|u(t,x)| \leq \epsilon, t \in [0,T], x \in [0,1]) &= P(\cap_{j=1}^{n_1-1} B_j) \\ &\leq \exp(-\frac{\mathcal{C}_7}{(1+\mathcal{D}^2)\epsilon^{2\alpha}})^{\frac{T}{\epsilon^4}} \\ &\leq \exp(-\frac{C_7 T}{(1+\mathcal{D}^2)\epsilon^{2\alpha+4}}). \end{aligned}$$

[4]我们还使用了另一个由下列初等不等式得到的逼近

$$\sup_{x \geq 0} x^n e^{-Cx} < \infty$$

对于任意 $C > 0$ 和 $n > 0$。

这就确立了（1.4）中的上界。

2.4. 一般情形的下界。现在我们开始证明相应的下界。论证大致沿用 [1], 中的方法，但最后几个关键估计有所不同。固定一个稍后确定的 $\beta > 1$ ，考虑如下新的时间网格:

$$\hat{t}_n := nc_0\epsilon^{4\beta}, n \geq 0,$$

以及相应的时间区间 ˆ $I_n := [\hat{t}_n, \hat{t}_{n+1}]$。当 ϵ 足够小时，这会引入更精细的时间网格。类似地，我们定义事件

$$\hat{A}_n := \{|u(\hat{t}_{n+1}, x)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad x \in [0,1], \text{ and } |u(t,x)| \leq \epsilon, t \in \hat{I}_n, x \in [0,1]\},$$

假设 $|u_0(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$， $x \in [0,1]$。定义停时

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \sup_{x\in[0,1]} |u(t,x) - u_0(x)| > 2\epsilon\},$$

使得在事件 ˆ A_0 上，我们有 $\tau \geq \hat{t}_1$. 。考虑过程

$$\widetilde{D}(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G(t-s, x-y)[\sigma(s,y,u(s\wedge\tau, y)) - \sigma(s,y,u_0(y))]W(dyds),$$

以及满足以下方程的辅助比较过程 u_g

$$\partial_t u_g = \frac{1}{2}\partial_x^2 u_g + \sigma(t,x,u_0(x))dW(t,x), \quad u_g(0,x) = u_0(x),$$

并且像之前一样，我们记 $u(t,x) = u_g(t,x) + D(t,x)$，于是

$$D(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G(t-s, x-y)[\sigma(s,y,u(s,y)) - \sigma(s,y,u_0(y))]W(dyds).$$

显然，当 $\tau \geq \hat{t}_1$ 时， $D(t,x) = \widetilde{D}(t,x)$。考虑事件

$$\widetilde{B}_0 := \{|u_g(\hat{t}_1, x)| \leq \frac{\epsilon}{6}, x \in [0,1], \quad |u_g(t,x)| \leq \frac{2\epsilon}{3} \forall t \in \hat{I}_0, x \in [0,1]\}.$$

于是我们得到以下集合包含关系

$$\begin{aligned} P(\hat{A}_0) &\geq P\left(\widetilde{B}_0 \cap \{\sup_{0\leq t\leq \hat{t}_1, x\in[0,1]} |D(t,x)| \leq \frac{\epsilon}{6}\}\right) \\ &= P\left(\widetilde{B}_0 \cap \{\sup_{0\leq t\leq \hat{t}_1, x\in[0,1]} |\widetilde{D}(t,x)| \leq \frac{\epsilon}{6}\}\right) \\ &\geq P(\widetilde{B}_0) - P(\sup_{0\leq t\leq \hat{t}_1, x\in[0,1]} |\widetilde{D}(t,x)| > \frac{\epsilon}{6}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

第二行中的等式需要作一些说明。若 $\tau \geq \hat{t}_1$，则 $D = \widetilde{D}$ on $[0,\hat{t}_1]$。在 $\widetilde{B}_0 \cap \{\tau < \hat{t}_1\}$ 上，必有 $\sup_x |u_g(\tau,x) - u_0(x)| > \epsilon$，从而 $\sup_x |\widetilde{D}(\tau,x)| > \epsilon$.

由于 $\beta > 1$ and $\epsilon < 1$，必有 ˆ $t_1 < t_1$，因此由命题 2.3,

$$P(\widetilde{B}_0) \geq P(\bar{B}_0) \geq C_1 \exp(-\frac{C_2}{\epsilon^2}),$$

其中 C_1、C_2 仅依赖于 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$，并且我们定义

$$\bar{B}_0 := \{|u_g(t_1, x)| \leq \frac{\epsilon}{6}, x \in [0,1], \quad |u_g(t,x)| \leq \frac{2\epsilon}{3} \forall t \in I_0, x \in [0,1]\}.$$

接下来需要估计式 (2.5) 中最后一个事件发生的概率。

$$P(\sup_{0\le t\le \hat{t}_1, x\in[0,1]} |\widetilde{D}(t,x)| > \frac{\epsilon}{6}) \le \frac{1}{\sqrt{c_0}\epsilon^2} P\left(\sup_{0\le t\le \hat{t}_1, x\in[0,\sqrt{c_0}\epsilon^2]} |\widetilde{D}(t,x)| > \frac{\epsilon}{6}\right)$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{c_0}\epsilon^2}\frac{1}{\epsilon^{2\beta-2}} K_1 \exp(-\frac{K_2}{\epsilon^{2\alpha}\mathcal{D}^2\mathcal{C}_2^2\sqrt{c_0}\epsilon^{2\beta-2}}).$$

更精确地说，对于 ϵ 的指数，我们在命题 2.1 的设定下取 $\alpha = \epsilon^{4\beta-4}$ 和常数 $\mathcal{C} := \mathcal{D}(2\epsilon)^{\alpha}$。比较各指数可知，只要取 $\alpha+\beta>2$，就能找到一些仅依赖于 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{D}$ 的 C_8、C_9，使得

$$P(\sup_{0\le t\le \hat{t}_1, x\in[0,1]} |\widetilde{D}(t,x)| > \frac{\epsilon}{6}) \le C_8 \exp(-\frac{C_9}{\epsilon^{2(\alpha+\beta-1)}}) \tag{2.6}$$

最后

$$\mathbb{P}(\hat{A}_0) \ge C_1 \exp(-\frac{C_2}{\epsilon^2}) - C_8 \exp(-\frac{C_9}{\epsilon^{2(\alpha+\beta-1)}}),$$

且第一项占主导。因此我们得出，当 $\epsilon>0$ 足够小时，能够找到仅依赖于 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{D}$ 的 C_3、C_4，使得

$$\mathbb{P}(\hat{A}_0) \ge C_3 \exp(-\frac{C_4}{\epsilon^2}). \tag{2.7}$$

根据马尔可夫性质，对于每个 $n \le \hat{n}_1 := \lfloor \frac{T}{\epsilon^{4\beta}} \rfloor$，我们有

$$\mathbb{P}(\hat{A}_n \mid \cap_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j) \ge C_3 \exp(-\frac{C_4}{\epsilon^2}).$$

因此，存在仅依赖于 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$ 的常数 $C_1>0$，使得

$$P\left(|u(t,x)| \le \epsilon, t\in[0,T], x\in[0,1]\right) \ge \exp(-\frac{C_1}{\epsilon^2}\frac{T}{\epsilon^{4\beta}}) \ge \exp(-\frac{C_1 T}{\epsilon^{4\beta+2}}).$$

这些常数 $C_1, C_2, \cdots, C_8, C_9$ 只依赖于 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$，并且可能在不同推导步骤中发生变化。这就证明了 (1.4) 中的下界。

最后，我们指出，可以采用 (2.6) 的另一种估计，并推得：对于某些依赖于 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$、但不依赖于 $\mathcal{D}$ 的常数 C_8', C_9'，

$$P(\sup_{0\le t\le \hat{t}_1, x\in[0,1]} |\widetilde{D}(t,x)| > \frac{\epsilon}{6}) \le C_8' \exp(-\frac{C_9'}{\epsilon^{2(\alpha+\beta-1)}\mathcal{D}^2}).$$

那么，存在某个仅依赖于 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 的 $\mathcal{D}_0$，使得对于任意 $\mathcal{D}<\mathcal{D}_0$ 和 $\beta = 2-\alpha$，我们都可以找到依赖于 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ 的 C_3', C_4'，使得（注意，(2.7) 要求 $\beta+\alpha>2$）

$$\mathbb{P}(\hat{A}_0) \ge C_3' \exp(-\frac{C_4'}{\epsilon^2}).$$

其余估计的推导与前文完全相同。这样做的实际好处是，每当 $\mathcal{D}<\mathcal{D}_0$ 时，定理 1.1 中的所有估计都可以在 $\alpha+\beta=2$ 的情形下完成。这证明了定理 1.1 的最后一项断言。

Statements and Declarations

作者获得了英国工程与物理科学研究委员会（EPSRC）项目 EP/W524141/1 的资助。

作者声明，不存在与本文内容相关的竞争性利益。

本文不适用数据共享，因为本研究期间未生成或分析任何数据集。

References

[1] Siva Athreya、Mathew Joseph 和 Carl Mueller。《随机热方程的小球概率与支撑定理》。载于：概率年刊 49.5（2021），第 2548–2572 页。[2] Vlad Bally、Annie Millet 和 Marta Sanz-Sol´e。《抛物型随机偏微分方程在 Hölder 范数下的逼近与支撑定理》。载于：概率年刊（1995），第 178–222 页。[3] Richard F Bass。《分析中的概率技巧》。施普林格科学与商业媒体，1994。[4] Caroline Cardon-Weber 和 Annie Millet。《广义 Burgers 随机偏微分方程的支撑定理》。载于：位势分析 15.4（2001），第 361–408 页。[5] Igor Chueshov 和 Annie Millet。《随机二维流体力学系统：Wong-Zakai逼近与支撑定理》。载于：随机分析与应用 29.4（2011），第 570–611 页。[6] Robert C Dalang 等。《随机偏微分方程迷你课程》。第 1962 卷。施普林格，2009。[7] Francisco J Delgado-Vences 和 Marta Sanz-Sol´e。《三维随机波动方程的逼近及其在 Hölder 范数下支撑定理中的应用》。载于：伯努利 20.4（2014），第 2169–2216 页。[8] Mohammud Foondun、Mathew Joseph 和 Kunwoo Kim。《随机热方程 Hölder 半范数的小球概率估计》。载于：概率论及相关领域（2022），第 1–61 页。[9] Dariusz Gatarek 和 Beniamin Goldys。《希尔伯特空间中随机方程的弱解》。载于：随机学：概率与随机过程国际期刊 46.1-2（1994），第 41–51 页。[10] Martin Hairer 和 Philipp Sch¨onbauer。《奇异随机偏微分方程的支撑》。载于：数学论坛：Pi。第 10 卷。剑桥大学出版社，2022。[11] Yi Han。《具有 Hölder 连续系数的随机热方程的指数遍历性》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2211.08242（2022）。[12] Chengcheng Ling、Sebastian Riedel 和 Michael Scheutzow。《具有奇异漂移项的随机微分方程的 Wong-Zakai 定理》。载于：微分方程杂志 326（2022），第 344–363 页。[13] Annie Millet 和 Marta Sanz-Sol´e。《双曲型随机偏微分方程解的支撑》。载于：概率论及相关领域 98.3（1994），第 361–387 页。[14] Carl Mueller、Leonid Mytnik 和 Edwin Perkins。《具有 $\frac{3}{4} - \epsilon$-H¨older 扩散系数的抛物型随机偏微分方程的非唯一性》。载于：概率年刊 42.5（2014），第 2032–2112 页。

[15] Leonid Mytnik 和 Edwin Perkins。《Hölder 连续系数随机热方程的路径唯一性：白噪声情形》。载于：概率论及相关领域 149.1（2011），第 1–96 页。

Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge.
Email address: yh482@cam.ac.uk