arXiv:2302.00522v1 [math.NA] 1 Feb 2023

具有 Besov 随机树先验的椭圆型偏微分方程多层蒙特卡洛有限元法

ChristophSchwab * Andreas Stein *†‡

摘要

我们针对多面体区域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ 中的线性椭圆型扩散问题，开发了一种多层蒙特卡洛（MLMC）有限元法算法，其扩散系数为 Besov 树随机系数。也就是说，扩散系数的对数取样自所谓的 Besov 树先验；近年来，这类先验已被提出用于对科学与工程中的分形现象数据进行建模。针对椭圆型偏微分方程的全离散有限元法的数值分析包括求积近似，并且必须考虑：a）路径上的系数上下界不均匀；以及 b）Besov 树系数较低的路径正则性。

可容许的非参数随机系数对应于在随机分形上呈现奇异性的随机函数，其分形维数可调；但无需先验指定样本路径奇异支集的分形几何。我们证明了感兴趣量及其二阶矩的最优复杂度和收敛率估计。我们对多层蒙特卡洛有限元法进行了收敛性分析，得出了高效实现所需的算法调控参数取值。我们还给出了多层蒙特卡洛有限元法近似的复杂度（“误差与计算量关系”）分析。

1 引言

高效数值求解具有不确定输入的偏微分方程，对于正向不确定性量化至关重要；所谓正向不确定性量化，即对具有不确定输入的偏微分方程解的不确定性进行计算量化。这在计算反问题不确定性量化中也至关重要，例如通过马尔可夫链蒙特卡罗方法；在这类方法中，需要对正向模型在不确定输入的各个实现下进行大量数值求解。本文研究具有不确定系数的线性椭圆型扩散问题。它可描述多种现象，例如在渗透率不确定甚至未知的介质中发生的扩散，包括地下流动以及尘埃云中的光散射等。特别是，地下流动的物理建模要求考虑由几何形态不确定的裂隙构成的系统，且流体沿裂隙具有较高的渗透率（参见 [8] 及其中的参考文献）。由于裂隙几何仅在统计意义上已知，在计算不确定性量化（UQ）中，自然的做法是以非参数方式描述几何形态，而非采用例如具有已知参数化两点相关函数的高斯随机场（简称 GRF），再利用实验数据对该相关函数进行校准。近年来，在含噪信号的反问题成像领域，这种函数空间视角也成为一个热门话题。采用随机分形几何进行建模，也已应用于生物学领域（例如根系、肺部 [2]）。在这些应用中，由于填充和基于循环嵌入的数值方法可供使用，从而能够采用快速傅里叶变换算法生成样本路径，因此高斯参数模型在计算上效率很高。然而，人们认为高斯模型

*苏黎世联邦理工学院¨，应用数学研讨班

†andreas.stein@sam.math.ethz.ch

‡本研究期间生成和/或分析的数据集，可根据合理请求向通讯作者索取。

不适合在成像中高效表示边和界面。因此，近期有人提出采用非参数表示来描述样本路径具有分形不规则性的输入，例如 [23, 19], 及其中的参考文献。我们还提及贝叶斯反问题中受椭圆型偏微分方程约束的所谓*Besov*先验（例如 [24, 22, 4]及其中的参考文献）。

本文研究所谓的 *Besov* 随机树先验 [23], 作为线性椭圆型偏微分方程中的随机对数扩散系数。这些先验由带有随机系数的小波级数给出，级数展开中的某些项会根据所谓的 *Galton-Watson* 树的规律随机消失。相应随机场的样本具有分形几何特征，因此，Besov 随机树先验或可用于基于高斯随机场（GRFs）的模型无法提供足够灵活性的应用场景。我们用 H¨older 正则性量化随机树先验的路径正则性，并研究椭圆型偏微分方程模型中的不确定性在有界区域内的向前传播。本文的所有结果都涵盖了“标准”Besov 先验（ [24] ）这一特殊情形，即小波级数中没有任何项被消去。正如我们的分析所指出的，随机场在空间域和随机域上的正则性本质上都较低。在为所研究的椭圆型偏微分方程问题开发高效数值方法时，我们将这一点纳入了考虑。

我们开发了一种多层蒙特卡洛（MLMC）有限元（FE）模拟算法，并对其进行数学分析，以估计正向偏微分方程模型中的感兴趣量（QoI）。如今，多层蒙特卡洛方法（[14, 15, 6]）已成为计算不确定性量化领域中发展成熟的方法，并且在正则性相对较低的情形下表现有效。需要指出的是，我们的 MLMC 有限元误差分析将标准的低正则性 Besov先验作为特例包含在内。相比之下，针对等价参数化确定性偏微分方程问题的高阶方法，例如（多层）准蒙特卡罗（[20]）、广义多项式混沌（gPC）展开（[21]）或多层 Smolyak求积（[28]），不适用于当前的随机树模型：先验的参数化在随机域中包含不连续性，这严重违反了上述高阶方法的正则性要求。详细讨论请参见附录A.3。另一方面，MLMC 技术只要求逐路径解具有平方可积性

1.1 主要贡献

对于多面体区域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ 中的一个模型线性椭圆扩散方程，我们给出了具有对数分形Besov随机树结构的随机介质中扩散问题的数学框架，并对多层蒙特卡洛有限元法进行了数值分析。具体而言，我们证明了正问题的适定性，包括随机解的强可测性（这是后续多层蒙特卡罗有限元收敛分析的关键要素），以及弱解逐路径几乎必然具有Besov正则性。具有独立研究价值的技术结果包括：（i）给出了Besov随机变量在 H¨older 范数下指数矩的界，推广了 [23, 11, 24], 中的结果；（ii）对具有分形系数的椭圆正问题进行了数值分析，特别是给出了分形尺度截断误差和有限元近似误差的界，并考察了鉴于随机系数路径正则性较低（H¨older）时数值求积的影响；（iii）完整地进行了多层蒙特卡罗有限元收敛性分析，以估计随机解场的非线性泛函的均值。

1.2 预备知识与记号

对于任意向量空间 $\mathcal{V}$，我们用 $\mathcal{V}'$ 表示其拓扑对偶，用 ${}_{\mathcal{V}'}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$ 表示相应的对偶配对。对于两个赋范空间 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$，$(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$，若 $\mathcal{X}$连续嵌入于 $\mathcal{Y}$，即存在 $C > 0$，使得对所有 $\varphi \in \mathcal{X}$都有 $\|\varphi\|_{\mathcal{Y}} \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{X}}$ 成立，则记作 $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$。任意度量空间 $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ 的博雷尔σ-代数由 $\mathcal{X}$中的开集生成，记为 $\mathcal{B}(\mathcal{X})$。对于任意 σ-有限且完备的测度空间 $(E, \mathcal{E}, \mu)$、巴拿赫空间 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ 以及可积性指数 $p \in [1, \infty]$，我们定义勒贝格–博赫纳空间

$$L^p(E;\mathcal{X}) := \{\varphi : E \to \mathcal{X} |\ \varphi \text{ is strongly measurable and } \|\varphi\|_{L^p(E;\mathcal{X})} < \infty\},$$

其中

$$\|\varphi\|_{L^p(E;\mathcal{X})} := \begin{cases} \left(\int_E \|\varphi(x)\|_{\mathcal{X}}^p \mu(dx)\right)^{1/p}, & p \in [1,\infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in E} \|\varphi(x)\|_{\mathcal{X}}, & p = \infty. \end{cases}$$

在 $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ 的情况下，我们使用简写记号 $L^p(E) := L^p(E;\mathbb{R})$。如果 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是欧几里得空间的子集，除非另有说明，我们假设 $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$，且 μ 为勒贝格测度。对于任意有界连通的空间区域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$，我们将 $k \in \mathbb{N}$ 和 $p \in [1,\infty]$ 的标准索伯列夫空间记为 $W^{k,p}(\mathcal{D})$，其中在 $L^p(\mathcal{D})$ 中具有 k 阶弱导数。具有分数阶 $s \geq 0$ 的索伯列夫–斯洛博杰茨基空间记为 $W^{s,p}(\mathcal{D})$。此外，对于任意 $s \geq 0$，$H^s(\mathcal{D}) := W^{s,2}(\mathcal{D})$，并且我们采用识别 $H^0(\mathcal{D}) = L^2(\mathcal{D})$。给定 $\mathcal{D}$ 是一个利普希茨区域，我们对任意 $s > 1/2$ 定义

$$H_0^s(\mathcal{D}) := \ker(\gamma_0) = \{\varphi \in H^s(\mathcal{D}) |\ \gamma_0(\varphi) = 0 \text{ on } \partial\mathcal{D}\}, \tag{1}$$

这里，$\gamma_0 \in \mathcal{L}(H^s(\mathcal{D})\ H^{s-1/2}(\partial\mathcal{D}))$ 表示迹算子。

令 $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ 表示所有连续函数 $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ 构成的空间。对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}$，$\mathrm{C}^\alpha(\mathcal{D})$ 是所有函数 $\overline{\varphi} \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ 构成的空间，这些函数具有 α 阶连续偏导数。对于非整数 $\alpha > 0$，记 $\mathrm{C}^\alpha(\mathcal{D})$ 为所有 $\varphi \in \mathrm{C}^{\lfloor\alpha\rfloor}(\mathcal{D})$ 构成的空间，这些函数的 $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor$ 阶偏导数是 $\lfloor\alpha\rfloor$ 阶 H¨older 连续的。对于任意正实数 $\alpha > 0$，我们还用 $\mathcal{C}^\alpha(\mathcal{D})$ 表示光滑度为 α 的 *H¨older-Zygmund* 空间。定义见例如 [25, 第 1.2 节。我们用 $\mathrm{S}(\mathbb{R}^d)$ 表示由所有光滑且快速衰减的函数构成的施瓦茨空间，用 $\mathrm{S}'(\mathbb{R}^d)$ 表示其对偶，即缓增分布空间。此外，对于任意开集 $O \subseteq \mathbb{R}^d$，$\mathrm{D}(O)$ 表示所有在 O 中具有紧支撑的光滑函数 $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(O)$ 构成的空间。

对于有限元误差分析，我们引入一个可数的离散化参数集合 $\mathfrak{H} \subset (0,\ \infty)$，并用 $h \in \mathfrak{H}$ 表示一个一般的离散化参数，例如本文中物理区域的一个规则、单纯形且拟一致划分的有限元网格宽度。我们进一步假设存在一个递减序列 $(h_\ell,\ \ell \in \mathbb{N}) \subset \mathfrak{H}$，使得 $\lim_{\ell\to\infty} h_\ell = 0$。

1.3 本文结构

在第 2 节中，我们介绍一类取值于 Besov空间$B^s_{p,\ p}$ 的随机场，后文将用它们来模拟扩散系数函数的对数。利用$B^s_{p,\ p}$中的多分辨率（“小波”）基，我们在第 2.2、2.3 节中按照维纳过程路径空间上的高斯测度的思路，在 L´évy-Ciesielski 表示中构造$B^s_{p,\ p}$ 上的概率测度。这一构造的多层结构对于后续的多层蒙特卡罗有限元收敛性分析及其算法实现至关重要。在第 3 节中，我们介绍具有 Besov 树系数的线性椭圆型散度形式偏微分方程，并回顾随机解存在性、唯一性及强可测性的相关结果（其中大部分是已知结果）。在第 4 节中，我们介绍一种协调伽辽金有限元离散，该离散基于物理区域上的连续分片线性近似。我们考虑随机树先验有限截断所引入的误差，并针对系数样本（通常较低）的 Besov正则性，给出有限元离散误差的紧确误差界。第 5 节随后讨论多层蒙特卡洛有限元误差分析，也涵盖 Fr´echet 可微的、可能为非线性的泛函。第 6 节通过若干数值实验阐释该理论，并研究 Besov 随机树先验中的参数选择对多层蒙特卡洛有限元算法总体误差收敛的影响。第 7 节简要总结主要结果，并指出若干推广方向及后续研究方向。附录 A 汇集正文中用到的伽尔顿-沃森树的定义和关键性质。附录 B 详细介绍第 6 节所报告实验中的有限元实现。

2 Besov空间中的随机变量

2.1 Besov空间的小波表示

令 $\mathbb{T}^d := [0,1]^d$ 表示 $d \in \mathbb{N}$上的 d 维环面。我们简要回顾在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 和 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 上构造正交小波基的方法，以及相关 Besov空间的小波表示。关于更详细的介绍，参见 [26, 第 1], [27, 章第 1 章。2], 以及[12, 第 5]章中关于多分辨率分析（MRA）中正交小波的内容。

2.1.1 单变量多分辨率分析

设 ϕ 和 ψ 是紧支撑的尺度函数和小波函数，属于 $C^\alpha(\mathbb{R})$， $\alpha \geq 1$，适用于 $L^2(\mathbb{R})$ 中的多分辨率分析。我们假设 ψ 满足消失矩条件

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) x^m dx = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0,\ m < \alpha. \tag{2}$$

一个例子是 Daubechies小波，其具有 $M := \lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{N}$ 个消失矩，也称为 DB($\lfloor \alpha \rfloor$)-小波），其支撑集为 $[-M+1, M]$，且属于 $C^1(\mathbb{R})$，其中 $M \geq 5$（参见例如 [12,第 7.1] 节）。对于任意 $j \in \mathbb{N}_0$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，多分辨率分析由伸缩和平移后的函数定义为

$$\psi_{j,k,0}(x) := \phi(2^j x - k), \quad \text{and} \quad \psi_{j,k,1}(x) := \psi(2^j x - k), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

由于 $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$，可知 $((\psi_{0,k,0})\ k \in \mathbb{Z}) \cup ((2^{j/2}\psi_{j,k,1}), (j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z})$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的标准正交基。

2.1.2 多元多分辨率分析

通过对单变量多分辨率分析进行张量化，可以构造相应的各向同性[1] 小波基，使其在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中正交，$d \geq 2$。我们定义指标集 $\mathcal{L}_0 := \{0,1\}^d$ 和 $\mathcal{L}_j := \mathcal{L}_0 \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$，其中 $j \in \mathbb{N}$。注意，若 $j = 0$，则 $\mathcal{L}_j$ 的基数为 $|\mathcal{L}_j| = 2^d$；否则为 $|\mathcal{L}_j| = 2^d - 1$。对于任意 $l \in \mathcal{L}_0$，我们进一步定义

$$\psi_{j,k,l}(x) := 2^{dj/2} \prod_{i=1}^{d} \psi_{j,k_i,l(i)}(x_i), \quad j \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{Z}^d,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{4}$$

从而得到 $((\psi_{j,\ k,\ l})\ j \in \mathbb{N}_0, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \quad l \in \mathcal{L}_j)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的标准正交基。

通过张量化，可以引入由环面上局部支撑的周期函数构成的标准正交基 $\mathbb{T}^d$，例如参见 [26, 第 1.3] 节。给定 ϕ 和 ψ，我们固定一个尺度因子$w \in \mathbb{N}$，使得

$$\operatorname{supp}(\psi_{w,0,l}) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \, \|x\|_2 < \frac{1}{2} \right\}, \quad l \in \mathcal{L}_0.$$

采用这一选择 w，可得 $j \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname{supp}(\psi_{j+w,0,l}) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^d \middle| \, \|x\|_2 < 2^{-j-1} \right\}.$$

现在令 $K_j := \{k \in \mathbb{Z}^d | \, 0 \leq k_1, \ldots, k_d < 2^j\} \subset 2^j \mathbb{T}^d$，并注意到 $|K_{j+w}| = 2^{d(j+w)}$。定义单周期小波函数

$$\psi^{per}_{j,k,l}(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \psi_{j,k,l}(x-n), \quad j \in \mathbb{N}_0,\ k \in K_j,\ l \in \mathcal{L}_0,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

[1]可以考虑各向异性张量化，这类张量化在截断后会得到所谓的“双曲交叉近似”。由于这类构造往往会沿笛卡尔坐标轴引入优选方向，因此本文不予考虑。

及其在 $\mathbb{T}^d$ 上的限制为

$$\psi_{j,k}^l(x) := \psi_{j,k,l}^{per}(x), \quad j \in \mathbb{N}_0,\ k \in K_j,\ l \in \mathcal{L}_0,\ x \in \mathbb{T}^d. \tag{5}$$

现在，对于指标集 $\mathcal{I}_w := \{j \in \mathbb{N}_0,\ k \in K_{j+w},\ l \in \mathcal{L}_j\}$，我们得到

$$\mathbf{\Psi}_w := \big((\psi_{j+w,k}^l),\ (j,k,l) \in \mathcal{I}_w\big) \tag{6}$$

是一个 $L^2(\mathbb{T}^d)$-标准正交基，参见 [26, 命题 1.34]。接下来，我们通过适当的小波刻画来引入Besov空间，该刻画由 [26, 第 1.3] 章提出。为此，我们引入定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一周期分布集:

$$\mathrm{S}'^{per}(\mathbb{R}^d) := \{\varphi \in \mathrm{S}'(\mathbb{R}^d) \big|\ \varphi(\cdot - k) = \varphi \quad \text{for all } k \in \mathbb{Z}^d\},$$

参见 [26, 式 (1.131)]。我们区分定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的一周期函数空间及其在 $\mathbb{T}^d$ 上的限制:

定义2.1。

1. 对任意 $p \in [1,\infty)$ 和 $s \in (0,\alpha)$ 定义在$\mathbb{R}^d$ 上的一周期函数的 Besov 空间 $B_{p,p}^{s,per}(\mathbb{R}^d)$ 定义为

$$B_{p,p}^{s,per}(\mathbb{R}^d) := \left\{\varphi \in \mathrm{S}'^{per}(\mathbb{R}^d) \Big|\ \sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_w} 2^{jp(s+\frac{d+w}{2}-\frac{d}{p})} |(\varphi, \psi_{j+w,k,l}^{per})_{L^2(\mathbb{T}^d)}|^p < \infty\right\}. \tag{7}$$

当 $p = \infty$ 时，有

$$B_{\infty,\infty}^{s,per}(\mathbb{R}^d) := \left\{\varphi \in \mathrm{S}'^{per}(\mathbb{R}^d) \Big|\ \sup_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_w} 2^{j(s+\frac{d+w}{2})} |(\varphi, \psi_{j+w,k,l}^{per})_{L^2(\mathbb{T}^d)}| < \infty\right\}. \tag{8}$$

2. 对于任意 $p \in [1,\infty)$ 和 $s \in (0,\ \alpha)$，定义在 $\mathbb{T}^d$ 上的*Besov* 空间 $B_{p,\ p}^s(\mathbb{T}^d)$ 为

$$B_{p,p}^s(\mathbb{T}^d) := \left\{\varphi \in \mathrm{D}'(\mathbb{T}^d) \Big|\ \sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_w} 2^{jp(s+\frac{d+w}{2}-\frac{d}{p})} |(\varphi, \psi_{j+w,k}^{l})_{L^2(\mathbb{T}^d)}|^p < \infty\right\}. \tag{9}$$

当 $p = \infty$ 时，我们定义

$$B_{\infty,\infty}^s(\mathbb{T}^d) := \left\{\varphi \in \mathrm{D}'(\mathbb{T}^d) \Big|\ \sup_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_w} 2^{j(s+\frac{d+w}{2})} |(\varphi, \psi_{j+w,k}^{l})_{L^2(\mathbb{T}^d)}| < \infty\right\}. \tag{10}$$

注释2.2。 定义2.1 可推广为定义空间 $B_{p,\ q}^{s,\ per,}(\mathbb{R}^d)$ 和 $B_{p,\ q}^s(\mathbb{T}^d)$，其中$p,\ q \in [1,\infty]$ 和 $p \neq q$，参见 [26, 第1章3]。根据构造，在第2.2和2.3小节中引入的随机场自然是$B_{p,\ p}^s(\mathbb{T}^d)$值的，因此为简洁起见，我们只讨论 $p = q$ 的情形。根据 [26, 定理1.29] ，存在一个延拓同构

$$\mathrm{prl}^{per} : B_{p,p}^s(\mathbb{T}^d) \to B_{p,p}^{s,per}(\mathbb{R}^d), \tag{11}$$

它将 $\varphi \in B_{p,\ p}^s(\mathbb{T}^d)$ 延拓为 $\mathrm{prl}^{per}(\varphi) \in B_{p,\ p}^{s,\ per,}(\mathbb{R}^d)$ 中唯一的 1-周期对应函数。进而，这使得可以将任意 $\varphi \in B_{p,\ p}^s(\mathbb{T}^d)$ 识别为定义在 $\mathbb{T}^d$ 上的周期函数 $\mathrm{prl}^{per}(\varphi) \in B_{p,\ p}^{s,\ per,}(\mathbb{R}^d)$ 的限制。在第3.2小节中，我们利用 prl^{per} 通过限制，将定义在子集 $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^d$ 上的（非周期）Besov 空间值随机变量。

定义2.1基于对空间 $B_{p,p}^{s,per}(\mathbb{R}^d)$和$B_{p,p}^s(\mathbb{T}^d)$的一种等价刻画。它们通常（等价地）通过二进单位分解来定义（例如参见 [26, 定义1.22和1.27]）：对 $B_{p,p}^{s,per}(\mathbb{R}^d)$采用后一种定义， [26, 定理 1.36(i)] 表明，空间(7)和(8)分别与 $B_{p,p}^{s,per}(\mathbb{R}^d)$等距同构。由(11)中的延拓映射$\mathrm{prl}^{per}$ 可知，空间 $B_{p,p}^s(\mathbb{T}^d)$也具有同样性质，参见 [26, 定理1.37(i)]。

2.1.3 Besov空间与多分辨率分析

我们定义子空间 $V_{w+1} := \mathrm{span}\{\psi_{w,k}^l |\ k \in K_w,\ l \in \mathcal{L}_0\} \subset L^2(\mathbb{T}^d)$，并注意到$\dim(V_{w+1}) = 2^{d(w+1)}$。根据[12, 第9章3], 中关于一周期单变量函数的多分辨率分析可知，$((\psi_{j,k}^l)\ \ j \le w,\ k \in K_j,\ l \in \mathcal{L}_j)$是$V_{w+1}$的另一组标准正交基。因此，我们可以替换(5)中的前 $2^{d(w+1)}$ 个基函数，从而得到（在计算上更方便的） $L^2(\mathbb{T}^d)$-标准正交基

$$\mathbf{\Psi} := \left((\psi_{j,k}^l),\ (j,k,l) \in \mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}\right), \quad \mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}} := \{j \in \mathbb{N}_0,\ k \in K_j,\ l \in \mathcal{L}_j\}. \tag{12}$$

基于 在 (12) 的基础上，对于 $s > 0,\ p \in [1,\infty)$ 以及足够规则的 $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$，定义 *Besov* 范数

$$\|\varphi\|_{B^s_{p,p}(\mathbb{T}^d)} := \left(\sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}} 2^{jp(s+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})} |(\varphi,\psi_{j,k}^l)_{L^2(\mathbb{T}^d)}|^p\right)^{1/p}, \tag{13}$$

and

$$\|\varphi\|_{B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{T}^d)} := \sup_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}} 2^{j(s+\frac{d}{2})} |(\varphi,\psi_{j,k}^l)_{L^2(\mathbb{T}^d)}| < \infty. \tag{14}$$

根据定义2.1，当且仅当 $\varphi \in B^s_{p,p}(\mathbb{T}^d)$ 时，$\|\varphi\|_{B^s_{p,p}(\mathbb{T}^d)} < \infty$。

2.1.4 记号

我们为本文后续部分将用到的 Besov、H¨older 和 Zygmund空间固定一些记号。由于（周期）区域 $\mathbb{T}^d$ 在后续分析中保持不变，为方便起见，以下使用缩写 $B^s_p := B^s_{p,p}(\mathbb{T}^d)$、$\mathsf{C}^\alpha := \mathsf{C}^\alpha(\mathbb{T}^d)$ 和 $\mathcal{C}^\alpha := \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T}^d)$。此外，我们假设 $\mathbf{\Psi}_w, \mathbf{\Psi} \subset \mathsf{C}^\alpha$中的基函数足够光滑，其 H¨older 指数为给定的 $\alpha > s$，因此以下省略限制 $s \in (0,\alpha)$。此时， $\mathbf{\Psi}_w$ （因而也有 $\mathbf{\Psi}$）是 B^s_p 在 $p < \infty$下的一组基，见 [26, 定理 1.37]。

回顾一下，对于任意 $s > 0$，都有 $\mathcal{C}^s = B^s_\infty$ （见 [26, 注 1.28]），并且对于 $s \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$，有 $\mathsf{C}^s = \mathcal{C}^s$；对于 $s \in \mathbb{N}$，有 $\mathsf{C}^s \subsetneq \mathcal{C}^s$ （见 [25, 第 1.2 节.2]）。由 (13) 和 (14) 还可得到以下连续嵌入

$$\begin{aligned} B^s_p &\hookrightarrow B^t_q \quad \text{if } 1 \le p \le q < \infty \text{ and } s - \frac{d}{p} \ge t - \frac{d}{q}, \\ B^s_p &\hookrightarrow B^t_\infty = \mathcal{C}^t \quad \text{for } t \in \left(0, s - \frac{d}{p}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

其中（15）中的嵌入常数均不大于 1（参见 [27, 第 2 章1]）。

2.2 Besov先验

为引入 [24], 中的 Besov空间值随机变量 [24], ，我们考虑一个完备概率空间 $(\Omega\ \mathcal{A}, P)$。接下来，按照 [11, 4, 23], 中基于（9）式表示的方法，我们通过用适当的随机变量替换 $L^2(\mathbb{T}^d)$-正交投影系数 $(\varphi,\psi_{j,k}^l)_{L^2(\mathbb{T}^d)}$，定义取值于 B^s_p 的随机变量。更确切地说，对任意 $p \in [1,\infty)$，考虑一个独立同分布（i.i.d.）序列 $X = ((X^l_{j,k}),(j,k,l) \in \mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}})$，其元素为 p-指数随机变量。也就是说，每个 $X^l_{j,k} : \Omega \to \mathbb{R}$ 都是 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可测的，且其密度为

$$\phi_p(x) := \frac{1}{c_p} \exp\left(-\frac{|x|^p}{\kappa}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad c_p := \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|x|^p}{\kappa}\right) dx, \tag{16}$$

其中 $\kappa > 0$ 是一个固定的缩放参数。当$p = 2$时，我们得到方差为 $\frac{\kappa}{2}$ 的正态分布；当 $p = 1$时，我们得到缩放参数为 κ 的拉普拉斯分布。

定义 2.3。 [24, 定义 9] 令 $\mathbf{\Psi}$ 为 (12) 中的 $L^2(\mathbb{T}^d)$-正交小波基，令$s>0, p\in[1,\infty)$，并令 $X=((X^l_{j,k}),(j,k,l)\in\mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}})$ 为一个由 p-指数随机变量组成的独立同分布序列，其密度为 (16) 中的 ϕ_p。令随机场 $b:\Omega\to L^2(\mathbb{T}^d)$ 定义如下

$$b(\omega):=\sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}}\eta_j X^l_{j,k}(\omega)\psi^l_{j,k},\quad \omega\in\Omega,\quad \text{where}\quad \eta_j:=2^{-j(s+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})},\quad j\in\mathbb{N}_0. \tag{17}$$

我们称 b 为 B^s_p-随机变量。

文献中也将定义 2.3 中的随机变量 b 称为反问题领域的*Besov*先验。以下正则性结果是众所周知的:

命题 2.4。

1. ([24, 引理 10], [11, 命题 1]) 设 b 是 $s>0$ 上的 B^s_p-随机变量，且$p\in[1,\infty)$。那么，以下条件等价:

(i) $\|b\|_{B^t_p}<\infty$ *holds* P*-a.s.;*

(ii) $\mathbb{E}\left(\exp\left(\varepsilon\|b\|^p_{B^t_p}\right)\right)<\infty,\quad \varepsilon\in(0,\frac{1}{4\kappa})$*;*

(iii) $t<s-\frac{d}{p}$.

2. [11, 定理 *2.1]* 此外，若 $\mathbf{\Psi}$ 构成 B^t_p 的一个基，适用于 $t<s-\frac{d}{p}, t\notin\mathbb{N}$，则它有 *olds*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\varepsilon\|b\|_{\mathrm{C}^t}\right)\right)<\infty,\quad \varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}),$$

其中 $\bar{\varepsilon}>0$ 是一个依赖于 p、d、s 和 t的常数。

注 2.5. 请注意，根据前述命题的定义， B^s_p-随机变量仅在 B^t_p 中取值，其中 $t<s-\frac{d}{p}$。尽管如此，为了更清楚地强调式 (17) 中 η_j 对 s 的依赖关系，下面仍使用 B^s_p-随机变量 这一概念。

我们将在下文的定理 2.11 中推出 [11, 定理 2.1] 的一个显著更强的版本, at
im尤其蕴含

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\varepsilon\|b\|^p_{\mathrm{C}^t}\right)\right)<\infty,\quad \varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}),$$

对任意 $p\geq 1$ 和某个 $\varepsilon\succ 0$ 均成立。在 $p=2$ 的高斯情形下，这一估计可由 Fernique 定理推出；然而，据我们所知，文献中尚无针对任意 $p\geq 1$ 的类似结果。

我们回顾定理 1.37] ：若尺度函数和小波函数 ϕ 与 ψ 满足 $\phi,\psi\in\mathrm{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$（$\alpha>t>0$ 时）以及消失矩条件 (2)，则 $\mathbf{\Psi}$ 构成 B^t_p 的一个无条件基 （因为 $p<\infty$）。

2.3 Besov 随机树先验

受 [23], 的启发，我们在本小节引入 *Besov* 随机树先验，并推导该取值于 B^s_p 的随机变量的若干正则性结果。本小节中，我们研究定义在环面 $\mathbb{T}^d$ 上的周期函数的所有结果。对于第 3 节中的椭圆问题，我们稍后将通过从 $\mathbb{T}^d$ 上的限制，引入物理区域 $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^d$ 上相应的 $B^s_p(\mathcal{D})$ 值随机变量，其中 $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{T}^d$ （参见定义 3.6）。我们先验构造中的随机树结构基于某些集值随机变量，即 *Galton–Watson*（*GW*）树。为方便读者，附录 A 列出了离散树、GW 树的定义以及其他一些有用的结果。

定义 2.6. [23, 定义 3] 设 $\mathbf{\Psi}$, $s>0$, $p\in[1,\infty)$, $X=((X^l_{j,k}),(j,k,l)\in\mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}})$ 和 $(\eta_j, j\in\mathbb{N}_0)$ 如定义 2.3 所述。令 $\mathfrak{T}$ 表示所有不含无限节点的树的集合（参见定义 A.1），并令 $T:\Omega\to\mathfrak{T}$ 为一个 GW 树（参见定义 A.3），其后代分布为

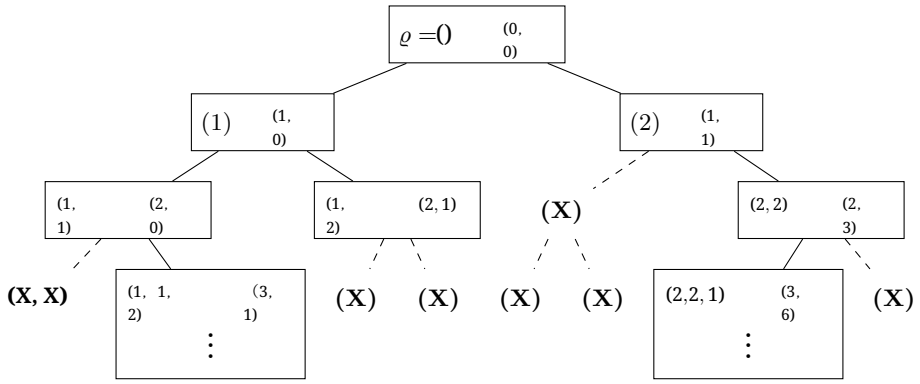

图 1：二项 Galton–Watson 树的一个样本 T，其后代分布为 $\mathcal{P}(2,\beta)$，其中 $\beta = 0.5$。每个方框对应 GW 树的一个节点 $\mathfrak{n}$，图中展示了所有长度为 $|\mathfrak{n}| \le 3$ 的节点。每个方框左侧的条目是节点 $\mathfrak{n} \in T$，由一个有限整数序列给出。右侧的条目是节点到小波系数的映射 $\mathfrak{n} \mapsto \left(|\mathfrak{n}|, \mathfrak{I}^2_{d,|\mathfrak{n}|} \circ \mathfrak{I}^1_{d,|\mathfrak{n}|}(\mathfrak{n})\right)$，在 $\mathfrak{n}$ 处取值，它决定了相应的小波指标 (j,k)。从“根节点” $\varrho = ()$ 开始，每个节点的两个子节点分别以概率 $1-\beta$ 被删除，且彼此独立。一旦某个节点被删除（以“(X)”表示），其所有后代节点也会被删除。剩余的“存活”节点通过 $\mathfrak{I}_T := \left\{ \left(|\mathfrak{n}|, \mathfrak{I}^2_{d,|\mathfrak{n}|} \circ \mathfrak{I}^1_{d,|\mathfrak{n}|}(\mathfrak{n})\right) \mid \mathfrak{n} \in T \right\} = \{(0,0), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,3), (3,1), (3,6)\}$ 确定相应的活跃小波指标随机集合。注意，每个 $\mathfrak{n} \in T$ 都通过其祖先与根节点 ϱ 相连，如实线所示。

$\mathcal{P} = \mathrm{Bin}(2^d, \beta)$，其中 $\beta \in [0,1]$，且与 X 独立。此外，令 $\mathfrak{I}_T$ 为式 (78) 中与 T 相关联的小波指标集。我们定义随机树指标集 $\mathcal{I}_T(\omega) := \{(j,k,l) \mid (j,k) \in \mathfrak{I}_T(\omega),\ l \in \mathcal{L}_j\}$ 和

$$b_T(\omega) := \sum_{(j,k,l) \in \mathcal{I}_T(\omega)} \eta_j X^l_{j,k}(\omega) \psi^l_{j,k}, \quad \omega \in \Omega. \tag{18}$$

我们将 b_T 称为具有小波密度 B^s_p β 的随机变量。

图 1 展示了一个二项 Galton–Watson 树样本，以及在一个物理维数为 $d = 1$ 的空间中用于级数展开的相应小波指标集合 $\mathfrak{I}_T$。回顾一下，对于 $d = 1$，有 $\mathcal{L}_j = \{1\}$，其中 $j \ge 1$。

注 2.7。定义 2.6 实际上与 [23, 定义 3] 略有不同。根据 $\mathcal{I}_T(\omega)$ 的定义，我们将常数函数 $\psi_0^{(0,\dots,0)}$，$_0 \equiv 1 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ 纳入级数展开 (18) 中。当然，加入随机常数 $X_{0\,0}^{(0,\dots,0)}$，不会影响 b_T 的空间正则性或可积性。不过，在我们的定义中，级数 (18) 可自然地解释为随机函数关于（确定的、固定的）基 $\mathbf{\Psi}$ 的正交展开。b_T 的小波表示中“活跃”（即指标属于 $\mathcal{I}_T$）系数的树结构，会在 $\mathbb{T}^d$ 上形成随机分形；只要定义 2.6 中的树 T 没有在有限个节点后终止，就会出现这种情况。由引理 A.4 可知，当 $\beta \in (2^{-d}, 1]$ 时，后一个事件以正概率发生。在这种情况下，分形的豪斯多夫维数为 $d + \log_2(\beta) \in (0, d]$，更多详情请参见 [23,第 3] 节。

图 2 展示了波列密度 β 各异的 B^s_p-随机变量在 $\mathbb{T}^2$ 上的若干实现。为了研究以 b_T 为对数扩散系数的椭圆反问题，我们详细说明相应的参数概率空间。令 $\mathbb{Q}_0$ 表示随机变量 $X^l_{j,\,k}$ 的单变量 p-指数测度，其勒贝格密度如式 (16) 所示，定义在 $(\mathbb{R},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上。p-指数测度的乘积概率空间 X 由 $(\Omega_p,\ \mathcal{A}_p,\ \mathbb{Q}_p)$ 给出，其中

$$\Omega_p := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{A}_p := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \text{and} \quad \mathbb{Q}_p := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_0.$$

现在固定 $s > 0$ 和 $p \in [1, \infty)$，使得 $s > \frac{d}{p}$。我们定义加权 ℓ^p 空间

$$\ell^p_s := \left\{ x = \left(x^l_{j,k}, (j,k,l) \in \mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}\right) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \|x\|_{s,p} < \infty \right\}, \tag{19}$$

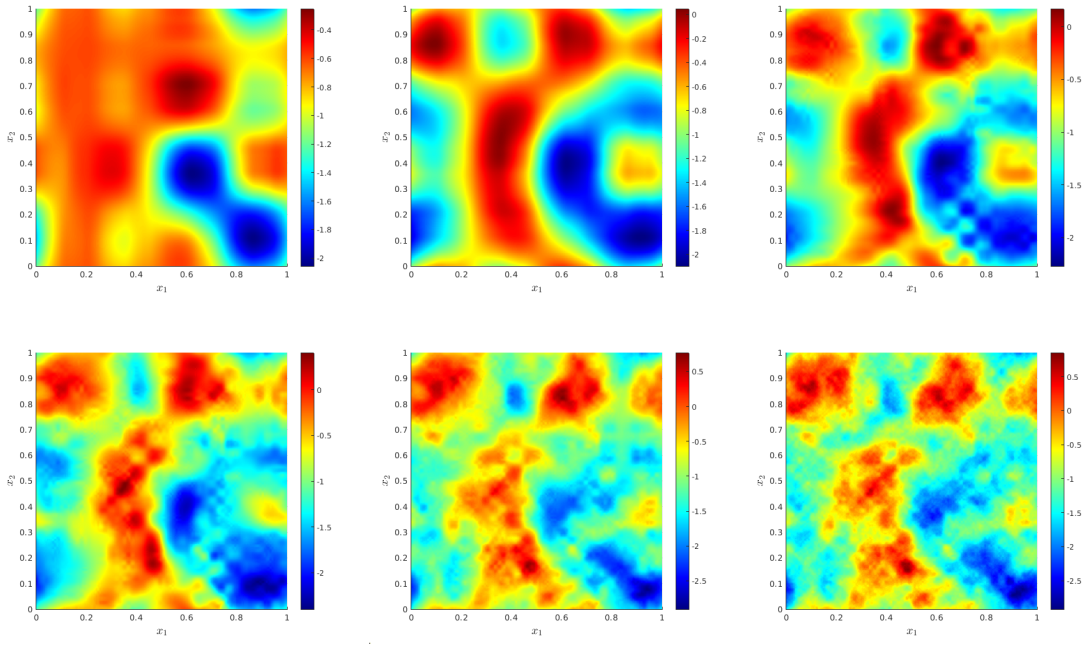

图 2： B_p^s值随机变量的样本，采用 $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2$、 $s = p = 2$和小波密度 $\beta \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$（上排，从左至右）以及 $\beta \in \{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$（下排，从左至右）。所有样本均基于 DB(5)-小波和同一组随机数，并以 $2^9 \times 2^9$ 个等距网格点的空间分辨率进行采样；式 (18) 中的展开截断于 $N = 9$ 层二分细分（参见第 4.1 小节）。固定随机数数组、空间网格和 N后，各面板中所示的"演变"突显了小波密度 β逐渐增加所产生的影响。请注意，右下角的 $p = 2$ 和 $\beta = 1$ 情形对应于高斯先验。

其中

$$\|x\|_{s,p} := \left(\sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_\Psi} 2^{-jps} |x_{j,k}^l|^p \right)^{1/p}. \tag{20}$$

于是，对于 $1 \le p < \infty$，$(\ell_s^p, \|\cdot\|_{s,p})$ 是一个可分巴拿赫空间。此外，我们注意到，对于$X \sim \mathbb{Q}_p$，有

$$\mathbb{E}(\|X\|_{s,p}^p) \le \sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_\Psi} 2^{-jps} \mathbb{E}(|X_{j,k}^l|^p) \le C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jps} 2^{dj} (2^d - 1) \le C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-jp(s-\frac{d}{p})} < \infty,$$

由于 $s > \frac{d}{p}$，因此 $\mathbb{Q}_p$ 集中于 ℓ_s^p 上。因此，我们将 $(\ell_s^p, \mathcal{B}(\ell_s^p)\ \mathbb{Q}_p)$ 视为展开式（17）和（18）中随机系数序列 X 的概率空间。集值随机变量 T 是一棵 GW 树，因此取值于波兰空间 $(\mathfrak{T}, \delta_{\mathfrak{T}})$，该空间由所有没有无限节点的树组成。相对于 $\mathfrak{T}$ 的度量 $\delta_{\mathfrak{T}}$ 及其关联的博雷尔 σ-代数 $\mathcal{B}(\mathfrak{T})$，在附录中的定义 A.2 里有明确说明。GW 树 T 在 $(\mathfrak{T}, \mathcal{B}(\mathfrak{T}))$ 上的像测度 $\mathbb{Q}_T$ 仅取决于后代分布 $\mathcal{P} = \mathrm{Bin}(2^d, \beta)$ 的参数 β 和 d，并由附录中的公式（76）给出。因此，GW 树的参数概率空间为 $(\mathfrak{T}, \mathcal{B}(\mathfrak{T})\ \mathbb{Q}_T)$。为将随机系数 X 与 GW 树 T 结合起来，我们定义笛卡尔积 $\Omega := \ell_s^p \times \mathfrak{T}$，并赋予 Ω 度量

$$d_\Omega((x_1, \mathbf{t_1}), (x_2, \mathbf{t_2})) := \|x_1 - x_2\|_{s,p} + \delta_{\mathfrak{T}}(\mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}).$$

命题 2.8。 空间 $(\Omega\ d_\Omega)$ 是 *Polish* 空间，其 *Borel* σ-代数由 $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\ell_s^p \times \mathfrak{T}) = \mathcal{B}(\ell_s^p) \otimes \mathcal{B}(\mathfrak{T})$给出。

证明。 由引理 [1, 引理 2.1] ，度量空间 $(\mathfrak{T}, \delta_{\mathfrak{T}})$（其中 $\delta_{\mathfrak{T}}$ 由式 (74) 给出）是完备且可分的。因此，根据 [5, 推论 3.39]，$(\Omega\ d_{\Omega})$ 的可分性和完备性得以成立。此外，由 [5, 定理 4.44]可得， $\mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\ell_s^p \times \mathfrak{T}) = \mathcal{B}(\ell_s^p) \otimes \mathcal{B}(\mathfrak{T})$ 成立。 □

现在，我们可以定义与取值于 $\ell_s^p \times \mathfrak{T}$ 的随机变量 $(X,\ T)$ 相关联的概率空间：令 $(\Omega\ \mathcal{A},\ \mathbb{P})$ 为由下式给出的乘积概率

$$\Omega := \ell_s^p \times \mathfrak{T}, \quad \mathcal{A} := \mathcal{B}(\ell_s^p) \otimes \mathcal{B}(\mathfrak{T}), \quad \text{and} \quad \mathbb{P} := \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Q}_T. \tag{21}$$

我们指出，测度 $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Q}_T$ 的乘积结构等价于 X 与 T 的随机独立性。我们仍需将随机变量 $(X,\ T)$ 的一个实现与相应的随机树先验 b_T 对应起来。为此，我们考虑典范映射

$$b_T : \Omega \to L^2(\mathbb{T}^d), \quad \omega \mapsto \sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)} \eta_j X_{j,k}^l(\omega)\psi_{j,k}^l. \tag{22}$$

映射 $b_T\colon \Omega \to L^2(\mathbb{T}^d)$ 确实定义良好，因为由 $s > \frac{d}{p}$ 可知 $\|b_T\|_{L^2(\mathbb{T}^d)} < \infty$ 成立。此外，正如我们将在下文命题 2.10 中所示， b_T 是 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}^d))$-可测的。由于 b_T 是一个取值于 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 的随机变量，我们可以通过下式定义 b_T 的推前概率测度

$$b_T\#\mathbb{P}(B) := \mathbb{P}(b_T^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}^d)). \tag{23}$$

因此，具有小波密度 β 的 B_p^s-随机变量 b_T 所对应的概率空间为

$$(L^2(\mathbb{T}^d),\ \mathcal{B}(L^2(\mathbb{T}^d)),\ b_T\#\mathbb{P}).$$

注 2.9. 由命题 2.4 可知，对于任意 $t \in (0, s-\frac{d}{p})$， $b_T\#\mathbb{P}$ 集中于 B_p^t。下面的定理 2.11 给出了一个更精细的结果：对于 $q \geq 1$ ，若光滑度指标为$t = t(s, d, p, \beta, q)$，则 $b_T\#\mathbb{P}$ 集中于 Besov 空间 B_q^t。

在此回顾一下，我们在第 2.1 小节中假设了某个 $\alpha \geq 1$ 的 H¨older 正则性 $\boldsymbol{\Psi} \subset \mathrm{C}^{\alpha}$ 。本文余下部分中，为便于表述，我们将默认假设 B_p^s-随机变量的参数 $s > 0$ 满足 $\alpha \geq s > 0$ 。

命题 2.10. 设 $s > \frac{d}{p}$、 $\beta \in [0,1]$，且设 b_T为具有小波密度β的 B_p^s-随机变量。则 $b_T\colon \Omega \to \mathrm{C}(\mathbb{T}^d)$ ，并且 b_T 是（强） $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathrm{C}(\mathbb{T}^d))$-可测的。

证明。 取一个 $t \in (0, s-\frac{d}{p})$，使得 $t \notin \mathbb{N}$。于是，命题 2.4 的第二部分表明$b_T \in \mathrm{C}^t$ 几乎处处成立，因此，经过必要的修改，使 b_T 在一个 P-零测集上取值后，可得 $b_T\colon \Omega \mapsto \mathrm{C}(\mathbb{T}^d)$。与附录 A 中一样，我们用 $\mathcal{U}$ 表示 $\mathbb{N}$ 中的所有有限序列构成的集合，并引入其子集$\mathcal{U}_{\mathrm{Bin}} \subset \mathcal{U}$，其中各项取自 $\{1, \ldots, 2^d\}$：

$$\mathcal{U}_{\mathrm{Bin}} := \{\mathfrak{n} \in \mathcal{U} |\ \mathfrak{n}_i \in \{1, \ldots, 2^d\} \text{ for } i \in \{1, \ldots, |\mathfrak{n}|\}\ \}.$$

注意， $T(\omega) \subset \mathcal{U}_{\mathrm{Bin}}$几乎处处成立，因为 $\mathcal{P} = \mathrm{Bin}(2^d, \beta)$。现在令 $\mathfrak{I}_{d,j}$如 (77) 中所定义，并回顾附录 A.2：$(j,k) \in \mathfrak{I}_T(\omega)$ 当且仅当存在 $\mathfrak{n} \in T(\omega)$，使得 $(j,k) = (|\mathfrak{n}|, \mathfrak{I}_{d,|\mathfrak{n}|}(|\mathfrak{n}|))$。因此，我们可以将级数展开 (18) 改写为

$$b_T(\omega) = \sum_{(j,k)\in\mathfrak{I}_T(\omega)} \eta_j \sum_{l\in\mathcal{L}_j} X_{j,k}^l(\omega)\psi_{j,k}^l = \sum_{\mathfrak{n}\in\mathcal{U}_{\mathrm{Bin}}} \mathbb{1}_{\{\mathfrak{n}\in T(\omega)\}}\eta_{|\mathfrak{n}|} \sum_{l\in\mathcal{L}_{|\mathfrak{n}|}} X_{|\mathfrak{n}|,\mathfrak{I}_{d,|\mathfrak{n}|}(|\mathfrak{n}|)}^l(\omega)\psi_{|\mathfrak{n}|,\mathfrak{I}_{d,|\mathfrak{n}|}(|\mathfrak{n}|)}^l.$$

由于 $T\colon \Omega \to \mathfrak{T}$是 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathfrak{T})$-可测的，因此对于任意固定的 $\mathfrak{n} \in \mathcal{U}_{\mathrm{Bin}}$， $\mathbb{1}_{\{\mathfrak{n}\in T(\cdot)\}}\colon \Omega \to \{0,1\}$ 都是可测的。此外，根据假设，$X_{j,\ k}^l$ 是实值随机变量，且 $\psi_{j,\ k}^l \in$ 属于 $\mathrm{C}(\mathbb{T}^d)$。因此， $b_T\colon \Omega \to \mathrm{C}(\mathbb{T}^d)$ 是可测的；由于 $\mathrm{C}(\mathbb{T}^d)$ 是可分的，它也是强可测的。 □

以下结果进一步揭示了 Besov 随机树先验的路径正则性，尤其是其 H¨older 正则性。

定理 2.11. 设 b_T 为一个 B_p^s-随机变量，其小波密度 $\beta = 2^{\gamma-d}$ 如定义 *2.6* 所示，其中 $\gamma \in (-\infty, d]$。

1.) 对所有满足$t < s + \frac{d-\gamma}{q} - \frac{d}{p}$ 的 $t > 0$和 $q \geq 1$，有 $b_T \in L^q(\Omega; B_q^t)$，因此几乎必然有 $b_T \in B_q^t$ P。

2.) 设 $s - \frac{d}{p} > 0$和 $t \in (0, s - \frac{d}{p})$。那么存在一个 $\varepsilon_p > 0$使得

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\varepsilon \|b\|_{\mathcal{C}^t}^p\right)\right) < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_p),$$

特别地，对任意 $q \geq 1$，有 $b_T \in L^q(\Omega; \mathcal{C}^t)$ 。

3.) 设 $q \geq 1$和 $s - \frac{d}{p} - \frac{\min(\gamma,0)}{q} > 0$。对于任意 $t \in (0, s = \frac{d}{p} - \frac{\min(\gamma,0)}{q})$，有 $b_T \in L^q(\Omega; \mathcal{C}^t)$。

证明。1.) 对于给定的 $q \geq 1$ 和 $t > 0$，由 (13) 可得

$$\|b_T\|_{B_q^t}^q = \sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)} 2^{jq(t+\frac{d}{2}-\frac{d}{q})} \eta_j^q |X_{j,k}^l(\omega)|^q = \sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)} 2^{jq(t-\frac{d}{q}-s+\frac{d}{p})} |X_{j,k}^l(\omega)|^q.$$

对于任意给定的 $j \in \mathbb{N}$，根据定义 2.6，随机树 T中尺度 j 上的节点 $v(j)$数量（在给定 $v(j-1)$的条件下）服从二项分布，其分布为

$$v(j) := \#\{k \in K_j | (j,k,l) \in \mathcal{I}_T\} \sim \mathrm{Bin}(2^d v(j-1), 2^{\gamma-d}),$$

初值为 $v(0) = 1$。现在令 $(X_{j,m},\ j \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N})$ 为一列独立同分布的 p-指数随机变量，且与任意 $j \in \mathbb{N}$ 下的 $v(j)$ 相互独立，并回忆 $l \in \mathcal{L}_j$，其中 $|\mathcal{L}_0| = 2^d$，且$|\mathcal{L}_j| = 2^d - 1$ 对于 $\in \mathbb{N}$ 成立。由 Fubini 定理、Wald 恒等式、 $\mathbb{E}(v(j)) = (2^d\beta)^j = 2^{j\gamma}$ 可得；又由于对任意 $q > 0$， $\mathbb{E}(|X_{j,m}|^q) < \infty$，因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\|b_T\|_{B_q^t}^q\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(t-\frac{d}{q}-s+\frac{d}{p})} \sum_{m=1}^{(2^d-1)v(j)} |X_{j,m}|^q\right) + \mathbb{E}\left(|X_{0,2^d}|^q\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(t-\frac{d}{q}-s+\frac{d}{p})} \mathbb{E}\left((2^d-1)v(j)\right) \mathbb{E}\left(|X_{j,m}|^q\right) + \mathbb{E}\left(|X_{0,2^d}|^q\right) \\
&\leq 2^d \mathbb{E}\left(|X_{1,1}|^q\right) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(t-\frac{d}{q}-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q})},
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{E}(|X_{1,1}|^q) < \infty$。若 $t < s + \frac{d-\gamma}{q} - \frac{d}{p}$，则该级数收敛，此时 $b_T \in L^q(\Omega; B_q^t)$，因此 $b_T \in B_q^t$ 以 P-几乎处处成立。

2.) 现在令 $q_0 \geq q \geq 1$、 $t_0 > \frac{d}{q_0}$ 和 $t = t_0 - \frac{d}{q_0}$，于是由 (15) 可知 $B_{q_0}^{t_0} \hookrightarrow \mathcal{C}^t$ 成立。将 (13)、(14) 中的范数与 $t = t_0 - \frac{d}{q_0}$ 直接比较即可得到该嵌入，同时也表明相应的嵌入常数 $C_0 > 0$ 由$C_0 \leq 1$控制。

利用 H¨older 不等式，并仿照第一部分，我们得到估计

$$\begin{aligned}
\|b_T\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t)}^q &\leq \mathbb{E}\left(\|b_T\|_{\mathcal{C}^t}^{q_0}\right)^{\frac{q}{q_0}} \\
&\leq \mathbb{E}\left(\|b_T\|_{B_{q_0}^{t_0}}^{q_0}\right)^{\frac{q}{q_0}} \\
&\leq 2^{\frac{dq}{q_0}} \mathbb{E}\left(|X_{1,1}|^{q_0}\right)^{\frac{q}{q_0}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq_0(t_0-\frac{d}{q_0}-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q_0})}\right)^{\frac{q}{q_0}} \qquad (24) \\
&= 2^{\frac{dq}{q_0}} \mathbb{E}\left(|X_{1,1}|^{q_0}\right)^{\frac{q}{q_0}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq_0(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q_0})}\right)^{\frac{q}{q_0}}.
\end{aligned}$$

现在令 $t < s - \frac{d}{p}$ 固定，并令 $\gamma \in$ 属于 $(0,\ d]$。对于每个固定的 $q \geq \max(2\gamma(s - \frac{d}{p} = t)^{-1},\ 1)$，我们选择 $q_0 := q$，从而得到

$$\begin{aligned} \|b_T\|^q_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t)} &\leq 2^d \mathbb{E}\left(|X_{1,1}|^q\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq_0(t-s+\frac{d}{p})/2}\right)^{\frac{q}{q_0}} \\ &\leq 2^d \mathbb{E}\left(|X_{1,1}|^q\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\gamma}\right) \\ &\leq C\mathbb{E}\left(|X_{1,1}|^q\right), \end{aligned} \tag{25}$$

其中常数 $C > 0$ 与 q无关。现在，对于给定的 $\varepsilon > 0$、有限的 $n \in \mathbb{N}$ 和$p \in [1, \infty)$，定义随机变量

$$E_n(\omega) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(\varepsilon \|b_T(\omega)\|^p_{\mathcal{C}^t})^k}{k!}, \quad \omega \in \Omega.$$

显然， $E_n(\omega) \to \exp(\varepsilon\|b_T(\omega)\|^p_{\mathcal{C}^t})$ P-a.s 成立，因为 $n \to \infty$，而不等式 (25) 表明，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n_\gamma := \frac{1}{p}\lceil 2\gamma(s - \frac{d}{p} - t)^{-1}\rceil$，有

$$\mathbb{E}(E_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathbb{E}(\|b_T\|^{pk}_{\mathcal{C}^t}) \leq \widetilde{C} + \sum_{k=n_\gamma}^{n} \frac{\varepsilon^k}{k!} C^{pk} \mathbb{E}(|X_{1,1}|^{pk}) = \widetilde{C} + \mathbb{E}\left(\sum_{k=n_\gamma}^{n} \frac{(\varepsilon C^p |X_{1,1}|^p)^k}{k!}\right),$$

其中 $C = C(\gamma,\ s,\ d,\ p,\ t) > 0$。由单调收敛定理可知，对于充分小的 $\varepsilon > 0$ 和 $t < s - \frac{d}{p}$，有

$$\mathbb{E}\left(\exp(\varepsilon\|b_T\|^p_{\mathcal{C}^t})\right) \leq \widetilde{C} + \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=n_\gamma}^{n} \frac{(\varepsilon C^p |X_{1,1}|^p)^k}{k!}\right) \leq \widetilde{C} + \mathbb{E}\left(\exp(\varepsilon C^p |X_{1,1}|^p)\right) < \infty.$$

3.) 关于 $\gamma \in (0,\ d]$ 的结论可由前一部分得出。对于 $\gamma \in (-\infty,\ 0]$，$q \geq 1$ 和$t \in (0,\ s - \frac{d}{p} - \frac{\gamma}{q})$，最后我们在 (24) 中使用 $q_0 = q$ 和 $t_0 = t + \frac{d}{q}$，得到

$$\|b_T\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t)} \leq C^q \mathbb{E}\left(|X_{1,1}|^q\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q})}\right) < \infty.$$

□

注释 2.12。[23, 定理 4 和 5] 表明，对于所有 $t \in (0, s - \gamma/p)$，$b_T \in B^t_p$ 以 P-几乎处处成立；并且对于 $\gamma \in (0, d]$，$b_T \notin B^{s-\gamma/p}_p$以概率 $1 - p_\beta > 0$ 发生，其中 p_β 是方程 $p_\beta = ((1-\beta) + \beta p_\beta)^{2^d}$ 的解（参见附录中的引理 A.4）。我们强调，定理 2.11 显著扩展了这些先前结果，因为我们根据 Besov 范数和 H¨older-Zygmund 范数，精确量化了 b_T 的正则性。

回顾一下，在定理 2.11 的第二部分中，当 $t \notin \mathbb{N}$ 时（整数 t的情形并非如此），我们可以用“通常的”H¨older空间 $\mathcal{C}^t$ 替换 H¨older-Zygmund空间 $\mathcal{C}^t$。定理 2.11 表明，小波密度 $\beta = 2^{\gamma-d} < 1$ 能提高 B^t_q中的光滑度，因为上界 $t < s + \frac{d-\gamma}{q} - \frac{d}{p}$ 随 $\gamma \in$ 递减 $(-\infty,\ d]$。然而，鉴于 $\gamma > 0$，我们不应期待获得超出 $t < s - \frac{d}{p}$ 的任何（逐路径）H¨older正则性。就注 2.7 而言，这并不令人意外： b_T在 $\mathcal{D}$ 中的随机分形上具有无穷级数展开，且 $\beta > 2^{-d}$ 以正概率成立。因此， b_T 在这类分形上的局部 H¨older正则性对应于一个 B^s_p-随机变量 b，如定义 2.3 所述（具有完全小波密度 $\beta = 1$）。当 $\gamma \leq 0$ 时， b_T的级数展开

几乎必然在有限项后终止。由于 $\boldsymbol{\Psi} \subset \mathsf{C}^{\alpha}$，这表明当 $\gamma \leq 0$时， $b_T \in \mathsf{C}^{\alpha}$几乎必然成立。此外，对于 $b_T \in L^q$，我们可以将 t 的光滑度指数提高到可取范围 $t < s - \frac{d}{p} - \min(\gamma, 0)\, q$ 。当 q较大时，我们看到，实质上适用的限制是 $t < s - \frac{d}{p}$，与 $\gamma > 0$的情形相同。这反过来表明，上界

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\varepsilon \|b\|_{\mathcal{C}^t}^p\right)\right) < \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_p),$$

定理 2.11 第 2）部分的结论无法改进为 H¨older 指标，即使 $\gamma \leq 0$。

3 具有 Besov 随机系数的线性椭圆型偏微分方程

本节首先回顾具有随机系数的二阶线性椭圆扩散问题的适定性和正则性结果。随后，利用第 2 节的结果，将这些结果推广到具有 Besov 树随机扩散系数的情形。

3.1 适定性与正则性

令 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2, 3\}$ 为凸多边形区域（当 $d = 2$，3 时），并在 $d = 1$ 时为有限区间，其边界 $\partial\mathcal{D}$ 由有限条线段或平面片段构成。我们考虑随机椭圆问题：求 $u(\omega) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$，对于给定的 $\omega \in \Omega$，使得

$$-\nabla \cdot (a(\omega)\nabla u(\omega)) = f \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad u(\omega) = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{D}. \tag{26}$$

问题（26）中的扩散系数 a 在 $\mathcal{D}$ 上具有正值路径，即 $a(\omega) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}_{>0}$。此外， a 是一个随机变量 $a : \Omega \to \mathcal{X}$，取值于适当的巴拿赫空间 $\mathcal{X} \subset L^{\infty}(\mathcal{D})$。为简单起见，假设源项 $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ 是确定性函数，但也可以将其建模为随机函数 $f : \mathcal{D} \times \Omega \to \mathbb{R}$。对于问题（26）的变分形式，我们定义 $H := L^2(\mathcal{D})$、 $V := H_0^1(\mathcal{D})$，并回顾由庞加莱不等式可知， $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$， $v \mapsto \|\nabla v\|_H$在 V 上定义了一个范数。固定$\omega \in \Omega$ 时，问题（26）的弱形式为求 $u(\omega) \in V$，使得对任意 $v \in V$，均有

$$\int_{\mathcal{D}} a(\omega)\nabla u(\omega) \cdot \nabla v dx = {}_{V'}\langle f, v\rangle_V. \tag{27}$$

定义 3.1. 映射 $\omega \mapsto u(\omega) \in V$，其中 $u(\omega)$ 是方程 (27) 的解，称为逐路径弱解。

以下定理保证了逐路径弱解的存在性和唯一性 .

定理 3.2. 设 $a : \Omega \to L^{\infty}(\mathcal{D})$ 是强 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(L^{\infty}(\mathcal{D}))$-可测的，且满足

$$a_-(\omega) := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in \mathcal{D}} a(x, \omega) > 0, \quad P\text{-a.s.}, \tag{28}$$

并设 $f \in V'$。那么，对所有 $\omega \in \Omega$，问题(26)存在唯一的弱解 $u(\omega) \in V$。映射 $u : \Omega \to V$ 是强 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(V)$-可测的。

证明。 由于 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 的完备性，不失一般性，我们可以假设 $a_-(\omega) > 0$ 且 $a(\omega) \in L^{\infty}(\mathcal{D})$ 对所有 $\omega \in \Omega$[2]均成立。

[2]如果这仅在 P-几乎处处成立，我们可以在一个 P-零测集上修改 $a : \Omega \to L^{\infty}(\mathcal{D})$，从而得到 a 的强可测修正 $\tilde{a} : \Omega \to L^{\infty}(\mathcal{D})$，使得 $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathcal{D}} \tilde{a}(x, \omega) > 0$ 且 $\tilde{a} \in L^{\infty}(\mathcal{D})$ 对 $all\ \omega \in \Omega$成立。事实上，令

$$A_0 := \{\omega \in \Omega |\ a_-(\omega) \leq 0 \text{ or } a(\omega) \notin L^{\infty}(\mathcal{D})\}.$$

根据假设， $P(A_0) = 0$，因此由 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 的完备性可得 $A_0 \in \mathcal{A}$。因此，例如，我们可以考虑修正 $\tilde{a}(\omega) := a(\omega) \mathbb{1}_{\{\omega \notin A_0\}} + \mathbb{1}_{\{\omega \in A_0\}}$。容易验证， $\tilde{a}$关于 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(L^{\infty}(\mathcal{D}))$ 强可测，并且对所有 $\omega \in \Omega$，都有 $\operatorname{ess\,inf}_{x \in \mathcal{D}} \tilde{a}(x, \omega) > 0$且 $\tilde{a} \in L^{\infty}(\mathcal{D})$。

由 Lax-Milgram 引理，现在对所有 $\omega \in \Omega$，逐路径解 $u(\omega)$ 的存在性和唯一性均可得出。为证明 u的强可测性，我们利用系数到解映射的 Lipschitz 依赖性：考虑两个扩散系数 a_1，$a_2 : \Omega \to L^\infty(\mathcal{D})$，它们满足定理的假设，且下界为 $a_{1,-}, a_{2,-} > 0$（如式 (28) 所示），并将相应的唯一弱解记为 u_1，$u_2 : \Omega \to V$。由方程 (26)，结合 $\|v\|_V^2 = \|\nabla v\|_H^2$ 和 H¨older 不等式可知，对于任意固定的系数 a_1，$a_2 \in L^\infty(\mathcal{D})$，若满足 $a_{i,-} := \operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathcal{D}} a_i(x) > 0$，则

$$\|u_1 - u_2\|_V \le \frac{\|u_2\|_V}{a_{1,-}} \|a_1 - a_2\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \le \frac{\|f\|_{V'}}{a_{1,-}a_{2,-}} \|a_1 - a_2\|_{L^\infty(\mathcal{D})}. \tag{29}$$

因此，数据到解映射 $U : S \to V$，$a \mapsto u$在集合$S := \{a \in L^\infty(\mathcal{D}) | \operatorname{essinf}_{x\in\mathcal{D}} a(x) > 0\}$上是（Lipschitz）连续的。由于问题 (26) 的逐路径弱解 $u : \Omega \to V$可写为 $u = U \circ a$，结合$a : \Omega \to L^\infty(\mathcal{D})$ 的强 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(L^\infty(\mathcal{D}))$-可测性，即可得出结论。 □

数据到解映射的 Lipschitz 连续性 (29) 对于在下文第 4 节推导误差估计至关重要，同时也蕴含随机解的强可测性。

命题 3.3. 设 $a_1, a_2 : \Omega \to L^\infty(\mathcal{D})$ 是强 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(L^\infty(\mathcal{D}))$-可测的，且满足

$$a_{i,-}(\omega) := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathcal{D}} a_i(x,\omega) > 0, \quad P\text{-a.s. for } i \in \{1,2\}. \tag{30}$$

那么，对每个 $f \in V'$，$i \in \{1,2\}$ 均存在，并且对所有 $\omega \in \Omega$，都存在唯一的弱解 $u_i(\omega) \in V$，它对应于问题 (26)（以 a 替代 a_i）。连续依赖估计成立：

$$\|u_1 - u_2\|_V \le \frac{\|f\|_{V'}}{a_{1,-}a_{2,-}} \|a_1 - a_2\|_{L^\infty(\mathcal{D})}.$$

证明。 由定理 3.2 和式 (29) 可立即得出。 □

从确定性线性椭圆问题的正则性分析可知，在 H¨older 连续的条件下，对于某些 $s > 1$，可以推出 u 的$H^s(\mathcal{D})$-正则性。相应的估计通常不会揭示常数对 $a(\omega)$ 的显式依赖，也不会给出 H¨older 范数 $\|a(\omega)\|_{C^t}$的界。然而，对于随机问题以及第 4 节和第 5 节中后续的数值分析，我们需要给定 ω 时的显式依赖关系，以确保所有逐路径估计也适用于适当的 $q \ge 1$下的 in in $L^q(\Omega; H^s(\mathcal{D}))$。为获得显式估计，我们采用了 [13, 第 3 章3] 中针对参数椭圆偏微分方程的方法，其中正则性估计通过函数空间插值的 K 方法推导得到。 [3] 特别地，通过插值可以得到 H¨older 空间 $C^r(\mathcal{D})$（[3, 引理 7.36]）： —

$$C^r(\overline{\mathcal{D}}) = [L^\infty(\mathcal{D}), W^{1,\infty}(\mathcal{D})]_{r,\infty}, \quad r \in (0,1).$$

为了研究方程 (26) 的解的空间正则性，我们引入赋范空间

$$W := \{v \in V | \ \Delta v \in H\}, \quad \|v\|_W := \|\Delta v\|_H. \tag{31}$$

[3]回顾两个巴拿赫空间 $(A_0, \|\cdot\|_{A_0})$ 和 $(A_1, \|\cdot\|_{A_1})$ 之间的 K-插值方法，其中存在连续嵌入 $A_1 \hookrightarrow A_0$：其 K-*functional*定义为

$$K(a, z; A_0, A_1) := \inf_{a_1 \in A_1} \{\|a - a_1\|_{A_0} + z\|a_1\|_{A_1}\}, \quad a \in A_0,\ z > 0.$$

对于任意 $r \in (0,1)$ 和 $q \in [1,\infty]$， *interpolation space of order r with fine index q* 为

$$[A_0, A_1]_{r,q} = \left\{a \in A_0 | \ \|a\|_{[A_0,A_1]_{r,q}} < \infty\right\},$$

其中

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{r,q}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty z^{-rq} K(a,z;A_0,A_1)^q \frac{1}{z} dz\right)^{\frac{1}{q}}, & q \in [1,\infty), \\ \sup_{z>0} z^{-r} K(a,z;A_0,A_1), & q = \infty. \end{cases}$$

集合$[A_0, A_1]_{r,\ q}$ 是一个（通常为非可分的）巴拿赫空间 .

注意， $v = 0 \Leftrightarrow \|v\|_W = 0$ 由最大值原理可得，因为 $v \in V = H_0^1(\mathcal{D})$ 的迹为零。我们用插值空间来表述正则性结果

$$W^r := [V, W]_{r,\infty}, \quad r \in (0,1). \tag{32}$$

为简化记号，以下进一步记 $W^1 := W$。

引理 3.4. *[13, 命题 3.2 和 3.5]* 令 $a : \Omega \to C^r(\mathcal{D}) \subset L^\infty(\mathcal{D})$ 对某个 $r \in (0,1]$ 强可测，且满足 $a_-(\omega) > 0$ 几乎处处成立，并设 $f \in H$。则存在常数 $C = C(r, \mathcal{D})$，使得下式成立

$$\|u(\omega)\|_{W^r} \le \frac{C}{a_-(\omega)} \left(1 + \left(\frac{\|a(\omega)\|_{C^r(\overline{\mathcal{D}})}}{a_-(\omega)}\right)^{1/r}\right) \|f\|_H. \tag{33}$$

迄今为止，本小节中的所有结果在显著较弱的假设下也成立，即 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界利普希茨区域。然而，由于假设 $\mathcal{D}$ 是凸的，我们能够将 W^r 嵌入（分数阶）索伯列夫空间。下面的引理对此作出了精确说明，而这对于第 4.2 节中的有限元误差分析是必需的。

引理 3.5. 设 $\mathcal{D}$ 为凸集， $W^r := [V, W]_{r,\infty}$ 对于 $r \in (0,1)$ 成立，并设 $W^1 := W$。则有 $W = W^1 \hookrightarrow H^2(\mathcal{D})$。此外，对于任意 $r_0 \in (0, r)$， $W^r \hookrightarrow H^{1+r_0}(\mathcal{D})$ 成立。

证明。由 $\mathcal{D}$ 的凸性可知，对所有 $v \in W$， $\|v\|_{H^2(\mathcal{D})} \le C_{\mathcal{D}} \|v\|_W$ 均成立，其中 $C_{\mathcal{D}}$ 仅取决于 $\mathcal{D}$ 的直径，参见例如 [16, 定理 3.2.1.2]。因此， $W \hookrightarrow H^2(\mathcal{D}) \cap V$ 得证。

对于 $r \in (0,1)$ 的情形，回顾一下，存在 $C_V > 0$，使得根据 Poincaré 不等式，对所有 $v \in V$， $\|v\|_{H^1(\mathcal{D})} \le C_V \|v\|_V$ 均成立。此外，对任意 $w \in W$，有 $\|w\|_{H^2(\mathcal{D})} \le C_{\mathcal{D}} \|w\|_W$，因此由第一部分可得 $W \subset H^2 \cap V$。对于 $v \in V \subset H^1$，这意味着

$$\begin{aligned}
\|v\|_{[H^1(\mathcal{D}), H^2(\mathcal{D})]_{r,\infty}} &= \sup_{z>0} z^{-r} \inf_{w \in H^2} \{\|v - w\|_{H^1(\mathcal{D})} + z\|w\|_{H^2(\mathcal{D})}\} \\
&\le \sup_{z>0} z^{-r} \inf_{w \in W} \{\|v - w\|_{H^1(\mathcal{D})} + z\|w\|_{H^2(\mathcal{D})}\} \\
&\le \sup_{z>0} z^{-r} \inf_{w \in W} \{C_V \|v - w\|_V + C_{\mathcal{D}} z \|w\|_W\} \\
&\le \max(C_V, C_{\mathcal{D}}) \|v\|_{W^r}.
\end{aligned}$$

因此， $W^r \hookrightarrow [H^1(\mathcal{D}) \; H^2(\mathcal{D})]_{r,\,\infty}$。由于对于任意 $\varepsilon \in (0, \; 1 + r)$，均有下式成立，故结论得证

$$[H^1(\mathcal{D}), H^2(\mathcal{D})]_{r,\infty} = [H^{1+r-\varepsilon}(\mathcal{D}), H^{1+r+\varepsilon}(\mathcal{D})]_{\frac{1}{2},\infty} \hookrightarrow H^{1+r-\varepsilon}(\mathcal{D}),$$

参见 [3, 第 7 节32]。 □

3.2 将 Besov 随机树先验作为对数扩散系数

为用 Besov 随机树系数表述问题（26），我们假设 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{T}^d$。我们遵循 [26, 第 2] 节的做法，并对给定的 $\omega \in \Omega$，将随机元素 $b_T(\omega) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ 定义为对周期函数在 $B^{s,\,p}_{p}{}^{per,}$ 上的限制，其定义域为 $\mathcal{D}$。任意 $\varphi \in S'(\mathbb{R}^d)$ 在 $\mathcal{D}$ 上的限制 $\varphi|_{\mathcal{D}}$，则由满足下式的元素 $\varphi|_{\mathcal{D}} \in D'(\mathcal{D})$ 给出

$${}_{D'(\mathcal{D})}\langle \varphi|_{\mathcal{D}}, v\rangle_{D(\mathcal{D})} = {}_{S'(\mathbb{R}^d)}\langle \varphi, v_0\rangle_{S(\mathbb{R}^d)}, \quad v \in D(\mathcal{D}),$$

其中， $v_0 \in D(\mathbb{R}^d) \subset S(\mathbb{R}^d)$ 表示任意 $v \in D(\mathcal{D})$ 的零延拓。

定义 3.6。 设 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{T}^d$ 为一个有界连通区域。设 b_T 为定义 2.6 中针对 $p \in [1, \infty)$、 $s > 0$ 和 $\beta = 2^{\gamma - d} \in [0, 1]$ 给出的对象，并令 $\mathrm{prl}^{per} : B^s_{p,\,p}(\mathbb{T}^d) \to B^{s,\,p}_{p}{}^{per,}(\mathbb{R}^d)$ 表示式 (11) 中的同构延拓算子。于是，对于任意 $\omega \in \Omega$，我们定义

$$b_{T,\mathcal{D}}(\omega) := (\mathrm{prl}^{per} b_T(\omega))|_{\mathcal{D}},$$

并称 $b_{T,\,\mathcal{D}}$ 一个 $B^s_p(\mathcal{D})$ 值随机变量。

注 3.7. 当 $\mathcal{D} = \mathbb{T}^d$ 时，我们可以直接使用识别 $b_{T,\mathcal{D}} = b_T$。注意，在这种情况下，$b_{T,\mathcal{D}}$ 是周期的，意即存在一个延拓 $\mathrm{prl}^{per} b_{T,\mathcal{D}} \in B^{s,per}_{p,p}(\mathbb{R}^d)$。然而，若 $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{T}^d$，$b_{T,\mathcal{D}}$ 则不一定是周期的，而只是环面上的一个周期函数的限制。

注 3.8。对于一般有界区域 $\mathcal{D} \not\subset \mathbb{T}^d$，也可以采用相同的步骤：将定义（2.6）从环面 $\mathbb{T}^d$ 推广到一个足够大的（周期）区域 $[-L, L]^d$，用于$L > 1$。这样，每个二进尺度 j上的小波系数指标集 K_j 最多只会增加一个常数因子。不过，在这种情形下，第 2 节中的所有正则性证明仍可通过类似方式完成，只需对绝对常数作少许调整。例如，如果 $L > 1$，命题 2.4 中 ε的允许范围可能会缩小，但光滑度参数 $t \in (0, s - \frac{d}{p})$ 不受影响。因此，为简洁起见，假设 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{T}^d$ 不会对以下结果产生实质性影响。

我们考虑问题（26），或其弱形式（27），其中 $a(\omega) := \exp(b_T(\omega))$，且$b_T$ 是一个具有小波密度 β的 B^s_p-随机变量。也就是说，我们采用 Besov 随机树先验对对数扩散建模，以纳入分形结构。做好这些准备后，我们便能够推导出相应逐路径弱解的适定性和正则性。

定理 3.9。设 $a := \exp(b_{T,\mathcal{D}})$，其中 $b_{T,\mathcal{D}}$ 如定义 *3.6* 中所给，适用于 $p \in [1, \infty)$，$s > 0$ 和 $\beta = 2^{\gamma - d} \in [0, 1]$，使得 $sp > d$。此外，设 $f \in V'$。

1.) 那么，几乎必然存在唯一的弱解 $u(\omega) \in V$，满足 (26)，且 $u : \Omega \to V$ 是强可测的。

2.) 对于 *(16)* 中充分小的 $\kappa > 0$，存在常数 $q \in (1, \infty)$ 和 $C > 0$，使得

$$\|u\|_{L^q(\Omega;V)} \leq C\|f\|_{V'} < \infty \quad \begin{cases} \text{for } q \in [1, \overline{q}) \text{ if } p = 1, \text{ and} \\ \text{for any } q \in [1, \infty) \text{ if } p > 1. \end{cases}$$

3.) 设 $r \in (0, s - \frac{d}{p}) \cap (0, 1]$，$f \in H$和 W^r如 *(32)* 中所示。对于 *(16)* 中充分小的 $\kappa > 0$，存在常数 $q \in (1, \infty)$ 和 $C > 0$，使得

$$\|u\|_{L^q(\Omega;W^r)} \leq C\|f\|_H < \infty \quad \begin{cases} \text{for } q \in [1, \overline{q}) \text{ if } p = 1 \text{ and} \\ \text{for any } q \in [1, \infty) \text{ if } p > 1. \end{cases}$$

证明。1.) 根据 $sp > d$，定理 2.11 表明 $b_T \in C(\mathbb{T}^d)$ 几乎处处（P-a.s.）成立。此外，根据命题 2.10，$b_T : \Omega \to C(\mathbb{T}^d)$ 是强可测的，因此特别是强 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(L^\infty(\mathbb{T}^d))$-可测的，因为 $\mathcal{B}(C(\mathbb{T}^d)) \subset \mathcal{B}(L^\infty(\mathbb{T}^d))$。由于 $b_{T,\mathcal{D}}$ 定义 3.6 中的 $\mathcal{D}$ 是 $\mathrm{ext}^{per} b_T$ 在 $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^d$ 上的限制，并且 $a = \exp \circ b_{T,\mathcal{D}}$，可得 $a : \Omega \to C(\mathcal{D})$，且 a 是强 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(L^\infty(\mathcal{D}))$-可测的，使得 $a_- > 0$ 几乎处处（P-a.s.）成立。于是，定理 3.2 保证几乎处处（P-a.s.）存在唯一的逐路径弱解 $u(\omega)$。此外，$u : \Omega \to V$ 是强可测的，而方程 (27) 表明

$$\|u(\omega)\|_V \leq \frac{\|f\|_{V'}}{a_-(\omega)}.$$

2.) 为证明第二部分，我们固定 $t \in (0, s - \frac{d}{p})$ 和 $q \geq 1$，以便看到

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega;V)}^q &\leq \mathbb{E}\left(a_-^{-q}\right) \|f\|_{V'}^q \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathcal{D}} \exp(-b_{T,\mathcal{D}}(x))\right)^q\right) \|f\|_{V'}^q \\
&= \mathbb{E}\left(\exp\left(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathcal{D}} -qb_{T,\mathcal{D}}(x)\right)\right) \|f\|_{V'}^q \\
&\leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}^d} qb_T(x)\right)\right) \|f\|_{V'}^q \\
&= \mathbb{E}\left(\exp\left(q\|b_T\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}\right)\right) \|f\|_{V'}^q \\
&\leq \mathbb{E}\left(\exp\left(q\|b_T\|_{\mathcal{C}^t}\right)\right) \|f\|_{V'}^q.
\end{aligned}$$

第二个等式用到了 $\exp(\cdot)$ 严格递增这一点，以及 $b_T(x)$ 是中心化随机变量，因此 b_T 和 $-b_T$ 同分布。这进而意味着 a_-和 $\|a\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$ 同分布，我们在第二个不等式中用到了这一点。最后一个估计由 $\|b_T\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)} \leq \|b_T\|_{\mathcal{C}^t}$ 给出，对任意 $t > 0$均成立。对于 $p = 1$，注意到定理 2.11 第二部分中的 ε_p 可取为 $\varepsilon_p = (\kappa C)^{-1}$，其中 $C > 0$ 是 (25) 中的常数。因此，当 $\kappa > 0$充分小时，我们可以在该结论中令 $q := \varepsilon_p > 1$。若 $p > 1$，杨不等式表明，对于任意 $q \geq 1$，存在任意小的 $\varepsilon > 0$ 和一个常数 $C_\varepsilon = C_\varepsilon(p, q) \in (0, \infty)$，使得

$$q\|b_T\|_{\mathcal{C}^t} \leq \varepsilon\|b_T\|_{\mathcal{C}^t}^p + C_\varepsilon.$$

因此，我们对 $q \in [1, \infty)$ 没有限制，这就证明了该断言的第二部分。

3.) 令 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathcal{D}$ 上的欧几里得范数。注意，对于任意固定的 $r \in (0, 1)$，由泰勒展开，并且由于 $\exp(\cdot)$ 严格递增，我们得到

$$\begin{aligned}
\|\exp(b_{T,\mathcal{D}})\|_{\mathrm{C}^r(\overline{\mathcal{D}})} &= \sup_{x,y\in\mathcal{D},\, x\neq y} \frac{|\exp(b_{T,\mathcal{D}}(x)) - \exp(b_{T,\mathcal{D}}(y))|}{\|x-y\|^r} + \|\exp(b_{T,\mathcal{D}})\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \\
&\leq \|\exp(b_{T,\mathcal{D}})\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \left(\sup_{x,y\in\mathcal{D},\, x\neq y} \frac{|b_{T,\mathcal{D}}(x) - b_{T,\mathcal{D}}(y)|}{\|x-y\|^r} + 1\right) \\
&\leq \exp(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}) \left(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{\mathrm{C}^r(\overline{\mathcal{D}})} + 1\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

进一步，对于 $r = 1$，我们得到

$$\|\exp(b_{T,\mathcal{D}})\|_{\mathrm{C}^1(\overline{\mathcal{D}})} \leq \exp(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}) \left(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{\mathrm{C}^1(\overline{\mathcal{D}})} + 1\right). \tag{35}$$

对于任意固定的 $r \in (0, s - \frac{d}{p}) \cap (0, 1]$，引理 3.4 现在表明

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q(\Omega;W^r)}^q &\leq C^q\mathbb{E}\left[a_-^{-q}\left(1 + a_-^{-\frac{1}{r}}\|\exp(b_{T,\mathcal{D}})\|_{\mathrm{C}^r(\overline{\mathcal{D}})}^{\frac{1}{r}}\right)^q\right] \|f\|_H^q \\
&\leq C^q\mathbb{E}\left[a_-^{-q}\left(1 + a_-^{-\frac{1}{r}}\exp(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})})^{\frac{1}{r}}\left(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{\mathrm{C}^r(\overline{\mathcal{D}})} + 1\right)^{\frac{1}{r}}\right)^q\right] \|f\|_H^q \\
&\leq C^q\mathbb{E}\left[a_-^{-q}2^{q-1}\left(1 + a_-^{-\frac{q}{r}}\exp(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})})^{\frac{q}{r}}2^{q-1}\left(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{\mathrm{C}^r(\overline{\mathcal{D}})}^{\frac{q}{r}} + 1\right)\right)\right] \|f\|_H^q \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\exp(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})})^{q+\frac{2q}{r}}\left(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{\mathrm{C}^r(\overline{\mathcal{D}})}^{\frac{q}{r}} + 1\right)\right] \|f\|_H^q,
\end{aligned} \tag{36}$$

其中，第二步使用了 (34)、(35)，第三步两次应用詹森不等式，并再次利用 b_T 和 $-b_T$ 具有相同的分布，以及 $\exp(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})}) \geq 1$，从而得到第三个估计。进一步地，不失一般性，我们可以假设 $\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{\mathrm{C}^r(\mathcal{D})} \geq 1$，然后利用 (36) 和 Hölder 不等式（其中 $q_1, q_2 > 1$，使得 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$）得到

$$\|u\|_{L^q(\Omega;W^r)}^q \leq C\mathbb{E}\left[\exp\left(q_1\left(q + \frac{2q}{r}\right)\|b_T\|_{\mathrm{C}^r}\right)\right]^{\frac{1}{q_1}} \mathbb{E}\left[\|b_T\|_{\mathrm{C}^r}^{\frac{q_2 q}{r}}\right]^{\frac{1}{q_2}} \|f\|_H^q, \tag{37}$$

其中还利用了$\|b_{T,\ \mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \le \|b_T\|_{\mathrm{C}^r}$，以及对于任意$r>0$，$\|b_{T,\ \mathcal{D}}\|_{\mathrm{C}^r(\mathcal{D})} \le \|b_T\|_{\mathrm{C}^r}$。为估计 (37) 中的 H¨older 范数$\|b_T\|_{\mathrm{C}^r}$，我们先考虑 $r<1$ 的情形。然后回顾第 2.1 小节，$\mathrm{C}^r=\mathcal{C}^r$在等价范数意义下成立，因此$\|b_T\|_{\mathrm{C}^r}\le C\|b_T\|_{\mathcal{C}^r}$。若 $r=1$，则$s-\frac{d}{p}>1$，并采用相同的论证，得到对任意 $\varepsilon\in(0,\ s-\frac{d}{p}-1)$ 均成立的界 $\|b_T\|_{\mathrm{C}^r}\le\|b_T\|_{\mathrm{C}^{r+\varepsilon}}\le C\|b_T\|_{\mathcal{C}^{r+\varepsilon}}$。

对于 $p=1$，定理 2.11 再次表明，当 $\kappa>0$足够小时，存在依赖于 r的可容许选择 q，q_1，$q_2\in[1,\infty)$，使得式 (37) 右端有限。证明可通过注意到：若 $p>1$，则在式 (37) 中，$q\in[1,\infty)$仍可任意大，且与 r无关。 □

4 路径逐点有限元近似

4.1 维数截断

为获得 b_T 在式 (18) 中的一个可处理近似，我们在$N\in\mathbb{N}$ 个尺度之后截断小波级数展开，从而得到截断的随机树贝索夫先验

$$b_{T,N}(\omega):=\sum_{\substack{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\\ j\le N}}\eta_j X_{j,k}^l(\omega)\psi_{j,k}^l,\quad \omega\in\Omega. \tag{38}$$

对于固定的 $\omega\in\Omega$，具有截断系数的相应扩散问题的弱形式为：求 $u_N(\omega)\in V$，使得对所有 $v\in V$

$$\int_{\mathcal{D}} a_N(\omega)\nabla u_N(\omega)\cdot\nabla v dx={}_{V'}\langle f,v\rangle_V, \tag{39}$$

其中

$$a_N:\Omega\to L^\infty(\mathcal{D}),\quad \omega\mapsto\exp(b_{T,N}(\omega)|_{\mathcal{D}}). \tag{40}$$

u_N 的存在性、唯一性和正则性可仿照上一节中对 u 的处理得到。

推论 4.1。设 $N\in\mathbb{N}$、$a_N=\exp(b_{T,\ N}|_{\mathcal{D}})$ 以及$b_{T,\ N}$如(38) 中针对 $p\in[1,\infty)$、$s>0$和 $\beta=2^{\gamma-d}\in[0,1]$所给定，使得 $sp>d$。此外，设 $f\in V'$。则有以下结论。

1.) 几乎必然存在唯一的弱解 $u_N(\omega)\in V$，它是截断 问题的解，且 $u_N:\Omega\to V$ 是强可测的。(39)

2.) 对于(16)中的充分小的 $\kappa>0$，存在常数$q\in(1、\infty)$ 和 $C>0$，使得对于任意 $N\in\mathbb{N}$

$$\|u_N\|_{L^q(\Omega;V)}\le C\|f\|_{V'}<\infty\quad\begin{cases}\text{for } q\in[1,\overline{q})\ \text{if } p=1,\ \text{and}\\ \text{for any } q\in[1,\infty)\ \text{if } p>1.\end{cases}$$

3.) 设 $r\in(0、\ s-\frac{d}{p})\cap(0,1]$和 $f\in H$。存在常数 $q\in(1、\infty)$和 $C>0$，使得对于任意 $N\in\mathbb{N}$

$$\|u_N\|_{L^q(\Omega;W^r)}\le C\|f\|_H<\infty\quad\begin{cases}\text{for } q\in[1,\overline{q})\ \text{if } p=1\ \text{and}\\ \text{for any } q\in[1,\infty)\ \text{if } p>1.\end{cases}$$

证明。观察到，对于任意 $t>0$、$q\in[1,\infty]$和 $N\in\mathbb{N}$，$\|b_{T,N}(\omega)\|_{B_q^t}\trianglelefteq\|b_T(\omega)\|_{B_q^t}$几乎必然成立，因此可仿照定理 2.11 和 3.9 得出该结果。 □

推论 4.1 的重要结论是，这些界与 N 无关；在下一小节估计 u_N 的有限元离散误差时，这一点至关重要。本节余下部分将对截断误差 $a-a_N$ 和 $u-u_N$ 进行界定。

命题 4.2. 设 $a:=\exp(b_{T,\mathcal{D}})$ 其中 $b_{T,\mathcal{D}}$ 如定义 *3.6* 所给，且 $p\in(1,\infty)$，$s>0$，$\beta=2^{\gamma-d}\in[0,1]$，并满足 $sp>d+\min(\gamma,0)$。令 $b_{T,N}$ 和 a_N 分别为给定 $N\in\mathbb{N}$ 时 b_T 和 a 的近似，如 (38) 和 (40) 所示。

1.) 对任意 $q\geq 1$ 和 $t\in(0,s-\frac{d}{p}-\min(\gamma,0)/q)$，存在一个常数 $C>0$，使得对每个 $N\in\mathbb{N}$，都有

$$\|b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}\leq C2^{N(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\min(\gamma,0)}{q})}.$$

2.) 此外，对任意 $q\geq 1$、$\varepsilon>0$ 和 $t\in(0,s-\frac{d}{p}-\min(\gamma,0)/q)$，存在一个 $C>0$，使得对每个 $N\in\mathbb{N}$，都有

$$\|a-a_N\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}\leq C2^{N(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\min(\gamma+\varepsilon,0)}{q})}.$$

证明。 1.) 设 $q_0\geq q$、$t_0>\frac{d}{q_0}$和 $t=t_0-\frac{d}{q_0}$，使得 $B^{t_0}_{q_0}\hookrightarrow\mathcal{C}^t$。对任意固定的 $N\in\mathbb{N}$，类似于定理 2.11 的证明，利用 H¨older 不等式可得估计

$$\begin{aligned}
\|b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}&\leq\|b_T-b_{T,N}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t)}\\
&\leq\mathbb{E}\left(\|b_T-b_{T,N}\|^{q_0}_{\mathcal{C}^t}\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\leq\mathbb{E}\left(\|b_T-b_{T,N}\|^{q_0}_{B^{t_0}_{q_0}}\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\leq\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}2^{jq_0(t_0-\frac{d}{q_0}-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q_0})}\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&=2^{N(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q_0})}\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{jq_0(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q_0})}\right)^{\frac{1}{q_0}}.
\end{aligned}\tag{41}$$

现在令 $t<s-\frac{d}{p}$和 $\gamma\in(0,d]$，取 (41) 中的 $q_0=\max\left(\gamma N,2\gamma(s-\frac{d}{p}-t)^{-1},q\right)$ (充分大，给定 N)，从而得到

$$\begin{aligned}
\|b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}&\leq 2^{N(t-s+\frac{d}{p})+1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{jq_0(t-s+\frac{d}{p})\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{q_0}}\\
&\leq 2^{N(t-s+\frac{d}{p})}2\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(t-s+\frac{d}{p})\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}\tag{42}$$

(42) 中的最终上界与 $q_0=q_0(N)$ 无关，这证明了该结论的第一部分，适用于$\gamma\in(0,d]$。对于 $\gamma\in(-\infty,0]$，我们将 (41) 中的 $q_0=q$ 用于任意 $t\in(0,s-\frac{d}{p}-\frac{\gamma}{q})$，得到

$$\|b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}\leq 2^{N(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q})}\left(\sum_{j=1}^{\infty}2^{jq(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q})}\right)^{\frac{1}{q}}\leq C2^{N(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\gamma}{q})}.\tag{43}$$

2.) 为证明第二部分，我们注意到，对于任意 $t\in(0,\ s-\frac{d}{p}-\text{最小值}(\gamma,0)/q)$，都有

$$\begin{aligned}
\|a-a_N\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}&\leq\|e^{b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}(e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}-1)\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}\\
&\leq\|e^{b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))}\|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}-1\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))},
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 $b_T - b_{T,N}$ 与 $b_{T,N}$ 的独立性得出。利用估计式 (34)（分别为 (35)）、定理 2.11 以及 Hölder 不等式，该表达式中的第一个因子可类似于 $\|e^{b_{T,\mathcal{D}}}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\mathcal{D}))}$ 进行有界估计

$$\|e^{b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))} \le \|e^{b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^{q_1 q}(\Omega;L^\infty(\overline{\mathcal{D}}))} \Big(\|b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{L^{q_2 q}(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))} + 1\Big) < \infty, \tag{44}$$

其中 q_1，$q_2 > 1$ 满足 $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$，且该界关于 N 一致成立。此外，泰勒展开给出

$$\begin{aligned}
\|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}} - 1\|_{\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}})} &= \sup_{x,y\in\mathcal{D},\, x\neq y} \frac{|e^{(b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}})(x)} - e^{(b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}})(y)}|}{\|x-y\|^r} + \|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}} - 1\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \\
&\le \|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \sup_{x,y\in\mathcal{D},\, x\neq y} \frac{|(b_{T,\mathcal{D}} - b_{T,N}|_{\mathcal{D}})(x) - (b_{T,\mathcal{D}} - b_{T,N}|_{\mathcal{D}})(y)|}{\|x-y\|^r} \\
&\quad + \|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \|b_{T,\mathcal{D}} - b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \\
&\le \|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})} \|b_{T,\mathcal{D}} - b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}})}.
\end{aligned}$$

由定理 3.9 第二部分的证明可知，$\|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^q(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))} < \infty$ 关于 N 一致有界，对所有 $q \ge 1$ 均成立。对 p_1，$p_2 > 1$ 满足 $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ 应用霍尔德不等式，再结合式 (43) 中的截断误差，可得

$$\begin{aligned}
\|a - a_N\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))} &\le \|e^{b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}(e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}} - 1)\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))} \\
&\le C\|e^{b_{T,\mathcal{D}}-b_{T,N}|_{\mathcal{D}}}\|_{L^{p_1 q}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))} \|b_{T,\mathcal{D}} - b_{T,N}|_{\mathcal{D}}\|_{L^{p_2 q}(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))} \\
&\le C 2^{N(t-s+\frac{d}{p}+\frac{\min(\gamma,0)}{p_2 q})}
\end{aligned}$$

通过选择足够小的 $p_2 > 1$，使得 $\min(\gamma, 0) \le p_2 \min(\gamma+\varepsilon, 0)$，即可对任意 $\varepsilon > 0$ 得到该结论。 □

注 4.3. 我们强调，命题 4.2 中的所有估计均独立于 $\mathcal{D} \subset \mathbb{T}^d$，因为所有一致误差界都是关于 $\mathbb{T}^d$ 推导得出的。命题 4.2 尤其表明，对于任意 $q \ge 1$ 和 $t \in (0, s - \frac{d}{p} - \min(\gamma, 0)\, q)$，存在一个 $C > 0$，使得对任意 $N \in \mathbb{N}$，均有

$$\|a - a_N\|_{L^q(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))} \le C 2^{-Nt}.$$

该估计对于界定式 (39) 中近似椭圆问题的截断误差 $u - u_N$ 至关重要，见下文定理 4.4。在临界情形 $p = 1$ 下，当 $\kappa > 0$ 和 $sp > d$ 充分小时，我们仍可得到稍弱一些的估计

$$\|a - a_N\|_{L^q(\Omega;\mathcal{C}^t(\overline{\mathcal{D}}))} \le C 2^{N(t-s+\frac{d}{p})}, \quad \|a - a_N\|_{L^q(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))} \le C 2^{-tN} \tag{45}$$

当足够小 $q \ge 1$（取决于 κ）且 $t \in (0, s - \frac{d}{p})$ 时，无关于 γ。在命题 4.2 证明的最后部分中令 $p_1 \to 1$ 和 $p_2 \to \infty$，即可看出这一点。

定理 *4.4.* 设 u 如式 *(26)* 所示，其中 $a = \exp(b_{T,\mathcal{D}})$；设 u_N 如式 *(26)* 所示，其中 $a_N = \exp(b_{T,N}|_{\mathcal{D}})$，由式 *(40)* 给出。此外，设 $b_{T,\mathcal{D}}$ 满足 $p \in (1, \infty)$、$s > 0$, $\beta = 2^{\gamma-d} \in [0, 1]$，且 $sp > d \ge d + \min(\gamma, 0)$。那么，对于任意 $q \ge 1$ 和 $t \in (0, s - \frac{d}{p} - \min(\gamma,0)\, q)$，存在一个 $C > 0$，使得对~~每个~~ $N \in \mathbb{N}$ 均有

$$\|u - u_N\|_{L^q(\Omega;V)} \le C 2^{-Nt}.$$

证明。 对于固定的 $\omega \in \Omega$ 和 $N \in \mathbb{N}$，由命题 3.3 可得

$$\|u(\omega) - u_N(\omega)\|_V \le \frac{\|f\|_{V'}}{a_-(\omega) a_{N,-}(\omega)} \|a(\omega) - a_N(\omega)\|_{L^\infty(\mathcal{D})},$$

其中 $a_{N,-}(\omega) := \text{本质下确界}_{x\in\mathcal{D}}\, a_N(\omega,x)$。取期望并应用 H¨older 不等式，得到

$$\|u-u_N\|_{L^q(\Omega;V)} \le \|f\|_{V'}\|a_-^{-1}\|_{L^{q_1}(\Omega)}\|a_{N,-}^{-1}\|_{L^{q_2}(\Omega)}\|a-a_N\|_{L^{q_3}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))}, \tag{46}$$

其中 $q_1,q_2,q_3>1$ 满足 $\frac{1}{q}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{q_i}$ 和 $\|f\|_{V'}<\infty$。与定理 3.2 中第 2.) 部分的证明类似，结合定理 2.11，我们得出对于任意 $q_1\in[1,\infty)$ 和 $t\in(0,s-\frac{d}{p})$，

$$\|a_-^{-1}\|_{L^{q_1}(\Omega)} \le \|\exp(\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{L^\infty(\mathcal{D})})\|_{L^{q_1}(\Omega)} \le \|\exp(\|b_T\|_{\mathcal{C}^t})\|_{L^{q_1}(\Omega)} < \infty.$$

类似地，对于所有 $q_2\in[1,\infty)$，均有

$$\|a_{N,-}^{-1}\|_{L^{q_2}(\Omega)} \le \|\exp(\|b_{T,N}\|_{\mathcal{C}^t})\|_{L^{q_2}(\Omega)} \le \|\exp(\|b_T\|_{\mathcal{C}^t})\|_{L^{q_2}(\Omega)} < \infty,$$

这里特别指出，最后一个界关于 N是一致的。命题 4.2 和注 4.3 表明，对于 $q_3\in[1,\infty)$ 和 $t\in(0,s-\frac{d}{p}-\min(\gamma,0)\,q_3)$，

$$\|a-a_N\|_{L^{q_3}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))} \le C2^{-Nt}.$$

结合 (46)，这就证明了该结论，因为 $q_3>q$ 可以任意接近 q，并且

$$\|a_-^{-1}\|_{L^{q_1}(\Omega)} + \|a_{N,-}^{-1}\|_{L^{q_2}(\Omega)} \le C < \infty$$

对所有 $q_1,\ q_2\in[1,\infty)$ 均成立，其中 $C=C(q_1,\ q_2)>0$，且关于 N 一致。 □

注 4.5. 根据注 4.3，我们注意到，对于足够小的 $p=1$ 、 $\kappa>0$ 和 $sp>d$，有如下稍弱的估计

$$\|u-u_N\|_{L^q(\Omega;V)} \le C2^{-Nt}.$$

当 足够小的 $q\ge1$（取决于 κ）且 $t\in(0,\ s-\frac{d}{p})$ 时成立，且不依赖于 γ。在定理 4.4 的证明中令 $q_1,\ q_2\to\frac{1}{2q}$ 和 $q_3\to\infty$，也可以得到这一结论。

4.2 有限元离散

带截断扩散系数的问题 (39) 的解 $u_N:\Omega\to V$ 仍然无法完全处理，因为它取值于无限维希尔伯特空间 V。因此，我们考虑 u_N 在 V 的有限维子空间中的伽辽金有限元近似。推论 4.1 给出了 u_N 所需的正则性，且该正则性与截断指标 N 无关，因此在本节余下部分，我们固定 $N\in\mathbb{N}$。

我们将凸多面体区域 $\mathcal{D}\subset\mathbb{T}^d, d\in\{1,2,3\}$ 划分为一系列单形（区间/三角形/四面体）或平行多面体（区间/平行四边形/平行六面体），记作 $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathfrak{H}}$。细化参数 $h>0$ 取自可数指标集 $\mathfrak{H}\subset(0,\ \infty)$，对应于单形/平行多面体 $K\in\mathcal{K}_h$的最长边。为得到一系列“性质良好”的三角剖分，我们对 $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathfrak{H}}$ 作如下假设。

假设 4.6。 序列 $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathfrak{H}}$ 满足：

1. 可容许性： 对于每个 $h\in\mathfrak{H},\ \mathcal{K}_h$ 由开且非空的单形/平行多面体 K构成，使得

   - $\mathcal{D}=\bigcup_{K\in\mathcal{K}_h}K$,
   - $K_1\cap K_2=\emptyset$ 对于任意两个 $K_1,\ K_2\in\mathcal{K}_h$ 使得 $K_1\ne K_2$，以及
   - $K_1\cap K_2$ 的交集 $\overline{K}_1\ne\overline{K}_2$ 要么为空，要么是公共边、公共顶点，或者（在空间维数为 $d=3$时）是 K_1 和 K_2的公共面。

2. 形状正则性：令$\rho_{K,\ in}$和$\rho_{K,\ out}$分别表示给定 $K \in \mathcal{K}_h$的最大内切圆和外接圆的半径。存在一个常数 $\rho > 0$ 使得

$$\rho := \sup_{h\in\mathfrak{H}} \sup_{K\in\mathcal{K}_h} \frac{\rho_{K,out}}{\rho_{K,in}} < \infty.$$

Bas在给定的三角剖分 $\mathcal{K}_h$ 上，我们定义分片（多重）线性有限元空间

$$V_h := \begin{cases} \{v \in V |\ v|_T \text{ is linear for all } K \in \mathcal{K}_h\}, & \text{if } \mathcal{K}_h \text{ consists of simplices,} \\ \{v \in V |\ v|_T \text{ is } d\text{-linear for all } K \in \mathcal{K}_h\}, & \text{if } \mathcal{K}_h \text{ consists of parallelotopes.} \end{cases}$$

显然， $V_h \subset V$ 是一个有限维空间，我们定义 $n_h := \dim(V_h) \in \mathbb{N}$。对于固定的 $\omega \in \Omega$，这得到如下全离散问题：求 $u_{N,h}(\omega) \in V_h$，使得对所有 $v_h \in V_h$

$$\int_{\mathcal{D}} a_N(\omega)\nabla u_{N,h}(\omega) \cdot \nabla v_h dx = {}_{V'}\langle f, v_h\rangle_V. \tag{47}$$

定理 4.7。设 $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathfrak{H}}$ 是满足假设 *4.6* 的三角剖分序列，并设 u_N 和 $u_{N,h}$ 分别是 (39) 和 (47) 的逐路径弱解。此外，设 $N \in \mathbb{N}$, a_N 如 (40) 中针对 $p \in [1,\infty)$ 和 $s > 0$ 所给定，使得 $sp > d$，且满足 $\beta = 2^{\gamma-d} \in [0,1]$。

对于任意 $f \in H$，在 (16) 中充分小的 $\kappa > 0$，以及任意 $r \in (0, s - \frac{d}{p}) \cap (0,1],$，存在常数 $q \in \overline{(}1,\infty)$ 和 $C > 0$，使得对任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \mathfrak{H}$，有

$$\|u_N - u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;V)} \le Ch^r \quad \begin{cases} \text{for } q \in [1,\overline{q}) \text{ if } p = 1, \text{ and} \\ \text{for any } q \in [1,\infty) \text{ if } p > 1. \end{cases}$$

证明。回顾 $a_{N,-}(\omega) := \operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathcal{D}} a_{N,-}(\omega) > 0$，并由 Céa 引理得到

$$\|u_N(\omega) - u_{h,N}(\omega)\|_V \le \frac{\|a_N(\omega)\|_{L^\infty(\mathcal{D})}}{a_{N,-}(\omega)} \|f\|_{V'} \inf_{v_h\in V_h} \|u_N(\omega) - v_h\|_V. \tag{48}$$

现在首先假设 $p > 1$。由于 $f \in H$，由推论 4.1 可知，对任意 $q \ge 1$，$u_N \in L^q(\Omega; W^r)$ 对于 $r \in (0, s - \frac{d}{p}) \cap (0,1]$ 都成立。对于 $0 < s - \frac{d}{p} \le 1$，我们有 $r \in (0, s - \frac{d}{p})$，而引理 3.5 表明，对任意 $r_0 \in (0, r)$，$u_N \in L^q(\Omega; H^{1+r_0}(\mathcal{D}))$ 成立。因此，对于 $r_0 \in (0, r)$，可得

$$\inf_{v_h\in V_h} \|u_N(\omega) - v_h\|_V \le C\|u_N(\omega)\|_{H^{1+r_0}(\mathcal{D})} h^{r_0}. \tag{49}$$

这是一阶拉格朗日有限元法的标准结果，例如参见 [17, 定理 8.62/8.69]或 [9,定理 4.4.20]。(49) 中的常数 $C > 0$ 取决于形状正则性参数 ρ 和 $\mathcal{D}$，但与 u_N 和 h无关。结合 (48) 和 (49)，利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \|u_N(\omega) - u_{h,N}(\omega)\|_{L^q(\Omega;V)} &\le C\|f\|_{V'}\|a_N\|_{L^{3q}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))}\|a_{N,-}^{-1}\|_{L^{3q}(\Omega)}\|u_N\|_{L^{3q}(\Omega;H^{1+r_0}(\mathcal{D}))} h^{r_0} \\ &\le C\|a_N\|^2_{L^{3q}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))}\|u_N\|_{L^{3q}(\Omega;H^{1+r_0}(\mathcal{D}))} h^{r_0} \\ &\le C\|a_N\|^2_{L^{3q}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))}\|u_N\|_{L^{3q}(\Omega;W^r)} h^{r_0} \\ &\le Ch^{r_0}. \end{aligned} \tag{50}$$

在第二个估计中，我们利用了 $a_{N,-}$ 和 $\|a_N\|_{L^\infty(\mathcal{D})}$ 具有相同的分布，而第三行则利用了引理 3.5。由推论 4.1 和命题 4.2 可知，对于任意 $q \in [1,\infty)$，最后一步成立，因为 $p > 1$。此外，作为推论 4.1 和命题 4.2 的进一步结果，(50) 中最终估计的常数 $C > 0$ 有界，且该界独立于 N 和 h。由于$0 < s - \frac{d}{p} \le 1$，我们可以令 $r_0 < r < s - \frac{d}{p}$ 任意接近 $s - \frac{d}{p}$。

另一方面，若 $s - \frac{d}{p} > 1$ 和 $r = 1$，引理 3.5 蕴含 $u_N \in L^q(\Omega; H^2(\mathcal{D}))$。于是，对于 $r_0 = r = 1$，估计式 (49) 和 (50) 成立，这就证明了在 $p > 1$ 的情况下该结论成立。

对于 $p = 1$ 且给定 $q \ge 1$，我们还需要假设 $\kappa > 0$ 足够小，使得将 $3q$ 替换为 q 后，推论 4.1 和注 4.3 中的式 (45) 仍成立。在这种情况下，关于$p = 1$ 的结论可类似于关于 $p > 1$ 的结论得出。

□

在定理 4.7 的证明中，我们通过 H¨older 不等式得到了幂为 $3q$ 的指数矩。因此，对于情形 $p=1$, 我们需要大致满足 $\kappa < \frac{1}{3q}$ （忽略求和常数），以抵消该指数，并得到 $a_N \in L^{3q}(\Omega; L^\infty(\mathcal{D}))$ 和 $u_N \in L^{3q}(\Omega; W^r)$。

定理 4.8. 设定理 *4.7* 的假设成立。对于任意充分小的 $f \in H$ $\kappa > 0$*in* (16) 以及任意 $r \in (0, s - \frac{d}{p}) \cap (0,1],$，存在常数 $q \in (1,\infty)$ 和 $C>0$，使得对于任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \mathfrak{H}$，均有

$$\|u_N - u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)} \le Ch^{2r} \quad \begin{cases} for\ q \in [1,\bar{q})\ if\ p=1,\ and \\ for\ any\ q \in [1,\infty)\ if\ p>1. \end{cases}$$

证明. 证明采用众所周知的 *Aubin-Nitsche* 对偶论证。令 $e_{N,h} := u_N - u_{N,h}$，并考虑固定 $\omega \in \Omega$ 时的对偶问题：求 $\varphi(\omega) \in V$，使得对所有 $v \in V$，均有

$$\int_{\mathcal{D}} a_N(\omega)\nabla\varphi(\omega)\cdot\nabla v dx = {}_{V'}\langle e_{N,h}(\omega), v\rangle_V. \tag{51}$$

首先，我们需要研究 φ 的正则性和可积性。引理 3.4 表明

$$\|\varphi(\omega)\|_{W^r} \le \frac{C}{a_-(\omega)}\left(1+\left(\frac{\|a(\omega)\|_{C^r(\overline{\mathcal{D}})}}{a_-(\omega)}\right)^{1/r}\right)\|e_{N,h}(\omega)\|_H. \tag{52}$$

固定 $t \in (0, s-\frac{d}{p})$。对 (52) 两边积分，并像定理 3.9 的第三部分那样使用 H¨older 不等式（参见不等式（37））， 可得对于 $q_0 \ge 1$ 和 $q_1,\dots,q_3 \in [1,\infty)$，有 $1 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{q_i}$

$$\|\varphi\|^{q_0}_{L^{q_0}(\Omega;W^r)} \le C\,\mathbb{E}\left[\exp\left(q_1\left(q_0+\frac{2q_0}{r}\right)\|b_T\|_{C^r}\right)\right]^{\frac{1}{q_1}} \mathbb{E}\left[\|b_T\|_{C^r}^{\frac{q_2 q_0}{r}}\right]^{\frac{1}{q_2}} \mathbb{E}\left[\|e_{N,h}\|_H^{q_0 q_3}\right]^{1/q_3} \tag{53}$$

请注意，为了推导式 (53)，我们再次假设 $\|b_{T,\mathcal{D}}\|_{C^r(\mathcal{D})} \ge 1$，且不失一般性。

根据定理 2.11、4.7 和命题 4.2，我们现在可以得出结论：式 (53) 右端有限，且对 N 一致有界，其中任意 $q_0 \ge 1$ 均满足 $p>1$，因为 H¨older 共轭指数 $q_1,\dots,q_3 \in (1,\infty)$ 可以任意大。对于 $p=1$, 我们还需要 (16) 中的 $\kappa > 0$ 足够小，使得在定理 2.11 中 $\varepsilon_p > q_0 \max(q_1(1+\frac{1}{r}), \frac{q_2}{r})$，并且在定理 4.7 中 $q \ge q_0 q_3$。鉴于 $\kappa > 0$ 足够小，对于任意 $p \ge 1$，都存在一个 $q_0 \ge 1$，使得 $\varphi \in L^{q_0}(\Omega; W^r)$。

接下来，我们结合方程（39）和（47）来证明伽辽金正交性

$$\int_{\mathcal{D}} a_N(\omega)\nabla e_{N,h}(\omega)\cdot\nabla v_h dx = 0, \quad v_h \in V_h. \tag{54}$$

令 $P_h: V \to V_h$ 表示到 V_h 上的 V-正交投影。将 $v = e_{N,h}(\omega) \in V$ 代入（51）进行测试，再结合（54）中的 $v_h = P_h\varphi(\omega)$，可得

$$\begin{aligned} \|e_{N,h}(\omega)\|_H^2 &= \int_{\mathcal{D}} a_N(\omega)\nabla\varphi(\omega)\cdot\nabla e_{N,h}(\omega)dx \\ &\le \|a_N(\omega)\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\|e_{N,h}(\omega)\|_V\|(I-P_h)\varphi(\omega)\|_V. \end{aligned} \tag{55}$$

利用 Hölder 不等式，估计式（55）可得 $q \in [1,\infty)$

$$\|e_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)} \le \|a_N\|_{L^{\frac{3q}{2}}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))}\|e_{N,h}\|_{L^{\frac{3q}{2}}(\Omega;V)}\|(I-P_h)\varphi\|_{L^{\frac{3q}{2}}(\Omega;V)}.$$

首先，再次假设 $p>1$，其中对于任意 $q_0 \ge 1$， $\varphi \in L^{q_0}(\Omega; W^r)$ 均成立。由命题 4.2 和定理 4.7 可得

$$\|e_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)} \le Ch^r\|(I-P_h)\varphi\|_{L^{\frac{3q}{2}}(\Omega;V)},$$

其中 $C>0$ 与 N 和 h 无关。由引理 3.5、$\varphi\in L^{q_0}(\Omega;W^r)$ 以及 (49) 还可得

$$\|e_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)}\le Ch^{r+r_0},\quad r_0\in(0,r)\cup\{\lfloor r\rfloor\}. \tag{56}$$

该结论可仿照定理 4.7 得出，因为 $r=r_0=1$ if $s-\frac{d}{p}>1$，否则 $r_0<r<s-\frac{d}{p}$ 可以任意接近 $s-\frac{d}{p}$。

另一方面，对于 $p=1$ 且给定 $q\ge1$，我们需要假设 $\kappa>0$ 足够小，使得当 $q_0=\frac{3q}{2}$ 时，$\varphi\in L^{q_0}(\Omega;W^r(\mathcal{D}))$ 成立，并且将 q 替换为 $\frac{3q}{2}$ 后，(45)-和定理 4.7 仍然成立。然后，由 (4.2) 可仿照 $p>1$ 得出该结论。□

关于 V 和 H 的总体近似误差界，现在可直接由定理 4.4、4.7、4.8 及注 4.5 得出。

推论4.9。设定理 *4.7* 的假设成立，设 $f\in H$，设 $t\in(0,s-\frac{d}{p})$，并假设给定 $r\in(0,s-\frac{d}{p})\cap(0,1]$。则有：

1.) 对于 $p=1$，且当式 (16) 中的 $\kappa>0$ 足够小时，存在常数 $q=q(\kappa)\in(1,\infty)$ 和 $C>0$，使得对于任意 $q\in[1,q)$、$N\in\mathbb{N}$ 和 $h\in\mathfrak{H}$，均有

$$\|u-u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;V)}\le C(2^{-tN}+h^r),$$
$$\|u-u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)}\le C(2^{-tN}+h^{2r}).$$

2.) 对于 $p\in(1,\infty)$ 以及任意 $q\in[1,\infty)$，存在常数 $C>0$，使得对于任意 $N\in\mathbb{N}$ 和 $h\in\mathfrak{H}$ 均有

$$\|u-u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;V)}\le C(2^{N(-t+\frac{\min(\gamma,0)}{q})}+h^r),$$
$$\|u-u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)}\le C(2^{N(-t+\frac{\min(\gamma,0)}{q})}+h^{2r}).$$

5 多层蒙特卡洛估计

对于给定的泛函 Ψ 和作为式 (27) 解的 u，我们考虑 $\mathbb{E}(\Psi(u))$ 的蒙特卡洛估计，其中系数为 Besov 随机树系数 a。我们用易于处理的近似 $u_{N,\,h}$ 替代 u，以计算 $\Psi(u_{N,\,h})\approx\Psi(u)$，并给出总体误差的界。总体误差由第 4 节中的逐路径离散化误差和蒙特卡洛近似的统计误差组成。

假设 5.1。

1.) 令 $\theta\in[0,1]$，令 $\Psi:\ H^\theta(\mathcal{D})\to\mathbb{R}$ 在 $H^\theta(\mathcal{D})$ 上 Fr´echet 可微，并记

$$\Psi':H^\theta(\mathcal{D})\to\mathcal{L}(H^\theta(\mathcal{D});\mathbb{R})=(H^\theta(\mathcal{D}))'$$

Ψ 的 Fr´echet 导数。存在常数 $C>0,\rho_1,\rho_2\ge0$，使得对所有 $v\in H^\theta(\mathcal{D})$

$$|\Psi(v)|\le C(1+\|v\|^{\rho_1}_{H^\theta(\mathcal{D})}),\quad \|\Psi'(v)\|_{\mathcal{L}(H^\theta(\mathcal{D});\mathbb{R})}\le C(1+\|v\|^{\rho_2}_{H^\theta(\mathcal{D})}). \tag{57}$$

2.) 对于 $q:=2\max(\rho_1,\rho_2+1)$，有 $u\in L^q(\Omega;V)$。

3.) $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathfrak{H}}$ 是一个满足假设 4.6 的三角剖分集合。

4.) 存在常数 $t>0,r\in(0,1]$ 和 $C>0$，使得对于 $q=2\max(\rho_1,\rho_2+1)$ 以及任意 $N\in\mathbb{N}$ 和 $h\in\mathfrak{H}$，有

$$\|u-u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;V)}\le C(2^{-tN}+h^r),\quad \|u-u_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)}\le C(2^{-tN}+h^{2r}).$$

注5.2. 假设 5.1 很自然，尤其包括有界线性函数 Ψ，其中 $\rho_1=1$ and $\rho_2=0$。根据定理 3.9 可得条目 2，根据推论4.9 可得条目 4；只要 $p>1$，就无需进一步限制。仅当 $p=1$ 时，$\kappa>0$ 才需要足够小，以确保所有界对 $q=2\max(\rho_1,\rho_2+1)\ge2$ 均成立。

5.1 单层蒙特卡罗

对于给定的泛函 Ψ，我们使用蒙特卡罗（蒙特卡罗）方法来近似 $\mathbb{E}(\Psi(u))$。为此，我们首先考虑（一般）实值随机变量的标准蒙特卡洛估计量。

定义 5.3. 设 $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ 为一个随机变量，并设 $(Y_{(i)} i \in \mathbb{N})$ 为 Y 的一列独立同分布副本。对于 $M \in \mathbb{N}$，我们定义蒙特卡罗估计量 $E_M(Y) : \Omega \to \mathbb{R}$ 为

$$E_M(Y) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} Y^{(i)}. \tag{58}$$

由于我们无法直接从 u 的分布中采样，因此依赖于第 4 节中的路径近似 $u_{N,h}$ 的独立同分布副本 $(u_{N\,h}^{(i)}, i \in \mathbb{N})$。因此，除了阶为 $\mathcal{O}(M^{-1/2})$ 的统计蒙特卡罗误差外，我们还引入了一个取决于 N 和 h 的采样偏差。

定理 5.4. 设 $M \in \mathbb{N}$，令 $E_M(\Psi(u_{N,h}))$ 为式(58)中的蒙特卡罗估计量，并假设假设 *5.1* 成立。则存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意 M、$N \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \text{ら}$，均有

$$\|\mathbb{E}(\Psi(u)) - E_M(\Psi(u_{N,h}))\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(M^{-1/2} + 2^{-tN} + h^{(2-\theta)r}\right)$$

证明。 我们将总体误差分解为

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(\Psi(u)) - E_M(\Psi(u_{N,h}))\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\mathbb{E}(\Psi(u)) - E_M(\Psi(u))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|E_M(\Psi(u)) - E_M(\Psi(u_{N,h}))\|_{L^2(\Omega)} \\ &:= I + II.\end{aligned}$$

为了界定 I，我们利用 $\Psi(u)^{(i)}$ 与 $\Psi(u)^{(j)}$ 相互独立这一事实，对于 $i \neq j$ 可得

$$\begin{aligned}I^2 &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\Psi(u)) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\Psi(u)^{(i)}\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E}(\Psi(u))^2 - \frac{2}{M}\sum_{i=1}^{M}\mathbb{E}(\Psi(u))^2 + \frac{1}{M^2}\sum_{i,j=1}^{M}\mathbb{E}\left(\Psi(u)^{(i)}\Psi(u)^{(j)}\right) \\ &= \frac{\mathrm{Var}(\Psi(u))}{M}.\end{aligned}$$

假设 5.1 进一步表明

$$I \leq \frac{\|\Psi(u)\|_{L^2(\Omega)}}{M^{1/2}} \leq C\frac{1 + \|u\|_{L^{2\rho_1}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))}}{M^{1/2}} \leq C\frac{1 + \|u\|_{L^{2\rho_1}(\Omega;V)}}{M^{1/2}} \leq CM^{-1/2},$$

其中我们利用了 $\theta \leq 1$ 和 $u \in L^{2\rho_1}(\Omega; V)$。

为了界定 II，我们利用公式 (57) 推导出逐路径估计

$$\begin{aligned}|\Psi(u) - \Psi(u_{N,h})| &= \left|\int_0^1 \Psi'(u + z(u_{N,h} - u))(u - u_{N,h})dz\right| \\ &\leq \int_0^1 \|\Psi'(u + z(u_{N,h} - u))\|_{\mathcal{L}(H^\theta(\mathcal{D});\mathbb{R})}\|u - u_{N,h}\|_{H^\theta(\mathcal{D})}dz \\ &\leq C\left(1 + \|u\|_{H^\theta(\mathcal{D})}^{\rho_2} + \|u - u_{N,h}\|_{H^\theta(\mathcal{D})}^{\rho_2}\right)\|u - u_{N,h}\|_{H^\theta(\mathcal{D})} \\ &\leq C\left(1 + \|u\|_{H^\theta(\mathcal{D})}^{\rho_2} + \|u_{N,h}\|_{H^\theta(\mathcal{D})}^{\rho_2}\right)\|u - u_{N,h}\|_{H^\theta(\mathcal{D})}.\end{aligned} \tag{59}$$

根据假设 5.1，存在一个 $C > 0$，使得对于每个 N 和每个 $0 < h \leq 1$，均有

$$\|u_{N,h}\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))} \leq C\|u\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))} \leq C\|u\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;V)} < \infty. \tag{60}$$

此外，由于 $\theta \in [0,1]$，根据 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式，我们有

$$\|u-u_{N,h}\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))} \le \|u-u_{N,h}\|^{1-\theta}_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;H)} \|u-u_{N,h}\|^{\theta}_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;V)} \le C(2^{-tN}+h^{(2-\theta)r}). \tag{61}$$

因此，具有共轭指数 $q_1 = \frac{\rho_2+1}{\rho_2}$、$q_2 = \rho_2+1$（以及对于 $\rho_2 = 0$ 的 $q_1=\infty$、$q_2=1$）的 Hölder 不等式表明

$$\begin{aligned} II &\le \|\Psi(u)-\Psi(u_{N,h})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\overset{(59)}{\le} C(1+\|u\|_{L^{q_1 2\rho_2}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))}+\|u_{N,h}\|_{L^{q_1 2\rho_2}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))})\|u-u_{N,h}\|_{L^{q_2 2}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))} \\ &\overset{(60)}{\le} C(1+\|u\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;V)})\|u-u_{N,h}\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega;H^\theta(\mathcal{D}))} \\ &\overset{(61)}{\le} C(2^{-tN}+h^{(2-\theta)r}). \end{aligned} \tag{62}$$

□

通过选择以下形式，可平衡定理 5.4 中的误差贡献

$$M \approx 2^{2tN} \approx h^{-2(2-\theta)r}. \tag{63}$$

采用这一选择，要达到目标精度 $\|\mathbb{E}(\Psi(u)) - E_M(\Psi(u_{N,\,h}))\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$，需要对 $M = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ 个高保真近似进行采样，$u_{N,\,h}$ 涉及 $N = \mathcal{O}(\frac{\log(\varepsilon)}{t})$ 个尺度和网格细化 $h = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2-\theta}(\cdot)^r})$。对于维数为 $d \ge 2$ 的问题以及低正则性问题，即当 $t,\ r > 0$ 较小时，这在计算上颇具挑战性。为减轻计算负担，我们将在下一小节提出该估计量的多层蒙特卡洛延拓 E_M。

5.2 多层蒙特卡罗

多层蒙特卡罗（MLMC）算法由 Heinrich [18] 发明，用于计算参数积分；随后 Giles [14, 15], 重新发现并推广了该算法。此后，该算法在不确定性量化及其他领域得到了广泛应用。

为了将这一方法应用于我们的模型问题，我们固定一个最大细化层级 $L \in \mathbb{N}$，并考虑一个近似解序列$u_{N_\ell,\,h_\ell}$其中 $(N_\ell,\ h_\ell) \in \mathbb{N}\times\mathfrak{H}$ 适用于 $\ell \in \{1,\dots,L\}$。我们假设 $N_1 < \cdots < N_L$ 且 $h_1 > \cdots > h_L$，因此误差 $u-u_{N_\ell,\,h_\ell}$随层级 ℓ的增加而减小。为方便记号，我们定义 $\Psi_\ell := \Psi(u_{N_\ell,\,h_\ell})$ 为关注量 $\Psi(u)$ 在层 ℓ上的近似，并令 $\Psi_0 := 0$。用于估计 $\mathbb{E}(\Psi(u))$ 的多层蒙特卡洛方法的基本思想是利用望远镜展开

$$\mathbb{E}(\Psi(u)) \approx \mathbb{E}(\Psi_L) = \mathbb{E}(\Psi_L) - \mathbb{E}(\Psi_0) = \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{E}(\Psi_\ell - \Psi_{\ell-1}) \tag{64}$$

高保真近似 Ψ_L。在每一层 ℓ 上，修正项 $\mathbb{E}(\Psi_\ell-\Psi_{\ell-1})$ 通过包含 M_ℓ 个样本的（标准）蒙特卡洛估计量进行估计。这得到多层蒙特卡洛估计量

$$E^L(\Psi_L) := \sum_{\ell=1}^{L} E_{M_\ell}(\Psi_\ell - \Psi_{\ell-1}), \tag{65}$$

其样本数依赖于层级，分别为 M_1、.....、$M_L \in \mathbb{N}$。我们假设这些估计量 $E_{M_\ell}(\Psi_\ell-\Psi_{\ell-1})$ 在各层之间联合独立 $\ell = 1$、.....、L。

只要 $\mathrm{Var}(\Psi_\ell-\Psi_{\ell-1})$ 随 ℓ 足够快地衰减，我们就选择 $M_1 > \cdots > M_L$，使大多数样本能够以较低成本在低层级 ℓ 上生成，而对于较大的 ℓ，只需生成少量成本高昂的样本。与式 (58) 中的单层蒙特卡罗（SLMC）估计量相比，这可大幅节省计算量；后者需要大量成本高昂的样本

在层级 L 上生成，且完全没有利用层级结构。根据 Giles 复杂度定理（[14, 定理 3.1]），在某些假设下，多层蒙特卡洛方法所带来的计算增益可以得到精确量化。给定某个 $\varepsilon > 0$，Giles 推导出最优细化层数 L 及相应的样本数 $M_1, \dots, M_L$，从而保证 $\|\mathbb{E}(\Psi(u)) - E^L(\Psi(u))\|_{L^2(\Omega)} \le \varepsilon$。后者要求精确掌握假设 5.1 中的所有常数，而且还要求精确知道对 Ψ_ℓ 的一个实例进行采样的成本。由于这在先验固定的情况下不可行，我们采用稍有不同的方法来确定多层蒙特卡洛参数。我们保留与 [14, 定理 3.1] 中相同的最优复杂度阶。

假设 5.5。 设 $(\mathcal{K}_h)_{h\in\mathfrak{H}}$ 是满足假设 4.6 的三角剖分序列，并假设对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$，都有 $h_\ell \in \mathfrak{H}$。此外，鉴于多层收敛分析，我们假设存在 $0 < c_{\underline{\mathcal{K}}} \le c_{\mathcal{K}} < 1$ 和 $h_0 > 0$，使得

$$\underline{c}_{\mathcal{K}}^{\ell} h_0 \le h_\ell \le \overline{c}_{\mathcal{K}}^{\ell} h_0, \quad \ell \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

一个 $\Psi_\ell = \Psi(u_{N_\ell,\, h_\ell})$ 样本，具有 $u_{N_\ell,\, h_\ell} \in V_{h_\ell}$ 和 $n_\ell := \dim(V_{h_\ell}) = \mathcal{O}(h_\ell^{-d})$，需要$\mathcal{O}(n_\ell)$ 计算量和内存。

注 5.6。 假设 5.5 是自然的，例如，当网格$\mathcal{K}_{h_\ell}$ 由 $\mathcal{K}_{h_{\ell-1}}$ 通过对每个 $K \in \underline{\mathcal{K}}_{h_{\ell-1}}$的最长边进行二分得到时，$c_{\underline{\mathcal{K}}}$，$c_{\mathcal{K}} \approx \frac{1}{2}$ 便满足该假设。我们指出，一般而言，要达到 $c_{\underline{\mathcal{K}}} = c_{\mathcal{K}}$可能很困难，这也是我们在 (66) 中施加上下界的原因。使用多层求解器处理连续分片线性元或多重线性元时，模拟 Ψ_ℓ 每个样本需要 $\mathcal{O}(n_\ell) = \mathcal{O}(h_\ell^{-d})$ 次浮点运算。另请参阅附录 B.3 中的引理 B.2，其中我们证明，如果 $\beta < 1$，则在关联网格上采样 $b_{N,\, T}$ 的期望成本为 $\mathcal{O}(h_\ell^{-d})$ 阶。

定理 5.7。 设假设 *5.1* 和 *5.5* 成立。对于假设 *5.1* 中的 t、r 和 θ，令 $\varepsilon \in (0,\ h_0^{(2-\theta)r})$，并为 $\ell \in \{1, \dots, L\}$ 选取式 (65) 中的多层蒙特卡洛参数，使得

$$L := \left\lceil \frac{\log(\varepsilon)}{(2-\theta)r\log(\underline{c}_{\mathcal{K}})} - \frac{\log(h_0)}{\log(\underline{c}_{\mathcal{K}})} \right\rceil, \quad M_\ell := \left\lceil \left(\frac{h_\ell}{h_L}\right)^{2(2-\theta)r} w_\ell \right\rceil, \quad N_\ell := \left\lceil -\frac{\log(h_\ell)(2-\theta)r}{\log(2)t} \right\rceil. \tag{67}$$

给定 $L \in \mathbb{N}$，选择权重 $w_\ell > 0$ 来确定 M_ℓ，使得 $\sum_{\ell=1}^{L} w_\ell^{-1} \le C_w < \infty$；其中 $C_w > 0$ 足够大且固定，并且与 L 无关。

那么，存在一个 $C > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0,\ h_0^{(2-\theta)r})$，均有

$$\|\mathbb{E}(\Psi(u)) - E^L(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)} \le C\varepsilon.$$

证明。 我们采用误差分解

$$\|\mathbb{E}(\Psi(u)) - E^L(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\mathbb{E}(\Psi(u)) - \mathbb{E}(\Psi_L))\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{E}(\Psi_L) - E^L(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)}.$$

按照定理 5.4 证明中处理项 II 的相同方法，我们得到

$$\|\mathbb{E}(\Psi(u)) - \mathbb{E}(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)} \le \|\Psi(u) - \Psi(u_{N_L,h_L})\|_{L^2(\Omega)} \le C(2^{-tN_L} + h_L^{(2-\theta)r}) \le C h_L^{(2-\theta)r},$$

其中最后一步用到了 $2^{-tN_L} \le h_L^{(2-\theta)r}$ 式 (67)。为了对第二项进行界定，我们将 $\mathbb{E}(\Psi_L)$ 展开为望远镜求和，结合式 (65) 得到

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(\Psi_L) - E^L(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{\ell=1}^{L} \|\mathbb{E}(\Psi_\ell - \Psi_{\ell-1}) - E_{M_\ell}(\Psi_\ell - \Psi_{\ell-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^{L} M_\ell^{-1} \|\Psi_\ell - \Psi_{\ell-1}\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

第一个等式成立，是因为蒙特卡洛估计量 $E_{M_1}(\Psi_1)\ldots, E_{M_L}(\Psi_L-\Psi_{L-1})$ 相互独立，且无偏，即 $\mathbb{E}(\Psi_\ell-\Psi_{\ell-1}) = \mathbb{E}(E_{M_\ell}(\Psi_\ell-\Psi_{\ell-1}))$。再由三角不等式以及估计式 (62)（见定理 5.4 的证明），可进一步得到

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(\Psi_L)-E^L(\Psi_L)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le 2\sum_{\ell=1}^{L} M_\ell^{-1}\left[\|\Psi_\ell-\Psi(u)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\Psi(u)-\Psi_{\ell-1}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\\ &\le C\sum_{\ell=1}^{L} M_\ell^{-1}\left[2^{-2tN_\ell}+h_\ell^{2(2-\theta)r}+2^{-2tN_{\ell-1}}+h_{\ell-1}^{2(2-\theta)r}\right]\\ &\le C\sum_{\ell=1}^{L} w_\ell^{-1}h_L^{2(2-\theta)r},\end{aligned}$$

在最后一步中，我们使用了假设 5.5 以及式 (67) 中对 M_ℓ 和 N_ℓ 的取值。由于 $\sum_{\ell=1}^{L} w_\ell^{-1}\le C_w<\infty$ 有界，且其界与 L 无关，结合式 (66)、式 (67) 中的 L 以及 $0<c_{\mathcal{K}}\le \bar{c}_{\mathcal{K}}<1$，可得

$$\|\mathbb{E}(\Psi(u))-E^L(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)} \le Ch_L^{(2-\theta)r} \le C(\bar{c}_{\mathcal{K}}^L h_0)^{(2-\theta)r} \le C\varepsilon^{\frac{\log(\bar{c}_{\mathcal{K}})}{\log(\underline{c}_{\mathcal{K}})}} h_0^{\left(1-\frac{\log(\bar{c}_{\mathcal{K}})}{\log(\underline{c}_{\mathcal{K}})}\right)(2-\theta)r} \le C\varepsilon.$$

□

下一条结论精确量化了多层蒙特卡罗方法的计算优势。其中，w_ℓ 的选择起着关键作用，并取决于各层上的方差衰减与采样成本之间的关系。

定理 5.8。设假设 *5.1* 和假设 *5.5* 成立，且 $\varepsilon>0$。给定 t、r 和 θ 以及 $\varepsilon>0$，按定理 *5.7* 中的方式设定 L、M_ℓ 和 N_ℓ，并选择权重函数

$$w_\ell=\begin{cases}\ell^{1+\iota} & \text{if } 2(2-\theta)r>d\\ L & \text{if } 2(2-\theta)r=d\\ \underline{c}_{\mathcal{K}}^{(2(2-\theta)r-d)(L-\ell)/2} & \text{if } 2(2-\theta)r<d\end{cases},\quad \ell\in\{1,\ldots,L\},$$

其中 $\iota>0$ 是任意小的常数。于是，多层蒙特卡洛估计量满足

$$\|\mathbb{E}(\Psi(u))-E^L(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)}\le C\varepsilon,$$

当 $\varepsilon\to 0$ 的阶为 $\mathcal{C}_{MLMC}$ 时，计算成本为

$$\mathcal{C}_{MLMC}=\begin{cases}\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}) & \text{if } 2(2-\theta)r>d\\ \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}\log(\varepsilon)^2) & \text{if } 2(2-\theta)r=d\\ \mathcal{O}(\varepsilon^{-2-\frac{d-2(2-\theta)r}{(2-\theta)r}}) & \text{if } 2(2-\theta)r<d.\end{cases}$$

证明。由于 $\underline{c}_{\mathcal{K}}\in(0,1)$，对于每种情形 $\sum_{\ell=1}^{L} w_\ell^{-1}\le C$，均存在一个常数 $C>0$，且该常数关于 L 一致。因此，由定理 5.7 可得

$$\|\mathbb{E}(\Psi(u))-E^L(\Psi_L)\|_{L^2(\Omega)}\le C\varepsilon,$$

接下来只需推导关于 ε 的复杂度。

假设 5.5 意味着 $h_L\le h_\ell c_{\mathcal{K}}^{(L-\ell)}h_0$。由式 (67) 可得

$$M_\ell=\left\lceil \underline{c_{\mathcal{K}}}^{(\ell-L)2(2-\theta)r} w_\ell\right\rceil. \tag{68}$$

令 $\mathcal{C}_\ell$ 表示生成一个 Ψ_ℓ 所需的计算量。当 $h_\ell\ge c_{\mathcal{K}}^\ell h_0$ 时，有

$$\mathcal{C}_\ell=\mathcal{O}(\dim(V_{h_\ell}))=\mathcal{O}(h_\ell^{-d})\le C\underline{c_{\mathcal{K}}}^{-d\ell} \tag{69}$$

由于我们在每一层生成 M_ℓ 个独立的 $\Psi_\ell - \Psi_{\ell-1}$（并且各层之间生成的样本也相互独立），结合 (68) 和 (69)，多层蒙特卡洛估计量的总计算量满足

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{MLMC} &:= \sum_{\ell=1}^{L} M_\ell(\mathcal{C}_\ell + \mathcal{C}_{\ell-1}) \\ &\le C\sum_{\ell=1}^{L} \underline{c}_{\mathcal{K}}^{(\ell-L)2(2-\theta)r} w_\ell(\underline{c}_{\mathcal{K}}^{-d\ell} + \underline{c}_{\mathcal{K}}^{-d(\ell-1)}) \\ &\le C\underline{c}_{\mathcal{K}}^{-L2(2-\theta)r}\sum_{\ell=1}^{L}\left(\underline{c}_{\mathcal{K}}^{2(2-\theta)r-d}\right)^\ell w_\ell.\end{aligned}$$

现在首先假设 $2(2-\theta)r - d > 0$。由于 $c_{\mathcal{K}} \in (0, 1)$，级数收敛的比值判别法表明，对于任意 $\iota > 0$，我们都可以得到一致界（关于 $L \in \mathbb{N}$）

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left(\underline{c}_{\mathcal{K}}^{2(2-\theta)r-d}\right)^\ell w_\ell \le \sum_{\ell\in\mathbb{N}}\left(\underline{c}_{\mathcal{K}}^{2(2-\theta)r-d}\right)^\ell \ell^{1+\iota} < \infty.$$

另一方面，若 $2(2-\theta)r - d = 0$，则对于 $w_\ell = L$，有

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left(\underline{c}_{\mathcal{K}}^{2(2-\theta)r-d}\right)^\ell w_\ell = L^2.$$

最后，对于 $2(2-\theta)r - d < 0$，可知存在一个 $C > 0$，使得

$$\sum_{\ell=1}^{L}\left(\underline{c}_{\mathcal{K}}^{2(2-\theta)r-d}\right)^\ell w_\ell = \underline{c}_{\mathcal{K}}^{L(2(2-\theta)r-d)/2}\sum_{\ell=1}^{L}\underline{c}_{\mathcal{K}}^{\ell(2(2-\theta)r-d)/2} \le C\underline{c}_{\mathcal{K}}^{L(2(2-\theta)r-d)}.$$

综上可得，存在一个与 L 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\mathcal{C}_{MLMC} \le C\begin{cases}\underline{c}_{\mathcal{K}}^{-L2(2-\theta)r} & \text{if } 2(2-\theta)r > d,\\ \underline{c}_{\mathcal{K}}^{-L2(2-\theta)r}L^2 & \text{if } 2(2-\theta)r = d,\\ \underline{c}_{\mathcal{K}}^{-L2(2-\theta)r}\underline{c}_{\mathcal{K}}^{L(2(2-\theta)r-d)} & \text{if } 2(2-\theta)r < d.\end{cases}$$

结合 (67) 中的 L，可得对于 $\varepsilon \to 0$，$c_{\mathcal{K}}^{L} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2-\theta}(\cdot)r}h_0^{-1})$。这表明，当 $\varepsilon \to 0$ 时，ε-成本界具有如下渐近行为

$$\mathcal{C}_{MLMC}(\varepsilon) = \begin{cases}\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}) & \text{if } 2(2-\theta)r > d,\\ \mathcal{O}(\varepsilon^{-2}\log(\varepsilon)^2) & \text{if } 2(2-\theta)r = d,\\ \mathcal{O}(\varepsilon^{-2-\frac{d-2(2-\theta)r}{(2-\theta)r}}) & \text{if } 2(2-\theta)r < d.\end{cases}$$

□

注 5.9. $\varepsilon \to 0$ 的渐近复杂度界与 [14,定理 3.1] 和 [10, 定理 1], 中的同阶，但只需了解参数 r, t 和 θ，而无需进一步了解绝对常数。由定理 5.4 可知，对于给定的 $\varepsilon > 0$，单层蒙特卡洛估计量需要总计 $M \approx \varepsilon^{-2}$ 个样本，细化参数满足 $2^{-tN} \approx h^{(2-\theta)r} \approx \varepsilon$。因此，$h = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2-\theta}(\cdot)r})$；并且，假设可使用多重网格等线性复杂度求解器，则每个样本的计算成本渐近有界为 $\mathcal{O}(\dim(V_h)) = \mathcal{O}(h^{-d}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{d}{2-\theta}(\cdot)r})$。因此，单层蒙特卡洛估计量达到 ε精度的总成本为

$$\mathcal{C}_{SLMC}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2-\frac{d}{(2-\theta)r}}) > \mathcal{C}_{MLMC}(\varepsilon), \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{70}$$

因此，在所述假设下，即使在满足 $2(2-\theta)r < d$ 的低正则性情形中，多层蒙特卡洛有限元法也能显著降低（渐近） ε复杂度。

当 $2(2-\theta)r > d$ 时，为推导最优复杂度 $\mathcal{C}_{MLMC} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$，无需假设 $E_{M_1}(\Psi_1)\dots, E_{M_L}(\Psi_L - \Psi_{L-1})$ 是相互独立的蒙特卡洛估计量。相反，只需设置$w_\ell = \ell^{2(1+\iota)}$ ，即可补偿不同离散层级之间的相关性。在模拟中可以利用这一点，从较粗的离散层级中“回收”样本，从而进一步提高效率。例如，可参阅 [7, 第 5 节2]中的讨论。

6 数值实验

我们在矩形区域 $\mathcal{D} := \mathbb{T}^2 = (0,\ 1)^2$ 上进行数值实验，并采用常值源函数 $f \equiv 1$。对于空间离散，我们使用双线性有限元；利用其张量积结构，可以高效地进行计算，详情见附录 B.2。初始网格宽度为 $h_0 = \frac{1}{2}$，并采用细化因子为 $c_{\mathcal{K}} = c_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}$ 的二进制细化，得到满足多层蒙特卡洛算法假设 4.6 的剖分序列 $(\mathcal{K}_h,\ \ h = 2^{-\ell}h_0,\ \ \ell \in \mathbb{N})$。此外，对于扩散系数的每个实现，我们使用中点求积来组装刚度矩阵。正如附录中的引理 B.1 所示，由此产生的求积误差不会主导定理 4.7 和 4.8 中的有限元误差收敛。给定 N 和矩形网格 $\mathcal{K}_h$，我们按照附录 B.3 中的描述，在每个 $K \in \mathcal{K}_h$ 的中点处计算 $b_{T,\ N}$。

我们研究扩散系数具有不同光滑度的各种参数情形，其参数值及相应的逐路径逼近速率 r 和 t （如推论 4.9 所示）汇总于表 1。所有实验中，我们均基于具有五个消失矩的 Daubechies 小波（“DB(5) 小波”）构造随机场 b_T resp. $b_{T,\ N}$，其光滑度为 $\phi,\ \psi \in C^{1.177}(\mathbb{R})$（见[12, 第 7.1 节2]）。我们将梯度的 $L^2(\mathcal{D})$-范数作为关注量（QoI），其对应的泛函为

$$\Psi : H^1(\mathcal{D}) \to [0,\infty), \quad u \mapsto \left(\int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2},$$

因此，假设 5.1 在 $\theta = 1$ 条件下成立。

参数值	s	p	κ	β	t	$s - \frac{d}{p}$	$\theta = 1$ 的多层蒙特卡洛复杂度
“光滑高斯”	2	2	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}\lvert\log(\varepsilon)\rvert^2)$
“粗糙高斯”	$\frac{3}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$
“p-指数”	2	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{8}{3}})$

表1: 数值实验中随机树 Besov 先验的参数取值。

给定 θ、 r 和 t，我们规定目标精度 $\varepsilon = 2^{-r\xi}$、 $\xi \in \{5,\dots,9\}$，并针对给定的 $\varepsilon > 0$，按照定理 5.7 选择多层蒙特卡罗参数。最大细化层级记为 L_ε，相应的估计量记为 $E^{L_\varepsilon}(\Psi_{L_\varepsilon})$。对于每个 ε，我们抽取 $n_{ML} = 2^8$ 个 $E^{L_\varepsilon}(\Psi_{L_\varepsilon})$ 的实现。我们使用 $n_{ref} = 2^4$ 个 $E^{L_{ref}}(\Psi_{L_{ref}})$ 的实现作为参考解，并调整参数以达到 $\varepsilon_{ref} := 2^{-r11}$。对于指定的 ε，我们报告实现的经验均方根误差

$$\mathrm{RMSE}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{n_{ML}}\sum_{i=1}^{n_{ML}}\left(E^{L_\varepsilon}(\Psi_{L_\varepsilon})(\omega_i) - \left(\frac{1}{n_{ref}}\sum_{j=1}^{n_{ref}} E^{L_{ref}}(\Psi_{L_{ref}})(\omega_j)\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所有计算均使用 MATLAB完成，运行环境为一台配备两颗主频为 2.7 吉赫的 Intel Xeon E5-2697 处理器、共 12 个核心和 256 吉字节内存的工作站。

我们先来看表1中的“光滑高斯”情形。图3给出了扩散系数的一个样本及其对应的 u 双线性有限元近似；图中还绘出了（平均）CPU 时间与实际均方根误差的关系。可以看到，实际误差非常接近预设精度 ε，这与定理 5.7 给出的误差估计相符。此外，经验结果也符合定理 5.8 的工作量估计。正如图3右图所示，计算复杂度的渐近阶为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}|\log(\varepsilon)|^{2})$。

接下来，我们减小参数 s ，以得到表1中的“粗糙高斯”情形。扩散系数的一个样本及其对应的 u 双线性有限元近似见图4。与图3相比，现在可以看到扩散系数中更加细致、尖锐的特征，这是由于小波基的衰减因子较慢。平均 CPU 时间与实际均方根误差的关系见图4。同样，实际误差的阶为 $\mathcal{O}(\varepsilon)$，计算时间的渐近阶为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$，这与定理 5.8 的预期一致。

最后，我们研究表1中的“p-指数”情形，其中对 $X^{l}_{j,\,k}$ 采用重尾分布，并将小波密度增加到 $\beta = \frac{3}{4}$。我们使用标准的接受-拒绝算法，从 $p = 1.6$ 的 p-指数密度中抽取样本。扩散系数的一个样本及其对应的 u 双线性有限元近似见图5。与前两个示例相比，我们观察到系数和解的方差增大。图5右图中置信区间的误差棒较长，体现了这一点。在该图中，先验固定精度缩小为原来的三分之一，以便更直观地比较实际均方根误差与指定均方根误差。尽管实际均方根误差的绝对值和方差都增大，我们仍得到与定理 5.8 一致的渐近误差衰减阶 $\mathcal{O}(\varepsilon)$，CPU 时间的阶则为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{8}{3}})$。

–

我们的实验表明，通过减小 s 或 p，可以使先验模型中的特征更加鲜明。我们强调，渐近复杂度取决于微分维数$s - \frac{d}{p}$，如表1所示；后者实质上对应于定理 5.7 中的参数 r。因此，随着物理维数 d 增加，降低 p 对整体正则性的影响会更加显著。

7 结论

我们建立了一个计算框架，用于高效离散化具有对数贝索夫随机场系数的线性椭圆型偏微分方程。这些系数通过物理区域上的多分辨率模型构造，且其系数具有 p-指数形式；活跃系数则依据 GW树随机选取。相应的逐路径扩散系数通常只有较低的路径正则性，因此物理区域中必须采用低阶有限元离散。我们证明了逐路径解具有较强的正则性，并为相应的单层蒙特卡洛有限元算法建立了有限元误差界。随后可按标准方法得到相应的多层蒙特卡洛算法误差与计算量界。我们再次强调，GW树结构似乎阻碍了高阶采样方法；近期研究已指出，该结构非常适合对云、雾和气溶胶等弥散介质建模。本文针对具有（对数）Besov 随机树系数的椭圆型偏微分方程提出的多层蒙特卡洛有限元误差分析，将为基于对数贝索夫随机树先验的贝叶斯反问题中的多层马尔可夫链蒙特卡洛采样策略导出相应的复杂度界，例如成像应用中的此类问题，见 [24, 11, 4, 19]。关于其分析与计算的细节将在其他工作中展开。

致谢

AS 的部分经费由 ETH 数据科学基金会倡议（ETH-FDS）提供，谨此致谢。

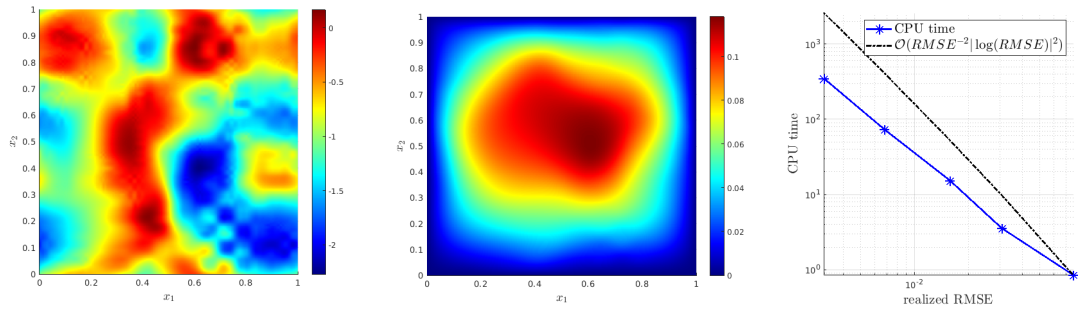

图3：表1中“光滑高斯”情形下 Besov 随机树先验/对数扩散系数 b_T（左）及其对应的 u 有限元近似（中）的一个样本。图中的系数和解是在具有 $2^9 \times 2^9$ 个等距点的网格上采样的，小波级数在 $N = 9$ 个尺度之后截断。左图中清晰可见由小波密度 $\beta = \frac{1}{2}$ 导致的对数扩散分形结构。右图展示了已实现均方根误差（蓝色）和预测均方根误差（红色）随计算复杂度的变化。两条曲线均呈现出预测的渐近行为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2}|\log(\varepsilon)|^2)$，如虚线所示。添加了支撑线 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2.35})$，以表明复杂度在对数尺度下确实是非线性的。柱线表示已实现均方根误差的 95% 置信区间。

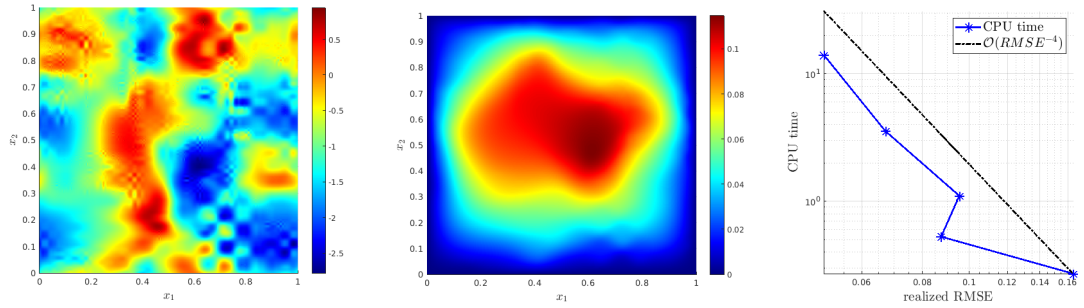

图4：表1中“粗糙高斯”情形下，Besov 随机树先验/对数扩散系数的一个样本 b_T（左），以及相应的 u 有限元近似（中）。图中的系数和解均在包含 $2^9 \times 2^9$ 个等距点的网格上采样，小波级数截断于 $N = 9$ 个尺度之后。与平滑情形（图3）相比，扩散系数呈现出更尖锐的特征。右图展示了实际均方根误差（蓝色）和预测均方根误差（红色）随计算复杂度的变化，两条曲线均显示出 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4})$所预测的渐近行为。柱条表示实际均方根误差的95%置信区间。

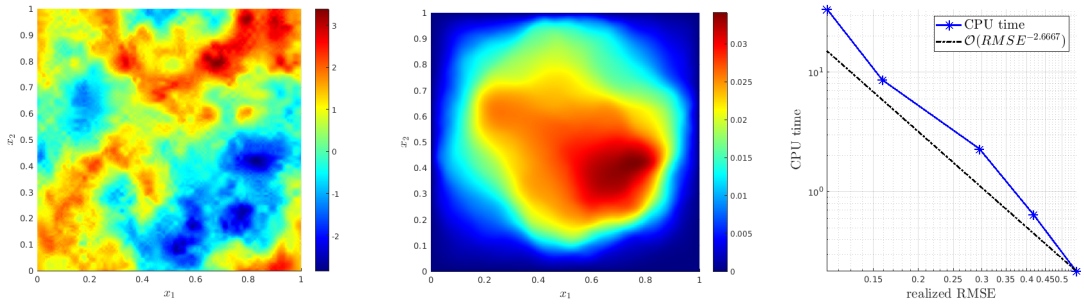

图5：表1中“p-指数”情形下，Besov 随机树先验/对数扩散系数的一个样本 b_T（左），以及相应的 u 有限元近似（中）。图中的系数和解均在包含 $2^9 \times 2^9$ 个等距点的网格上采样，小波级数截断于 $N = 9$ 个尺度之后。与前述示例相比，方差显著增大，右图中实际均方根误差的95%置信区间柱条也显示了这一点。本图中，先验固定的 ε（红色曲线）已乘以三倍。我们仍得到 $\mathcal{O}(\varepsilon)$阶的预测渐近误差，其计算工作量为 $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\frac{8}{3}})$阶。

参考文献

[1] R. Abraham 和 J.-F. Delmas. 伽尔顿-沃森树及其局部极限简介。arXiv 预印本 arXiv:1506.05571，2015年。[2] Y. Achdou、C. Sabot 和 N. Tchou. 分形边界的一些分枝域中的扩散与传播问题。M2AN 数学建模与数值分析，40(4):623–652，2006年。[3] R. A. Adams 和 J. J. Fournier. 索伯列夫空间。Elsevier，第 2 版，2003 年。[4] S. Agapiou 、 M. Dashti 和 T. Helin. 基于p指数尾先验的后验分布收缩率。Bernoulli，27(3):1616–1642，2021年。[5]C. D. Aliprantis 和 K. Border. 无穷维分析：旅行者指南。Springer，2006年。[6] A. Barth、C. Schwab 和 N. Zollinger. 随机系数椭圆型偏微分方程的多层蒙特卡罗有限元方法。Numerische Mathematik，119(1):123–161，2011年。[7] A. Barth 和 A. Stein. 跳跃扩散系数椭圆型偏微分方程研究。SIAM/ASA 不确定性量化杂志，6(4):1707–1743，2018年。[8] I. Berre、F. Doster 和 E. Keilegavlen. 裂隙多孔介质中的流动：概念模型与离散方法综述。Transp. Porous Media，130(1):215–236，2019年。[9] S. C. Brenner 和 L. R. Scott. 有限元方法的数学理论，第3卷。Springer，2008年。[10] K. A. Cliffe、M. B. Giles、R. Scheichl 和 A. L. Teckentrup. 多层蒙特卡罗方法及其在随机系数椭圆型偏微分方程中的应用。Computing and Visualization in Science，14(1):3–15，2011年。[11] M. Dashti、S. Harris 和 A. St uart. 贝叶斯反问题的 Besov 先验。反问题与成像，6(2):183–200，2012年。[12] I. Daubechies. 小波十讲。SIAM，1992年。[13] D. Dung、V. Nguyen、C. Schwab 和 J. Zech. 高斯随机场输入偏微分方程不确定性量化中的解析性与稀疏性。技术报告 2022-02，苏黎世联邦理工学院应用数学研讨班，瑞士苏¨黎世，2022年。（即将发表于 Springer LNM（2023年）。）[14] M. B. Giles. 多层蒙特卡罗路径模拟。Operations research，56(3):607–617，2008年。[15] M. B. Giles. 多层蒙特卡罗方法。Acta Numerica，24:259–328，2015年。[16] P. Grisvard. 非光滑区域上的椭圆问题。SIAM，2011年。[17] W. Hackbusch. 椭圆型微分方程：理论与数值处理，第18卷。Springer，第2版，2017年。[18] S. Heinrich. 多层蒙特卡罗方法。载于《国际大规模科学计算会议》，第58–67页。Springer，2001年。[19] T. Helin 和 M. Lassas. 统计反问题中的层次模型与 Mumford-Shah 泛函。Inverse Problems，27(1):015008，32，2011年。[20] L. Herrmann 和 C. Schwab. 具有乘积权重的对数正态系数椭圆型偏微分方程的多层准蒙特卡罗积分。ESAIM：数学建模与数值分析，53(5):1507–1552，2019年。

[21] V. H. Hoang 和 C. Schwab. 参数型与随机抛物型偏微分方程的稀疏张量伽辽金离散化——解析正则性与广义多项式混沌逼近。*SIAM* 数学分析杂志，45(5):3050–3083，2013年。[22] B. Hosseini 和 N. Nigam. 适定的贝叶斯反问题：指数尾先验。*SIAM/ASA* 不确定性量化杂志，5(1):436–465，2017年。[23] H. Kekkonen、M. Lassas、E. Saksman 和 S. Siltanen. 随机树 Besov 先验——迈向分形成像。*arXiv* 预印本 *arXiv:2103.00574*，2021年。[24] E. Saksman、M. Lassas 和 S. Siltanen. 离散化不变贝叶斯反演与 Besov 空间先验。反问题与成像，3(1):87–122，2009年。[25] H. Triebel. 函数空间理论 *II*。Modern Birkh¨auser Classics。Birkh¨auser，第2版，2000年。[26] H. Triebel. 区域上的函数空间与小波，第7卷，*EMS* 数学论丛。欧洲数学会（EMS），苏¨黎世，2008年。[27]H. Triebel. 函数空间理论 *IV*，数学专著第107卷。Birkh¨auser，2020年。[28] J. Zech 和 C. Schwab. 高维 Smolyak 求积的收敛率。*ESAIM*：数学建模与数值分析，54(4):1259–1307，2020年。

A. 伽尔顿-沃森树

我们介绍离散树的一些基本概念，给出伽尔顿-沃森树的形式化定义，并记录一个关于其灭绝概率的结果。本文的阐述沿用 [1, 第 2], 节的内容，并在必要时采用经过修改的记号。

A.1 记号与基本定义

令 $\mathcal{U} := \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{N}^n$ 为所有正整数有限序列的集合，其中 $\varrho := ()$表示空序列，并采用约定 $\mathbb{N}^0 = \{\varrho\}$。对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathcal{U}$，令 $|\mathfrak{n}|$ 表示 $\mathfrak{n}$的长度，其中 $|\varrho| := 0$。对于 $\mathfrak{n}$，$\mathfrak{m} \in \mathcal{U}$，我们用 $\mathfrak{n}\mathfrak{m}$ 表示两个序列的拼接，并约定对所有 $\mathfrak{n} \in \mathcal{U}$，均有 $\mathfrak{n}\varrho = \varrho\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ 。在 $\mathcal{U}$上存在一种称为*谱系序*的*偏序*：若存在一个 $\mathfrak{n}_0 \in \mathcal{U}$ 使得 $\mathfrak{m}\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}$，则称 $\mathfrak{m} \preceq \mathfrak{n}$。若 $\mathfrak{m} \preceq \mathfrak{n}$ 且 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$，则称 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的祖先，并记作 $\mathfrak{m} \prec \mathfrak{n}$ 。 $\mathfrak{n}$ 的所有祖先的集合记作$A_{\mathfrak{n}} := \{\mathfrak{m} \in \mathcal{U} | \, \mathfrak{m} \prec \mathfrak{n}\} \subset \mathcal{U}$。

定义 A.1。 [1, 第 2 节。1] 树 $\mathbf{t}$ 是一个子集 $\mathbf{t} \subset \mathcal{U}$，满足

- $\varrho \in \mathbf{t}$,
- 若 $\mathfrak{n} \in \mathbf{t}$，则 $A_{\mathfrak{n}} \subset \mathbf{t}$,
- 对于任意 $\mathfrak{n} \in \mathbf{t}$，存在 $\mathfrak{K}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{t}) \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}} \cup \{\infty\}$，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}, \mathfrak{n}n \in \mathbf{t}$ 当且仅当 $1 \leq n \leq \mathfrak{K}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{t})$。

我们将所有树的集合 记为 $\mathfrak{T}_\infty$。令 $|\mathbf{t}| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为树$\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_\infty$的基数，并引入所有有限树的集合，记为 $\mathfrak{T}_0 := \{\mathbf{t} \in \mathfrak{T} | \, |\mathbf{t}| < \infty\}$。集合 $\mathfrak{T}_0$ 是可数的。整数 $\mathfrak{K}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{t})$表示$\mathbf{t}$ 中节点 $\mathfrak{n}$的子节点数。所有不含无限节点的树的集合 是 $\mathfrak{T}_\infty$ 的子集，记为

$$\mathfrak{T} := \{\mathbf{t} \in \mathfrak{T}_\infty | \, \mathfrak{K}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{t}) < \infty \text{ for all } \mathfrak{n} \in \mathbf{t}.\} \tag{71}$$

对于 $\mathfrak{n}\in\mathbf{t}$，$\mathbf{t}$ 中位于节点 $\mathfrak{n}$ 上方的子树 $\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{t})$ 定义如下：

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{t}):=\{\mathfrak{m}\in\mathcal{U}|\,\mathfrak{n}\mathfrak{m}\in\mathbf{t}\}. \tag{72}$$

我们还需要限制函数 *restriction functions* $\mathfrak{r}_n:\ \mathfrak{T}\to\mathfrak{T},\quad n\in\mathbb{N}_0$ 其定义为

$$\mathfrak{r}_n(\mathbf{t}):=\{\mathfrak{n}\in\mathbf{t}|\,|\mathfrak{n}|\le n\}. \tag{73}$$

做好这些准备后，我们便可以定义 $\mathfrak{T}$ 上的度量及其相应的 Borel σ-代数。

定义 A.2. [1,第 2 节。1]令

$$\delta_{\mathfrak{T}}:\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}\to[0,1],\quad (\mathbf{t},\mathbf{t}')\mapsto 2^{-\sup\{n\in\mathbb{N}_0|\mathfrak{r}_n(\mathbf{t})=\mathfrak{r}_n(\mathbf{t}')\}}. \tag{74}$$

此外，定义 σ-代数

$$\mathcal{B}(\mathfrak{T}):=\sigma\left(\bigcup_{t\in\mathfrak{T}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{r}_n^{-1}(\mathfrak{r}_n(\mathbf{t}))\right)=\sigma\left(\bigcup_{t\in\mathfrak{T}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathbf{t}'|\,\delta_{\mathfrak{T}}(\mathbf{t},\mathbf{t}')\le 2^{-n}\}\right). \tag{75}$$

根据 [1, 引理 2.1], $(\mathfrak{T},\delta)$ 是一个完备可分度量空间。所有有限树构成的可数集合 $\mathfrak{T}_0$ 在 $\mathfrak{T}$ 中稠密：对于所有 $\mathbf{t}\in\mathfrak{T}$，都有 $\mathfrak{r}_n(\mathbf{t})\to\mathbf{t}$，其中 $n\to\infty$ 取自 $(\mathfrak{T},\delta)$。此外，$\delta_{\mathfrak{T}}$ 是一个超度量（见 [1, 第 2 节.1]），因此 $\mathfrak{r}_n^{-1}(\mathfrak{r}_n(\mathbf{t}))$ 是以 $\mathbf{t}$ 为中心、半径为 2^{-n} [1, 第 2 节.1] 的开球（也是闭球）集合，其所依据的度量为 δ。由可分性可知，$\mathcal{B}(\mathfrak{T})$ 与 $\mathfrak{T}$ 上的 Borel σ-代数一致；该代数由 $(\mathfrak{T},\delta_{\mathfrak{T}})$ 上的所有开集生成。给定一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{A},P)$，我们称任意 $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathfrak{T})$-可测映射 $\tau:\Omega\to\mathfrak{T}$ 为一个取值于 $\mathfrak{T}$ 的随机变量。由此便可以形式化定义伽尔顿-沃森树：

定义 A.3。 [具有后代分布 $\mathcal{P}$] A $\mathfrak{T}$值随机变量 T 的 Galton-Watson（GW）树满足分枝性质，如果对于任意 $n\in\mathbb{N}$，在给定 $\{k_{\varrho}(\tau)=n\}$的条件下，子树 $\mathfrak{S}_1(T),\ldots,\mathfrak{S}_n(T)$相互独立，且与原树 τ同分布。现在设 $\mathcal{P}$是 $\mathbb{N}_0$上的概率分布，即 $(\mathbb{N}_0,\mathcal{B}(\mathbb{N}_0))$上的概率测度。若一个 $\mathfrak{T}$值随机变量 T满足分枝性质，且 $\mathfrak{K}_{\varrho}(T)\sim\mathcal{P}$，则称其为具有后代分布 $\mathcal{P}$ 的*Galton-Watson*（*GW*）树 。

根据 [1, 公式（12）], , *GW* 树 T的分布 $\mathbb{Q}_T$ 限制在有限树集合上时，由下式给出

$$\mathbb{Q}_T(T=\mathbf{t})=\prod_{\mathfrak{n}\in\mathbf{t}}\mathcal{P}(\mathfrak{K}_{\mathfrak{n}}(\mathbf{t})),\quad \mathbf{t}\in\mathfrak{T}_0, \tag{76}$$

其中右侧的乘积是有限的。

A.2 随机小波树与灭绝概率

现在我们再次考虑 d 维环面 $\mathbb{T}^d$，其小波基 $\mathbf{\Psi}$ 如（12）所示。为了将 GW 树的节点与 $\mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}=\{j\in\mathbb{N}_0,\,k\in K_j,\,l\in\mathcal{L}_j\}$中的小波指标联系起来，我们假设 T是一个后代分布为 $\mathcal{P}=\mathrm{Bin}(2^d,\beta)$的 GW 树，其中 $\beta\in[0,1]$为某个值。对于给定的实现$T(\omega)$和节点 $\mathfrak{n}\in T(\omega)$，我们通过对应关系$j:=|\mathfrak{n}|\in\mathbb{N}_0$，将 $\mathfrak{n}$ 的长度与相应的小波尺度对应起来。此外，由于 $\mathcal{P}$ 服从二项分布，$T(\omega)$中长度为 j 的节点 $\mathfrak{n}$ 至多有 2^{dj} 个。这些节点各自在 $\{1,\ldots,2^d\}$ 中有 j 个条目。我们通过双射为所有满足 $|\mathfrak{n}|=j$的 $\mathfrak{n}\in T(\omega)$ 赋予一个整数

$$\mathfrak{I}_{d,j}^1:\{1,\ldots,2^d\}^j\to\{1,\ldots,2^{dj}\},\quad \mathfrak{n}\mapsto 1+\sum_{i=1}^{j}2^{d(j-i)}(\mathfrak{n}_i-1).$$

另一方面，对于任意 $\{1,\ldots,2^{jd}\}$，我们通过以下方式在 $K_j=\{0,\ldots,2^j-1\}^d$ 中为其分配一个索引：

$$\mathfrak{I}_{d,j}^2:\{1,\ldots,2^{jd}\}\to K_j,\quad n\mapsto\left(\max(n-2^{j(i-1)},0)\bmod 2^j\right)_{i=1,\ldots,d},$$

由此得到一个一一映射

$$\mathfrak{I}_{d,j} : \{1, \dots, 2^d\}^j \to K_j, \quad \mathfrak{n} \mapsto \left(\mathfrak{I}^2_{d,j} \circ \mathfrak{I}^1_{d,j}\right)(\mathfrak{n}). \tag{77}$$

因此，每个 $\mathfrak{n} \in T(\omega)$ 都通过 $\mathfrak{n} \mapsto (|\mathfrak{n}|, \mathfrak{I}^2_{d,|\mathfrak{n}|} \circ \mathfrak{I}^1_{d,|\mathfrak{n}|}(\mathfrak{n}))$ 对应于唯一一对指标 (j,k)。收集 T 中所有节点对应的指标对 (j,k)，即可得到随机活跃指标集

$$\mathfrak{I}_T(\omega) := \bigcup_{\mathfrak{n} \in T(\omega)} \left(|\mathfrak{n}|, \mathfrak{I}^2_{d,|\mathfrak{n}|} \circ \mathfrak{I}^1_{d,|\mathfrak{n}|}(\mathfrak{n})\right) \subset \{j \in \mathbb{N}_0, k \in K_j\}. \tag{78}$$

然后，只有指标为 $\mathcal{I}_T(\omega) := \{(j,k,l) | (j,k) \in \mathfrak{I}_T(\omega) \ \ l \in \mathcal{L}_j\} \subset \mathcal{I}_{\boldsymbol{\Psi}}$ 的小波才会被“激活”在定义 2.6 中 b_T 的样本的级数展开中。

因此，一个自然的问题是：GW 树 T 是否会在有限个节点后终止，此时 $\mathfrak{I}_T$ 是有限的；还是 T 拥有无限多个节点。后一种情况下，b_T 在 $\mathbb{T}^d$ 上呈现分形结构，即在小波展开包含无限多项的区域。将*GW* 树的灭绝事件 T 记为 $\mathcal{E}(T) := \{T \in \mathfrak{T}_0\}$。以下结果给出了*GW* 树的灭绝概率：

引理 A.4. *[1,* 推论 *2.5/*引理 *2.6]* 设 $T : \Omega \to \mathfrak{T}$ 为后代分布为$\mathcal{P}$ 的 *GW* 树，并且 $\zeta \sim \mathcal{P}$。

1. 若 $\mathcal{P}(0) = 0$，则 $\mathbb{Q}_T(\mathcal{E}(T)) = 0$；*2.* 若 $\mathcal{P}(0) \in (0,1)$ 且 $\mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(1) = 1$，则 $\mathbb{Q}_T(\mathcal{E}(T)) = 1$；*3.* 若 $\mathcal{P}(0) \in (0,1)$，$\mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(1) < 1$，且 $\mathbb{E}(\zeta) \leq 1$，则 $\mathbb{Q}_T(\mathcal{E}(T)) = 1$；*4.* 若 $\mathcal{P}(0) \in (0,1)$，$\mathcal{P}(0) + \mathcal{P}(1) < 1$，且 $\mathbb{E}(\zeta) > 1$，则 $\mathbb{Q}_T(\mathcal{E}(T)) = q \in (0,1)$。这里 q是 *th*

e

方程 $\mathbb{E}(q^\zeta) = q$ 在 $[0,1]$ 中的最小根。

引理 A.4 并不要求后代服从二项分布，对 $\mathbb{N}_0$上的任意分布 $\mathcal{P}$ 都成立。此外，我们得出，后代分布为 $\mathcal{P} = \mathsf{Bin}(2^d, \beta)$ 的 GW 树 T 通过 $\mathfrak{I}_T$ P-几乎处处生成有限小波展开，当且仅当 $\beta \in [0, 2^{-d}]$。

A.3 二项 GW 树的参数化

回顾一下，$(\mathfrak{T}, d_{\mathfrak{T}})$ 是波兰空间，但不是赋范空间。因此，Besov 随机树先验的乘积参数空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathfrak{T}$ 不是巴拿赫空间，而巴拿赫空间是贝叶斯反问题的一项关键假设。不过，利用其与 (0,1) 上连续均匀分布之间的联系，可以为后代服从二项分布的 GW 树构造合适的参数化。

设 T是后代分布为 $\mathcal{P} = \mathsf{Bin}(2^d, \beta)$ 的 GW 树，其中 $\beta \in [0,1]$；设 $\Omega_U := [0,1]^{\mathbb{N}}$，并用 $\mathcal{P}_U$表示 $(0,1)$ 上密度为 $f_U(u) = \mathbb{1}_{\{u \in (0,1)\}}(u)$ 的一元均匀分布。我们赋予 Ω_U 可数乘积-σ-代数及乘积测度，定义如下：

$$\mathcal{A}_U := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}((0,1)), \quad \text{and} \quad \mathbb{Q}_U := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_U, \tag{79}$$

分别考虑概率空间 $(\Omega_U, \mathcal{A}_U, \mathbb{Q}_U)$，以及定义在 $(\Omega_U, \mathcal{A}_U, \mathbb{Q}_U)$ 上的独立同分布的均匀随机变量序列 $U := (U_{j,k}, j \in \mathbb{N}, \ k \in K_j)$。

令 $j \in \mathbb{N}$，并考虑小波指标 $(j,k,l) \in \mathcal{I}_\Psi$。根据 (77)，对于 $k \in K_j$，存在一个唯一的长度为 $|\mathfrak{n}| = j$ 的节点 $\mathfrak{n}$，它通过 $(j,k) = (|\mathfrak{n}|, \mathfrak{I}^2_{d,|\mathfrak{n}|} \circ \mathfrak{I}^1_{d,|\mathfrak{n}|}(\mathfrak{n})) = (j, \mathfrak{I}^2_{d,j} \circ \mathfrak{I}^1_{d,j}(\mathfrak{n}))$ 与 (j,k) 相关联。回想一下，$A_\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的祖先集合，并注意，对于每个 $i \leq j-1$，都存在一个长度为 $|\mathfrak{m}_i| = i$ 的唯一祖先 $\mathfrak{m}_i \in A_\mathfrak{n}$，它是 $\mathfrak{n}$ 的祖先。我们进一步引入记号 $\mathfrak{m}_j := \mathfrak{n}$，以

便于表述。由序列 U 中各元素的独立性可得

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_U(\mathfrak{n}\in T) &= \mathbb{Q}_U(\mathfrak{m}_{|\mathfrak{n}|-1}\in T,\ U_{j,k}\le\beta)\\ &= \mathbb{Q}_U(\mathfrak{m}_{|\mathfrak{n}|-1}\in T,\ U_{j,\mathfrak{I}^2_{d,j}\circ\mathfrak{I}^1_{d,j}(\mathfrak{n})}\le\beta)\\ &= \mathbb{Q}_U(\mathfrak{m}_{|\mathfrak{n}|-2}\in T,\ U_{j-1,\mathfrak{I}^2_{d,j-1}\circ\mathfrak{I}^1_{d,j-1}(\mathfrak{m}_{|\mathfrak{n}|-1})}\le\beta,\ U_{j,\mathfrak{I}^2_{d,j}\circ\mathfrak{I}^1_{d,j}(\mathfrak{n})}\le\beta)\\ &= \mathbb{Q}_U(U_{1,\mathfrak{I}^2_{d,1}\circ\mathfrak{I}^1_{d,1}(\mathfrak{m}_1)}\le\beta,\dots,U_{j,\mathfrak{I}^2_{d,j}\circ\mathfrak{I}^1_{d,j}(\mathfrak{n})}\le\beta)\\ &= \prod_{i=1}^{j}\mathcal{P}_U(U_{i,\mathfrak{I}^2_{d,i}\circ\mathfrak{I}^1_{d,i}(\mathfrak{m}_i)}\le\beta)\\ &= \beta^j.\end{aligned}$$

因此，我们可以通过等价关系对 T，即随机指标集 $\mathcal{I}_T$，进行参数化

$$(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\quad\Longleftrightarrow\quad U_{1,\mathfrak{I}^2_{d,1}\circ\mathfrak{I}^1_{d,1}(\mathfrak{m}_1)},\dots,U_{j-1,\mathfrak{I}^2_{d,j-1}\circ\mathfrak{I}^1_{d,j-1}(\mathfrak{m}_{j-1})},U_{j,\mathfrak{I}^2_{d,j}\circ\mathfrak{I}^1_{d,j}(\mathfrak{n})}\le\beta \tag{80}$$

对每个 $(j,\ k,\ l)\in\mathcal{I}_\Psi$ 且满足 $j\ge 1$。因此，方程（80）表明，具有小波密度 β （如式（18）所示）的 B^p_s-随机变量的参数到先验映射为

$$(0,1)^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^N\to B^p_s,\quad U\times X\mapsto\sum_{(j,k,l)\in\mathcal{I}_\Psi}\eta_j X^l_{j,k}\psi^l_{j,k}\mathbb{1}_{\{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\}}. \tag{81}$$

特别地，关于 $U\in(0,\ 1)^{\mathbb{N}}$ 的参数化是不连续的，这妨碍了在参数区域中使用高阶求积方法，例如准蒙特卡罗方法。

B 有限元近似

本附录汇集了第 4 节中逐路径有限元离散的（标准）实现细节。具体而言，我们分析矩阵组装过程中产生的求积误差，介绍一种基于张量化的、适用于 $\mathbb{T}^2$ 上双线性有限元的组装程序，并讨论 a_N 的高效计算和采样成本。

B.1 有限元求积误差

令 $h>0$ 为有限元网格宽度，并令 $\{v_1,\dots,v_{n_h}\}$ 为 V_h的一个合适的基。由于 $u_{h,\ N}=\sum_{i=1}^{n_h}u_i v_i$ 对于系数向量 u，问题–(47）等价于线性方程组

$$\mathbf{A}\underline{u}_h=\underline{F}. \tag{82}$$

对于任意 $i,\ j\in\{1,\dots,n_h\}$，$\mathbf{A}$ 和 F的各项由下式给出

$$\mathbf{A}_{i,j}:=\int_{\mathcal{D}}a_N(\omega)\nabla v_i\cdot\nabla v_j dx,\quad\text{and}\quad\underline{F}_i:={}_{V'}\langle f,v_i\rangle_V, \tag{83}$$

通常需要通过数值求积来计算。因此，在组装$\mathbf{A}$ 和 F时，我们引入了变分误差。由于 a_n 和 a 正则性较低，我们必须确保选择适当的求积方法，以免损害有限元近似的收敛率。正如本小节后文所示，对于（d-）线性单元，中点公式已足够。为简洁起见，我们仅分析刚度矩阵$\mathbf{A}$ 的求积误差；载荷向量 F 的相应分析可类似进行。对于任意单纯形/平行多面体 $K\in\mathcal{K}_h$，我们用 $x^m_K\in K$表示其中点或重心。此外，我们定义 a_n 的分片常数逼近 a_N 如下：

$$\overline{a}_N(\omega,x):=a_N(\omega,x^m_K),\quad x\in K,\ K\in\mathcal{K}_h.$$

由于我们考虑分片（d-）线性有限元，在每个 K 上用中点求积将（83）中的$\mathbf{A}^{ij}$ 近似，等价于求解以下离散问题：求 $u_{N,h}(\omega) \in V_h$，使得对所有 $v \in V$ 均有

$$\int_{\mathcal{D}} \overline{a}_N(\omega)\nabla\overline{u}_{N,h}(\omega)\cdot\nabla v_h dx = {}_{V'}\langle f, v_h\rangle_V.$$

Th几乎处处存在唯一解 $u_{N,h}(\omega)$，且求积误差满足以下界 g.

引理 B.1。设定理 *4.7* 的假设成立。对于任意 $f \in H$，足够小的 $\kappa > 0$*in* (16) 以及任意 $r \in (0, s - \frac{d}{p}) \cap (0, 1]$,，存在常数 $q \in (1, \infty)$ 和 $C > 0$，使得对于任意 $N \in \mathbb{N}$ 和 $h \in \mathfrak{H}$，有

$$\|u_{N,h} - \overline{u}_{N,h}\|_{L^q(\Omega;V)} + h^{-r}\|u_{N,h} - \overline{u}_{N,h}\|_{L^q(\Omega;H)} \le Ch^r \quad \begin{cases} \text{for } q \in [1, \overline{q}) \text{ if } p = 1, \text{ and} \\ \text{for any } q \in [1, \infty) \text{ if } p > 1. \end{cases}$$

此外，若 $s - \frac{d}{p} > 1$,则该结论对 $r = 1$成立。

证明。几乎处处存在唯一解 $u_{N,h}(\omega)$，且根据命题 3.3，很容易得到其与 $u_{N,h}(\omega)$ 之间距离的界：

$$\|u_{N,h}(\omega) - \overline{u}_{N,h}(\omega)\|_V \le \frac{\|f\|_{V'}}{a_N(\omega)\overline{a}_N(\omega)}\|a_N(\omega) - \overline{a}_N(\omega)\|_{L^\infty(\mathcal{D})}. \tag{84}$$

定理 2.11 和命题 4.2 表明，对于所有 $t \in (0, s - \frac{d}{p})$ 和 $q \ge \frac{1}{3}$，均有 $a_N \in L^{3q}(\Omega; \mathcal{C}^t(\mathcal{D}))$。对于 $p > 1$，我们仍可任取 $q \in [\frac{1}{3}, \infty)$；对于 $p = 1$，有 $q \in [\frac{1}{3}, q)$，其中当 $\kappa > 0$ 足够小时，$q > 1$。由此，对于 $q \in [1, q)$，利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned} \|u_{N,h} - \overline{u}_{N,h}\|_{L^q(\Omega;V)} &\le C\|a_{N,-}^2\|_{L^{3q/2}(\Omega)}\|a_N - \overline{a}_N\|_{L^{3q}(\Omega;L^\infty(\mathcal{D}))} \\ &\le C\|a_{N,-}\|_{L^{3q}(\Omega)}^2\|a_N\|_{L^{3q}(\Omega;\mathcal{C}^t(\mathcal{D}))}h^{\min(t,1)} \\ &\le Ch^r. \end{aligned}$$

为证明相对于 H 的误差，我们回顾定理 4.8 中的对偶论证：令$e_{N,\,h} := u_{N,\,h} - u_{N,\,h}$，并对固定的 $\omega \in \Omega$，考虑如下对偶问题：求 $\varphi(\omega) \in V$，使得对所有 $v \in V$，均有

$$\int_{\mathcal{D}} a_N(\omega)\nabla\overline{\varphi}(\omega)\cdot\nabla v dx = {}_{V'}\langle\overline{e}_{N,h}(\omega), v\rangle_V,$$

类似于定理 4.8 的证明，我们推导出逐路径估计

$$\|\overline{e}_{N,h}(\omega)\|_H^2 \le \|a_N(\omega)\|_{L^\infty(\mathcal{D})}\|\overline{e}_{N,h}(\omega)\|_V\|(I - P_h)\overline{\varphi}(\omega)\|_V.$$

若 $p = 1$ 具有足够的可积性，则我们得到$\|u_{N,\,h} - u_{N,\,h}\|_{L^q(\Omega;H)} \le Ch^{2r}$。 □

注意，引理 B.1 中的 r 与定理4.7和4.8中的 r 相同。因此，求积误差不会主导有限元收敛率。我们进一步强调，引理 B.1 对任意分片（多重）线性单元均成立，无论我们使用单形还是平行多面体对 $\mathcal{D}$ 进行离散。

B.2 双线性有限元离散

本小节中，我们关注矩形区域 $\mathcal{D} = \mathbb{T}^2 = [0, 1]^2$。采用基于双线性有限元的空间离散较为方便。因此，令 $h = 1/n$ 表示一个 $n \in \mathbb{N}$，并考虑节点 $x_i := ih$、$i \in \{0, \ldots, n\}$。那么，$\Xi_h := \{x_0, \ldots, x_n\} \subset [0, 1]$ 定义了 $\mathbb{T}^1$上的等距网格。随后，$\mathcal{K}_h$ 上的 $\mathbb{T}^2$ 的矩形剖分由（$n + 1$）^{2} 个网格点 $\Xi_h^2 := \{(x_{i_1}, x_{i_2}) \mid i_1, i_2 \in \{0, \ldots, n\}\} \subset \mathbb{T}^2$给出。令

$$\phi_i(x) := \max\left\{0, 1 - \frac{|\overline{x}_i - h|}{h}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \{0, \ldots, n\}$$

表示节点 Ξ_h处的一维帽函数基。那么，与 Ξ_h^2 （分别与 $\mathcal{K}_h$ ）对应的双线性有限元空间为

$$V_h := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2}, \quad i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n-1\}\}.$$

张量积基中的二元组与逐点乘积相同

$$\phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2}(x) := \phi_{i_1}(x_1)\phi_{i_2}(x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

注意，由于齐次狄利克雷边界条件，$\dim(V_h) = (n-1)^2$。现在令$i,\ j \in \{1, \ldots, (n-1)^2\}$为指标，使得 $v_i = \phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2} \in V_h$且 $v_j = \phi_{j_1} \otimes \phi_{j_2} \in V_h$。相应刚度矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$的元素为

$$\mathbf{A}_{i,j} := \int_{\mathbb{T}^2} a_N(\omega, x)\nabla(\phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2})(x) \cdot \nabla(\phi_{j_1} \otimes \phi_{j_2})(x)dx. \tag{85}$$

我们在 $\mathcal{K}_h$中的每个正方形上采用中点求积来近似$\mathbf{A}$ 的元素，这可以通过将式 (85) 中的 a 替换为各中点处适当的分片常数插值来实现，如附录 B.1 所示。设每个正方形 $K = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \times [x_{i_2}, x_{i_2+1}] \in \mathcal{K}_h$的中点为$x_K^m = x_{\underline{i_1},\ i_2}^m := (\underline{x}_{i_1} + \frac{h}{2},\ x_{i_2} + \frac{h}{2})$，其中 $i_1,\ i_2 \in \{\underline{0}, \ldots, n-1\}$，并定义

$$\overline{a}_N(\omega, x) := a_N(\omega, x_{i_1,i_2}^m), \quad x \in [\overline{x}_{i_1}, \overline{x}_{i_1+1}] \times [\overline{x}_{i_2}, \overline{x}_{i_2+1}].$$

采用上述指标 $i,\ j$ ，可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{i,j} &= \int_{\mathbb{T}^2} a_N(\omega)\nabla(\phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2})(x) \cdot \nabla(\phi_{j_1} \otimes \phi_{j_2})(x)dx \\
&\approx \int_{\mathbb{T}^2} \overline{a}_N(\omega)\nabla(\phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2})(x) \cdot \nabla(\phi_{j_1} \otimes \phi_{j_2})(x)dx \\
&= \int_{\overline{x}_{i_1-1}}^{\overline{x}_{i_1+1}} \int_{\overline{x}_{i_2-1}}^{\overline{x}_{i_2+1}} \overline{a}_N(\omega)\nabla(\phi_{i_1} \otimes \phi_{i_2})(x) \cdot \nabla(\phi_{j_1} \otimes \phi_{j_2})(x)dx \\
&= a_N(\omega, x_{i_1-1,i_2-1}^m) \left[\int_{\overline{x}_{i_1-1}}^{\overline{x}_{i_1}} \phi'_{i_1}\phi'_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2-1}}^{\overline{x}_{i_2}} \phi_{i_2}\phi_{j_2}dx_2 + \int_{\overline{x}_{i_1-1}}^{\overline{x}_{i_1}} \phi_{i_1}\phi_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2-1}}^{\overline{x}_{i_2}} \phi'_{i_2}\phi'_{j_2}dx_2 \right] \\
&\quad + a_N(\omega, x_{i_1,i_2-1}^m) \left[\int_{\overline{x}_{i_1}}^{\overline{x}_{i_1+1}} \phi'_{i_1}\phi'_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2-1}}^{\overline{x}_{i_2}} \phi_{i_2}\phi_{j_2}dx_2 + \int_{\overline{x}_{i_1}}^{\overline{x}_{i_1+1}} \phi_{i_1}\phi_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2-1}}^{\overline{x}_{i_2}} \phi'_{i_2}\phi'_{j_2}dx_2 \right] \\
&\quad + a_N(\omega, x_{i_1-1,i_2}^m) \left[\int_{\overline{x}_{i_1-1}}^{\overline{x}_{i_1}} \phi'_{i_1}\phi'_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2}}^{\overline{x}_{i_2+1}} \phi_{i_2}\phi_{j_2}dx_2 + \int_{\overline{x}_{i_1-1}}^{\overline{x}_{i_1}} \phi_{i_1}\phi_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2}}^{\overline{x}_{i_2+1}} \phi'_{i_2}\phi'_{j_2}dx_2 \right] \\
&\quad + a_N(\omega, x_{i_1,i_2}^m) \left[\int_{\overline{x}_{i_1}}^{\overline{x}_{i_1+1}} \phi'_{i_1}\phi'_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2}}^{\overline{x}_{i_2+1}} \phi_{i_2}\phi_{j_2}dx_2 + \int_{\overline{x}_{i_1}}^{\overline{x}_{i_1+1}} \phi_{i_1}\phi_{j_1}dx_1 \int_{\overline{x}_{i_2}}^{\overline{x}_{i_2+1}} \phi'_{i_2}\phi'_{j_2}dx_2 \right].
\end{aligned}$$

我们通过以下方式定义矩阵 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{M}$

$$\mathbf{S}_{i_1,j_1} := \int_{\overline{x}_{i_1-1}}^{\overline{x}_{i_1}} \phi'_{i_1}\phi'_{j_1}dx_1 = \begin{cases} \frac{1}{h}, & i_1 = j_1, \\ -\frac{1}{h}, & i_1 = j_1 + 1, \\ 0, & \text{else}, \end{cases}$$

$$\mathbf{M}_{i_1,j_1} := \int_{\overline{x}_{i_1-1}}^{\overline{x}_{i_1}} \phi_{i_1}\phi_{j_1}dx_1, = \begin{cases} \frac{h}{3}, & i_1 = j_1, \\ \frac{h}{6}, & i_1 = j_1 + 1, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

对于 $i_1, j_1 \in \{1, \ldots, n-1\}$，并注意到

$$\mathbf{S}_{i_1,j_1}^\top = \mathbf{S}_{j_1,i_1} = \int_{\overline{x}_{i_1}}^{\overline{x}_{i_1+1}} \phi'_{i_1}\phi'_{j_1}dx_1, \quad \mathbf{M}_{i_1,j_1}^\top = \mathbf{M}_{j_1,i_1} = \int_{\overline{x}_{i_1}}^{\overline{x}_{i_1+1}} \phi_{i_1}\phi_{j_1}dx_1.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{i,j} = & a_N(\omega, x^m_{i_1-1,i_2-1})(\mathbf{S}_{i_1,j_1}\mathbf{M}_{i_2,j_2} + \mathbf{M}_{i_1,j_1}\mathbf{S}_{i_2,j_2}) \\ & + a_N(\omega, x^m_{i_1,i_2-1})(\mathbf{S}^\top_{i_1,j_1}\mathbf{M}_{i_2,j_2} + \mathbf{M}^\top_{i_1,j_1}\mathbf{S}_{i_2,j_2}) \\ & + a_N(\omega, x^m_{i_1-1,i_2})(\mathbf{S}_{i_1,j_1}\mathbf{M}^\top_{i_2,j_2} + \mathbf{M}_{i_1,j_1}\mathbf{S}^\top_{i_2,j_2}) \\ & + a_N(\omega, x^m_{i_1,i_2})(\mathbf{S}^\top_{i_1,j_1}\mathbf{M}^\top_{i_2,j_2} + \mathbf{M}^\top_{i_1,j_1}\mathbf{S}^\top_{i_2,j_2}),\end{aligned} \tag{86}$$

并且只有当 $|i_1 - j_1|, |i_2 - j_2| \le 1$ 时，我们才会得到对 $\mathbf{A}_{i,j}$ 的贡献。因此，式 (86) 中的表示可用于高效组装 $\mathbf{A}$。

B.3 a_N 的计算

要通过式 (86) 组装 $\mathbf{A}$，仍需在 Ξ_h^2 中的求积点处计算 $a_N(\omega) = \exp(b_N(\omega))$，或者更一般地，在 d 维网格 $\Xi_h^d := \otimes_{i=1}^d \Xi_h \subset [0,1]^d$ 上计算。我们回顾一下，

$$b_{T,N}(\omega) = \sum_{\substack{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\\ j\le N}} \eta_j X^l_{j,k}(\omega)\psi^l_{j,k}, \quad \omega \in \Omega.$$

由式 (5) 和 (4) 给出的 $\psi^l_{j,k} \in L^2(\mathbb{T}^2)$ 的张量积表示可得

$$\begin{aligned} b_{T,N}(\omega, x) &= \sum_{\substack{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\\ j\le N}} \eta_j X^l_{j,k}(\omega) 2^{\frac{dj}{2}} \bigotimes_{i=1}^d \psi_{j+w,k_i,l(i)}(x) \\ &= \sum_{\substack{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\\ j\le N}} \eta_j X^l_{j,k}(\omega) 2^{\frac{dj}{2}} \prod_{i=1}^d \psi_{j+w,k_i,l(i)}(x_i), \quad x \in \mathbb{T}^d. \end{aligned}$$

我们定义向量 $\underline{\psi_{j,k_i,l(i)} := 2^{\frac{j}{2}}\psi_{j+w,k_i,l(i)}(x)|_{x\in\Xi}} \in \mathbb{R}^n$，最终得到

$$b_{T,N}(\omega, x)\big|_{x\in\Xi_h^2} = \sum_{\substack{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\\ j\le N}} \eta_j X^l_{j,k}(\omega) \prod_{i=1}^d \underline{\psi_{j,k_i,l(i)}} \in \mathbb{R}^{dn}.$$

因此，只需在一维网格 Ξ_h 上计算经过缩放和平移的函数 $\psi_{j,k,l(i)}$；随后通过张量化，即可在 d 维网格 Ξ_h^d 上获得 b_N（分别为 a_N）的值。计算 $\psi_{j,k,l(i)}$ 最终需要在一组离散点上近似分形函数 ϕ 和 ψ。通过迭代级联算法，可以达到任意精度，例如参见 [12, 第 6 章 5]。在级联算法中进行 $J \in \mathbb{N}$ 次迭代，可得到 ϕ, ψ 在 2^J 个二进网格点处的近似值；随后对这些值进行插值，从而获得连续 ϕ 和 ψ 插值的分段线性或分段常数近似。当 $\phi, \psi \in C^\alpha(\mathbb{R})$ 且 $\alpha \in (0,1]$ 时，所得误差为 $\mathcal{O}(2^{-J\alpha})$ 阶。因此，在多层蒙特卡洛算法的每一层，我们采用 $J_\ell := \lceil \frac{N_\ell t}{\alpha} \rceil$，以匹配引理 B.1 中的中点求积误差。在均匀二进网格上采样 $b_{T,N}$ 的成本将在下文中量化。

引理 B.2. 设 $h_\ell = 2^{-(\ell+1)}$ 对于 $\ell \in \mathbb{N}_0$，设 $\Xi^d_{h_\ell} := \otimes_{i=1}^d \Xi_{h_\ell} \subset [0,1]^d$ 对于 $d \in \mathbb{N}$，并令 $\mathcal{C}_{sample}$表示相对于网格 $\Xi^d_{h_\ell}$对 $b_{T,N}$ 进行采样所需的随机成本（以计算量和内存衡量）。那么，存在一个常数 $C > 0$，与 h_ℓ 和 N无关，使得

$$\mathbb{E}(\mathcal{C}_{\text{sample}}) \le C \begin{cases} h_\ell^{-d}(N+1) & \text{if } \beta = 1, \text{ and} \\ h_\ell^{-d} & \text{if } \beta \in (0,1). \end{cases}$$

证明。 由于 ψ 和 ϕ 是在 Ξ_{h_ℓ}中的 $2^{\ell+1} \in \mathbb{N}$ 个网格点上计算的，我们需要计算$2^d - 1$ 个缩放和平移后的向量 $\psi_{j,k_i,l(i)} \in \mathbb{R}^{2^{\ell+1}}$的张量积。回顾第 2.1.2 小节中的多分辨率分析，张量化会在每个尺度$j \in \mathbb{N}_0$上生成 2^{jd} 个单周期小波函数 $\psi^l_{j,k}$ 。此外，对于固定指标 $(j,k,l) \in \mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}$，$\psi^l_{j+w,k}$ 的支撑集在 $\mathbb{T}^d$ 中的直径有界于 $2^{-d(j+1-w)}$，其中 $w \in \mathbb{N}$ 是一个仅取决于 ϕ 和 ψ的尺度因子。因此，位于 $\psi^l_{j,k}$ 支撑集中的网格点数量为

$$|\mathrm{supp}(\psi^l_{j+w,k}) \cap \Xi^d_{h_\ell}| \le 2^{-d(j+1-w)} 2^{d(l+1)} = 2^{d(l-j+w)}. \tag{87}$$

现在我们还固定随机树 T 和系数 X 的一个实现 $(T(\omega)\ X(\omega))$。若 $(j,k,l) \in \mathcal{I}_T(\omega)$，则将相应的 $2^{d(l-j+w)}$ 个网格点乘以系数 $X^l_{j,k}(\omega)$。否则，若 $(j,k,l) \notin \mathcal{I}_T(\omega)$，则该指标不会对 $b_{T,N}(\omega)$ 作出贡献。因此，对所有非零贡献及网格点求和所需的计算成本为

$$\mathcal{C}_{\mathrm{sample}} \le 2 \sum_{\substack{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\\ j\le N}} 2^{d(l-j+w)} = 2 \sum_{\substack{(j,k,l)\in\mathcal{I}_{\mathbf{\Psi}}\\ j\le N}} \mathbb{1}_{\{(j,k,l)\in\mathcal{I}_T(\omega)\}} 2^{d(l-j+w)}.$$

由于 $\mathcal{P} = \mathrm{Bin}(2^d, \beta)$，容易得到 $P((j,k,l) \in \mathcal{I}_{T(\omega)}) = \beta^j$，进而可知

$$\mathbb{E}(\mathcal{C}_{\mathrm{sample}}) = 2\sum_{j=0}^{N} 2^{dj}(2^d-1)\beta^j 2^{d(l-j+w)} \le \begin{cases} 2^{dw+1}(2^d-1)h_\ell^{-d}(N+1) & \text{if } \beta = 1, \text{ and} \\ \frac{2^{dw+1}(2^d-1)}{1-\beta} h_\ell^{-d} & \text{if } \beta \in (0,1). \end{cases}$$

□

注 B.3. 引理 B.2 表明，对于给定的 $\beta \in (0,1)$，$b_{N,T}$ 的采样期望成本一致有界于 Ch_ℓ^{-d} *uniformly with respect to* $N \in \mathbb{N}$。因此，假设 5.5 中关于样本 u_{N_ℓ,h_ℓ} 可通过期望计算量 $\mathcal{O}(h_\ell^{-d})$ 实现的条件确有依据。另一方面，我们注意到，当 $\beta \to 1$ 时，$C = C(d,\beta) \to \infty$，这会导致定理 5.8 的渐近成本中可能出现较大的隐藏常数。不过，若按照 (63) 选择误差平衡$N \propto |\log(h_\ell)|$，在极限 $\beta = 1$ 下，我们仍可得到每个样本复杂度界仅略差的 $\mathcal{O}(h_\ell^{-d}|\log(h_\ell)|)$。