arXiv:2302.00524v1 [math.DG] 1 Feb 2023

G_α、SU(2) 和 SL(2) 的次黎曼指数映射标准形

Samu¨el Borza

Abstract. 本文旨在运用奇点理论，求出次黎曼指数映射在临界点附近的标准形。本文研究了三种情形：具有折叠奇点的 α-Grushin 平面，以及具有折叠奇点和鞍型奇点的特殊酉群 SU(2) 与特殊线性群 SL(2)。这些情形展示了不同次黎曼结构的例子，文中介绍的技术也可应用于其他领域。本文还讨论了这一方法的影响，并提出了开放问题。

1. 引言

指数映射是研究黎曼、芬斯勒和次黎曼流形几何的基本工具。指数映射至关重要，因为它与测地线、曲率及其他重要的几何性质相关。它的行为对于确定底层流形的关键解析特征和拓扑特征也起着至关重要的作用。

共轭轨迹是指数映射的奇点集合，其结构尤为重要。本文通过奇点理论研究指数映射，旨在确定临界点邻域内指数映射的标准形。我们的方法基于[12], 的原始工作，以及 [6]。

我们特意聚焦于三个具体例子： α-Grushin 平面、三维特殊酉群和三维特殊线性群，以说明相关概念和技术。这些例子代表了不同类型的次黎曼结构，本文所述的分析也可推广到其他结构。

在第2节中，我们将介绍奇点理论和次黎曼几何的基础知识，重点讨论惠特尼折叠这一重要的奇点类型。我们还将探讨共轭余向量（即指数映射的临界值）与雅可比场之间的关系，并概述相关理论。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：53C17、58C25；次要分类：22E30。本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（拨款协议编号：945655）提供的资助。

- αGrushin 平面是近似黎曼流形的一种特殊类型，可视为传统 Grushin 平面的推广。它常被视为秩变化次黎曼流形的一个模型示例。我们将在第3节中证明，α-Grushin 平面的指数映射在奇点邻域内等价于 $f(x,\ y) = (x^2,\ y)$，见定理 12。

另一方面，三维特殊酉群 SU(2) 是三维接触结构的一个例子。我们将在第4节研究它。它是一个配备双不变次黎曼结构的李群，与海森堡群一样。研究将揭示，SU(2) 的共轭轨迹由非连通流形分层构成（见命题 17）。此外，定理 18 将证明，根据共轭轨迹的切空间与指数映射的核之间的交集性质，SU(2) 的指数映射可以表示为 $f(x,y,z) = (xz,y,z)$ 或 $f(x,y,z) = (x^2,y,z)$。第5节将以类似方式讨论三维特殊线性群 SL(2)。

这些例子的指数映射标准形表明，在奇点邻域内，指数映射的表现与 $f(x) = x^3$ 并不相同，正如命题 13、命题 19 和命题 25所示。这一性质在芬斯勒几何中早已广为人知，最初由 Morse 和 Littauer 提出 [11]（关于其历史发展，另见 [12] 及其中的参考文献）。在次黎曼几何中，这一问题尚未得到全面理解。第6节将深入探讨相关背景、面临的挑战以及一些开放问题。

2. 预备知识

2.1. 奇点理论与惠特尼折叠。 惠特尼的工作 [15] 为研究光滑映射的奇点奠定了基础。具体而言，惠特尼证明，平面到平面的一个一般光滑映射，在经过微分同胚坐标变换后，只可能出现两种奇点：折叠或尖点。对于有兴趣进一步了解奇点理论的读者，我们推荐阅读以下著作： [10], 和 [4]。

我们首先根据 Whitney 的定义，说明什么是“良好”奇点。

定义1. 设 $f\colon M \to N$ 是两个维数相同的流形 M 和 N之间的光滑映射。点 $p \in M$ 是 f 的奇点，当且仅当 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_p f) \neq \{0\}$。$f$ 的所有奇点构成的集合记为 Sing(f)。

f 的奇点 p 是良好奇点，当且仅当满足以下两个附加条件。

(i) 存在 p 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得 0 是

$$\mathcal{U} \to \mathbb{R} : x \mapsto \det(\mathrm{d}_x f).$$

(ii) 对所有 $x \in \mathrm{Sing}(f) \cap \mathcal{U}$，都有 $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_x f) = 1$。

根据隐函数定理，上述定义特别意味着，p 邻域内 f 的奇点集 Sing(f)$\cap\mathcal{U}$ 是 M 的一个余维 1 子流形。

定义 2. 光滑映射 $f\colon M \to N$ 的良好奇点是折叠奇点，如果

$$\mathrm{T}_p(\mathrm{Sing}(f) \cap \mathcal{U}) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_x f) \neq \{0\} \text{ in } \mathrm{T}_p(M).$$

惠特尼证明，对于一般光滑映射，经光滑变量变换等价后，其表达式 $f : M \to N$ 在良好奇点 $p \in M$的邻域内，取决于核($d_p f$)是否与Sing(f)横截$\cap \mathcal{U}$。在本文中，我们只讨论横截情形，这是对一般映射的奇点进行分类时出现的第一类奇点（见 [4]）。

THEOREM 3 （[15, 第 15 节]）。如果 p 是光滑映射 $f : M \to N$ 在同维流形 M 和 N 之间的一个良好折叠奇点，那么 f 等价于映射

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x, y_1, \dots, y_{n-1}) \mapsto (x^2, y_1, \dots, y_{n-1}). \tag{2.1}$$

换句话说，存在一个以 p 为中心的坐标图，位于 M 中；以及一个以 $f(p)$ 为中心的坐标图，位于 N 中，使得 f 在这些坐标下的表示为 (2.1)。

2.2. 次黎曼几何与雅可比方程。关于次黎曼几何的全面参考资料可见 [3]。

光滑流形 M 上的次黎曼结构由一组全局向量场 X_1,..., X_m给出。在 $x \in M$ 处的分布是由这些向量场生成的 $T_x(M)$ 的子空间

$$\mathcal{D}_x := \operatorname{span}\{X_1(x), \dots, X_m(x)\}.$$

水平曲线（或容许曲线） $\gamma : [a, b] \to M$ 是一个绝对连续路径，且存在 $u \in L^2([a, b], \mathbb{R}^m)$ 满足

$$\dot\gamma(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) X_i(\gamma(t)), \quad \text{for almost every } t \in [a, b].$$

我们可以对 $\mathcal{D}_x$ 应用极化公式来定义一个内积

$$\langle v, v\rangle_x := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{m} u_i^2 \mid \sum_{i=1}^{m} u_i X_i(x) = v \right\}.$$

可以证明，若 γ 是容许的，则映射 $t \mapsto \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_{\gamma(t)}}$ 是可测的。次黎曼长度由此定义为

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)}\, dt,$$

而 M 的次黎曼距离为

$$d(x, y) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \to M \text{ is horizontal and } \gamma(a) = x \text{ and } \gamma(b) = y\}.$$

始终假设次黎曼结构满足 H ¨ormander 条件，也就是说，对所有 $q \in M$，Lie$_q(\mathcal{D})$ $= T_q(M)$。在这种情况下，我们也称 $\mathcal{D}$ 为括号生成。由周 – 拉舍夫斯基定理可知，这保证了 d 是一个定义良好的距离函数，并且 M的流形拓扑与度量拓扑一致。

由次黎曼结构诱导的哈密顿量是函数

$$H : T^*(M) \to \mathbb{R} : (q, \lambda_0) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \langle \lambda_0, X_k(q)\rangle^2.$$

回顾一下，映射 $a \in C^\infty(\mathrm{T}^*(M))$ 的哈密顿向量场是 $\mathrm{T}^*(M)$ 上满足以下条件的唯一向量场 $\overrightarrow{a}$

$$\sigma(\cdot, \overrightarrow{a}(\lambda)) = \mathrm{d}_\lambda a, \qquad \forall \lambda \in \mathrm{T}^*(M),$$

其中 σ 是 $\mathrm{T}^*(M)$ 上的典范辛结构。我们还将 $\pi : \mathrm{T}^*(M) \to M$ 记作 $\mathrm{T}^*(M)$ 到 M 的丛投影。

在考察 M 的次黎曼测地线时，这些曲线是相对于次黎曼距离的局部极小恒定速度曲线，可识别出两类测地线：异常测地线和正规测地线。若测地线 $\gamma(t)$ 存在一个提升 $\lambda(t) \in \mathrm{T}^*(M)$，使得 $\pi(\lambda(t)) = \gamma(t)$ 且满足

$$\dot{\lambda}(t) = \overrightarrow{H}(\lambda(t)). \tag{2.2}$$

反过来，任意满足 M 的解在 (2.2) $\mathrm{T}^*(M$中的投影，都是一条以恒定速度参数化的局部极小路径 $2H$。

虽然异常极值曲线的研究是次黎曼几何中一个与难题相关的有趣课题，但本文只关注正规极值曲线，也就是哈密顿方程 (2.2)的解。哈密顿方程的流记为 $\mathrm{e}^{t\overrightarrow{H}}$。

考虑次黎曼流形 M 上的一条正规极值曲线 $\lambda(t)$，也就是说

$$\lambda(t) := \mathrm{e}^{t\overrightarrow{H}}(q, \lambda_0),$$

对于某个初始条件 $(q, \lambda_0) \in \mathrm{T}^*(M)$。沿着 $\lambda(t)$ 的雅可比场 $\mathcal{J}$ 是一族经过正规极值曲线的变分所产生的变分场。换言之，考虑一族经过正规极值曲线的 $\lambda(t)$ 的变分

$$\Lambda(t, s) = \mathrm{e}^{t\overrightarrow{H}}(\Gamma(s)),$$

其中 $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{T}^*(M)$ 是一条曲线，满足 $\Gamma(0) = (q, \lambda_0)$，那么相应的雅可比场为

$$\mathcal{J}(t) := \frac{\partial \Lambda}{\partial s}(t, 0) = \mathrm{d}_{\lambda_0}\mathrm{e}^{t\overrightarrow{H}}[\dot{\Gamma}(0)].$$

沿着 λ 的雅可比场 $\mathcal{J}$ 因此由其初值 $\Gamma(0) \in \mathrm{T}_{(q,\lambda_0)}(\mathrm{T}^*(M))$ 唯一确定。沿正规测地线 λ 的雅可比场空间的维数为 $2n$，其中 n 是流形 M 的维数。

等价地，可以看出，向量场 $\mathcal{J}$ 是沿极值曲线 λ 的雅可比场，当且仅当它满足

$$\dot{\mathcal{J}} := \mathcal{L}_{\overrightarrow{H}}\mathcal{J} = 0, \tag{2.3}$$

其中 $\mathcal{L}_{\overrightarrow{H}}\mathcal{J}$是向量场沿 λ在 $\overrightarrow{H}$方向上的李导数：2.4
( )

$$\mathcal{L}_{\overrightarrow{H}}\mathcal{J}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(\mathrm{d}_{\lambda(t+\varepsilon)}\mathrm{e}^{-\varepsilon\overrightarrow{H}})[\mathcal{J}(t+\varepsilon)] - \mathcal{J}(t)}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}(\mathrm{d}_{\lambda(t+\varepsilon)}\mathrm{e}^{-\varepsilon\overrightarrow{H}})[\mathcal{J}(t+\varepsilon)].$$

我们可以通过沿曲线 $\lambda(t)$ 取辛标架，改写微分方程 (2.3) E、$F) = (E_1, \ldots\ldots, E_n$, $F_1, \ldots\ldots, F_n)$ 是 $\mathrm{T}^{\lambda(t)}(\mathrm{T}^*(M))$ 的达布基，并且对所有 $_{\lambda(t)}\pi[E_i] = 0$ 都有 $\mathrm{d}\ i = 1, \ldots\ldots, n$。

沿着 $\lambda(t)$ 的辛移动标架 (E, F) 的各元素始终满足

$$\begin{pmatrix} \dot{E} \\ \dot{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(t)^{\mathsf{T}} & -C_2(t) \\ R(t) & -C_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

对于光滑的 $n \times n$ 矩阵曲线 $C_1(t)$ $C_2(t)$ 和 $R(t)$，其中 $C_2(t)$ 和 $R(t)$ 为对称矩阵，$C_2(t) \geq 0$。沿着 $\lambda(t)$ 的向量场 $\mathcal{J}(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)E_i(t) + x_i(t)F_i(t)$ 是雅可比场，即满足微分方程 (2.3)，当且仅当

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1(t) & -R(t) \\ C_2(t) & C_1(t)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

结构方程 (2.5) 可通过沿着 $\lambda(t)$ 选取正则辛标架而得到简化，其中正规极值曲线 $\lambda(t)$ 是 充分 且等正则的。这里不再详述所有技术定义，但可参阅 [1] 和 [16] 等文献。对于本文，只需指出，充分且等正则的测地线对应于一个杨图 D。充分且等正则的测地线具有有限秩 k，其行整数为 $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$ 满足 $\sum_{i=1}^{k} n_i = \dim(M)$。相应的杨图为

$$D := \{ai := (a, i) \mid a = 1, \ldots, k \text{ and } i = 1, \ldots, n_a\}.$$

以下陈述概述了这个正则标架的结构。

THEOREM 4 ([16])。 如果正规极值曲线 $\lambda(t)$ 是充分且等正则的，其杨图为 D，则沿着 $\lambda(t)$ $(E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_n)$存在一个辛移动标架，使得结构方程 (2.5) 中的矩阵 $C_1(t)$、$C_2(t)$ 具有如下形式

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} C_1(D_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C_1(D_k) \end{pmatrix}, \; C_2(t) = \begin{pmatrix} C_2(D_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C_2(D_k) \end{pmatrix},$$

其中

$$C_1(D_a) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{n_a-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2(D_a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{0}_{n_a-1} \end{pmatrix}$$

对于杨图 D的每一行 $a = 1,...,k$，并且矩阵 $R(t)$按照 [16, 定义1 的含义是正规矩阵，且 2]。此外，这个辛移动标架在保持杨图 D正交不变的基变换下唯一，如 [16, 定理 1]中所述。

对雅可比场的研究对于理解共轭轨迹至关重要。

2.3. 次黎曼几何中的共轭轨迹。本文旨在研究特定次黎曼结构的指数映射奇点。

定义5. $q \in M$ 处的次黎曼指数映射是映射

$$\exp_q : \mathscr{A}_q \to M : \lambda \mapsto \pi(\mathrm{e}^{\vec{H}}(\lambda)),$$

其中 $\mathscr{A}_q \subseteq \mathrm{T}^*_q(M)$ 是由余向量构成的开集，使得对应的 (2.2) 解在整个区间 $[0, 1]$.

次黎曼指数映射 $\exp_q$ 是光滑的。若 $\lambda\colon [0, T] \to \mathrm{T}^*(M)$ 是满足初始条件 $(q, \lambda_0) \in \mathrm{T}^*(M)$ 的正规极值曲线，那么相应的正规极值路径 $\gamma(t) = \pi(\lambda(t))$ 按定义满足 $\gamma(t) = \exp_q(t\lambda_0)$，对所有 $t \in [0, T]$ 均成立。若 M 关于次黎曼距离是完备的，则 $\mathscr{A}_q = \mathrm{T}^*_q(M)$；此外，若不存在严格异常长度极小曲线，

指数映射 $\exp_q$ 是满射。与黎曼情形不同，次黎曼指数映射不一定将 $\mathrm{T}^*_q(M)$ 中的一个小球微分同胚地映到 M 中的一个小测地球。事实上，$\mathrm{Im}(\mathrm{d}_0\exp_q) = \mathcal{D}_q$，且 $\exp_q$ 在 $0 \in \mathrm{T}^*_q(M)$ 当且仅当 $\mathcal{D}_q = \mathrm{T}^*_q(M)$。

$\exp_q$ 的奇点集合，如定义1所述，称为次黎曼结构的共轭轨迹。

定义6. $q \in M$ 处的共轭轨迹是如下集合

$$\mathrm{Conj}_q(M) := \left\{\lambda_0 \in \mathscr{A}_q \mid \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) \neq \{0\}\right\} \subseteq \mathrm{T}^*_q(M).$$

$\mathrm{Conj}_q(M)$ 的元素称为共轭余向量。我们称它们与点 q 共轭。$\lambda_0 \in \mathrm{Conj}_q(M)$ 的阶是 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q)$ 的维数。

需要注意的是，与通常的做法不同，这里将点 $q \in M$ 的共轭轨迹视为 $\mathrm{T}^*_q(M)$ 的子集，而不是指数映射奇点在 M 中的像。

下面的陈述阐明了共轭余向量与雅可比场之间的联系。

命题 7. 设 $\gamma\colon [0,1] \to M$ 是一条正规测地线，其初始余向量为 $\lambda_0 \in \mathscr{A}_q$，且 $\gamma(0) = q \in M$。当且仅当存在沿 γ 的一条非平凡雅可比场 $\mathcal{J}$，满足 $\mathrm{d}_{\lambda(0)}\pi[\mathcal{J}(0)] = 0$ 且 $\mathrm{d}_{\lambda(1)}\pi[\mathcal{J}(1)] = 0$ 时，余向量 λ_0 才是 $\exp_q$ 的临界点。

用辛标架表述时，命题 7 意味着：若存在沿 $\lambda(t)$ 的一个非平凡向量场 $\mathcal{J}(t) = \sum_{i=1}^n p_i(t)E_i(t) + x_i(t)F_i(t)$，使得 $(p(t)\ x(t))$ 满足 (2.6)，且 $x(0) = x(1) = 0$，则余向量 $\lambda_0 \in \mathrm{T}^*_q(M)$ 与 $q \in M$ 共轭。

沿极值曲线固定一个辛移动标架后，我们可以作如下识别。一方面，辛标架的元素 $F_1(t)\ldots, F_n(t)$ 可通过映射 $\mathrm{d}^{\lambda(t)\pi}\colon \mathrm{T}^{\lambda(t)}(\mathrm{T}^*(M)) \to \mathrm{T}^{\gamma(t)}(M)$，解释为 $\mathrm{T}^{\gamma(t)}(M)$ 的一组基。另一方面，元素 $E_1(t)\ldots, E_n(t)$ 可通过包含映射 $\mathrm{T}^*_{\gamma(t)}(M) \to \mathrm{T}^*(M)\colon \lambda \mapsto (\gamma(t)\ \lambda)$ 的微分，解释为 $\mathrm{T}^{\lambda(t)}(\mathrm{T}^*_{\gamma(t)}(M))$ 的一组基。

指数映射微分的核与像也可以用坐标表示（另见 [6, 注 22]）：

(2.7)
$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \left\{\sum_{i=1}^n p_i(0)E_i(0) \mid (p(t),x(t)) \text{ satisfies (2.6) and } x(0) = x(1) = 0\right\},$$

and

(2.8) $$\mathrm{Im}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \left\{\sum_{i=1}^n x_i(1)F_i(1) \mid (p(t),x(t)) \text{ satisfies (2.6) with } x(0) = 0\right\}.$$

最后，在本节结束时，我们给出一项重要结果，该结果同样用辛移动标架表述，并推广了 Warner 在 [12, 第 2 节（R^2）]中研究的黎曼指数映射的正则性。

命题 8 （次黎曼指数映射的正则性 [6,命题 21]）。 映射

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) \to \mathrm{T}_{\exp_q(\lambda_0)}(M)/\,\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q(\mathrm{T}_{\lambda_0}(\mathrm{T}^*_q(M)))$$

将 $\sum_{i=1}^n p_i(0)E_i(0)$ 映射到 $\sum_{i=1}^n p_i(1)F_i(1)+\mathrm{d}\lambda_0\exp q(\mathrm{T}\lambda_0(\mathrm{T}^*_q(M)))$ 是一个线性同构。

现在我们可以分析具体的次黎曼结构： α-Grushin 平面、三维特殊酉群和三维特殊线性群。

3. α-Grushin 平面

对于 $\alpha \geq 1$， α-Grushin 平面 G_α 是 R^2上的次黎曼结构，由全局向量场 $X = \partial_x$ 和 $Y_\alpha = |x|^\alpha \partial_y$生成。$G_\alpha$ 的几何例如在 [9] 和 [5]中进行了研究。 α-Grushin 平面是理想的，即不包含任何非平凡的异常测地线（见 [7, 引理 4.2.1.]）。值得注意的是，这种次黎曼结构是秩变的： $\mathcal{D}_{(x,y)} := \mathrm{span}\,\{X(x,y)\ Y_\alpha(x,y)\}$ 的维数在 $x \neq 0$ 时为 2，否则为 1。这种结构的次黎曼哈密顿量为

$$H : \mathrm{T}^*(\mathbb{G}_\alpha) \to \mathbb{R} : (u\,\mathrm{d}x|_{(x,y)} + v\,\mathrm{d}y|_{(x,y)}, x, y) \mapsto \frac{1}{2}(u^2 + v^2x^{2\alpha}).$$

一条正规极值曲线 $\lambda(t) = (x(t)\ y(y)\ u(t)\mathrm{d}x|_{\gamma(t)} + v(t)\mathrm{d}y|_{\gamma(t)}) \in \mathrm{T}^*(\mathbb{G}\alpha)$ 因此由哈密顿系统刻画 (2.2)

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\alpha v(t)^2 x(t)^{2(\alpha-1)} x(t) \\ \dot{v}(t) = 0 \\ \dot{x}(t) = u(t) \\ \dot{y}(t) = v(t)x(t)^{2\alpha}. \end{cases} \tag{3.1}$$

借助称为广义三角函数的特殊函数，可以对这些方程进行积分。我们将 α-正弦函数定义为下列常微分方程的解

$$\begin{cases} f''(t) = -\alpha f(t)^{2(\alpha-1)} f(t) \\ f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

可以证明，这个微分方程的解是周期函数，周期为$2\pi_\alpha$，其中常数 π_α 由下式给出

$$\pi_\alpha := 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^{2\alpha}}}\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2\alpha}\right).$$

这里，函数 $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ 表示完全贝塔函数。方程(3.2)的解，即 α-正弦，记为 $\sin_\alpha$；而 α-余弦函数定义为 $\cos_\alpha := \sin'_\alpha$。需要指出的是，这些函数满足以下 α-三角恒等式：

$$\sin_\alpha^{2\alpha}(x) + \cos_\alpha^2(x) = 1, \text{ for all } x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

方程 (3.1) 的通解可借助这些特殊函数以较为清晰的形式表示（见 [5, 定理 15。]）：

$$\begin{cases} u(t) = A\omega \cos_\alpha(\omega t + \phi) \\ v(t) = v_0 \\ x(t) = A \sin_\alpha(\omega t + \phi) \\ y(t) = y_0 + \dfrac{t\left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right) + u_0 x_0 - u(t)x(t)}{v_0(\alpha+1)} \end{cases} \tag{3.4}$$

其中， A、 ω和 ϕ 由初始条件 $\lambda(0) = (q, \lambda_0) = (x_0, y_0, u_0\, \mathrm{d}x|_q + v_0\, \mathrm{d}y|_q) \in \mathrm{T}^*(\mathrm{G}_\alpha)$唯一确定：

$$\begin{aligned} A^2\omega^2 = u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}, \quad \omega^2 = v_0^2 A^{2(\alpha-1)}, \\ x_0 = A \sin_\alpha(\phi) \text{ and } u_0 = A\omega \cos_\alpha(\phi). \end{aligned} \tag{3.5}$$

为了研究奇点邻域内$\mathbb{G}_\alpha$ 的指数映射，必须研究雅可比方程，详见第 2.2 节。

由于该结构是秩变的，无法构造定理 4中提到的 Zelenko-Li 标架。因此，接下来将选取沿 $\lambda(t)$ 在余切丛 $\mathrm{T}^*(\mathbb{G}_\alpha)$

$$(E_a, E_b, F_a, F_b) = (\partial_u, \partial_v, \partial_x, \partial_y) \tag{3.6}$$

作为移动标架。

相对于该标架，线性映射

$$\mathrm{d}_{(p,\lambda_0)} \mathrm{e}^{t\overrightarrow{H}} : \mathrm{T}_{(p,\lambda_0)}(\mathrm{T}^*(\mathbb{G}_\alpha)) \to \mathrm{T}_{\lambda(t)}(\mathrm{T}^*(\mathbb{G}_\alpha))$$

恰好是映射 $(u_0, v_0, x_0, y_0) \mapsto (u(t)\ v(t)\ x(t)\ y(t))$ 的雅可比矩阵。利用关系式 (3.5) 和 α-三角函数的性质，并采用记号 $H := H(q, \lambda_0)$ 的简写，便可计算 $x(t)$ 关于初始条件 u_0, v_0, x_0, y_0 的偏导数：

$$\begin{cases} \partial_{u_0} x(t) = \dfrac{((\alpha-1)tu_0 - x_0)u(t) + u_0 x(t)}{2H\alpha} \\ \partial_{v_0} x(t) = \dfrac{\left(t\left(\alpha\left(2H - u_0^2\right) + u_0^2\right) + u_0 x_0\right) u(t) - u_0^2 x(t)}{2H\alpha v_0} \\ \partial_{x_0} x(t) = \dfrac{\left((\alpha-1)t\left(2H - u_0^2\right) + u_0 x_0\right) u(t) + \left(2H - u_0^2\right) x(t)}{2Hx_0} \\ \partial_{y_0} x(t) = 0 \end{cases}. \tag{3.7}$$

根据 (3.1)，关于初始条件的偏导数 $u(t$ 可通过考察 (3.7) 的时间导数得到。

$$\begin{cases} \partial_{u_0} u(t) = \dfrac{\alpha u_0 u(t) + ((\alpha-1)tu_0 - x_0)\dot{u}(t)}{2H\alpha} \\ \partial_{v_0} u(t) = \dfrac{\alpha\left(2H - u_0^2\right) u(t) + \left(t\left(\alpha\left(2H - u_0^2\right) + u_0^2\right) + u_0 x_0\right)\dot{u}(t)}{2\alpha H v_0} \\ \partial_{x_0} u(t) = \dfrac{\alpha\left(2H - u_0^2\right) u(t) + \left((\alpha-1)t\left(2H - u_0^2\right) + u_0 x_0\right)\dot{u}(t)}{2Hx_0} \\ \partial_{y_0} u(t) = 0 \end{cases}. \tag{3.8}$$

偏导数 $y(t$ 在此未明确写出，可结合 (3.7) 和 (3.8)，并考察 (3.4) 中最后一个等式得到。

刻画 (2.5) 中雅可比场的微分系统 $\mathbb{G}_\alpha$ 可以相对于标架 (3.6) 写出。然而，需要再次指出的是，由于次黎曼结构是秩变的，该标架并非典范标架，这使得穿过奇异区域的测地线不可能同时是充分且等正则的，因此也无法应用 定理 4。

命题 9. 令 $\lambda(t)$表示 $\mathbb{G}_\alpha$ 上初始条件为 $(q,\lambda_0) = (x_0, y_0, u_0\,\mathrm{d}x|_q + v_0\,\mathrm{d}y|_q) \in \mathrm{T}^*(\mathbb{G}_\alpha)$ 的正规极值曲线。若 (E_a, E_b, F_a, F_b) 表示沿 $\lambda(t)$ 由 $(\partial_u, \partial_v, \partial_x, \partial_y)$ 给出的辛标架，则向量场 $\mathcal{J}(t) = \sum_{k\in\{a,b\}} p_k(t)E_k(t) + x_k(t)F_k(t)$ 当且仅当是沿 $\lambda(t)$ 的雅可比场时，

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_a(t) \\ \dot{p}_b(t) \\ \dot{x}_a(t) \\ \dot{x}_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1(t) & -R(t) \\ C_2(t) & C_1(t)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a(t) \\ p_b(t) \\ x_a(t) \\ x_b(t) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

其中

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha v_0 x(t)^{2(\alpha-1)}x(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^{2\alpha}(t) \end{pmatrix},$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} \alpha(2\alpha-1)v_0^2 x(t)^{2(\alpha-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proof. 要得到该结果，只需计算标架中的元素（E_a，E_b，F_a，F_b）沿 $\lambda(t)$ 方向的李导数，方向向量为 $\vec{H}$，如第 2.2 节所示。这是一项冗长而繁琐的计算。注意到以下几点即可完成计算：

$$\begin{aligned} A(u(t),v(t),x(t),y(t)) &= A(u_0,v_0,x_0,y_0) \\ \omega(u(t),v(t),x(t),y(t)) &= \omega(u_0,v_0,x_0,y_0) \\ \phi(u(t),v(t),x(t),y(t)) &= \omega(u_0,v_0,x_0,y_0)t + \phi(u_0,v_0,x_0,y_0) \end{aligned},$$

其中，例如，$A(u(t)\ v(t)\ x(t)\ y(t))$ 表示初始条件 $u(t)\ v(t)\ x(t)\ y(t)$ 对应于 (3.5) 时 A 的值。因此，借助 $\mathrm{d}_{(p,\lambda_0)}\mathrm{e}^{t\vec{H}}$ 关于 (3.7) 和 (3.8) 的表达式以及函数 (3.4) 的性质，可以按照 (2.4) 中的定义，求出 ∂_u 沿 $\vec{H}$ 方向的李导数，并得到

$$\begin{aligned} \dot{\partial}_u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (\mathrm{d}_{\lambda(t+\varepsilon)}\mathrm{e}^{-\varepsilon\vec{H}})[\partial_u(t+\varepsilon)] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \begin{pmatrix} \frac{\alpha u(t)u(t+\varepsilon) - ((\alpha-1)\varepsilon u(t+\varepsilon) + x(t+\varepsilon))u'(t)}{2\alpha H} \\ 0 \\ \frac{x(t)u(t+\varepsilon) - ((\alpha-1)\varepsilon u(t+\varepsilon) + x(t+\varepsilon))u(t)}{2\alpha H} \\ \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

辛标架中其他元素的导数也可用类似方法求得。结合 (2.6)，即可得出结论。□

微分方程的显式积分 (3.9) 可以使用α-三角函数来完成。将满足

(3.9) 的初始条件写成 $(p_a(0)\ p_b(0)\ x_a(0)\ x_b(0)) = (p_{a0},\ p_{b0},\ x_{a0},\ x_{b0})$，可得 $p_b(t)$，而 $= p_{b0}$的方程 $x_a(t)$ 为

$$\ddot{x}_a(t) + \alpha v_0 x(t)^{2(\alpha-1)} \left[2p_{b0}x(t) + (2\alpha-1)v_0 x_a(t)\right] = 0,$$

采用拟设 $x_a(t) = k_1 x(t) + (k_2 + k_3 t)u(t)$，即可对其积分。经过一些计算，可以得到

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\alpha x_{a0} v_0^3 x_0^{2\alpha} + p_{a0}u_0 v_0 x_0 - p_{b0}u_0^2 x_0}{\alpha v_0 x_0 \left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right)} \\ k_2 &= \frac{\alpha x_{a0} u_0 v_0 - p_{a0} v_0 x_0 + p_{b0} u_0 x_0}{\alpha v_0 \left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right)} \\ k_3 &= \frac{(\alpha-1)v_0 k_1 + p_{b0}}{v_0}. \end{aligned}$$

函数 $p_a(t)$ 可通过对 $x_a(t)$ 求导得到，即 $p_a(t) = (k_1 + k_3)u(t) + (k_2 + k_3 t)\dot{u}(t)$。最后，我们可以对方程积分

$$\dot{x}_b(t) = p_{b0}x(t)^{2\alpha} + 2\alpha v_0 x(t)^{2(\alpha-1)} x(t) x_a(t)$$

注意到 $\dot{y}(t) = v_0 x(t)^{2\alpha}$，$\dot{u}(t) = -\alpha v_0^2 x(t)^{2(\alpha-1)} x(t)$ 根据 (3.1)，以及

$$\begin{aligned} \int_0^t u(s)\dot{u}(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\left(u(t)^2 - u_0^2\right); \\ \int_0^t s u(s)\dot{u}(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{u_0 x_0 - \alpha t\left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right) + (\alpha+1)tu(t)^2 - u(t)x(t)}{2(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

为完整起见，也应写出 $x_b(t)$ 的完整表达式：

$$\begin{aligned} x_b(t) = q_{b0} &+ \left(\frac{p_{b0}}{v_0} + 2\alpha k_1\right)\frac{t\left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right) + u_0 x_0 - u(t)x(t)}{v_0(\alpha+1)} \\ &- \frac{k_2}{v_0}\left(u(t)^2 - u_0^2\right) - k_3 \frac{u_0 x_0 - \alpha t\left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right) + (\alpha+1)tu(t)^2 - u(t)x(t)}{v_0(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

引入以下记号：x_1、u_1、$\dot{x}_1$ 和 $\dot{u}_1$ 分别表示 $x(1)$ $u(1)$ $\dot{x}(1)$ 和 $\dot{u}(1)$。因此，这些变量取决于初始条件x_0、u_0、v_0。类似地，在表示时刻 $t = 1$ 雅可比场的坐标表示时，我们将用 p_{a1}、p_{b1}、x_{a1}、x_{b1} 表示 $p_a(1)$ $p_b(1)$ $x_a(1)$ $x_b(1)$。

命题 10. 余向量 $\lambda_0 = u_0 \mathrm{d}x|_q + v_0\,\mathrm{d}y|_q \in \mathrm{T}_q^*(\mathsf{G}_\alpha)$ 是 $q = (x_0, y_0) \in \mathsf{G}_\alpha$ 在 $H(\lambda_0) \neq 0$ 时的共轭余向量，当且仅当

$$u_1(u_0 + x_0) - u_0 x_1 = 0 \ \textit{and}\ v_0 \neq 0. \tag{3.10}$$

此外，共轭向量 $\lambda_0 \in \mathsf{Conj}_q(\mathsf{G}_\alpha)$ 的阶均为一，并且

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \mathrm{span}\left\{v_0 x_0^{2\alpha}\partial_u - u_0\partial_v\right\}. \tag{3.11}$$

Proof. 根据 (2.7)，我们知道

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \{p_{a0}E_1(0) + p_{20}E_2(0) \mid (p(t), x(t)) \text{ solves (3.9)},\ x(0) = x(1) = 0\}.$$

根据 G_α 的雅可比场显式表达式可知，在假设 $x_{11} = x_{12} = 0$ 的情况下，若 $v_0 \neq 0$，则有

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ u_1 x_{11} + v_0 x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_0 x_1 + u_1((\alpha-1)u_0 - x_0)}{\alpha(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha})} & \frac{\alpha u_1 v_0^2 x_0^{2\alpha} - u_0^2 x_1 + u_0^2 u_1 + u_0 u_1 x_0}{\alpha v_0(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha})} \\ u_0 & v_0 x_0^{2\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{10} \\ p_{20} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

第一种情况： $v_0 = 0$。根据测地流关于初始条件的连续性，这等价于考虑 (3.12) 当 v_0 趋于 0 时的情形。这得到 $x_{a1} = p_{b0}$， $x_{a1} = p_{b0}$，因此沿这样的测地线不存在共轭余向量。因此，从现在起，我们假设 $v_0 \neq 0$。

第二种情况： $u_0 = 0$ （特别是 $x_0 \neq 0$）。此时，(3.12)中出现的矩阵变为

$$\begin{pmatrix} -\frac{u_1}{\alpha v_0^2 x_0^{2(\alpha-1)} x_0} & \frac{u_1}{v_0} \\ 0 & v_0 x_0^{2\alpha} \end{pmatrix}.$$

当且仅当 $u_1 = 0$ 时，它才有非平凡核；等价地，$\sin_\alpha(\omega) = 0$ 且 $\cos_\alpha(\phi) = 0$。这意味着在这种情况下，当且仅当 $p_{b0} = 0$ 时存在非平凡雅可比场，而 p_{a0} 可以任意取值，此时

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \mathrm{span}\{E_a(0)\}.$$

第三种情况： $u_0 \neq 0$ 且 $u_0 x_1 + u_1((\alpha-1)u_0 - x_0) = 0$。由于 $H(\lambda(t)) \neq 0$ 为常数，我们特别有 $u_1 \neq 0$。

矩阵(3.12)可化简为

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{u_1}{v_0} \\ u_1 & v_0 x_0^{2\alpha} \end{pmatrix},$$

它的核是平凡的。因此，这种情况不会产生任何共轭余向量。

第四种情况： $u_0 \neq 0$， $u_0 x_1 + u_1((\alpha-1)u_0 - x_0) \neq 0$ 且 $x_0 = 0$。这些条件意味着 $u_1 \neq 0$。此时，矩阵(3.12) 化简为

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1 + (\alpha-1)u_1}{\alpha u_0} & \frac{u_1 - x_1}{v_0} \\ u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

当且仅当 $u_1 = x_1$ 时，存在非平凡的核，因此 $x_1 \neq 0$。沿着 $\lambda(t)$ 的相应非平凡雅可比场的初始条件为 $p_{a0} = 0$，而 p_{b0} 任意，并且

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \mathrm{span}\{E_b(0)\}.$$

第五种情况： $u_0 \neq 0$， $u_0 x_1 + u_1((\alpha-1)u_0 - x_0) \neq 0$ 且 $x_0 \neq 0$。这里，矩阵(3.12)与下式相似

$$\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & -\left(\frac{u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}}{v_0}\right) \frac{u_1(u_0+x_0) - u_0 x_1}{u_0 x_1 + u_1((\alpha-1)u_0 - x_0)} \end{pmatrix}$$

当且仅当 $u_1(u_0 + x_0) - u_0 x_1 = 0$ 时，该矩阵的核非平凡。在这种情况下，同一个矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{v_0 x_0^{2\alpha}}{u_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，相应的雅可比场具有初始条件 $p_{b0} \in \mathbb{R}$ 和 $p_{a0} = -\frac{v_0 x_0^{2\alpha}}{u_0} p_{b0}$，此时核的表达式为

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \mathrm{span}\left\{v_0 x_0^{2\alpha}\partial_u - u_0\partial_v\right\}.$$

□

接下来，我们研究$\mathbb{G}_\alpha$ 的指数映射奇点，证明方程(3.10) 通过原像定理定义了 $\mathrm{T}^*_{(x_0,y_0)}(\mathbb{G}_\alpha)$ 的一个子流形。用惠特尼的术语来说，这意味着 $\exp_q$ 的共轭余向量是良性奇点(见定义1)。

命题 11. 对所有 $q \in \mathbb{G}_\alpha$，共轭轨迹 $\mathrm{Conj}_q(\mathbb{G}_\alpha)$ 是 $\mathrm{T}^*_q(\mathbb{G}_\alpha)$ 的一个余维 1 子流形。

Proof. 对于给定的 $x_0 \in \mathbb{R}$，我们将证明 0 是该映射的正则值

$$f_{x_0}(u_0, v_0) = u_1(u_0 + x_0) - u_0 x_1.$$

回想一下，x_1 和 u_1 是 x_0的函数，u_0 以及 v_0。关于 u_1 和x_1 对 u_0 或 v_0 的导数与(3.7) 和(3.8)中的表达式一致，其中取$t = 1$。

令 $q = (x_0,\ y_0) \in \mathbb{G}_\alpha$ 且 $\lambda_0 = u_0\,\mathrm{d}x|_q + v_0\,\mathrm{d}y|_q \in \mathrm{Conj}_q(\mathbb{G}_\alpha)$，其中 $H(q,\ \lambda_0) \neq 0$，也就是说 u_0 且 v_0 满足条件(3.10) 成立。我们发现

$$\partial_{u_0} f_{x_0}(u_0, v_0) = \begin{cases} \frac{u_1 v_0^2 x_0^{2a}}{u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}} & \text{如果 } u_0 + x_0 = 0 \\ \frac{\dot{u}_1 (u_0+x_0)^2((\alpha-1)u_0 - x_0) - \alpha v_0^2 x_1 x_0^{2\alpha} x_0}{\alpha(u_0+x_0)\left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right)} & \text{否则} \end{cases}, \tag{3.13}$$

and

$$\partial_{v_0} f_{x_0}(u_0, v_0) = \begin{cases} \frac{u_1 v_0 x_0^{2\alpha} x_0}{u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}} & \text{if } u_0 + x_0 = 0 \\ \frac{\dot{u}_1 (u_0+x_0)^2 \left(u_0^2 + \alpha v_0^2 x_0^{2\alpha} + u_0 x_0\right) + \alpha u_0 v_0^2 x_1 x_0^{2\alpha} x_0}{\alpha v_0 (u_0+x_0)\left(u_0^2 + v_0^2 x_0^{2\alpha}\right)} & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{3.14}$$

如果 $u_0 + x_0 = 0$，那么 $\partial_{v_0} f_{x_0}(u_0, v_0) = \partial_{u_0} f_{x_0}(u_0, v_0) = 0$ 实际上会推出 $H = 0$，这与我们的假设矛盾。另一方面，如果 $u_0 + x_0 \neq 0$，那么

$$\frac{u_0}{v_0}\partial_{u_0} f_{x_0}(u_0, v_0) + f_{u_0}(u_0, v_0) = \frac{\dot{u}_1(u_0 + v_0)}{v_0} = -\alpha x_1^{2(\alpha-1)} x_1 v_0 (u_0 + v_0),$$

当且仅当其为零时 $x_1 = 0$ 并且由 (3.10) 可再次推出 $H = 0$。

特别地，线性映射 $\mathrm{d}f_{x_0}(u_0, v_0)$ 是满射，结论得证。 □

如 第 2.1 节所述，指数映射在其奇点附近的性质将由核 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q)$ 与 $\mathrm{T}_{\lambda_0}(\mathrm{Conj}_q(\mathbb{G}_\alpha))$ 在$\lambda_0 \in \mathrm{Conj}_q(\mathbb{G}_\alpha)$ 处的相互作用决定。

Theorem 12. 在 $\mathrm{Conj}_q(\mathbb{G}_\alpha)$ 的一个稠密非空开子集 C^0 上，指数映射 $\exp_q : \mathrm{T}^*(\mathbb{G}_\alpha) \to \mathbb{G}_\alpha$ 等价于 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x^2, y)$，在任意 $\lambda_0 \in C^0$ 的邻域内均成立。

Proof. 根据 命题 11，我们可以选取一个一维开连通子流形 C，它属于共轭集$_q(\mathbb{G}_\alpha)$ 且包含于 $\mathrm{T}^*_q(\mathbb{G}_\alpha)$ 中，并包含 λ_0。特别地，C 中的共轭向量的阶数均为 1。因此，我们将 C^0 （分别将 C^1）记为满足以下条件的余向量集合$\overline{\lambda}_0 \in C$：

$$\dim\left[\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\overline{\lambda}_0}\exp_q) \cap \mathrm{T}_{\overline{\lambda}_0}(\mathrm{Conj}_q(\mathbb{G}_\alpha))\right] = 0 \ (\text{resp. } = 1).$$

条件 $\lambda_0 \in C^1$ 可以表示为一个二元方程组

$$\begin{cases} u_1(u_0 + x_0) - u_0 x_1 = 0 \\ \det \begin{pmatrix} \partial_{u_0} f_{x_0}(u_0, v_0) & v_0 x_0^{2\alpha} \\ \partial_{v_0} f_{x_0}(u_0, v_0) & -u_0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}.$$

因此，由于解析性，集合 C^1 是闭集且无处稠密。因此，C^0 在 $C^0 \cup C^1$ 中稠密。

条件 $\lambda_0 \in C^0$ 恰好对应于 λ_0 在这种情况下是一个 折叠奇点，其含义见 定义 2，而惠特尼折叠的标准形由定理 3得出。□

由定理 12可直接推出以下结论。

命题 13. 指数映射 $\exp_p : T^*_q(G_\alpha) \to M$ 在共轭余向量 $\lambda_0 \in \mathrm{Conj}_q(G_\alpha)$ 的任意邻域内都不是单射。

Proof. $\exp$ 的标准形$_q$ 在 λ_0附近，如定理 12所述，表明 $\exp_q$ 在 λ_0 附近的任何区域内都不是 λ_0 一一函数，当 C^0属于C^0 时。由于$_q(\mathbb{G}_\alpha)$ 在 Conj 中稠密，因此对于 λ_0 在 C^1中的□

4. 特殊酉群 SU(2)

李群 SU(2) 是由以下 2×2 复矩阵构成的群：

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

SU(2) 中的一个元素可以对应于一对 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$，满足 $|\alpha|^2+|\beta|^2 =1$。通过这种对应，群结构定义为：

$$(\alpha, \beta) \star (\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' - \beta\overline{\beta'}, \alpha\beta' + \overline{\alpha'}\beta).$$

单位元是单位矩阵，对应于 (1, 0)；逆元为 $(\alpha, \beta)^{-1} = (\overline{\alpha}, -\beta)$。

SU(2) 的李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 自然对应于由反厄米无迹 2×2 复矩阵构成的空间：

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i}a & b \\ -\overline{b} & -\mathrm{i}a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathrm{T}_e(\mathrm{SU}(2)).$$

$\mathfrak{su}(2)$ 的一组基为 X_0, X_1, X_2 其中

$$X_0 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \; X_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ and } X_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

我们还有如下对易关系

$$[X_1, X_2] = X_0, \; [X_2, X_0] = X_1, \text{ and } [X_0, X_1] = X_2. \tag{4.1}$$

我们按以下方式构造次黎曼结构：令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathfrak{su}(2)$ 上的内积，使 X_1, X_2 和 X_0 构成标准正交基。我们还定义 $\mathsf{d} := \mathrm{span}\,\{X_1, X_2\}$ 和 $\mathsf{s} = \mathrm{span}\,\{X_0\}$，并将 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{d}}$ 记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 d 上的限制。通过对 d 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{d}}$进行左平移，我们在 SU(2) 上得到一个定义良好的次黎曼结构。李群上的这类次黎曼结构通常称为 $\mathsf{d} \oplus \mathsf{s}$ 次黎曼结构，这种结构的正规测地线表达式已广为人知（见 [3, 第 7.7 节。1]）。度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 用于识别向量和余向量。

该结构的次黎曼哈密顿量为

$H : \mathrm{T}^*(\mathrm{SU}(2)) \to \mathrm{R} : (uX_1(\alpha, \beta) + vX_2(\alpha, \beta) + wX_0(\alpha, \beta)\ \alpha, \ \beta) \mapsto \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$。

由左不变性，只需写出从单位元出发的测地线。在此情况下，从 $(q,\ \lambda_0) \in \mathrm{T}^*(\mathrm{SU}(2))$ 出发且具有 $q = 0$ 和 $\lambda_0 = u_0X_1 + v_0X_2 + w_0X_0$ 的正规极值曲线为

$$
\begin{cases}
\alpha(t) = \left(\cos\left(\frac{w_0t}{2}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{w_0t}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{|\lambda_0|t}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{w_0}{|\lambda_0|}\sin\left(\frac{|\lambda_0|t}{2}\right)\right) \\
\beta(t) = \frac{1}{|\lambda_0|}(u_0 + \mathrm{i}v_0)\sin\left(\frac{|\lambda_0|t}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{w_0t}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{w_0t}{2}\right)\right) \\
u(t) = u_0\cos(w_0t) - v_0w_0\sin(w_0t) \\
v(t) = v_0\cos(w_0t) + u_0w_0\sin(w_0t) \\
w(t) = w_0
\end{cases}, \tag{4.2}
$$

其中 $|\lambda_0|^2 = \langle\lambda_0, \lambda_0\rangle = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2$。

该结构具有我们在定理 4中描述的正规标架类型。为了引入该标架，我们必须首先确立一些记号，紧随 [1, 第 7.5 节]。对于 $i \in \{0, 1, 2\}$，我们定义函数 $h_i : \mathrm{T}^*(\mathrm{SU}(2)) \to \mathbb{R}$，使得 $h_i(\lambda) := \langle\lambda, X_i(\pi(\lambda))\rangle$。于是，向量场

$$\overrightarrow{h_0}, \overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \partial_{h_0}, \partial_{h_1}, \partial_{h_2}$$

构成 $\mathrm{T}^*(\mathrm{SU}(2))$ 上的一个局部向量场标架。我们还可以引入柱坐标 θ、ρ：$\mathrm{T}^*(\mathrm{SU}(2)) \to \mathrm{R}$，其中 $h_1 = \rho\cos\theta$、$h_2 = \rho\sin\theta$，并使用局部标架

$$\overrightarrow{h_0}, \overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \partial_{h_0}, \partial_\rho, \partial_\theta.$$

欧拉向量场是 $\mathrm{T}^*(\mathrm{SU}(2))$ 的纤维上膨胀 $\lambda \mapsto c\lambda$ 的生成元，在坐标中

$$\mathfrak{e} = h_0\partial_{h_0} + h_1\partial_{h_1} + h_2\partial_{h_2} = \rho\partial_\rho + h_0\partial_{h_0}.$$

另一方面，哈密顿量写作 $H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2)$，而其辛梯度为 $\overrightarrow{H} = h_1\overrightarrow{h_1} + h_2\overrightarrow{h_2}$。最后，我们定义 $\overrightarrow{H'} = [\partial_\theta, \overrightarrow{H}]$。利用括号关系 (4.1)，不难得出

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{h_0} &= \tilde{X}_0 + h_2\partial_{h_1} - h_1\partial_{h_2} = \tilde{X}_0 - \partial_\theta \\
\overrightarrow{h_1} &= \tilde{X}_1 - h_2\partial_{h_0} + h_0\partial_{h_2} \\
\overrightarrow{h_2} &= \tilde{X}_2 - h_0\partial_{h_1} + h_1\partial_{h_0}
\end{aligned}
$$

其中，$\tilde{X}_i(\lambda) \in \mathrm{T}_\lambda(\mathrm{T}^*(M))$ 的选取满足 $\mathrm{d}_\lambda\pi[\tilde{X}_i(\lambda)] = X_i(\pi(\lambda))$。这使我们能够计算

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{H} &= h_1\tilde{X}_1 + h_2\tilde{X}_2 + h_0(h_1\partial_{h_2} - h_2\partial_{h_1}) \\
\overrightarrow{H'} &= h_1\overrightarrow{h_2} - h_2\overrightarrow{h_1} - 2H\partial_{h_0} + h_0(h_1\partial_{h_1} + h_2\partial_{h_2}) = h_1\tilde{X}_2 - h_2\tilde{X}_1 \\
[\overrightarrow{H}, \overrightarrow{H'}] &= 2H\overrightarrow{h_0} - h_0\overrightarrow{H} + |\lambda_0|^2(h_1\partial_{h_2} - h_2\partial_{h_1}) = 2H\tilde{X}_0 - h_0(h_1\tilde{X}_1 + h_2\tilde{X}_2)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

包括 SU(2) 在内的三维接触次黎曼结构中的测地线都是充分且等正则的，因此可以使用定理 4中所述的典范辛移动标架。对于任意三维接触结构，该标架的构造见 [1, 第 7 节。5] 我们在此将其应用于 SU(2)。

命题 14. 设 $\lambda(t)$ 是从 $(q, \lambda_0) \in T^*(SU(2))$ 出发的 $T^*(SU(2))$ 中的正规极值曲线。辛移动标架 $(E_a, E_b, E_c, F_a, F_b, F_c)$，其中

$$
\begin{aligned}
E_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}\partial_\theta & F_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}\overrightarrow{H'} \\
E_b(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}\mathfrak{e} & F_b(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}\overrightarrow{H} \\
E_c(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2H}}\partial_{h_0} & F_c(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}([\overrightarrow{H'}, \overrightarrow{H}] + |\lambda_0|^2\partial_\theta)
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

是沿着 $\lambda(t)$ 的典范移动标架。更具体地说，它满足以下结构方程

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_a(t) &= -F_a(t) & \dot{F}_a(t) &= |\lambda_0|^2 E_a(t) \\
\dot{E}_b(t) &= -F_b(t) & \dot{F}_b(t) &= 0 \\
\dot{E}_c(t) &= E_a(t) & \dot{F}_c(t) &= 0
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

.

Proof. 存在这样的标架是 定理 4的推论。该定理的证明实际上具有构造性，详见 [16]。该定理的算法已应用于 [1, 第 7 节5]。如 [1, 命题7.13], 所述，剩下的任务是确定矩阵 $R(t)$（见 定理 4）的值，具体而言，是求出各项 $R_{aa}(t)$ 和 $R_{cc}(t)$。它们是唯一可能非零的项。借助 (4.3)，可按如下方式计算：

$$
\begin{aligned}
R_{aa}(t) &= \frac{1}{2H}\sigma_{\lambda(t)}([\overrightarrow{H}, \overrightarrow{H'}], \overrightarrow{H'}) = 2H + h_0^2 = |\lambda_0|^2, \text{ and} \\
R_{cc}(t) &= \frac{1}{2H}\sigma_{\lambda(t)}([\overrightarrow{H}, [\overrightarrow{H}, \overrightarrow{H'}]], [\overrightarrow{H}, \overrightarrow{H'}]) - \frac{1}{(2H)^2}\sigma_{\lambda(t)}([\overrightarrow{H}, \overrightarrow{H'}], \overrightarrow{H'})^2 = 0.
\end{aligned}
$$

□

使用这样的移动标架能大大简化 SU(2) 共轭轨迹的研究。我们首先写出并求解 SU(2) 的雅可比方程 (2.6) 。

命题15。 若 $(E,\ F)$ 表示 命题 14的辛标架，则向量场 $\mathcal{J}(t) = \sum_{k\in\{a,b,c\}} p_k(t)E_k(t) + x_k(t)F_k(t)$ 沿着 $\lambda(t)$ 是雅可比场，当且仅当

$$
\begin{pmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1(t) & -R(t) \\ C_2(t) & C_1(t)^\mathsf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ x(t) \end{pmatrix}, \tag{4.6}
$$

其中

$$
C_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
R(t) = \begin{pmatrix} |\lambda_0|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Proof. 这是由命题 14 结合(2.6)得出的一个简单结论。 □

方程(4.6) 很容易求解。为了进行接下来的步骤，我们将解明确写出。

(4.7)
$$\begin{cases} p_a(t) = p_{a0}\cos(|\lambda_0|t) - \dfrac{\left(|\lambda_0|^2 x_{a0} + p_{c0}\right)\sin(|\lambda_0|t)}{|\lambda_0|} \\ p_b(t) = p_{b0} \\ p_c(t) = p_{c0} \\ x_a(t) = \dfrac{\left(|\lambda_0|^2 x_{a0} + p_{c0}\right)\cos(|\lambda_0|t) + |\lambda_0| p_{a0}\sin(|\lambda_0|t) - p_{c0}}{|\lambda_0|^2} \\ x_b(t) = p_{b0}t + x_{b0} \\ x_c(t) = \dfrac{|\lambda_0|\left(|\lambda_0|^2 x_{c0} - p_{a0}\cos(|\lambda_0|t) + p_{a0} - p_{c0}t\right) + \left(|\lambda_0|^2 x_{a0} + p_{c0}\right)\sin(|\lambda_0|t)}{|\lambda_0|^3} \end{cases}$$

命题 16. 余向量 $\lambda_0 \in \mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2))$ 是 $q \in \mathrm{SU}(2)$ 的共轭余向量，且 $H(q,\lambda_0) \neq 0$ 当且仅当

$$\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)\left(|\lambda_0|\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)\right) = 0, \ \textit{and}\ |\lambda_0| \neq 0.$$

此外，共轭余向量 $\lambda_0 \in \mathrm{Conj}_q(\mathrm{SU}(2))$ 的阶均为一，并且

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \mathrm{span}\left\{|\lambda_0|\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)(u_0\partial_v - v_0\partial_u) + 4\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)\partial_w\right\}. \tag{4.8}$$

Proof. 根据 (4.7) 中关于 SU(2) 的雅可比场方程，以及雅可比场与 命题7中的共轭点之间的关系，我们看到，当且仅当存在 $(p_{a0},\ p_{b0},\ p_{c0}) \neq 0$ 使得

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sin(|\lambda_0|)}{|\lambda_0|} & 0 & \frac{\cos(|\lambda_0|)-1}{|\lambda_0|^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1-\cos(|\lambda_0|)}{|\lambda_0|^2} & 0 & \frac{\sin(|\lambda_0|)-|\lambda_0|}{|\lambda_0|^3} \end{pmatrix}}_{=:M_{|\lambda_0|}} \begin{pmatrix} p_{a0} \\ p_{b0} \\ p_{c0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在这种情况下，我们可以根据 命题 8计算核：
$$\text{核}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \left\{p_{a0}E_a(0) + p_{b0}E_b(0) + p_{c0}E_c(0) \mid (p_{a0},p_{b0},p_{c0}) \in \text{核}(M_{|\lambda_0|})\right\}.$$

第一种情况： $|\lambda_0| = 0$。当 $|\lambda_0|$ 趋近于零时，矩阵 $M_{|\lambda_0|}$ 变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

其核为零。因此，当 $|\lambda_0| = 0$ 时，沿该测地线不存在共轭点。从此以后，我们将假设 $|\lambda_0| \neq 0$

第二种情况：$\sin(|\lambda_0|) = 0$ 且 $\cos(|\lambda_0|) = 1$。此时，矩阵 $M_{|\lambda_0|}$ 等于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{|\lambda_0|^2} \end{pmatrix}$$

因此，其核由形如（$p_{a0}, 0, 0$）的向量构成。因此，

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \mathrm{span}\left\{E_a(0)\right\},$$

共轭余向量的阶为 1。

第三种情况：$\sin(|\lambda_0|) = 0$ 和 $\cos(|\lambda_0|) = -1$。此处，矩阵 $M_{|\lambda_0|}$ 等于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{|\lambda_0|^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{|\lambda_0|^2} & 0 & \frac{-1}{|\lambda_0|^2} \end{pmatrix}$$

其行列式为 $\frac{4}{|\lambda_0|^4}$，因此不存在共轭向量。

第四种情况：$\sin(|\lambda_0|) \neq 0$。那么，矩阵 $M_{|\lambda_0|}$ 相似于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\tan\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)}{|\lambda_0|} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sec\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)\left(|\lambda_0|\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)-2\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)\right)}{|\lambda_0|^3} \end{pmatrix}$$

特别地，$\sec\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) = 0$ 不可能成立，因此当且仅当 $|\lambda_0|\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) = 0$ 时，存在一个共轭点。在这种情况下，矩阵变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\tan\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)}{|\lambda_0|} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

并且当且仅当 $p_{b0} = 0$ 且 $p_{a0} = \frac{p_{c0}}{|\lambda_0|}\tan\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)$ 时，雅可比场会消失。经过一些代数运算，我们得到

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \operatorname{span}\left\{|\lambda_0|\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)E_a(0) - 4\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)E_c(0)\right\}.$$

□

命题 17. 对所有 $q \in$SU(2)，共轭轨迹 Conj$_q$(SU(2)) 是 T$^*_q$(SU(2)) 中余维为 1 的子流形。

Proof. 共轭轨迹是不相交的两个集合的并：Conj$_q$(SU(2)) $= C^0 \cup C^1$ 其中

$$C^0 := \left\{\lambda_0 \in \mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)) \mid |\lambda_0|\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) = 0\right\}$$

and

$$C^1 := \left\{\lambda_0 \in \mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)) \mid \sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) = 0\right\}.$$

与命题 11中一样，我们使用隐函数定理，证明 0 是 $f_0(\lambda_0) = |\lambda_0|\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)$ (分别是 $f_1(\lambda_0) = \sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)$) 的正则值，其中 C^0 (分别是 C^1)。我们得到

$$\mathrm{d}_{\lambda_0} f_0 = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)(u_0\,\mathrm{d}u|_{\lambda_0} + v_0\,\mathrm{d}v|_{\lambda_0} + w_0\,\mathrm{d}w|_{\lambda_0}) \neq 0 \text{ in } C^0 \tag{4.9}$$

and

$$\mathrm{d}_{\lambda_0} f_1 = \frac{1}{2|\lambda_0|}\cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)(u_0\,\mathrm{d}u|_{\lambda_0} + v_0\,\mathrm{d}v|_{\lambda_0} + w_0\,\mathrm{d}w|_{\lambda_0}) \neq 0 \text{ in } C^1.$$

□

利用奇点理论，SU(2) 的指数映射在临界点附近的标准形可以表示为我们先前概述的形式。

THEOREM 18. 指数映射 $\exp_q : \mathrm{T}^*(\mathrm{SU}(2)) \to \mathrm{SU}(2)$ 在 $\lambda_0 \in \mathrm{Conj}_q(\mathrm{SU}(2))$ 的邻域内等价于 $f\colon \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3\colon (x,y,z) \to (x^2,y,z)$，对于 λ_0 中的一个非空稠密子集中的 C^0，以及当 $\lambda_0 \in C^1$ 时等价于 $f\colon \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3\colon (x,y,z) \to (xz,y,z)$。

PROOF. 命题 17 表明，SU(2) 的每个共轭余向量都是良好奇点，其意义下的惠特尼奇点。

当 $\lambda_0 \in C^0$时，根据 (4.8) 和 (4.9) 的显式表达式，我们观察到

$$\dim\left[\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) \cap \mathrm{T}_{\lambda_0}(\mathrm{Conj}_q(\mathrm{SU}(2))\right] = 0$$

如果 $w_0 \neq 0$。事实上，我们有

$$\mathrm{d}_{\lambda_0} f_0 \left[|\lambda_0| \cos\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)(u_0\partial_v - v_0\partial_u) + 4\sin\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right)\partial_w \right] = -2w_0|\lambda_0|\sin^2\left(\frac{|\lambda_0|}{2}\right),$$

其不为零。这意味着 $\lambda_0 \in C^0$ 在 $w_0 \neq 0$ 处是 折叠奇点 $\exp_q$，而标准形由 定理 3推出。满足 $\lambda_0 \in C^0$ 使得 $w_0 = 0$ 的 子集在 C^0中显然是无处稠密的。

当 $\lambda_0 \in C^1$ 时，方程

$$\mathrm{d}_{\lambda_0} f_1 \left[u_0\partial_v - v_0\partial_u\right] = 0$$

成立，因此我们有

$$\dim\left[\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) \cap \mathrm{T}_{\lambda_0}(\mathrm{Conj}_q(\mathrm{SU}(2))\right] = 1$$

对所有 $\lambda_0 \in C^1$。本文此前尚未讨论过这种奇点，必须按照 [12, 定理 3.3。] 中的思路手工构造。

我们首先选择坐标 $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\colon \mathcal{U} \to \mathrm{R}^3$，使其适配二维流形 C^1 并以 λ_0 为中心，也就是说 $\xi(\lambda_0) = 0$，且

$$C^1 \cap \mathcal{U} = \left\{\overline{\lambda}_0 \in \mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)) \cap \mathcal{U} \mid \xi_1(\overline{\lambda}_0) = 0\right\}.$$

由 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q)$ 给出的空间族构成一个 C^1 维的对合分布；根据弗罗贝尼乌斯定理，可以选择坐标图 $(\mathcal{U},\xi)$，使该分布的积分流形为子流形

$$\left\{\overline{\lambda}_0 \in C^1 \cap \mathcal{U} \mid \xi_1(\overline{\lambda}_0) = 0, \xi_2(\overline{\lambda}_0) = c\right\},$$

其中 c 为常数。我们还选择坐标图 $\eta = (\eta_1,\eta_2,\eta_3)\colon \mathcal{V} \to \mathrm{R}^3$，以 $\exp_q(\lambda_0)$ 为中心，并使其适配 $\exp_q$ 对 C^1 以及 C^1 的积分流形的作用。首先，选择该坐标图使得

$$\exp_q(C^1 \cap \mathcal{U}) \subseteq \{p \in \mathrm{SU}(2) \cap \mathcal{V} \mid \eta_1(p) = 0\}. \tag{4.10}$$

其次，分布的每个积分流形都映射到 SU(2) 中的一个点。因此，也可以将坐标图 $(\eta,\mathcal{V})$ 选取为满足

$$\exp_q\left(\left\{\overline{\lambda}_0 \in \mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)) \cap \mathcal{U} \mid \xi_1(\overline{\lambda}_0) = 0, \xi_3(\overline{\lambda}_0) = 0\right\}\right) = \{p \in \mathrm{SU}(2) \cap \mathcal{V} \mid \eta_1(p) = 0, \eta_3(p) = 0\}. \tag{4.11}$$

第三，它最终满足

$$\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta_1},\ \mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta_2},\ \text{and}\ \mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)=0. \tag{4.12}$$

采用这一坐标选择，特别是由于(4.12)，在 (0，0，0) 处的（$\exp_q$）$\xi\eta:=\eta\circ\exp_q\circ\xi^{-1}$的泰勒展开可写为：

$$(\exp_q)^1_{\xi\eta}=x+R_1,\ (\exp_q)^2_{\xi\eta}=y+R_2,\ \text{and}\ (\exp_q)^3_{\xi\eta}=R_3,$$

其中，积分余项 R_1、R_2 和 R_3 在 (0, 0, 0) 处有一个 2 阶零点。因此，可以在 λ_0 的邻域内引入新的坐标图 $\omega=(\omega_1、\omega_2、\omega_3)$，如下所示：

$$\omega_1:=\eta_1\circ\exp_q=\xi_1+R_1\circ\xi,\ \omega_2:=\eta_2\circ\exp_q=\xi_2+R_2\circ\xi,\ \omega_3:=\xi_3. \tag{4.13}$$

这确实构成了一个有效的坐标图，因为 $R_1\circ\xi$ 和 $R_2\circ\xi$ 的消失阶不低于 2。

现在考虑投影 $\pi_{3,2}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:(x,y,z)\mapsto(x,y,0)$，并在 $\exp_q(\lambda_0)$ 附近定义新坐标 $\Upsilon=(\Upsilon_1,\Upsilon_2,\Upsilon_3)$：

$$\Upsilon_1=\eta_1,\ \Upsilon_2=\eta_2,\ \Upsilon_3=\eta_3-\eta_3\circ\exp_q\circ\omega^{-1}\circ\pi_{3,1}\circ\eta. \tag{4.14}$$

同样，这是一个定义良好的坐标图，因为 R_3 在 (0,0,0) 处的消失阶大于 2。稍后将会明白选择这个坐标图的原因。由 (4.10)、(4.11)、(4.13) 和 (4.14)，显然有

$$\Upsilon_3\circ\exp_q(\overline{\lambda}_0)=0\ \text{whenever}\ \omega_1(\overline{\lambda}_0)=0.$$

必定存在一个函数 χ_3，使得 $\Upsilon_3\circ\exp_q=\omega_1\chi_3$ 在 λ_0 的某个邻域内成立，并满足 $\chi_3(\lambda_0)=0$，这是由 (4.13) 以及 R_3 在 (0,0,0) 处的阶不小于 2 得出的。最后，令 $\chi_1:=\omega_1$，$\chi_2:=\omega_2$。尚需证明$\chi=(\chi_1,\chi_2,\chi_3)$ 是 λ_0 的某个邻域上的一个定义良好的坐标图，因为若果真如此，则 $\exp_q$ 在坐标 χ 和 Υ 下的表达式为

$$(\exp_q)_{\chi\Upsilon}(x,y,z)=(xy,y,z).$$

因此，本证明的其余部分将着重于证明矩阵 $(\partial\chi_i/\partial\omega_j(\lambda_0))$ 可逆；在这里，这等价于证明 $\partial\chi_3/\partial\omega_3(\lambda_0)=\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)/\partial\omega_1\partial\omega_3(\lambda_0)\neq0$。需要证明这一性质涉及 $\exp_q$ 的二阶导数。我们先计算其余所有一阶和二阶偏导数。由 (4.13)，我们可以立即得出

$$\frac{\partial(\Upsilon_1\circ\exp_q)}{\partial\omega_1}(\lambda_0)=1,\ \text{and}\ \frac{\partial(\Upsilon_2\circ\exp_q)}{\partial\omega_2}(\lambda_0)=1,$$

而 $\Upsilon_1\circ\exp_q$ 和 $\Upsilon_2\circ\exp_q$ 的二阶偏导数为零。由于 λ_0 是 $\Upsilon_3\circ\exp_q$ 的二阶零点，因此 $\Upsilon_3\circ\exp_q$ 的所有一阶偏导数在 λ_0 处均为零。对于二阶偏导数，我们首先计算

$$\frac{\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)}{\partial\omega_2^2}(\lambda_0)=\frac{\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)}{\partial\omega_3^2}(\lambda_0)=\frac{\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)}{\partial\omega_2\partial\omega_3}(\lambda_0)=0,$$

根据以下事实：$\Upsilon_3\circ\exp_q=\omega_1\chi_3$ 以及 $\omega_1(\lambda_0)=0$。其次，(4.14)中的特定选择意味着

$$\frac{\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)}{\partial\omega_1^2}(\lambda_0)=\frac{\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)}{\partial\omega_1\partial\omega_2}(\lambda_0)=0.$$

最后，考虑 exp 在 [13, 第 1 节26]中所述的二阶微分$_q$ 在 λ_0处：

$$\mathrm{d}^2_{\lambda_0}\exp_q : \mathrm{T}^2_{\lambda_0}(\mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2))) \to \mathrm{T}^2_{\exp_q(\lambda_0)}(\mathrm{SU}(2)), \tag{4.15}$$

定义为 $\mathrm{d}^2_{\lambda_0}\exp_q[v](f) := v(f\circ\exp q)$，对任意光滑函数 $f \in \mathcal{C}^\infty$ 以及任意二阶切向量 $v \in \mathrm{T}^2_{\lambda_0}(\mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)))$均成立。现在，经过简短计算（另见 [12, 引理 2.1.]）可知，若 $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ 是 λ_0 处的欧拉向量场，且$v \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp q)$，即根据（2.7），$v = p_a(0)E_a(0) + p_b(0)E_b(0) + p_c(0)E_c(0)$，其中 $(p(t)\ x(t))$ 满足（2.6），且 $x(0) = x(1) = 0$，则

$$\mathrm{d}^2_{\lambda_0}\exp_q[\mathfrak{e}v(\lambda_0)] = \dot{x}_a(1)X_a(1) + \dot{x}_b(1)X_b(1) + \dot{x}_c(1)X_c(1) + \mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q\left[\mathrm{T}_{\lambda_0}(\mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)))\right].$$

我们声称 $\mathrm{d}^2_{\lambda_0}\exp_q[\mathfrak{e}v(\lambda_0)] \notin \mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q\left[\mathrm{T}_{\lambda_0}(\mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)))\right]$。根据（4.7）和命题 16，我们可以进行显式计算：若 $v = u_0\partial_v - v_0\partial_u \in \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp q)$，则 $\dot{x}_a(1)X_a(1) + \dot{x}_b(1)X_b(1) + \dot{x}_c(1)X_c(1) = X_a(1)$。现在，利用（2.8），我们得到

$$\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q\left[\mathrm{T}_{\lambda_0}(\mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)))\right] = \mathrm{span}\left\{|\lambda_0|^2X_b(1) - X_c(1)\right\},$$

证明该论断。

因此，将 $\alpha : \mathrm{T}^2_{\exp_q(\lambda_0)}(\mathrm{SU}(2)) \to \mathrm{T}^{\exp_q(\lambda_0)}(\mathrm{SU}(2))$ 称为从二阶切向量空间到一阶切向量空间的投影，我们必有线性映射 $\alpha\circ\mathrm{d}^2_{\lambda_0}\exp q : \mathrm{T}^2_{\lambda_0}(\mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2))) \to \mathrm{T}^{\exp_q(\lambda_0)}(\mathrm{SU}(2))$ 是满射。该映射在由坐标 ω在 λ_0 附近以及坐标 Υ 在 $\exp q(\lambda_0)$ 附近诱导的基下的矩阵，由 $\Upsilon_i\circ\exp q$ 关于 ω_j 在 λ_0 处的一阶和二阶偏导数组成；根据上述计算，该矩阵等于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)}{\partial\omega_1\partial\omega_3}(\lambda_0) \end{pmatrix},$$

根据满射性，其秩必为 3。这意味着

$$\partial^2(\Upsilon_3\circ\exp_q)/\partial\omega_1\partial\omega_3(\lambda_0) \neq 0$$

证明至此完成。 □

作为由定理 18中确定的标准形直接推出的结果，我们可以得到一个类似于命题 13 的关于 SU(2) 的结果。

命题 19. 指数映射 $\exp q : \mathrm{T}^*_q(\mathrm{SU}(2)) \to \mathrm{SU}(2)$ 在共轭余向量 $\lambda_0 \in \mathrm{Conj}q(\mathrm{SU}(2))$ 的任意邻域内都不是单射。

Proof. 当 $\lambda_0 \in C^0$ 且 w_0 时，这可直接由标准形得出：λ_0 是 $\exp q$ 的惠特尼折叠。若 $w_0 = 0$，则由稠密性可知它仍不是单射。

当 $\lambda_0 \in C^1$ 时，$\exp q$ 的标准形也意味着这一结果。或者，也可以不参照标准形进行论证，只需注意到 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\exp q)$ 的积分流形在 $\exp q$ 下被压缩为点。□

5. 特殊线性群 SL(2)

SL(2) 的指数映射的标准形与前文考察的 SU(2) 的标准形非常相似。因此，本节仅简要概述相关分析，不再重复所有细节。

李群 SL(2) 是由以下 2×2 实矩阵构成的群：

$$\mathrm{SL}(2)=\left\{M\in\mathbb{R}^{2\times 2}\mid \det(M)=1\right\}.$$

SL(2) 的李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 可自然地视为无迹2×2 实矩阵空间：

$$\mathfrak{sl}(2)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\cong \mathrm{T}_e(\mathrm{SL}(2)).$$

$\mathfrak{su}(2)$ 的一组基为 X_0、X_1、X_2，其中

$$X_0:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ X_1:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\text{ and }X_2:=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

我们还有如下对易关系

$$[X_1,X_2]=-X_0,\ [X_2,X_0]=X_1,\text{ and }[X_0,X_1]=X_2. \tag{5.1}$$

我们按如下方式构造次黎曼结构。令 $\mathsf{k}:=\mathrm{span}\{X_0\}$，$\mathsf{z}:=\mathrm{span}\ \{X_1,X_2\}$。可以看出，$\mathsf{k}$ 是一个（极大）紧子代数，而 z 包含于 $\mathfrak{sl}(2)$ 的中心。我们在 $\mathfrak{sl}(2)$ 上赋予双不变度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，使得 X_0、X_1、X_2 成为一组正交归一基。通过将 z 左平移，并将 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 限制到 z 上得到 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathsf{z}}$，我们在 SL(2) 上得到一个良定义的次黎曼结构。李群上的这类次黎曼结构通常称为 $\mathsf{k}\oplus\mathsf{z}$ 次黎曼结构，其正规测地线的表达式是众所周知的（参见 [3, 第 7.7.4] 节）。度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 用于识别向量和余向量。

定义以下函数会很有帮助：对于 $a\in\mathbb{R}$，令

$$\mathsf{s}_a(t):=\begin{cases}\sin(\sqrt{a}t)/\sqrt{a}, & \text{if } a>0\\ t, & \text{if } a=0\\ \sinh(\sqrt{-a}t)/\sqrt{-a}, & \text{if } a<0\end{cases},\text{ and }\mathsf{c}_a(t):=\begin{cases}\cos(\sqrt{a}t), & \text{if } a>0\\ 1, & \text{if } a=0\\ \cosh(\sqrt{-a}t), & \text{if } a<0\end{cases}.$$

该结构的次黎曼哈密顿量为

$$H:\mathrm{T}^*(\mathrm{SL}(2))\to\mathbb{R}:(uX_1(M)+vX_2(M)+wX_0(M),M)\mapsto\frac{1}{2}(u^2+v^2).$$

此外，当 $\lambda_0\in\mathrm{T}^*_q(\mathrm{SL}(2))$ 时，定义

$$r_{\lambda_0}:=w_0^2-(u_0^2+v_0^2).$$

由左不变性，只需写出从单位元出发的测地线。在这种情况下，从 $(q,\lambda_0)\in\mathrm{T}^*(\mathrm{SL}(2))$ 出发的正规极值曲线，其中 $q=0$ and$\lambda_0=u_0X_1+v_0X_2+w_0X_0$ 为

$$\begin{cases}M(t)=\begin{pmatrix}m_1(t) & m_2(t)\\ m_3(t) & m_4(t)\end{pmatrix}\\ u(t)=u_0\cos(w_0t)+v_0w_0\sin(w_0t),\\ v(t)=v_0\cos(w_0t)-u_0w_0\sin(w_0t)\\ w(t)=w_0\end{cases}$$

其中

$$
\begin{aligned}
m_1(t) &= \mathsf{s}_a(\tfrac{t}{2})\left(u_0\cos(\tfrac{w_0t}{2}) + (w_0-v_0)\sin(\tfrac{w_0t}{2})\right) + \mathsf{c}_a(\tfrac{t}{2})\cos(\tfrac{w_0t}{2});\\
m_2(t) &= \mathsf{s}_a(\tfrac{t}{2})\left((v_0-w_0)\cos(\tfrac{w_0t}{2}) + u_0\sin(\tfrac{w_0t}{2})\right) - \mathsf{c}_a(\tfrac{t}{2})\sin(\tfrac{w_0t}{2});\\
m_3(t) &= \mathsf{s}_a(\tfrac{t}{2})\left((v_0+w_0)\cos(\tfrac{w_0t}{2}) + u_0\sin(\tfrac{w_0t}{2})\right) - \mathsf{c}_a(\tfrac{t}{2})\sin(\tfrac{w_0t}{2});\\
m_4(t) &= \mathsf{s}_a(\tfrac{t}{2})\left(-u_0\cos(\tfrac{w_0t}{2}) + (v_0+w_0)\sin(\tfrac{w_0t}{2})\right) + \mathsf{c}_a(\tfrac{t}{2})\cos(\tfrac{w_0t}{2}).
\end{aligned}
$$

我们使用由标架 X_0、X_1、X_2 在 T*(SL(2)) 上诱导的相同坐标，这些坐标也用于 T*(SU(2))。与 命题 14中一样，也可以计算 SL(2) 的正则标架，其中矩阵 $R(t)$ 的相关项由 定理 4给出，表示为

$$
\begin{aligned}
R_{aa}(t) &= \frac{1}{2H}\sigma_{\lambda(t)}([\overrightarrow{H},\overrightarrow{H}'],\overrightarrow{H}') = h_0^2 - 2H = r_{\lambda_0},\ \text{and}\\
R_{cc}(t) &= \frac{1}{2H}\sigma_{\lambda(t)}([\overrightarrow{H},[\overrightarrow{H},\overrightarrow{H}']],[\overrightarrow{H},\overrightarrow{H}']) - \frac{1}{(2H)^2}\sigma_{\lambda(t)}([\overrightarrow{H},\overrightarrow{H}'],\overrightarrow{H}')^2 = 0.
\end{aligned}
$$

命题 20. 设 $\lambda(t)$ 是 T*(SL(2)) 中从 $(q,\lambda_0) \in$ T*(SL(2)) 出发的正规极值曲线。辛移动标架 $(E_a, E_b, E_c, F_a, F_b, F_c)$ 满足

$$
\begin{aligned}
E_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}\partial_\theta \qquad F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2H}}\overrightarrow{H}'\\
E_b(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}\mathfrak{e} \qquad F_b(t) = \frac{1}{\sqrt{2H}}\overrightarrow{H}\\
E_c(t) &= \frac{1}{\sqrt{2H}}\partial_{h_0} \quad F_c(t) = \frac{1}{\sqrt{2H}}([\overrightarrow{H}',\overrightarrow{H}] + (w_0^2-2H)\partial_\theta)
\end{aligned}
$$

是沿着 $\lambda(t)$ 的典范移动标架。具体而言，它满足结构方程

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_a(t) &= -F_a(t) \quad \dot{F}_a(t) = (w_0^2-2H)E_a(t)\\
\dot{E}_b(t) &= -F_b(t) \quad \dot{F}_b(t) = 0\\
\dot{E}_c(t) &= E_a(t) \qquad \dot{F}_c(t) = 0
\end{aligned}
\quad .
$$

SL(2) 的雅可比场方程可由 (2.6) 轻易推出。

命题 21. 若 (E,F) 表示 命题 20中的辛标架，则向量场 $\mathcal{J}(t) = \sum_{k\in\{a,b,c\}} p_k(t)E_k(t) + x_k(t)F_k(t)$ 沿着 $\lambda(t)$ 是雅可比场，当且仅当

$$
\begin{pmatrix}\dot{p}(t)\\ \dot{x}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C_1(t) & -R(t)\\ C_2(t) & C_1(t)^{\mathsf{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p(t)\\ x(t)\end{pmatrix}, \tag{5.2}
$$

其中

$$
C_1(t) = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ C_2(t) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},
$$

$$
R(t) = \begin{pmatrix}w_0^2-2H & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
$$

这些方程得到显式求解，且解显式依赖于 r_{λ_0}:

$$
\begin{cases}
p_a(t) = p_{a0}\mathsf{c}_{r_{\lambda_0}}(t) - (ax_{a0} + p_{c0})\,\mathsf{s}_{r_{\lambda_0}}(t) \\
p_b(t) = p_{b0} \\
p_c(t) = p_{c0} \\
x_a(t) = \dfrac{(r_{\lambda_0}x_{a0} + p_{c0})\,\mathsf{c}_{r_{\lambda_0}}(t) - p_{c0}}{a} + p_{a0}\mathsf{s}_{r_{\lambda_0}}(t) \\
x_b(t) = p_{b0}t + x_{b0} \\
x_c(t) = x_{c0} + \dfrac{p_{a0}(1 - \mathsf{c}_{r_{\lambda_0}}(t)) - p_{c0}t + (r_{\lambda_0}x_{a0} + p_{c0})\mathsf{s}_{r_{\lambda_0}}(t)}{a}
\end{cases}
\tag{5.3}
$$

如证明命题 16所示，通过研究线性方程组，可以刻画 SL(2) 的临界点及相应的核

$$
\begin{pmatrix}
\mathsf{s}_{r_{\lambda_0}}(1) & 0 & \frac{\mathsf{c}_{r_{\lambda_0}}(1)-1}{r_{\lambda_0}} \\
0 & 1 & 0 \\
\frac{1-\mathsf{c}_{r_{\lambda_0}}(1)}{r_{\lambda_0}} & 0 & \frac{\mathsf{s}_{r_{\lambda_0}}(1)-1}{r_{\lambda_0}}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} p_{a0} \\ p_{b0} \\ p_{c0} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

这里一个有趣的特点是，带有 $r_{\lambda_0} \leq 0$ 的初始余向量永远不会共轭，因为此时上述矩阵的行列式等于

$$
\sinh\left(\frac{\sqrt{-r_{\lambda_0}}}{2}\right)\left(\sqrt{-r_{\lambda_0}}\cosh\left(\frac{\sqrt{-r_{\lambda_0}}}{2}\right) - 2\sinh\left(\frac{\sqrt{-ar_{\lambda_0}}}{2}\right)\right) \neq 0.
$$

这可以根据双曲函数的性质轻易看出。

命题 22。余向量 $\lambda_0 \in \mathrm{T}^*_q\mathrm{SL}(2))$ 是 $q \in \mathrm{SL}(2)$ 的共轭余向量，且满足 $H(q,\lambda_0) \neq 0$，当且仅当

$$
r_{\lambda_0} > 0, \ \textit{and} \ \sin\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right)\left(\sqrt{r_{\lambda_0}}\cos\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right)\right) = 0.
$$

此外，共轭余向量 $\lambda_0 \in \mathrm{Conj}_q(\mathrm{SL}(2))$ 的阶均为一，并且

$$
\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_{\lambda_0}\exp_q) = \mathrm{span}\left\{\sqrt{r_{\lambda_0}}\cos\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right)(u_0\partial_v - v_0\partial_u) + 4\sin\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right)\partial_w\right\}.
$$

与命题 17的证明类似，我们可以对函数应用隐函数定理

$$
\begin{aligned}
f_0(\lambda_0) &= \sqrt{r_{\lambda_0}}\cos\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right) \\
f_1(\lambda_0) &= \sin\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

并得出

$$
\mathrm{d}_{\lambda_0}f_0 = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right)(u_0\,\mathrm{d}u + v_0\,\mathrm{d}v - w_0\,\mathrm{d}w) \neq 0 \text{ in } C^0
$$

$$
\mathrm{d}_{\lambda_0}f_1 = -\frac{1}{2\sqrt{r_{\lambda_0}}}\cos\left(\frac{\sqrt{r_{\lambda_0}}}{2}\right)(u_0\,\mathrm{d}u + v_0\,\mathrm{d}v - w_0\,\mathrm{d}w) \neq 0 \text{ in } C^1
$$

这表明，SL(2) 的共轭轨迹是 T^*_q(SL(2)) 中的一个超曲面。

命题 23. 对所有 $q \in$SL(2)，共轭轨迹 Conj$_q$(SL(2)) 是 T$^*_q$(SL(2)} 中余维为 1 的子流形。

最后，可以应用奇点理论的方法，找出与定理 18中相同的 SL(2) 指数映射标准形式。

THEOREM 24. 在 $\lambda_0 \in$Conj$_q$(SL(2)) 的邻域内，SL(2) 的指数映射 exp$_q$: T*(SL(2)) →SL(2) 等价于 f: R^3 → R^3 : (x, y, z) → (x^2, y, z)（当 $\lambda_0 \in C^0$ 时），以及 f: R^3 → R^3 : (x, y, z) → (xz, y, z)（当 $\lambda_0 \in C^1$ 时）。

由于满足 $w_0 = 0$ 的余向量 $\lambda_0 \in$ T$^*_q$(SL(2)) 从不共轭，因此 $\lambda_0 \in C^0$ 的所有共轭余向量都是 exp$_q$ 的折叠奇点，而不仅仅是其中的稠密子集 C^0。

命题 25。指数映射 exp$_q$: T$^*_q$(SU(2)) → SU(2) 在共轭余向量 $\lambda_0 \in$Conj$_q$(SU(2)) 的任意邻域内都不是单射。

6. 结论与开放问题

如前几节所见，可以得出结论：至少对于某些特定例子，对临界点附近的次黎曼指数映射进行精确分析确实是可能的。

让我们介绍一种尚未讨论的临界点类型。在 [5, 定理 1], 中证明了，将黎曼几何或芬斯勒几何中的连续性性质 [12, 定义1 (R3)], 推广后，对于每个非平凡余向量 λ_0 conju- 与 $q \in M$共轭的余向量，都存在 λ_0 在 T$^*_q(M)$ 中的一个凸邻域 $\mathcal{U}$，使得对于每条经过 0 且与 $\mathcal{U}$相交的直线 r，指数映射 exp$_q$ 在 $r \cap \mathcal{U}$上的奇点数目（按重数计）保持不变，并等于 dim(Ker(d$_{\lambda_0}$exp$_q$))。假设不存在异常子段，那么以下两种情况必有其一：要么存在 λ_0的一个邻域，使得每条直线 r 在 $\mathcal{U}$ 中至多包含一个共轭余向量；要么不存在这样的邻域。第一种奇点称为正则共轭余向量，第二种称为奇异共轭余向量或分支共轭余向量（见 [12, 第 3]节）。正则（分别为奇异）共轭值的集合构成正则（分别为奇异）共轭轨迹。 [12, 定理 3.1] 证明，对于任意黎曼或芬斯勒流形，正则共轭轨迹是 Conj$_q(M)$ 的泛性子集。然而，当次黎曼几何中存在同时为正规和异常的测地线时，这一结论是否仍然成立尚不清楚。

OPEN PROBLEM 1. 次黎曼正则共轭轨迹是否是共轭轨迹中的一个非空开稠密子集?

在黎曼几何或芬斯勒几何中，正则共轭轨迹总是余维 1 的子流形。我们在此研究的例子均符合这一结论（见 命题 11、命题 17和命题 23），但对于一般的次黎曼流形，即使不存在非平凡的异常测地线，这一结论是否成立仍不得而知。在 [8, 第3.3节。], 中，我们对该问题作了部分肯定的回答，但这需要对奇点附加一个技术性假设。

此外，在黎曼几何和芬斯勒几何中，会出现一种有趣的现象。只要 λ_0 的阶为 2 或更高，且 λ_0 是正则奇点，d$_{\lambda_0}$exp$_q$ 的核总是包含在共轭轨迹的切空间中

在 λ_0处。这一几何性质早已由怀特黑德在 [14]中研究，并由 Warner 在 [12, 定理 3.2]中重新探讨。我不知道这一结论在次黎曼几何中是否成立。如定理 18的证明所示，这一性质对于研究指数映射在其奇点附近的标准形非常有用。

Open Problem 2. 在次黎曼几何中，正则共轭轨迹是 $T^*_q(M)$ 的子流形吗？是否存在一个整数 k，使得对于任意阶数为 $\geq k$ 的正则共轭余向量 λ_0，都有 $\mathrm{Ker}(d_{\lambda_0}\exp_q) \subseteq T_{\lambda_0}(T^*_q(M))$?

最后，可以通过考察更一般的次黎曼结构的指数映射来拓展本文的研究范围。在 [2], 中，作者采用一种相关但不同的方法，计算了三维接触情形下指数映射的短时间渐近展开（另见 [3, 第 19]章）。这些渐近展开包含了关于切割轨迹和共轭轨迹结构的一些信息，并且与曲率不变量有关，正如[1]所述。然而，对于命题 13、命题 19和命题 25等应用而言，仅凭这些渐近展开可能并不足够。

Open Problem 3. 将本研究的分析推广到更一般的次黎曼结构类别，例如三维接触结构。

一种可能的策略是先研究三维左不变结构，其分类可见 [3, 第 17 节。5]在 [6, 第 4], 节中，分析针对三维海森堡群展开；本文则在第4节讨论了 SU(2)，并在第5节讨论了 SL(2)。

正如命题 13、命题 19 和命题 25所示，指数映射在任一临界点的邻域内都不是单射，这一点意义重大，因为它表明指数映射不存在 $f(x) = x^3$类型的奇点。这将 Morse 和 Littauer 的一项结果推广到了某些次黎曼结构。众所周知，这种指数映射性质在芬斯勒几何中成立（见 [12, 定理 3.4。]），而本文作者最近采用不同于本文所述的方法，将这一结果推广到了广泛的一类次黎曼流形，见[8] 。

参考文献

1. A. Agrachev、D. Barilari 和 L. Rizzi, *Curvature: a variational approach*，美国数学会回忆录 **256** 2018 1225, +142 3852258 ( )，第 v 期。MR 。A. A. Agrachev,

2 *Exponential mappings for contact sub-Riemannian structures*，《动力系统与控制系统杂志》**2** 1403262 3 1996 3, 321 358 ( )，第 – 期。MR 。Andrei Agrachev、Davide Barilari 和 Ugo Boscain, *A comprehensive introduction to sub-riemannian geometry*，剑桥高级数学研究丛书，第181卷，剑桥大学出版社，剑桥，2020 3971262 4。MR。V. I. Arnold、S. M. Gusein-Zade 和 A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps.Volume 1*，现代 Birkh¨auser 经典著作，Birkh¨auser/施普林格出版社，纽约，2012，临界点、焦散与波前的分类，1985年版重印。MR 2896292 5. Samu¨el Borza, *Distortion coefficients of the α-Grushin plane*，《几何分析杂志》**32**(2022)，第3期，第78号论文，28页。MR 4363751 6. Samu ¨ *Regularity and Continuity Properties of the Sub-Riemannian Exponential Map* 2023 el Borza 和 Wilhelm Klingenberg，《动力系统与控制系统杂志》（）。7. Samuel Borza, *Distortion coefficients and exponential map in sub-Riemannian geometry*，博士论文，杜伦大学，2021, http://etheses.dur.ac.uk/14167/。8. Samu ¨ *Local non-injectivity of the exponential map at crit-* el Borza 和 *ical points in sub-Riemannian geometry* 2022 Wilhelm Klingenberg，。

9. Der-Chen Chang 和 Yutian Li, *SubRiemannian geodesics in the Grushin plane*, 《几何分析杂志》22 2927679 10 2012 3, 800 826 ( ), 第 – 期。MR。M. Golubitsky 和 V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, 《数学研究生教材》, 第14卷, 施普林格出版社, 纽约-海德堡, 1973。MR 0341518 11. Marston Morse 和 Sebastian B. Littauer, *A characterization of fields in the calculus ofvariations*, 《美国国家科学院院刊》18（1932）, 第12期, 724。12. Frank W. Warner, *The conjugate locus of a Riemannian manifold*, 《美国数学杂志》87（1965）, 575–604。MR 208534 13., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, 《数学研究生教材》, 第94卷, 施普林格出版社, 纽约-柏林, 1983, 1971年版的修订重印本。MR 722~~297 14.~~ J. H. C. Whitehead, *On the covering of a complete space by the geodesics through a point*, 《数学年刊》（2 1503245 15 36 1935 3, 679 704）（）, 第 – 期。MR。Hassler Whitney, *On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane* , 《数学年刊》 2 **62** 1955 374 410 （）（）, –。MR 73980 16. Igor Zelenko 和 Chengbo Li, *Differential geometry of curves in Lagrange Grassmannianswith given Young diagram*, 《微分几何及其应用》27（2009）, 第6期, 723–742。MR 2552681

Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA), via Bonomea 265, 34136 Trieste (TS), Italy*Current address*: 高等研究国际学院 (SISSA), via Bonomea 265, 34136 的里雅斯特 (TS), 意大利*Email address*: sborza@sissa.it