qq-特征的 ABCD

Satoshi Nawata, [1] **Kilar Zhang,** [2] **Rui-Dong Zhu**[3]

[1]复旦大学物理系与场论和粒子物理中心，*2005*年松湖路，邮编*200438*，中国上海[2]上海大学物理系，中国上海*200444* 上海天体物理重点实验室，中国上海*200234*[3]苏州大学高等研究院与物理科学与技术学院，中国苏州*215006*

电子邮箱： snawata@gmail.com， kilar@shu.edu.cn， rdzhu@suda.edu.cn

摘要：qq-特征是揭示 Seiberg-Witten 理论对称性与可积性的有力工具。本文旨在聚焦于未精细化极限，为具有 BCD 型规范群的五维 $\mathcal{N}=1$ 纯杨-米尔斯理论提供基于杨图的 qq-特征解析表达式。利用这些表达式，我们研究了经典规范群的 qq- 特征之间的关系。对于 SO(n) 规范群，我们通过 Ward 恒等式方法构造了一种量子环面型代数，并据此推导出 qq-特征。

arXiv:2302.00525v2 [hep-th] 5 Jul 2023

目录

1 引言 1

2 ABCD 的 qq-特征 32.1 作为缺陷配分函数的 qq-特征 3 2.2 未精细化极限下的 qq-特征 9 **3 qq-特征之间的李代数关系 12**

3.1 $\mathfrak{sp}(1)$与 $\mathfrak{su}(2)$ 13 3.2 $\mathfrak{sp}(2)$与 $\mathfrak{so}(5)$ 15 3.3 $\mathfrak{so}(4)$ 与 $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ 15 3.4 $\mathfrak{so}(6)$ 与 $\mathfrak{su}(4)$ 16

4 qq-特征的 Ward 恒等式方法与代数结构 17

4.1 量子环面代数 17 4.2 BD-型代数 20 4.3 “Ward 恒等式”方法 22

5 结论与讨论 25

A 记号与约定 28 B 未精细化极限下 qq-特征的有限性 29 C 未精细化极限下的垂直表示 31 D 瞬子配分函数的递推关系 34 D.1 极点抵消的证明 39

1 引言

自 Seiberg-Witten 精确结果 [1, 2] 及其与经典可积模型的关系 [3–5]提出以来，超对称规范理论中的可积结构一直受到深入研究。考虑 Ω 背景上的超对称理论时，Nekrasov 发展了超对称局域化技术，并用瞬子配分函数重新表述了 Seiberg-Witten 理论 [6]。这些进展揭示，在一般 Ω 背景上的超对称规范理论中，BPS 扇区由带有普适 R 矩阵的代数所支配，

例如量子环面代数和仿射杨代数 [7–9]。这暗示可积性与超对称规范理论之间存在深层联系，而这种联系可能源于规范理论的某种弦论构造。超对称规范理论的代数表述已推广至多种规范理论，范围从二维$\mathcal{N}=(2,2)$理论到六维$\mathcal{N}=(1,0)$理论（例如 [10–16]）。然而，判断给定理论中是否存在此类可积结构的标准仍未得到充分理解；即便对于具有 BCD-型规范群的纯规范理论，我们对其可积结构也缺乏清晰认识。研究 BCD-型规范理论的障碍之一，是通过 Jeffery-Kirwan（JK）处方得到的极点结构十分复杂 [17–19]。然而，在未精细化极限下，计算会大大简化，因为可以有效地用杨图的元组标记 JK 极点[20–22]。这或许能为研究 BCD-型规范理论的可积结构开辟一条新途径。

在超对称规范理论中，可积性有多种不同的表述。其中，qq-特征是一族物理量，首次于 [23], 命名；它们可用作探针，揭示规范理论的可积结构层级在不同参数区域中的表现。对于 A型规范群，qq-特征作为算子值量生成所谓的箭图 $\mathcal{W}$ 代数，也就是与该规范理论箭图结构对应的 Dynkin 图相关联的 $\mathcal{W}$ 代数 [24, 25]。在 Nekrasov-Shatashvili 极限下（该极限关闭一个 Ω 背景参数），其期望值给出一类量子可积模型的 TQ 关系 [26], ；进一步取经典极限时，其期望值则化为具有八个超荷的超对称规范理论的 Seiberg-Witten曲线。对于具有 BCD型规范群的超对称规范理论， [27, 28] 提出了 qq-特征的膜构造，作为对 [29] 的推广。由于称为 Y函数的自然量包含无穷多项，且 JK 留数的求值十分复杂，要在具有 BCD型规范群的五维$\mathcal{N}=1$ 超对称规范理论中求得 qq-特征的精确形式一直是一项艰巨任务。本文聚焦于未精细化极限；该极限大幅简化了计算，并给出这些理论中 qq-特征的解析表达式。这将为 [21] 中提出的、将瞬子配分函数表示为对杨图求和的解析表达式提供进一步的有力证据。此外，我们利用 qq-特征的解析表达式，探究规范理论中的代数结构，这种结构或可与可积性建立联系。

本文结构安排如下。在 §2中，我们回顾 qq-特征作为余维四缺陷配分函数的概念，并基于杨图求和，为经典规范群给出解析表达式。在 §3中，我们考察同构规范代数的 qq-特征之间的李代数关系，以此验证 §2中推导出的解析表达式。在 §4中，我们深入探讨

如何构造一种量子环面型代数，以重现 $\mathrm{SO}(n)$ 规范理论的（基本）qq-特征表达式，并采用 [30, 31]中概述的 Ward 恒等式方法。此外，文中还附有若干附录，以补充正文内容并提供具体的计算细节。

2 qq-特征的方方面面

本节将概述通过局域化计算推导 qq-特征的方法，并给出经典规范群的 qq-特征在未精细化极限下、以杨图表示的“有限”表达式。这将清晰地阐释 qq-特征是 Seiberg-Witten 曲线的量子化。

2.1 qq-特征作为缺陷配分函数

qq-特征这一概念最初由 Nekrasov 在 BPS/CFT 对应的背景下提出 [23], ，并将其推广为量子仿射代数的 q-特征 [32]。它们也可以理解为 Ω 背景[27, 29]下带有余维四缺陷的4d/5d超对称规范理论的配分函数。本文将特别关注具有8个超荷的纯杨-米尔斯理论。Ω 背景有效地将五维 $\mathcal{N} = 1$纯杨-米尔斯理论约化为瞬子模空间上的超对称量子力学。由于经典规范群的瞬子模空间的 ADHM描述已为人所知 G, 带有余维四缺陷时纯杨-米尔斯理论的配分函数可以表示为 Jeffery-Kirwan（JK）留数积分：

$$Z^{\mathfrak{g}}_{\text{defect}}(\vec{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{q}^k}{|W(G_k)|} \oint_{\text{JK}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{d}\phi_i}{2\pi i} Z^{(k)}_{\text{vec}} Z^{(k)}_{\text{def}}(\vec{z}) \ , \tag{2.1}$$

其中 $\mathfrak{q}$ 表示规范耦合常数（或取解耦极限后的动力学尺度）。注意， G_k 是 k瞬子模空间上超对称量子力学的规范群，而 $|W(G_k)|$ 是其 Weyl 群的阶。JK 留数积分 [33–35]是对瞬子量子力学的规范逸度 ϕ_i进行的。被积函数中的贡献 $Z^{(k)}_{\text{vec}}$ 可由 [6, 36, 37]所示的 ADHM 描述得到。要读出缺陷贡献 $Z^{(k)}_{\text{缺陷}}(\vec{z})$，可以考察 D膜之间的膜构型和开弦谱 [27, 29]。

考虑图 1 所示的 IIA 型理论中的膜构型。此外，我们引入 Ω-变形，其中 $\mathrm{U}(1)_{\epsilon_1} \times \mathrm{U}(1)_{\epsilon_2}$ 旋转x^{1234}-平面 $\mathbb{R}^4$ ，而 $\mathrm{U}(1)_m \times \mathrm{U}(1)_{-m}$ 旋转 x^{5678}-平面 $\mathbb{R}^4$。因此，一堆 D4 膜上的世界体理论是五维 $\mathcal{N} = 1^*$ 理论，其中伴随

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4/O4	•	•	•	•	•	–	–	–	–	–
D0	•	–	–	–	–	–	–	–	–	–
D4′	•	–	–	–	–	•	•	•	•	–

表 1。含有威尔逊线的 ADHM 构造中膜网构造的膜配置（由 D4′ 膜引入）。

超多重态的质量为 m。五维规范群类型与 O4 面种类之间的对应关系如下：

$$\begin{array}{ll} A & \mathrm{No} \\ B & \widetilde{\mathrm{O4}}^{-} \\ C & \mathrm{O4}^{+}, \widetilde{\mathrm{O4}}^{+} \\ D & \mathrm{O4}^{-} \end{array}$$

D0 膜产生瞬子，而 D4′ 膜实现余维四缺陷。正如我们将看到的，该缺陷可以理解为威尔逊环。回想一下，在瞬子模空间上的 $\mathcal{N}=4$ 超对称量子力学中，D0 膜产生规范群 G_k，D4 膜则产生味对称性G。从这一观点来看，D0 膜与 D4′ 膜之间的弦连接，以及 D4 膜与 D4′ 膜之间的弦，会产生额外的场。表 2列出了这些场。具体而言，带有 G_k 电荷的超多重态和费米多重态源自 D0-D4′ 弦，而带有 G 电荷的费米多重态则源自 D4-D4’弦。这些多重态具有一个实质量参数ζ，它对应于 D4 膜与 D4′ 膜沿 x^9方向的相对距离。

多重态	G_k	G
超	□	∅
费米	□	∅
费米	∅	□

表2。由于存在 D4′-膜而出现的额外多重态。

通过取解耦极限 $m \to \infty$，我们可以得到存在缺陷时纯杨-米尔斯理论的配分函数。对于 $G = \mathrm{SU}(N)$，这种膜构型已在 [29] 中考虑；而对于其他经典规范群，则在 [27] 中引入了其他类型的 O 面。不过，正如我们将在下文看到的，纯杨-米尔斯理论中的缺陷贡献与 [27] 中相同。接下来，我们将给出具有经典规范群的五维理论的缺陷配分函数的显式表达式。

全文中，我们用 $q_1 = e^{-\epsilon_1}$、 $q_2 = e^{-\epsilon_2}$ 表示 Ω-变形的参数，并采用记号 $\epsilon_\pm = \frac{\epsilon_1 \pm \epsilon_2}{2}$。未精细化极限指 $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \hbar$，此时五维参数为 $q = e^{-\hbar} = q_1 = q_2^{-1}$。

*A*型

首先，我们回顾一下 A 型规范群这一成熟案例。在这种情况下， G_k =U(k)，而瞬子配分函数的被积函数为

$$Z_{\rm vec}^{(k)} = e^{\kappa\phi_i}\left(\frac{[\![2\epsilon_+]\!]}{[\![\epsilon_1]\!][\![\epsilon_2]\!]}\right)^k \prod_{i=1}^{k}\prod_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{[\![\epsilon_+ \pm(\phi_i - \mathfrak{a}_\alpha)]\!]}\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\mathcal{S}(\phi_i-\phi_j+\epsilon_+)^{-1}\ . \tag{2.2}$$

从图 2中可以读出缺陷贡献 [29]

$$Z_{\rm def}^{(k)}(\vec{z}) = \prod_{j=1}^{w}\prod_{\alpha=1}^{N}[\![\zeta_j - \mathfrak{a}_\alpha + 2\epsilon_+]\!]\prod_{i=1}^{k}\mathcal{S}(\zeta_j-\phi_i), \tag{2.3}$$

其中 $z_j = \exp(-\zeta_j)$、 $A_\alpha = \exp(-\mathfrak{a}_\alpha)$，且 $\mathcal{S}$ 由下式给出

$$\mathcal{S}(\zeta) := \frac{[\![\epsilon_- \pm \zeta]\!]}{[\![\epsilon_+ \pm \zeta]\!]}\ . \tag{2.4}$$

本文采用如下约定： $[\![\alpha]\!] := 2\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 以及 $[\![\alpha \pm \beta]\!] := [\![\alpha+\beta]\!][\![\alpha-\beta]\!]$。注意， κ 式（2.2）中的 5d Chern-Simons 级别为零，但 §3.1中除外。余维四缺陷的位置记为 ζ_j，其总数为 w （即 D4′ 膜的数量）。不过，除非另有说明（仅在（2.18）中），我们主要关注 $w = 1$ 的情形。

对于 A 型，采用一般的 Ω 背景参数（ϵ_1, ϵ_2）时，得到了 qq-特征 [38]。这是可行的，因为等变 $\vec{}$ 作用在 k-瞬子模空间上的不动点集由 N 元组 λ 杨图分类，其中方格总数为 $|\vec{\lambda}| = k$；而瞬子配分函数$\vec{}$可在精细化层次[6]表示为对 N 元组 λ 杨图求和。此外，在精细化层次进行 JK 留数积分，也能得到相同的结果 [17]。因此，当不存在缺陷时（即 $w = 0$），瞬子配分函数为：

$$Z_{\rm inst}^{\mathfrak{su}(N)} = \sum_{\vec{\lambda}}\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|}Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{su}(N)}\ , \qquad Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{su}(N)} = \prod_{\alpha,\beta=1}^{N}N^{-1}_{\lambda^{(\alpha)}\lambda^{(\beta)}}(Q_{\alpha\beta}, q_1, q_2), \tag{2.5}$$

其中库仑支参数通过 $Q_{\alpha\beta} = A_\alpha/A_\beta$ 进入公式，而 Nekrasov 因子 $N_{\lambda\nu}(Q, q_1, q_2)$ 表示为

$$N_{\lambda\nu}(Q,q_1,q_2) := \prod_{(i,j)\in\lambda}\left(1 - Qq_2^{-\nu_i+j}q_1^{\lambda_j^t-i+1}\right)\prod_{(i,j)\in\nu}\left(1 - Qq_2^{\lambda_i-j+1}q_1^{-\nu_j^t+i}\right). \tag{2.6}$$

Nekrasov 因子的一些相关性质列于附录 D。在此，为便于后续使用，我们将等变作用 $\mathrm{U}(1)_{\epsilon_{1,2}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathfrak{a}}$ 的一个不动点集（或等价地，JK 极点集）写作 $|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref}$，并用 Gaiotto 态 [39] 的内积表示瞬子配分函数

$$|\mathfrak{G}\rangle = \sum_{\vec{\lambda}} \left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} Z^{\mathfrak{su}(N)}_{\vec{\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}} |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref}\,, \qquad \langle\mathfrak{G}\,|\mathfrak{G}\rangle = Z^{\mathfrak{su}(N)}_{\rm inst}\ . \tag{2.7}$$

回顾一下，纯杨-米尔斯理论源自类 $\mathcal{S}$ 构造 [39], 中带有两个不规则奇点的球面，而不规则奇点对应于 Gaiotto 态，即对偶 $\mathcal{W}$-代数 [40]中的相干态。

正如 [29], 中所做的那样，即使存在一个缺陷 $w=1$，JK 极点也分为两类 N-元杨图。第一类中的极点来自 $Z^{(k)}_{\rm vec},^{\rightarrow}$，因此与 λ 没有缺陷时的极点相同。另一方面，在另一类中，一个极点位于 $\phi_i = \zeta - \epsilon_+$，它来自 $Z^{(k)}$ 缺陷；其余极点源自 $Z^{(k)}_{\rm vec}$，并按照 $\vec{\lambda}'$ 分类，其中 $|\vec{\lambda}'| = |\vec{\lambda}| - 1$。这两类极点的贡献可以很好地归纳为两个期望值:

$$\langle\chi^A(z)\rangle = Z^{\mathfrak{su}(N)}_{\rm defect}(z) = \langle Y^A(z)\rangle + \left\langle \frac{\mathfrak{q} c_A}{Y^A(zq_3)} \right\rangle, \tag{2.8}$$

其中 $c_A = (-1)^N$ 和 $q_3 = (q_1 q_2)^{-1}$。此处，$\langle Y^A(z)\rangle$ 可以解释为缺陷（2.3）的期望值，其中，算符 $\mathcal{O}$在五维纯杨-米尔斯理论中的期望值，定义为将其夹在 Gaiotto 态$|\mathfrak{G}\rangle$

$$\langle\mathcal{O}\rangle := \langle\mathfrak{G}|\,\mathcal{O}\,|\mathfrak{G}\rangle\ . \tag{2.9}$$

并且我们可以将其解释为算符 $Y^A(z)$ 在基 $\{|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref}\}$上对角作用，如下所示:

$$Y^A(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref} = \mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref}\,, \tag{2.10}$$

with

$$\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z) = \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\zeta - \mathfrak{a}_\alpha + 2\epsilon_+]\!] \prod_{x\in\vec{\lambda}} \mathcal{S}(\zeta-\phi_x) = \frac{\prod_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} [\![\zeta-\phi_x+\epsilon_+]\!]}{\prod_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})} [\![\zeta-\phi_x-\epsilon_+]\!]}, \tag{2.11}$$

and

$$\phi_x = \mathfrak{a}_\alpha - \epsilon_+ + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2\ , \qquad x=(i,j)\in\lambda^{(\alpha)} \tag{2.12}$$

注意，$\mathfrak{A}(\vec{\lambda})/\mathfrak{R}(\vec{\lambda})$ 分别是 $\vec{\lambda}$ 中可以添加/移除的方格集合。因此，$Y^A(z)$ 的期望值可表示为

$$\langle Y^A(z)\rangle := \sum_{\vec{\lambda}} \mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} \mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z) Z^{\mathfrak{su}(N)}_{\vec{\lambda}}. \tag{2.13}$$

$\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z)$ 和 $1/\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(zq_3)$ 中都存在非物理极点。然而，可以通过计算 JK 留数积分证明，这些极点的留数为零，因为 $\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z)$ 中的极点与 $c_A/\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}'}(zq_3)$ 中的极点相互抵消，其中 $\vec{\lambda}'$ 满足 $|\lambda'| = |\lambda| - 1$。此外，qq-特征在 $z \sim 0$和 $z \sim \infty$ 附近的渐近行为可表示为：

$$\begin{aligned} z^{\frac{N}{2}} \langle \chi(z) \rangle &\sim z^N, \quad z \sim \infty \\ z^{\frac{N}{2}} \langle \chi(z) \rangle &\sim \mathcal{O}(z^0), \quad z \sim 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

这意味着 $z^{\frac{N}{2}} \langle \chi(z) \rangle$ 是关于 z 的 N 次多项式，即

$$\langle \chi(z) \rangle = z^{-\frac{N}{2}} \sum_{i=0}^{N} f_i z^i \ . \tag{2.15}$$

这些系数 f_i 是 A、$q_{1,2}$的有理函数。关于具有 A型规范群的规范理论的 qq-特征，详尽综述请参阅 [41] 。

正如（2.8）所示，qq-特征实际上具有代数意义，体现了 A型规范理论的箭图结构（在经典层次上，Seiberg-Witten曲线与箭图基本特征之间的这一关系最早由 [42] 注意到，并被推广到完整的Ω形变区域，见 [23, 24]）。例如，$\mathfrak{su}(2)$ 的基本表示的特征为

$$\chi = y + y^{-1}, \tag{2.16}$$

相应的 qq-特征可以理解为 Seiberg-Witten曲线的双重量子化版本。$w = 2$ 的特征对应于伴随表示的特征

$$\chi_{w=2} = y^2 + 1 + y^{-2}, \tag{2.17}$$

并提升为

$$\begin{aligned} \langle \chi_{w=2}(\vec{z}) \rangle =& \langle Y^A(z_1) Y^A(z_2) \rangle + \mathfrak{q} c_A \left\langle \mathcal{S}(\zeta_1 - \zeta_2 + \epsilon_+) \frac{Y^A(z_1)}{Y^A(z_2 q_3)} \right\rangle \\ &+ \mathfrak{q} c_A \left\langle \mathcal{S}(\zeta_2 - \zeta_1 + \epsilon_+) \frac{Y^A(z_2)}{Y^A(z_1 q_3)} \right\rangle + \mathfrak{q}^2 c_A^2 \left\langle \frac{1}{Y^A(z_1 q_3) Y^A(z_2 q_3)} \right\rangle . \end{aligned} \tag{2.18}$$

这一有趣的关系是在 [42] 中为具有 ADE-箭图结构的 A 型规范理论发现的。

BD 型

对于 A 型规范群，qq-特征的性质已得到充分研究，但其他类型的相关研究却很少。我们来考虑 G =SO(n) 的情形，此时瞬子量子力学由 G_k =Sp(k) 描述。

记作 $n = 2N + \xi$ ($n \equiv \xi$ 模 2)，SO(n) 纯杨-米尔斯理论的瞬子配分函数被积函数 [36] 为

$$Z_{\rm vec}^{(k)} = \frac{[\![2\epsilon_+]\!]^k}{[\![\epsilon_{1,2}]\!]^k} \prod_{i=1}^{k} \frac{[\![\pm 2\phi_i]\!][\![2\epsilon_+ \pm 2\phi_i]\!]}{[\![\epsilon_+ \pm \phi_i]\!]^\xi \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!]} \prod_{i<j} \mathcal{S}(\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \phi_j)^{-1} \ . \tag{2.19}$$

缺陷的贡献可由表2

$$Z_{\rm def}^{(k)}(z) = [\![\zeta]\!]^\xi \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\zeta \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!] \prod_{i=1}^{k} \mathcal{S}(\zeta \pm \phi_i) \ , \tag{2.20}$$

其中 $\mathcal{S}$ 定义于（2.4）中。这等价于 [27]中推导出的结果。积分照常使用 JK 处方进行。

类型 C

在 Sp(N) 理论中，由于离散的 θ 角 [43]，缺陷配分函数的计算更加复杂。事实上，Sp(N) 瞬子量子力学的规范群是 $G_k = \mathrm{O}(k)$ [36, 37]，，它有两个连通分支 O(k)$^\pm$。选择将这两部分贡献相加还是相减，取决于理论中的 θ 角：

$$Z_{\rm defect}^{\mathfrak{sp}(N)_\theta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{q}^k \frac{Z^{(k+)}(z) \pm Z^{(k-)}(z)}{2}, \tag{2.21}$$

其中，相加对应于 $\theta = 0$，相减对应于 $\theta = \pi$.

设瞬子数为 $k = 2\ell + \xi$，这些贡献可使用 JK 留数求得

$$Z^{(k\pm)}(z) = \frac{1}{|W(\mathrm{O}(k)^\pm)|} \oint_{\rm JK} \prod_{j=1}^{\ell(-1)} \frac{\phi_j}{2\pi i} Z_{\rm vec}^{k\pm} Z_{\rm def}^{k\pm}(z), \tag{2.22}$$

请注意，此处的下标表示相应 D膜之间开弦的贡献。五维 Sp(N) 矢量多重态的具体积分表达式如下 [37]:

$$\begin{aligned} Z_{\rm vec}^{k=2\ell+\xi,+} = & \left(\frac{1}{[\![\epsilon_{1,2}]\!] \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\epsilon_+ \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!]} \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \frac{[\![\pm\phi_i]\!][\![2\epsilon_+ \pm 2\phi_i]\!]}{[\![\pm\phi_i + \epsilon_{1,2}]\!]} \right)^\xi \\ & \cdot \prod_{i=1}^{\ell} \frac{[\![2\epsilon_+]\!]}{[\![\epsilon_{1,2}]\!][\![\epsilon_{1,2} \pm 2\phi_i]\!] \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!]} \prod_{i<j}^{\ell} \frac{[\![\pm\phi_i \pm \phi_j]\!][\![2\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \phi_j]\!]}{[\![\epsilon_{1,2} \pm \phi_i \pm \phi_j]\!]} \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} Z_{\rm vec}^{k=2\ell,-} = & \frac{\cosh \epsilon_+}{[\![\epsilon_{1,2}]\!] [\![2\epsilon_{1,2}]\!] \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\pm 2\mathfrak{a}_\alpha + 2\epsilon_+]\!]} \cdot \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{[\![\pm 2\phi_i]\!][\![4\epsilon_+ \pm 2\phi_i]\!]}{[\![2\epsilon_{1,2} \pm 2\phi_i]\!]} \\ & \cdot \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{[\![2\epsilon_+]\!]}{[\![\epsilon_{1,2}]\!][\![\epsilon_{1,2} \pm 2\phi_i]\!] \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!]} \prod_{i<j}^{\ell-1} \frac{[\![2\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \phi_j]\!] [\![\pm\phi_i \pm \phi_j]\!]}{[\![\epsilon_{1,2} \pm \phi_i \pm \phi_j]\!]} \end{aligned}$$

$$Z_{\rm vec}^{k=2\ell+1,-}=\frac{1}{[\![\epsilon_{1,2}]\!]\prod\limits_{\alpha=1}^{N}2\cosh\frac{\epsilon_+\pm\mathfrak{a}_\alpha}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{\ell}\frac{2\cosh\frac{\pm\phi_i}{2}2\cosh\frac{2\epsilon_+\pm\phi_i}{2}}{2\cosh\frac{\epsilon_{1,2}\pm\phi_i}{2}}$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{\ell}\frac{[\![2\epsilon_+]\!]}{[\![\epsilon_{1,2}]\!][\![\epsilon_{1,2}\pm2\phi_i]\!]\prod_{\alpha=1}^{N}[\![\epsilon_+\pm\phi_i\pm\mathfrak{a}_\alpha]\!]}\prod_{i<j}^{\ell}\frac{[\![\pm\phi_i\pm\phi_j]\!][\![2\epsilon_+\pm\phi_i\pm\phi_j]\!]}{[\![\epsilon_{1,2}\pm\phi_i\pm\phi_j]\!]}\ .$$

考虑到 $\mathrm{O}(k)^{\pm}$ [37] 的嘉当子代数，可以从图 2 中得到缺陷贡献：

$$\begin{aligned}
Z_{\rm def}^{k=2\ell+\xi,+}(z)&=\prod_{\alpha=1}^{N}[\![\zeta\pm\mathfrak{a}_\alpha]\!]\left(\frac{[\![\epsilon_-\pm\zeta]\!]}{[\![\epsilon_+\pm\zeta]\!]}\right)^{\xi}\prod_{i=1}^{\ell}\mathcal{S}(\zeta\pm\phi_i),\\
Z_{\rm def}^{k=2\ell+1,-}(z)&=\prod_{\alpha=1}^{N}[\![\zeta\pm\mathfrak{a}_\alpha]\!]\frac{\cosh\left(\frac{\epsilon_-\pm\zeta}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\epsilon_+\pm\zeta}{2}\right)}\prod_{i=1}^{\ell}\mathcal{S}(\zeta\pm\phi_i),\\
Z_{\rm def}^{k=2\ell,-}(z)&=\prod_{\alpha=1}^{N}[\![\zeta\pm\mathfrak{a}_\alpha]\!]\frac{[\![2\epsilon_-\pm2\zeta]\!]}{[\![2\epsilon_+\pm2\zeta]\!]}\prod_{i=1}^{\ell-1}\mathcal{S}(\zeta\pm\phi_i)\ ,
\end{aligned}\tag{2.24}$$

这与 [27] 中的相同。注意，Weyl群的阶由下式给出

$$\begin{aligned}
|W(\mathrm{O}(2\ell)^+)|&=\frac{1}{2^{\ell-1}\ell!},\quad |W(\mathrm{O}(2\ell+1)^+)|=\frac{1}{2^\ell\ell!},\\
|W(\mathrm{O}(2\ell)^-)|&=\frac{1}{2^{\ell-1}(\ell-1)!},\quad |W(\mathrm{O}(2\ell+1)^-)|=\frac{1}{2^\ell\ell!}.
\end{aligned}\tag{2.25}$$

2.2 未精细化极限中的 qq-特征

正如 [27], 中针对一般 Ω-背景 (ϵ_1,ϵ_2)所展示的， BCD-型规范理论的 qq-特征似乎是“无限的”，也就是说，它们无法表示为有限个 Y-算符期望值的形式（至少无法以显而易见的方式表示）。这是因为在精细化层次上，JK 极点相当复杂（目前尚未得到理解）。尽管如此，我们从 [21] 中学到的是， BCD-型规范理论的非平凡 JK 极点在未精细化极限 $\epsilon_1=-\epsilon_2=\hbar$ 下可由一组杨图分类。因此，在本小节中，我们将说明， BCD-型规范理论的 qq-特征在未精细化极限下具有有限形式，从而保留其代数意义（更多细节请参见附录B ）。

类型 BD

如 [21], 中所分析，SO(n) 纯杨-米尔斯理论的非平凡 JK 极点由 N组杨图的元组进行分类，其中我们写作 $n=2N+\xi$ ($n\equiv\xi$ 模 2）。更明确地说，极点的位置确实是（2.12）的未精细化极限：

$$\phi_x=\mathfrak{a}_\alpha+(i-j)\hbar\ ,\qquad x=(i,j)\in\lambda^{(\alpha)}\ .\tag{2.26}$$

其中 $|\vec{\lambda}| = k$。因此，未精化瞬子配分函数可以写成

$$Z_{\text{inst}}^{\mathfrak{so}(n)} = \sum_{\vec{\lambda}} \mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{so}(n)}, \tag{2.27}$$

其中 $Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{so}(n)}$ 的显式形式见式（D.13）和（D.23）。即使插入余维四缺陷，极点结构仍保持不变。因此，我们将极点集合记为 $|\vec{A},\ \vec{\lambda}\rangle$，而位于 $|\vec{A},\ \vec{\lambda}\rangle$ 处的缺陷期望值为

$$\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}^{BD}(z) = [\![\zeta]\!]^{\xi} \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\zeta \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!] \prod_{x\in\vec{\lambda}} \mathcal{S}(\phi_x \pm \zeta), \tag{2.28}$$

于是，缺陷总配分函数由两部分贡献组成：一部分来自极点 $|\vec{A},\ \vec{\lambda}\rangle$，另一部分则来自 $\phi_x = \pm\zeta$ 和 $|\vec{A},\ \vec{\lambda}'\rangle$，其中$|\vec{\lambda}'| = |\vec{\lambda}| - 1$。因此，qq-特征的形式为

$$\langle \chi^{BD}(z)\rangle = Z_{\text{defect}}^{\mathfrak{so}(n)}(z) = \langle Y^{BD}(z)\rangle + \left\langle \frac{c_{BD}\mathfrak{q}}{Y^{BD}(z)} \right\rangle, \tag{2.29}$$

其中

$$c_{BD} = [\![2\zeta \pm \hbar]\!][\![2\zeta]\!]^2 \ . \tag{2.30}$$

这里，Y-算符的期望值可用与式（2.13）类似的方法求得，即将相应的 Gaiotto 态夹在两侧。

在附录中D，我们证明在 $\zeta = \pm\phi_x$ 对于$x \in \mathfrak{A}(\vec{\lambda}) \bigcup \mathfrak{R}(\vec{\lambda})$ 所给出的递归关系下的极点消去。鉴于所有 JK 极点都可以用杨图分类，qq-特征（2.29）直接可知是一个关于 n 的 zLaurent 多项式。或者，敏锐的读者也可以通过显式计算缺陷配分函数，独立验证这一性质。

由于$\langle \chi^{BD}(z)\rangle$具有2.29）的多项式性质，式（2.29）可以解释为通过 $q = e^{-\hbar}$对 SO(n) 纯杨-米尔斯理论 [44–48] 的 Seiberg-Witten 曲线进行量子化——通过适当重标度 $\mathfrak{q}$ 和 z。

类型 C

现在让我们转到 Sp(N) 规范群。文献 [21] 观察到，Sp(N) 纯杨-米尔斯理论的非平凡 JK 极点由 ($N+4$)-元杨图分类，其中还有四个额外的有效库仑支参数$\mathfrak{a}_{N+j}$($j = 1$、.....、4)，具体取决于以下扇区：

$$\mathfrak{a}_{N+j} = \begin{cases} \frac{\hbar}{2}(+\pi i),\ 0(+\pi i) & (\text{even},+)\ \text{sector} \\ \frac{\hbar}{2}(+\pi i),\ \hbar,\ \pi i & (\text{odd},+)\ \text{sector} \\ \frac{\hbar}{2}(+\pi i),\ \hbar(+\pi i) & (\text{even},-)\ \text{sector} \\ \frac{\hbar}{2}(+\pi i),\ 0,\ \hbar+\pi i & (\text{odd},-)\ \text{sector} \end{cases} \tag{2.31}$$

这里我们使用记号（偶数/奇数 $\pm$）来标记瞬子数k 为偶数/奇数的 O(k)$^{\pm}$ 。此外，未精化瞬子配分函数还涉及这些有效库仑支参数的非平凡重数系数，其形式概略如下：

$$Z_{\text{inst}}^{\mathfrak{sp}(N),\pm} = \sum_{\vec{\lambda}} \mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} C_{\vec{A},\vec{\lambda}}^{(\pm)} Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{so}(2N+8)} \ . \tag{2.32}$$

具体的重数系数形式请参见[21]。C 极点的位置如式（2.26）所示。在五维中，缺陷贡献（2.24）也取决于扇区。因此，我们只能在各个扇区中计算缺陷的期望值：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}^{C}(z) &= \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\zeta \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!] \frac{[\![\epsilon_- \pm \zeta]\!]}{[\![\epsilon_+ \pm \zeta]\!]} \prod_{x\in\vec{\lambda}} \mathcal{S}(\zeta \pm \phi_x) \ , && (\text{odd}, +) \text{ sector} \\
\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}^{C}(z) &= \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\zeta \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!] \prod_{x\in\vec{\lambda}} \mathcal{S}(\zeta \pm \phi_x), && (\text{even}, +) \text{ sector} \\
\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}^{C}(z) &= \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\zeta \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!] \frac{\cosh\left(\frac{\epsilon_- \pm \zeta}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\epsilon_+ \pm \zeta}{2}\right)} \prod_{x\in\vec{\lambda}} \mathcal{S}(\zeta \pm \phi_x), && (\text{odd}, -) \text{ sector} \\
\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}^{C}(z) &= \prod_{\alpha=1}^{N} [\![\zeta \pm \mathfrak{a}_\alpha]\!] \frac{[\![2\epsilon_- \pm 2\zeta]\!]}{[\![2\epsilon_+ \pm 2\zeta]\!]} \prod_{x\in\vec{\lambda}} \mathcal{S}(\zeta \pm \phi_x), && (\text{even}, -) \text{ sector}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

将这些结果代入求和式（2.32）后，即可计算各扇区中 Y-算符的期望值。利用这些表达式，我们可以用 Y-算符表示缺陷配分函数；值得注意的是，它与扇区的选择（偶数/奇数，$\pm$）无关。

$$Z^{(k,\pm)}(z) = \left\langle Y^C \right\rangle + \frac{\mathfrak{q}^2}{[\![2\zeta]\!]^2 [\![2\zeta \pm \hbar]\!]} \left\langle \frac{1}{Y^C} \right\rangle \ . \tag{2.34}$$

最后，根据 θ-角度，我们可以通过式（2.21）得到缺陷配分函数。

然而，与 ABD型规范群的情形不同，由于存在额外的极点（2.31），我们无法重复极点抵消的论证。特别是，我们可以看到，Sp(N) 理论的缺陷配分函数在 $z = \pm 1$处存在显式极点。为了解决这一问题，我们需要从缺陷配分函数中减去伪贡献 Z_{extra}，以定义正则化 qq-特征。Z_{extra} 的形式为：

$$Z_{\text{extra}}^{\mathfrak{sp}(N)_\theta}(z) = \begin{cases} \mathfrak{q} \frac{z(1+z^2)}{(1-z^2)^2} Z_{\text{inst}}^{\mathfrak{sp}(N)_\theta} & \text{for } N - \frac{\theta}{\pi} \equiv 1 \mod 2 \\ \mathfrak{q} \frac{2z^2}{(1-z^2)^2} Z_{\text{inst}}^{\mathfrak{sp}(N)_\theta} & \text{for } N - \frac{\theta}{\pi} \equiv 0 \mod 2 \end{cases} , \tag{2.35}$$

其中， Z_{inst} 是不含缺陷的瞬子配分函数。正则化 qq-特征定义如下：

$$\left\langle \chi^{\mathfrak{sp}(N)_\theta}(z) \right\rangle = Z^{\mathfrak{sp}(N)_\theta}_{\text{defect}}(z) - Z^{\mathfrak{sp}(N)_\theta}_{\text{extra}}(z), \tag{2.36}$$

它会变成关于 z 的 Laurent 多项式。我们已使用*Mathematica*验证了这一性质，对象为 Sp(1)、Sp(2) 和 Sp(3) 理论，计算至六个瞬子。

现在可以看出，等式右侧（2.34）的通用形式有何优点。注意到伪贡献与 $Z^{\mathfrak{sp}(N)_\theta}{}_{\text{瞬子}}=\langle 1\rangle$成正比，我们可以将（2.34）写成

$$\left\langle Y^C \right\rangle + f(N,\theta)\frac{\mathfrak{q}}{[\![2\zeta]\!]^2}\langle 1\rangle + \frac{\mathfrak{q}^2}{[\![2\zeta]\!]^2[\![2\zeta\pm\hbar]\!]}\left\langle \frac{1}{Y^C}\right\rangle = \left\langle \chi^{\mathfrak{sp}(N)_\theta}(z)\right\rangle \tag{2.37}$$

其中

$$f(N,\theta) = \begin{cases} 2\cosh(\zeta) & \text{for } N-\frac{\theta}{\pi}\equiv 1 \mod 2 \\ 2 & \text{for } N-\frac{\theta}{\pi}\equiv 0 \mod 2 \end{cases}. \tag{2.38}$$

总之，qq-特征的形式只有在$\mathrm{Sp}(N)$ 纯杨-米尔斯理论的未精细化极限下才显现出来。此外，适当重新缩放 $\mathfrak{q}$ 和z后，可以将其解释为 Seiberg-Witten 曲线 [47–49] 的量子化。“伪”贡献的存在对于获得作为 Seiberg-Witten 曲线量子化的正确形式是“必不可少”的，并且它明确体现了五维中的 θ角依赖。在（2.38）中的两种情形都在四维极限下趋近于2，因此我们可以得出结论：Seiberg-Witten 曲线在四维极限下不受 θ角的影响。

注 在（2.37）中，在 $\zeta=\pm\phi_x$对于 $x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})\cup\mathfrak{R}(\vec{\lambda})$ 处存在表观极点，此外，在特殊值 $\zeta=0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\hbar$处也存在表观极点，这些极点来源于用于描述 Sp($N$) 理论的另外四个杨图。与附录 D中一样，很容易证明一般极点处的极点抵消，例如 SO(n) 的情形。然而，这些特殊极点处的抵消极为复杂，我们仅通过逐阶瞬子展开验证了抵消，最高到 6-瞬子阶。

3 李代数 qq-特征之间的关系

在§2.1中，我们讨论了 qq-特征可以解释为涉及余维四缺陷的配分函数。具体而言，图2中所示的 D4-D4’弦引入了费米自由度 [50]。当五维规范理论与这些一维费米自由度耦合时，便会产生半BPS威尔逊环。此外，涉及该费米福克空间的路径积分可作为反对称张量表示中半BPS威尔逊环的生成函数

[29, 51, 52]。因此，qq-特征可以理解为

$$\chi^{\mathfrak{g}}(z) = z^{-\frac{\dim \square}{2}} \sum_{k=0}^{\dim \square} (-z)^k \mathcal{W}_{\wedge^k}, \tag{3.1}$$

其中，$\wedge^k$ 表示底层规范代数 $\square$ 的基本表示 $\square$ 的第 k 阶反对称张量积，而 $\dim \square$ 是基本表示的维数。在零瞬子阶，Wilson 环期望值就是相应表示的特征。尽管它会受到所有瞬子修正的影响，但规范代数表示的同构意味着，在所有瞬子扇区中，Wilson 环期望值都相同。本节从 Wilson 环的角度考察 qq-特征的这一方面。本节的结果支持这样一种物理解释：qq-特征是 Wilson 环期望值的生成函数，并阐明了不同规范代数的 qq-特征之间的关系。然而，正如我们将在下文看到的，需要注意的是，即使两个规范代数同构，其 qq-特征也未必完全相同，因为 qq-特征取决于表示。

3.1 $\mathfrak{sp}(1)$对比 $\mathfrak{su}(2)$

我们首先考虑李代数的同构 $\mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{su}(2)$。由于它们的基本表示一致，我们预期两个 qq-特征也相匹配。不过，有两点细节需要考虑。第一点是 §θ =2.1 中所见的 π- 角的选取（ θ0, ）。在规范代数的这一同构中，它对应于 SU(2) 理论的五维 Chern-Simons 级别 $\kappa = 0$ 的选取（,1）。第二点是，朴素的 Sp(1) 缺陷配分函数并非 的 Laurent 多项式；为了与 SU(2) 的 qq-特征进行比较，我们需要去除式（2.35）中给出的伪贡献。

首先，考虑 $\kappa = 0$ （或等价地 $\theta = 0$）的情形。SU(2) 的 qq-特征$_{\kappa=0}$ 众所周知 [38]:

$$\begin{aligned}\langle \chi^{\mathfrak{su}(2)_{\kappa=0}}(z) \rangle =& \frac{(z-A)(z-A^{-1})}{z} \\ &+ \mathfrak{q} \frac{A(2qA(1+z^2) - z(1+q^2)(1+A^2)}{z(1-q)^2(1-A^2)^2} + \mathcal{O}(\mathfrak{q}^2) \ ,\end{aligned} \tag{3.2}$$

在零瞬子阶，它可以展开为 $z^{-1} - (A + A^{-1}) + z$，这是 $(\emptyset, \square,)$ 的 $\mathfrak{su}(2)$ 特征生成函数。 □

另一方面，Sp(1)$_{\theta=0}$ 的缺陷配分函数为

$$\begin{aligned}Z_{\text{defect}}^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=0}}(z) =& \frac{(z-A)(z-A^{-1})}{z} \\ &+ \mathfrak{q} \frac{(z-A)(1-zA)}{z(1-z^2)^2(1-q)^2(1-A^2)^2}\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\times \Big(z(1+z^2)(1-q)^2(1+A^2) - 2(q(1+z^4) - 2z^2(1-q+q^2))A\Big) + \mathcal{O}(\mathfrak{q}^2)$$

零瞬子部分来自 $Z_{\mathrm{D4/D4'}}(z)$，其结果与（3.2）相同。然而，单瞬子部分不再是 z 的 Laurent 多项式，这是由于分母中存在 $(1-z^2)^2$ 所致。（3.2）与（3.3）在单瞬子阶的差异为

$$-\frac{z(1+z^2)}{(1-z^2)^2} \ . \tag{3.4}$$

即使在高瞬子情况下，也可以验证，在 (2.36) 中定义的正则化 qq-特征是关于 z 的 Laurent 多项式，并且还满足以下恒等式

$$\langle \chi^{\mathfrak{su}(2)_{\kappa=0}}(z)\rangle = \langle \chi^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=0}}(z)\rangle = Z^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=0}}_{\mathrm{defect}}(z) - \mathfrak{q}\frac{z\,(1+z^2)}{(1-z^2)^2} Z^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=0}}_{\mathrm{inst}} \ . \tag{3.5}$$

该恒等式已验证至 6-瞬子阶。

接下来，我们考虑 $\kappa = 1$ （或等价地 $\theta = \pi$）的情形。按照 (2.2) 中概述的步骤，我们引入五维 Chern-Simons 级别 $\kappa = 1$，并进行 JK 留数积分，以得到 $\mathrm{SU}(2)_{\kappa=1}$ 的 qq-特征：

$$\begin{aligned}\langle \chi^{\mathfrak{su}(2)_{\kappa=1}}(z)\rangle =& \frac{(z-A)(z-A^{-1})}{z} \\ &+ \mathfrak{q}\frac{(1+z^2)q(A+A^3) - z(q+2(1-q+q^2)A^2+qA^4)}{z(1-q)^2\,(1-A^2)^2} \\ &+ \mathcal{O}(\mathfrak{q}^2) \ ,\end{aligned} \tag{3.6}$$

另一方面，$\mathrm{Sp}(1)_{\theta=\pi}$ 的缺陷配分函数为

$$\begin{aligned}&Z^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=\pi}}_{\mathrm{defect}}(z) = \\ &\frac{(z-A)(z-A^{-1})}{z} \\ &+ \mathfrak{q}\frac{(z-A)(1-Az)}{z(1-z^2)^2(1-q)^2(1-A^2)^2} \\ &\times (2z(A+z)(1+Az) - (1+z^2)(4Az+(1+A^2)(1+z^2))q + 2z(A+z)(1+Az)q^2) \\ &+ \mathcal{O}(\mathfrak{q}^2)\end{aligned} \tag{3.7}$$

虽然零瞬子部分保持不变，但高瞬子部分将与前一种情况不同。现在，(3.6) 与 (3.7) 在单瞬子阶的差异为

$$-\frac{2z^2}{(1-z^2)^2} \ .$$

因此，与（2.36）中一样，我们可以用该因子与 $\mathfrak{q}Z^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=\pi}}_{\mathrm{inst}}$ 的乘积对其进行正则化，从而得到 $\mathrm{Sp}(1)_{\theta=\pi}$ 的 qq-特征，它等于（3.6）

$$\langle \chi^{\mathfrak{su}(2)_{\kappa=1}}(z)\rangle = \langle \chi^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=\pi}}(z)\rangle = Z^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=\pi}}_{\mathrm{defect}}(z) - \mathfrak{q}\frac{2z^2}{(1-z^2)^2} Z^{\mathfrak{sp}(1)_{\theta=\pi}}_{\mathrm{inst}} \ . \tag{3.8}$$

我们已将这一恒等式检验到 6-瞬子阶。

3.2 $\mathfrak{sp}(2)$对比 $\mathfrak{so}(5)$

$\mathrm{Sp}(2)_{\theta=0}$ 与 SO(5) 的 qq-特征之间的比较更为微妙。首先，基本表示 $\mathfrak{sp}(2)$的第二个反对称张量积$\mathbf{4}$ 是可约的：

$$\wedge^2\mathbf{4} \cong \mathbf{5} \oplus \mathbf{1}\ , \tag{3.9}$$

其中，第一个不可约表示 $\mathbf{5}$ 与向量表示同构$\mathbf{5}$ ，属于 $\mathfrak{so}(5)$。与 (2.36) 中一样，$_{\theta=0}\mathrm{Sp}(2)$ 的正则化 qq-特征

$$\langle\chi^{\mathfrak{sp}(2)_{\theta=0}}(z)\rangle = Z^{\mathfrak{sp}(2)_{\theta=0}}_{\text{defect}} - \mathfrak{q}\frac{2z^2}{(1-z^2)^2}Z^{\mathfrak{sp}(2)_{\theta=0}}_{\text{inst}}\ , \tag{3.10}$$

而 Wilson 环期望值 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}(2)_{\theta=0}}_{\wedge^2\mathbf{4}}$是其 z^0 项的系数。另一方面，Wilson 环期望值 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}(5)}_{\mathbf{5}}$是 $z^{-\frac{3}{2}}$-项的系数，该项来自 SO(5) 的 qq-特征；式 (1 在 (3.9) 中的平凡表示对应于无缺陷的瞬子配分函数。因此，同构 (3.9) 给出恒等式

$$\langle\chi^{\mathfrak{sp}(2)_{\theta=0}}(z)\rangle\Big|_{z^0,A_1\to A_1A_2} = \left(\langle\chi^{\mathfrak{so}(5)}(z)\rangle\Big|_{z^{-\frac{3}{2}}} + Z^{\mathfrak{so}(5)}_{\text{inst}}\right)_{A_2\to A_1A_2^2}\ . \tag{3.11}$$

我们也将这一猜想检验到了 6-瞬子阶。

或许有人会好奇如何用 SO(5) 来实现 $\mathrm{Sp}(2)_{\theta=\pi}$。这可以通过加入一个旋量超多重态，并对旋量质量 [22, Eq.(3.25)] 取适当的极限来实现。我们预计，可以通过插入一个余维四缺陷，在 qq-特征层面验证这一点，但将此问题留待未来研究。

3.3 $\mathfrak{so}(4)$ 与 $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$

如上所述，我们需要谨慎选择分别属于 $\mathfrak{so}(4)$ 和 $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ 的表示，以提取出给出相同 $\mathcal{W}_{\wedge^k}$ 的相应系数。$\mathfrak{so}(4)$ 的向量表示$\mathbf{4}$ 与 $\mathfrak{su}(2)$ 的两个基本表示$\mathbf{2}$ 的乘积同构，即 $\mathbf{4}\cong\mathbf{2}\otimes\mathbf{2}$，因此很自然地可以预期

$$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}(4)}_{\mathbf{4}} \overset{?}{=} \mathcal{W}^{\mathfrak{su}(2)}_{\mathbf{2}} \times \mathcal{W}^{\mathfrak{su}(2)}_{\mathbf{2}}. \tag{3.12}$$

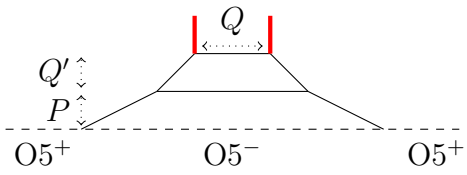
然而，在五维$\mathcal{N}=1$ 规范理论中，需要纳入一个额外的 U(1) 因子。如 [20]，所示，纯五维$\mathcal{N}=1$ SO(4) 规范理论的配分函数可写为

$$Z_{\mathrm{SO}(4)}(A_1,A_2;\mathfrak{q}) = Z_{\mathrm{SU}(2)}(A_1^{\frac{1}{2}}/A_2^{\frac{1}{2}},\mathfrak{q})Z_{\mathrm{SU}(2)}(A_1^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{1}{2}},\mathfrak{q})Z_{\mathrm{U}(1)}(\mathfrak{q}), \tag{3.13}$$

其中，U(1) 瞬子配分函数以多重对称指数表示

$$Z_{\mathrm{U}(1)}(\mathfrak{q}) = \mathrm{P.E.}\left(\frac{q}{(1-q)^2}\mathfrak{q}\right), \tag{3.14}$$

对应于下图所示 SO(4) 五膜网构造中红色平行膜的贡献：



(3.15)

因此，Wilson 环期望值的表示同构意味着

$$\mathcal{W}_{\mathbf{4}}^{\mathfrak{so}(4)}(A_1,A_2)=\mathcal{W}_{\mathbf{2}}^{\mathfrak{su}(2)}(A_1^{\frac{1}{2}}/A_2^{\frac{1}{2}})\times\mathcal{W}_{\mathbf{2}}^{\mathfrak{su}(2)}(A_1^{\frac{1}{2}}A_2^{\frac{1}{2}})\times Z_{\mathrm{U}(1)}\ . \tag{3.16}$$

由（3.1）可知，$\mathfrak{so}(4)$ 的向量表示对应的 Wilson 环是 qq-特征中 z^{-1}项的系数 $\chi^{\mathfrak{so}(4)}$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\mathbf{4}}^{\mathfrak{so}(4)}=&-\langle\chi^{\mathfrak{so}(4)}(z)\rangle\Big|_{z^{-1}}\\=&\frac{(A_1+A_2)(1+A_1A_2)}{A_1A_2}+\mathfrak{q}\frac{(A_1+A_2)(1+A_1A_2)}{(1-q)^2A_1A_2(A_1-A_2)^2(1-A_1A_2)^2}\\&\times\Big(A_1A_2(1+A_2^2)(1-q)^2+A_1^3A_2(1+A_2^2)(1-q)^2+A_2^2q+A_1^4A_2^2q\\&+A_1^2(q+A_2^4q-4A_2^2(1-q+q^2))\Big)+\mathcal{O}\left(\mathfrak{q}^2\right),\end{aligned} \tag{3.17}$$

同样，（3.1）表明，$\mathfrak{su}(2)$ 的基本表示对应的 Wilson 环是 qq-特征（ z^0项的系数（3.2）

$$\mathcal{W}_{\mathbf{2}}^{\mathfrak{su}(2)}=-\langle\chi^{\mathfrak{su}(2)}(z)\rangle\Big|_{z^0}=A+A^{-1}+\mathfrak{q}\frac{A(1+q^2)(1+A^2)}{(1-q)^2(1-A^2)^2}+\mathcal{O}\left(\mathfrak{q}^2\right)\ . \tag{3.18}$$

从（3.17）和（3.18）可以清楚地看出，零瞬子部分就是相应表示的特征。此外，我们使用 *Mathematica* 验证了所提出的恒等式（3.16），直至四瞬子阶。

3.4 $\mathfrak{so}(6)$对比 $\mathfrak{su}(4)$

6 的向量表示与 $\mathfrak{so}(6)$ 的二阶反对称表示同构。Wilson 环期望值 $\mathcal{W}_{\mathbf{6}}^{\mathfrak{so}(6)}$ 可由 z^{-2} 项在 $\chi^{\mathfrak{so}(6)}$中的系数读出。另一方面，（3.1）告诉我们$\mathcal{W}^{\mathfrak{su}(4)}$ 等于 z^0项在 $\chi^{\mathfrak{su}(4)}$ 中的系数。因此，我们得到恒等式

$$\langle\chi^{\mathfrak{so}(6)}(z)\rangle\Big|_{z^{-2}}=\langle\chi^{\mathfrak{su}(4)}(z)\rangle\Big|_{z^0}. \tag{3.19}$$

其中，我们将库仑支参数从 $\mathfrak{su}(4)$ 的正交基转换为 $\mathfrak{so}(6)$ 的正交基

$$A_1\to(A_1A_2A_3)^{\frac{1}{2}},\ A_2\to(A_1A_2^{-1}A_3^{-1})^{\frac{1}{2}},\ A_3\to(A_1^{-1}A_2A_3^{-1})^{\frac{1}{2}},\ A_4\to(A_1^{-1}A_2^{-1}A_3)^{\frac{1}{2}}\ .$$

用Mathematica直接检验等式（*3.19*）并不困难，我们已将其检验到四瞬子阶。

4 利用 Ward 恒等式研究 qq-特征与代数结构

qq-特征的另一个有趣之处，在于它们与超对称规范理论代数结构之间的联系。在五维 A型规范理论中，qq-特征生成该规范理论的丛$\mathcal{W}$代数 [24]..，并且可以嵌入量子环面代数 $U_{q_1,\ q_2,\ q_3}(\mathfrak{gl}_1)$ 中，该代数构成了五维规范理论拓扑顶点形式的理论框架 [9]。在后一种代数框架中，可以通过使用量子环面代数 [30, 31] 中一个称为“Ward 恒等式”的平凡恒等式，以纯代数的方法推导 qq-特征。这种代数结构的存在与我们所研究规范理论的可积性密切相关。遗憾的是，现阶段我们尚不能确定 BCD 型规范理论在一般 Ω 背景下是否具有可积结构。本节尝试反向运用这些理论中 qq-特征的“Ward 恒等式”方法，为 BD 型规范理论构造一种候选的底层代数结构。这或许能够揭示 BD 型规范理论在未精细化极限下的某些可积性。

4.1 量子环面代数

A 型规范理论的底层代数结构由 $\mathfrak{gl}_1$ 的量子环面代数$U_{q_1,\ q_2,\ q_3}(\mathfrak{gl}_1)$ 所支配，其由 Drinfeld流$x^{\pm}(z)$、 $\psi^{\pm}(z)$ 及交换关系 [54–56]定义

$$
\begin{aligned}
[\psi^{\pm}(z),\psi^{\pm}(w)] =& 0,\\
\psi^{+}(z)\,\psi^{-}(w) =& \frac{g\left(\hat{\gamma}z/w\right)}{g\left(\hat{\gamma}^{-1}z/w\right)}\psi^{-}(w)\,\psi^{+}(z)\\
\psi^{\pm}(z)\,x^{+}(w) =& g\left(\hat{\gamma}^{\pm\frac{1}{2}}z/w\right)x^{+}(w)\,\psi^{\pm}(z)\\
\psi^{\pm}(z)\,x^{-}(w) =& g\left(\hat{\gamma}^{\mp\frac{1}{2}}z/w\right)^{-1}x^{-}(w)\,\psi^{\pm}(z)\\
x^{\pm}(z)\,x^{\pm}(w) =& g\left(z/w\right)^{\pm 1}x^{\pm}(w)\,x^{\pm}(z)\\
\left[x^{+}(z),x^{-}(w)\right] =& -\left(\mathrm{Res}_{z\to 1}\,s(z)\right)\left(\delta\left(\hat{\gamma}w/z\right)\,\psi^{+}\left(\hat{\gamma}^{\frac{1}{2}}w\right)-\delta\left(\hat{\gamma}^{-1}w/z\right)\,\psi^{-}\left(\hat{\gamma}^{-\frac{1}{2}}w\right)\right)\ .
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

这里，$\hat{}\gamma$ 是该代数的中心元， $q_3 := q_1^{-1}q_2^{-1}$，结构函数$g(z)$ 定义为

$$
g(z)=\frac{s(z)}{s(z^{-1})}=\frac{(1-q_1z)(1-q_2z)(1-q_3z)}{(1-q_1^{-1}z)(1-q_2^{-1}z)(1-q_3^{-1}z)},\qquad s(z):=\frac{(1-zq_1)(1-zq_2)}{(1-z)(1-zq_1q_2)}\ ,
\tag{4.2}
$$

它满足一个很好的性质，

$$
g(z^{-1})=g(z)^{-1}.
\tag{4.3}
$$

将 Drinfeld流的模展开写作

$$x^{\pm}(z) =: \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^{\pm} z^{-n}, \quad \psi^{\pm}(z) =: \sum_{\pm n\geq 0} \psi_n^{\pm} z^{-n}, \tag{4.4}$$

还需要施加一个重要关系，即 Serre关系：

$$\left[x_n^{\pm}, \left[x_{n-1}^{\pm}, x_{n+1}^{\pm}\right]\right] = 0, \tag{4.5}$$

对于 $^{\forall} n \in \mathbb{Z}$。那么，代数的中心元是 $\hat{}\gamma$ and $\psi_0^{\pm}$，它们在表示中映射为常数。通常可以用两个新的算子 ℓ_1 和 ℓ_2来参数化它们，

$$(\hat{\gamma}, \psi_0^{\pm}) = (\gamma^{\hat{\ell}_1}, \gamma^{\mp\hat{\ell}_2}), \tag{4.6}$$

$_1$与 $\gamma := q_3^2$，其中我们对 $\alpha \in \mathbb{C}^{\times}$ 使用了自同构 $\psi^{\pm}(z) \to \alpha^2\psi^{\pm}(z)$ 和 $x^{\pm}(z) \to \alpha x^{\pm}(z)$。

现在，我们继续考察该代数的未精细化极限（$q_1q_2 = q_3^{-1} = 1$）。请注意，在这个极限下，函数 $g(z)$ 趋于 1，因此乍看之下，直接约化会得到一个交换代数。然而事实并非如此。通过引入以下模展开

$$\psi^{\pm}(z\hat{\gamma}^{\frac{1}{2}}) = \psi_0^{\pm} \exp\left(\sum_{m>0} \kappa_m h_{\pm m} z^{\mp m}\right), \tag{4.7}$$

..其中 $\kappa_m := (1-q_1^m)(1-q_2^m)(1-q_3^m)$，$U_{q_1,q_2,q_3}(\mathfrak{gl}_1)$ 的交换关系可以改写为 [57]

$$\left[h_m, x_n^{\pm}\right] = \mp\frac{1}{m} x_{m+n}^{\pm} \hat{\gamma}^{-(m\pm|m|)/2}, \qquad [h_m, h_n] = -\delta_{n+m,0} \frac{\hat{\gamma}^m - \hat{\gamma}^{-m}}{m\kappa_m}. \tag{4.8}$$

然后，在未精细化极限 $q_3 \to 1$ 下，我们得到 [58, 59]

$$\begin{aligned} &\left[h_m, x_n^{\pm}\right] = \mp\frac{1}{m} x_{m+n}^{\pm}, \quad [h_m, h_n] = -\delta_{n+m,0} \frac{\hat{\ell}_1}{m[\![\pm m\hbar]\!]}\ , \\ &\left[x_m^{+}, x_n^{-}\right] = -[\![\pm\hbar]\!]\Big[(m+n)[\![\pm(m+n)\hbar]\!] h_{m+n} + \delta_{n+m,0}(n\hat{\ell}_1 + \hat{\ell}_2)\Big], \end{aligned} \tag{4.9}$$

其中含有 $q_1 = q_2^{-1} = q = e^{-\hbar}$。这里我们使用简洁记号 $[\![\pm m\hbar]\!] := (1-q^m)(1-$.. $q^{-m})$。用 Drinfeld流表示，$U_{q_1,q_2,q_3}(\mathfrak{gl}_1)$ 的未精细化极限可改写为

$$\begin{aligned} &[h_m, x^{\pm}(z)] = \mp\frac{z^m}{m} x^{\pm}(z)\ , \\ &[x^{+}(z), x^{-}(w)] = -[\![\pm\hbar]\!]\Big(\delta(z/w) \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} m[\![\pm m\hbar]\!] h_m z^{-m} + \sum_n (z/w)^n (n\hat{\ell}_1 + \hat{\ell}_2)\Big). \end{aligned} \tag{4.10}$$

一种与当前讨论相关的代数表示族称为垂直表示。在垂直表示下，代数作用于瞬子模空间的等变作用的不动点集 $\{|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref}\}$。此外，Drinfeld流 $x^{\pm}(z)$ 会向 N-元组$\vec{\lambda}$ 杨图中添加／移除一个方格。换言之，它们充当瞬子产生／湮灭算符。Drinfeld流的 Cartan 部分 $\psi^{\pm}(z)$ 与 Y-算符（2.10）相关。

垂直表示 垂直表示映射为

$$(\hat{\ell}_1,\hat{\ell}_2)\mapsto(0,N), \tag{4.11}$$

对于某个正整数 N。对基作适当归一化后，Drinfeld流在该表示下的作用为

$$\begin{aligned}
x^+(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref} &= \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}\delta(z/\chi_x)\,{\rm Res}_{z\to\chi_x}\,\frac{1}{\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z)}\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle_{\rm ref}\,,\\
x^-(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref} &= \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}\delta(z/\chi_x)\,{\rm Res}_{z\to\chi_x}\,\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(zq_3^{-1})\,|\vec{A},\vec{\lambda}-x\rangle_{\rm ref}\,,\\
\psi^{\pm}(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref} &= \left[\frac{\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}(zq_3^{-1})}{\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}(z)}\right]_{\pm}|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref}\,,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中，$\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}$-函数定义于（2.11），且 $\chi_x=\exp(-\phi_x)$。这里 $[...]_{\pm}$ 表示将括号内的表达式按 $z^{\mp}$展开。也就是说，对于 ψ^+，应按 z^{-1} 的幂展开；对于 ψ^-，则应按 z 的幂展开。

在未精细化极限下，我们使用恒等式

$$(1-q^n)^{\pm1}=\exp\left(\pm\log(1-q^n)\right)=\exp\left(\mp\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}q^{nm}\right), \tag{4.13}$$

以及（D.4）、（D.5）得到[1]

$$x^+(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle=[\![\hbar]\!]\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}\delta(z/\chi_x)\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle\ ,$$

[1]此处我们改变了基的归一化条件，$|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle=n(\vec{\lambda})\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle_{\rm ref}$。我们通过以下递归关系定义$n(\vec{\lambda})$，其中 $n(\vec{\emptyset})=1$，

$$[\![\hbar]\!]\frac{n(\vec{\lambda}+x)}{n(\vec{\lambda})}=\frac{\prod_{y\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}[\![\phi_x-\phi_y]\!]}{\prod_{\substack{y\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})\\ y\neq x}}[\![\phi_x-\phi_y]\!]}, \tag{4.14}$$

然后

$$[\![-\hbar]\!]\frac{n(\vec{\lambda}-x)}{n(\vec{\lambda})}=\frac{\prod_{y\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}[\![\phi_x-\phi_y]\!]}{\prod_{\substack{y\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})\\ y\neq x}}[\![\phi_x-\phi_y]\!]}. \tag{4.15}$$

$$
\begin{aligned}
x^-(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle &= -\,[\![\hbar]\!]\sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}\delta(z/\chi_x)\,|\vec{A},\vec{\lambda}-x\rangle\ ,\\
h_m\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{A_\alpha^m}{m}\frac{p_m(q^{(\lambda^{(\alpha)})^t+\rho+1/2})}{1-q^m}\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle\ ,\\
h_{-m}\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle &= -\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{A_\alpha^{-m}}{m}\frac{p_{-m}(q^{(\lambda^{(\alpha)})^t+\rho+1/2})}{1-q^{-m}}\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

其中 $p_m(x)=\sum_i x_i^m$是幂和函数，$\rho=(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ \underline{.....})$，而 $m>0$在上述方程中。我们将在附录C中说明如何直接验证，..上述作用成为 $U_{q_1,\ q_2,\ q_3}(\mathfrak{gl}_1)$ 的未精细化极限（4.10）的一个表示。

4.2 BD 型代数

本文提出了一种与未精细化极限下的 BD 型规范理论相关的代数，其定义由以下交换关系给出。

$$
\begin{aligned}
\Big[h_m, x^\pm(z)\Big] &= \mp\,(z^m+z^{-m})x^\pm(z)\ ,\\
[x^+(z),x^-(w)] &= -\,[\![\pm\hbar]\!]\Bigg[(\delta(z/w)+\delta(zw))\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}}[\![\pm m\hbar]\!]h_m z^{-m}\\
&\qquad +\sum_{m\in\mathbb{Z}}2(z^m/w^m+z^m w^m)(m\hat{\ell}_1+\hat{\ell}_2)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

$\hat{}$ $\hat{}$该代数还有两个中心元，ℓ_1 和 ℓ_2。上述代数的一个新特征是，在 A 型（4.10）中并不存在这一特征：它显然具有如下自同构

$$
z\mapsto z^{-1},\quad h_m\mapsto h_{-m},\quad x^\pm(z)\mapsto x^\pm(z). \tag{4.18}
$$

所提出的代数确实是由 SO(n) 未精化瞬子配分函数 [21] 的递推关系构造而成的。由于它写成杨图的求和形式，因此添加或移除一个方格完全合理，这将给出该代数的垂直表示。

垂直表示垂直表示再次将中心元参数化为 $(\hat{}\ell_1,\hat{}\ell_2)\mapsto(0,N)$，其中 N 为某个正整数。

$$
\begin{aligned}
x^+(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle &= [\![\hbar]\!]\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}\Big(\delta(z/\chi_x)+\delta(z\chi_x)\Big)\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle\,,\\
x^-(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle &= -[\![\hbar]\!]\sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}\Big(\delta(z/\chi_x)+\delta(z\chi_x)\Big)\,|\vec{A},\vec{\lambda}-x\rangle\,,\\
h_m|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle &= \sum_{\alpha=1}^{N}\left[A_\alpha^m\frac{p_m\left(q^{(\lambda^{(\alpha)})^t+\rho+1/2}\right)}{1-q^m}+A_\alpha^{-m}\frac{p_{-m}\left(q^{(\lambda^{(\alpha)})^t+\rho+1/2}\right)}{1-q^{-m}}\right]|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

我们验证它满足附录 C中给出的代数关系（4.17）。

注 我们注意到，本文仅考虑此处提出的 BD 型代数的垂直表示 ˆ，具体而言，是通过设定 $\ell_1 = 0$。因此， $x^+(z)$ 与 $x^-(w)$ 之间的交换关系

$$[x^+(z), x^-(w)] \propto \delta(z/w) + \delta(zw), \tag{4.20}$$

事实上，在本文的语境下，无法检验包含 ˆ ℓ_1 的项（例如水平表示）是否一致。

此外，我们指出，将满足对称性 $f_{1,\,2}(z^{-1}) = f_{1,\,2}(z)$ 的因子 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 乘到 $x^{\pm}(z)$ 上后，h_m 与 $x^{\pm}(z)$ 之间的交换关系保持不变，而 $x^+(z)$ 与 $x^-(w)$ 之间的对易子则变换如下：

$$[x^+(z), x^-(w)] \to f_1(z) f_2(z) [x^+(z), x^-(w)], \tag{4.21}$$

ˆ 这是因为 $\ell_1 = 0$ 的对易子只包含与 δ-函数 $\delta(z/w)$ 成正比的项。然而，在当前方法中，这种歧义无法消除。

注 2 如前所述，所提出的代数是根据瞬子配分函数的递归关系推导出来的。然而，对于 C-型规范群，配分函数包含非平凡的重数系数，如式（2.32）所示，这些系数取决于杨图。因此，要研究 C-型规范群的配分函数递归关系颇具挑战性，揭示其内在的代数结构也就超出了本文的讨论范围。

注 3 下面讨论它与仿射李代数量子群之间可能存在的关系。仿射 $\mathfrak{sl}_n$ （以及 $\mathfrak{gl}_n$）的量子群ˆ作为零模嵌入在 $\mathfrak{gl}_n$ [60, 61] 的量子环面代数中。我们注意到，本文提出的 BCD型代数的零模部分中，无法找到 BD型李代数结构。关于ˆ的量子环面代数 $\mathfrak{gl}_1$ 与仿射 $\mathfrak{sl}_2$ 的量子群之间的另一种联系，已在表示层面加以研究，详见 [16], 因为不难看出，（4.2）中定义的结构函数在极限 $q_1 \to \infty$ （其中 q_2 固定为有限值）下化为

$$g(z) \to q_2^{-1} \frac{1 - q_2 z}{1 - q_2^{-1} z}, \tag{4.22}$$

它不过是带有$q^2 \equiv q_2$的仿射 $\mathfrak{sl}_2$ 量子群的结构函数。遗憾的是，当前方法无法考虑 Hall-Littlewood 极限 $q_1 \to \infty$ ，而且还需要进一步构造该代数的移位版本。[62], 中提出了一项更相关的结果：文中构造了一个与 Maulik-Okounkov R-矩阵相关的边界算子$K(u)$，由该边界算子定义的扭曲杨代数可能与本文提出的候选代数有关。

4.3 “Ward 恒等式”方法

在 [30, 31], 文中，提出了一种所谓的“Ward 恒等式”方法，用以从量子环面代数及其四维对应物的垂直表示中导出 qq-特征。本节将以未精细化极限重新表述这一计算，并将 BD型代数与上一节介绍的 qq-特征联系起来。

类型 A

首先，让我们先求出在未精细化极限下，采用归一化时量子环面代数在左矢态 $\langle \vec{A}, \vec{\lambda}|$ 上的作用，

$$\langle \vec{A}, \vec{\mu} \,|\vec{A}, \vec{\nu}\rangle = \delta_{\vec{\mu},\vec{\nu}}. \tag{4.23}$$

我们可以利用恒等式

$$\left(\langle \vec{A}, \vec{\lambda} \pm x| \, x^{\pm}(z)\right) |\vec{A}, \vec{\lambda}\rangle = \langle \vec{A}, \vec{\lambda} \pm x| \left(x^{\pm}(z) \,|\vec{A}, \vec{\lambda}\rangle\right), \tag{4.24}$$

得到垂直表示的共轭（4.16）：

$$\begin{aligned}
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \, x^{+}(z) &= [\![\hbar]\!] \sum_{x \in \mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \langle \vec{A}, \vec{\lambda} - x| \, \delta(z/\chi_x) \ , \\
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \, x^{-}(z) &= -[\![\hbar]\!] \sum_{x \in \mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \langle \vec{A}, \vec{\lambda} + x| \, \delta(z/\chi_x) \ , \\
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \, h_m &= \langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{A_\alpha^m}{m} \frac{p_m(q^{-(\lambda^{(\alpha)})^t - \rho - \frac{1}{2}})}{1-q^{-m}} \ , \\
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \, h_{-m} &= -\langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{A_\alpha^{-m}}{m} \frac{p_{-m}(q^{-(\lambda^{(\alpha)})^t - \rho - \frac{1}{2}})}{1-q^{m}}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

从垂直表示推导 qq-特征的关键步骤是以下“Ward 恒等式”，它是一个平凡的恒等式：

$$\left(\langle \mathfrak{G}| \, x_{>}^{+}(z)\right) |\mathfrak{G}\rangle = \langle \mathfrak{G}| \left(x_{>}^{+}(z) \,|\mathfrak{G}\rangle\right), \tag{4.26}$$

其中，我们将 $x^{\pm}(z)$ 中仅包含非负模的算子定义为

$$x_{>}^{\pm}(z) := \sum_{n \geq 0} x_n^{\pm} z^{-n}. \tag{4.27}$$

根据定义，我们可以看出

$$\begin{aligned}
x_{>}^{+}(z) \,|\vec{A}, \vec{\lambda}\rangle &= [\![\hbar]\!] \sum_{x \in \mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \frac{1}{1-\chi_x/z} \,|\vec{A}, \vec{\lambda} + x\rangle \ , \\
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \, x_{>}^{+}(z) &= [\![\hbar]\!] \sum_{x \in \mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \langle \vec{A}, \vec{\lambda} - x| \, \frac{1}{1-\chi_x/z} \ .
\end{aligned} \tag{4.28}$$

由（D.12），可得

$$
\begin{aligned}
&x_{>}^{+}(z)\,|\mathfrak{G}\rangle \qquad (4.29)\\
=&[\![\hbar]\!]\sum_{\vec{\lambda}}\left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|}Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{su}(N)}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}\frac{1}{1-\chi_x/z}\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle\\
=&(-1)^{-\frac{N-1}{2}}\mathfrak{q}^{-\frac{1}{2}}\sum_{\vec{\lambda}}\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}\frac{1}{1-\chi_x/z}\left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|+1}Z_{\vec{\lambda}+x}^{\mathfrak{su}(N)}\right)^{\frac{1}{2}}\lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}+x}^{A}(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle\\
=&(-1)^{-\frac{N-1}{2}}\mathfrak{q}^{-\frac{1}{2}}\sum_{\vec{\lambda}'}\sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda}')}\frac{\chi_x^{-1}}{1-\chi_x/z}\left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}'|}Z_{\vec{\lambda}'}^{\mathfrak{su}(N)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Res}_{z\to\chi_x}\,\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}'}^{A}(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}'\rangle\,,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\langle\mathfrak{G}|\,x_{>}^{+}(z) \qquad (4.30)\\
=&[\![\hbar]\!]\sum_{\vec{\lambda}}\left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|}Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{su}(N)}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}\langle\vec{A},\vec{\lambda}-x|\,\frac{1}{1-\chi_x/z}\\
=&(-1)^{\frac{N-1}{2}}\mathfrak{q}^{\frac{1}{2}}\sum_{\vec{\lambda}'}\langle\vec{A},\vec{\lambda}'|\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda}')}\frac{\chi_x^{-1}}{1-\chi_x/z}\left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}'|}Z_{\vec{\lambda}'}^{\mathfrak{su}(N)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{Res}_{z\to\chi_x}\frac{1}{\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}'}^{A}(z)}.
\end{aligned}
$$

于是，由平凡恒等式（4.26）可得

$$
\sum_i\frac{(\chi_i^{+})^{-1}}{1-\chi_i^{+}/z}\,\mathrm{Res}_{z\to\chi_i^{+}}\left\langle Y^A(z)\right\rangle+\mathfrak{q}(-1)^N\sum_j\frac{(\chi_j^{-})^{-1}}{1-\chi_j^{-}/z}\,\mathrm{Res}_{z\to\chi_i^{-}}\left\langle\frac{1}{Y^A(z)}\right\rangle=0, \qquad (4.31)
$$

其中，集合$\{\chi_i^{\pm}\}$ 分别遍历$\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}^{A}(z)$和$1/\mathcal{Y}_{\vec{\lambda}}^{A}(z)$中的所有极点（除去 $z=0,\infty$）（在期望值中对（$Y^A(z)$）$^{\pm1}$ 求值后得到的函数）。这个“Ward 恒等式”表明，qq-特征中的表观极点（除去 $z=0,\infty$）全部相消，并且以下组合的期望值

$$
\chi(z)=Y^A(z)+\frac{(-1)^N\mathfrak{q}}{Y^A(zq_3)}\,, \qquad (4.32)
$$

它只能在 $z=0$ 和 $z=\infty$处有极点。在整个复平面上仅在 $z=0,\ \infty$ 处有极点的有理函数必定是 Laurent 多项式。根据渐近行为（2.14），可知除去整体因子 $z^{-\frac{N}{2}}$ 后，qq-特征的期望值是一个次数为 N的多项式。对于 A型规范群，类似的论证适用于与高权表示和高秩箭图相关联的所有 qq-特征。通过构造能够消去表观极点的特殊组合，可以完全从五维规范理论的底层代数结构推导出 qq-特征（用 Y 算符表示）的表达式。

BD 型

对于 D型规范理论，即规范群为 SO($2N$) 的规范理论，由（4.24）可知，垂直表示的 bra 表达式为

$$\begin{aligned}
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}|\, x^+(z) &= [\![\hbar]\!] \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \langle \vec{A}, \vec{\lambda}-x| \left(\delta(z/\chi_x)+\delta(z\chi_x)\right), \\
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}|\, x^-(z) &= -[\![\hbar]\!] \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \langle \vec{A}, \vec{\lambda}+x| \left(\delta(z/\chi_x)+\delta(z\chi_x)\right), \\
\langle \vec{A}, \vec{\lambda}|\, h_m &= \langle \vec{A}, \vec{\lambda}| \sum_{\alpha=1}^{N} \left[A_\alpha^m \frac{p_m\left(q^{(\lambda^{(\alpha)})^t+\rho+1/2}\right)}{1-q^m} + A_\alpha^{-m} \frac{p_{-m}\left(q^{(\lambda^{(\alpha)})^t+\rho+1/2}\right)}{1-q^{-m}} \right].
\end{aligned} \tag{4.33}$$

现在，我们以一种新颖的方式将算子 $x^\pm(z)$ 拆分为 $x^\pm_>(z)$ 和 $x^\pm_<(z)$，它们在 4.19 式的垂直表示中属于 BD 型代数：

$$x^+_>(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle = (1-q) \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \left(\frac{1}{1-\chi_x/z} + \frac{1}{1-z\chi_x} \right) |\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle\,, \tag{4.34}$$

$$x^+_<(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle = (1-q) \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \left(\frac{1}{1-z/\chi_x} + \frac{1}{1-z^{-1}\chi_x^{-1}} \right) |\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle\,. \tag{4.35}$$

对于这种代数，我们也考虑在 $x^\pm_>(z)$ 与 $|\mathfrak{G}\rangle$ 的 Gaiotto 态内积中插入 D 型，并从 Ward 恒等式（4.26）推导 qq- 特征的极点抵消条件。

接下来，类似地可以推导

$$\begin{aligned}
&x^+_>(z)\,|\mathfrak{G}\rangle \qquad\qquad (4.36)\\
=&(1-q)\sum_{\vec{\lambda}} \left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \left(\tfrac{1}{1-\chi_x/z}+\tfrac{1}{1-z\chi_x}\right) |\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle \\
=&\tfrac{(1-q)}{[\![\hbar]\!]}\mathfrak{q}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{\lambda}} \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|+1} Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}+x}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\zeta\to\phi_x} \tfrac{[\![\zeta-\phi_x]\!]\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}+x}(z)}{[\![2\zeta\pm\hbar]\!]} \left(\tfrac{1}{1-\chi_x/z}+\tfrac{1}{1-z\chi_x}\right) |\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle \\
=&\tfrac{(1-q)}{[\![\hbar]\!]}\mathfrak{q}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\vec{\lambda}'} \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda}')} \left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}'|} Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}'}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \times \left(\tfrac{z}{z-\chi_x} \mathrm{Res}_{z\to\chi_x} \tfrac{z^{-1}\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}'}(z)}{[\![2\zeta\pm\hbar]\!]} + \tfrac{1}{z-\chi_x^{-1}} \mathrm{Res}_{z\to\chi_x^{-1}} \tfrac{z^{-1}\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}'}(z)}{[\![2\zeta\pm\hbar]\!]} \right) |\vec{A},\vec{\lambda}'\rangle\,,
\end{aligned}$$

这里用到了（D.22）中的恒等式，以及以下事实：

$$\lim_{\zeta\to\phi_x} [\![\zeta-\phi_x]\!]\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}}(z) = -\lim_{\zeta\to-\phi_x} [\![\zeta+\phi_x]\!]\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}}(z). \tag{4.37}$$

作用于 bra 态，我们得到

$$\langle\mathfrak{G}|\, x^\pm_>(z) \tag{4.38}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\vec{\lambda}} \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \langle \vec{A}, \vec{\lambda} - x| \, (1-q) \left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{1-\chi_x/z} + \tfrac{1}{1-z\chi_x}\right) \\
&= -\sum_{\vec{\lambda}} \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \langle \vec{A}, \vec{\lambda} - x| \, \tfrac{(1-q)}{[\![\hbar]\!]} \mathfrak{q}^{\frac{1}{2}} \left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|-1} Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}-x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{1-\chi_x/z} + \tfrac{1}{1-z\chi_x}\right) \lim_{\zeta\to\phi_x} \tfrac{[\![\zeta-\phi_x]\!][\![2\zeta]\!]^2}{\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}-x}(z)} \\
&= -\sum_{\vec{\lambda}'} \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda}')} \langle \vec{A}, \vec{\lambda}'| \, \tfrac{(1-q)}{[\![\hbar]\!]} \mathfrak{q}^{\frac{1}{2}} \left(\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}'|} Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}'}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \times \left(\tfrac{z}{z-\chi_x} \mathrm{Res}_{z\to\chi_x} \tfrac{z^{-1}[\![2\zeta]\!]^2}{\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}'}(z)} + \tfrac{1}{z-\chi_x^{-1}} \mathrm{Res}_{z\to\chi_x^{-1}} \tfrac{z^{-1}[\![2\zeta]\!]^2}{\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}'}(z)} \right).
\end{aligned}
$$

最后，我们由 Ward 恒等式（4.26）得到所需公式

$$
\sum_i \frac{\eta_i^{-\sigma}}{z-\eta_i^\sigma} \mathrm{Res}_{z\to\eta_i^\sigma} \frac{\left\langle Y^D(z) \right\rangle}{[\![2\zeta \pm \hbar]\!]} + \mathfrak{q}(-1)^N \sum_j \frac{\xi_j^{-\sigma}}{z-\xi_j^\sigma} \mathrm{Res}_{z\to\xi_j^\sigma} \left\langle \frac{[\![2\zeta]\!]^2}{Y^D(z)} \right\rangle = 0, \tag{4.39}
$$

其中，$\sigma = \pm 1$ $\{\eta_i^\sigma\} = \{\chi^\sigma_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}\}$ $\vec{\lambda}$ 表示 $\left\langle Y^D(z) \right\rangle$ 中的所有极点，而 $\{\xi_i^\sigma\} = \{\chi^\sigma_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}\}$ $\vec{\lambda}$ 表示 $\left\langle {}^{1}_{Y^D}(z) \right\rangle$ 中的所有极点。这个恒等式明确展示了 qq-特征中的极点抵消。该因子

$$
c_{BD} = [\![2\zeta \pm \hbar]\!][\![2\zeta]\!]^2 \,, \tag{4.40}
$$

在 (2.29) 中出现的项，在此由极点消去条件成功导出。这表明，SO($2N$) 理论中 qq-特征的极点抵消性质，是这类 BD型代数存在的直接结果。

在 B型情形下推导 qq-特征，与 D型情形类似。注意到，当 $2N+1$SO($2N$) 的配分函数递归关系与 SO($2N$) 的配分函数递归关系相同，且 $\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}}$替换为 $\mathcal{Y}^B_{\vec{\lambda}}$(参见 (D.25)) 时，可以得出 qq-特征中的极点抵消同样是相同 BD型代数存在的直接结果。这凸显了具有 BD型规范群的五维规范理论中代数结构的普适性和一致性。

5 结论与讨论

本文基于 [21] 中提出的未精化瞬子配分函数里由杨图进行的极点分类，给出了 BCD 型规范理论的基本 qq-特征的解析表达式。我们证明了 $ABCD$ 型规范理论中 qq-特征的期望值具有如下示意形式

$$
\begin{aligned}
\langle \chi(z) \rangle &= \langle Y(z) \rangle + \left\langle \frac{c(z)\mathfrak{q}}{Y(z)} \right\rangle \,, && \text{for } ABD\text{-type } (2.8, 2.29) \\
\langle \chi(z) \rangle &= \langle Y(z) \rangle + \widetilde{c}(z)\mathfrak{q}\langle 1 \rangle + \left\langle \frac{c(z)\mathfrak{q}^2}{Y(z)} \right\rangle \,, && \text{for } C\text{-type } (2.37)
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

其中算符 Y 得到了适当定义。我们的结果展现了这些 qq-特征表达式的多项式性质，并建立了它们之间的李代数关系。此外，我们引入了一种称为 BD 型代数的新代数，它与 $q_1q_2 \to 1$ 极限下的 $\mathfrak{gl}_1$ 量子环面代数密切相关。该代数利用一种称为“Ward 恒等式”的技术构造而成，这种技术用于推导 qq-特征。尽管这种新代数的许多基本性质及其一致性尚未得到充分理解，但预计它将与 SO 型规范理论的可积性方面存在深刻联系。有关这些性质的进一步研究将留待今后开展。

当然，未来研究中仍有许多方向值得探索。我们工作的一个局限是仅涵盖未精细化极限，因为在一般Ω背景下进行计算仍是一项技术挑战。克服这一局限的一种方法是使用爆破方程，它已被推广到超越 A型规范群的规范理论中，见 [63]。这种方法可以从未精化瞬子配分函数出发，求解 ϵ_1 与 ϵ_2 之间比值为整数的瞬子配分函数。此外，文献 [64–69]中已提出了适用于含缺陷的四维/五维/六维理论的爆破方程。这些进展为利用本文推导的未精化表达式，探索更一般的Ω背景下的 qq-特征带来了可能。另有一些有趣的尝试，旨在精化规范群超越 A型的规范理论 [70, 71] ，以及箭图结构超越 A型 [72–74] 型的箭图规范理论；这些尝试主要基于膜构造和拓扑顶点形式。未来值得探索如何利用这些方法计算 qq-特征，并将其化为某种闭式。

我们仅考虑了基本 qq-特征的计算，也就是只有一个余维四缺陷的缺陷配分函数。不过，值得注意的是，涉及更多缺陷的高阶 qq-特征包含额外的信息，而它们与 Wilson 环之间的关系，尤其是在BCD型规范理论中，尚未得到充分理解。在 A型规范理论中，qq-特征作为算子值量生成淬火$\mathcal{W}$-代数，并且与$\mathcal{W}$-代数中的筛选荷对易。可以证明，赋予膜网的拓扑顶点的乘积起到筛选荷的作用，并满足 §4.3 [53]中引入的“Ward 恒等式”。一个值得探讨的开放问题是，在BCD型规范理论中，是否也能对筛选荷作类似的表述。

我们提出了一种新的代数，即 BD 型代数，但目前这一构想仍处于早期阶段，该代数的许多性质尚待发现。尤其是，证明将该代数推广到精细化情形颇具挑战性，因为在这种情形下，很难用杨图标记 JK 留数。此外，我们目前只构造了该代数的垂直表示，它们与膜网中的 D5 膜有关，而目前尚不清楚

ˆ如何构造带有 $\ell_1 \mapsto 1$ 的水平表示。从 SO 型规范理论的膜网构造角度来看，垂直表示或添加了定向反转面的 D5 膜所对应的代数结构预计会发生改变，而与 NS5 膜相关的代数则保持不变。因此，我们有兴趣探究，能否在未精细化极限下，将 [20, 21] 中构造的 O-顶点嵌入 BD 型代数与通常的 $\mathfrak{gl}_1$ 量子环面代数的余乘积中。然而，目前尚难以设想 O-顶点在 BD 型代数纯代数语境中能够发挥什么作用。

..量子环面代数中垂直表示的基$U_{q_1、\ q_2、\ q_3}(\mathfrak{gl}_1)$的 $\mathfrak{gl}_1$ 不过是麦克唐纳对称多项式 [56, 75], ，在非精细极限下，它会化为舒尔多项式，等价于 A型李代数的特征。在 [76] 中，通过对垂直表示 [77, 78]取余乘积，进一步得到了广义麦克唐纳多项式。在当前语境下，自然会期待由 BCD型李代数的特征自然定义的正交与辛舒尔多项式，在（4.19）中构造的垂直表示里发挥类似作用。这类对称多项式与 BCD型$\mathcal{W}_{1+\infty}$代数之间的关系已在[79], 中得到探讨，但现阶段，其中的顶点算子表述与我们的方法之间似乎还存在差距。

我们的研究并未讨论 C型规范理论的候选代数，因为这类理论的瞬子配分函数和qq-特征都涉及四个杨图求和部分的重数系数（2.32），因此难以应用“Ward 恒等式”方法。不过，有人提出了一种利用拓扑顶点形式计算 Sp(N) 瞬子配分函数的替代方法，在这种方法中，配分函数不涉及重数系数，见 [80]。值得探究的是，能否为这种方法构造顶点算子表述，并研究其背后的代数结构。

文献 [81], 已指出，超群与 BCD型群的瞬子计数中被积函数结构存在相似性；而文献 [82, 83]则建立了超群的拓扑顶点形式。未来研究的一个潜在方向是进一步探究这种相似性及其在未精细化极限下的起源。

致谢

我们感谢 Yutaka Matsuo 和 Go Noshita 对草稿提出的意见，也感谢 Sung-Soo Kim、Xiaobin Li 和 Futoshi Yagi 参与讨论。S.N. 谨向东南交通大学表示感谢，感谢该校在部分工作开展期间提供的热情款待。S.N. 的研究

得到中国国家科学基金会项目（编号：12050410234）和上海市外国专家项目（编号：22WZ2502100）的资助。K.Z.（张宏）感谢上海市提供的资助，但遗憾的是，此处无法披露相关信息。R.Z. 得到国家自然科学基金委员会项目（编号：12105198）和江苏省高层次人才项目（JSSCBS20210709）的资助。

A 记号与约定

这里，我们总结本文所采用的记号与约定。粗略地说，五维参数 P_{5d} 与四维参数 p_{4d}之间的关系由下式给出

$$P_{5d} = \exp(-p_{4d}) \tag{A.1}$$

我们将 Ω 背景参数定义为 $q_j = \exp(-\epsilon_j)$，其中 $q_1 q_2 q_3 = 1$ 是约束 $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$的结果。此外，我们引入记号$\epsilon_\pm = \frac{\epsilon_1 \pm \epsilon_2}{2}$，并将未精细化极限定义为 $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \hbar$，从而得到 $2\epsilon_+ = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$。库仑支参数表示为 $A_\alpha = \exp(-\mathfrak{a}_\alpha)$，qq-特征的变量记为 $z_j = \exp(-\zeta_j)$。JK 留数的极点表示为 $\chi_x = \exp(-\phi_x)$，其中 $\phi_x = \mathfrak{a}_\alpha - \epsilon_+ + (i-1)\epsilon_1 + (j-1)\epsilon_2$。最后，为方便起见，本文通篇使用简写记号 $[\![\alpha]\!] := 2\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 和 $[\![\alpha \pm \beta]\!] := [\![\alpha+\beta]\!][\![\alpha-\beta]\!]$。这种记号的优点在于，求配分函数的四维极限时，只需取参数$[\![\alpha]\!] \to \alpha$ 并去掉双括号，同时忽略 cosh 项即可。

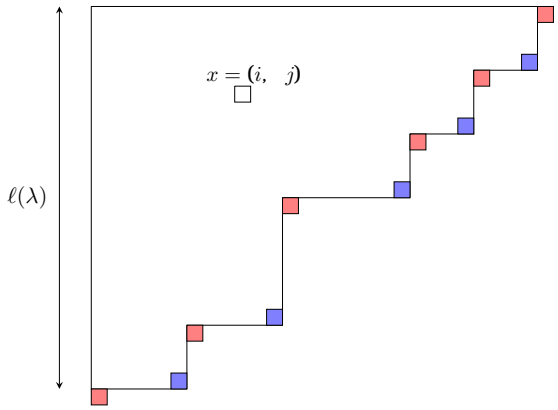


图1。红色（分别为蓝色）的方格可以添加到（分别从）杨图中移除，它们构成记作 $\mathfrak{A}(\lambda)$（分别为 $\mathfrak{R}(\lambda)$）的集合。

在本文中，我们对杨图采用以下记号。杨图表示为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$，其中各项按非递增顺序排列，即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$。杨图的长度记作 $\ell(\lambda)$，定义为 λ 中非零项的个数。杨图中方格的数量为

杨图由 $|\lambda| = \sum^{\ell}{}_{(\lambda)}{}_{i=1}\lambda_i$ 给出，我们将 λ 的转置记作 λ^t。一组 N 个杨图写作

$$\vec{\lambda} = \left(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(N)}\right) \ ,$$

该方格集合中的方格总数记为

$$|\vec{\lambda}| = \sum_{\alpha=1}^{N} \left|\lambda^{(\alpha)}\right| \ .$$

在 λ 中可添加或移除的方格集合分别表示为 $\mathfrak{A}(\lambda)$ 和 $\mathfrak{R}(\lambda)$。（见图1。）考虑由 N 个杨图组成的元组时，我们$\vec{}$ $\vec{}$将相应的集合记为 $\mathfrak{A}(\lambda)$ 和 $\mathfrak{R}(\lambda)$。

我们使用以下记号表示多重对称指数：

$$\text{P.E.}[f(x, y, \ldots)] = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x^k, y^k, \ldots)}{k}\right) \ ,$$

它将单粒子指标 f 变换为多粒子指标。

B 未精细化极限下 qq-特征的有限性

在本附录中，我们给出论证，说明 qq-特征在未精细化极限下具有有限形式，而在精细化层次 [27]上则包含无穷多项。

带有或不带有缺陷的配分函数的求值遵循 JK 处方。我们首先为每个分母因子 $\sum_i c_i\phi_i + d$指定一个向量 $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{e}_i$ ，其中 $\vec{e}_i$ 是一个 k维向量，且满足 $(\vec{e}_i)_j = \delta_{i,\ j}$。我们还需要为每个瞬子数 k选择一个 k维参考向量 $\check{}\eta_k$ ，通常取为

$$\check{\eta}_k = (1, 1+\delta_1, 1+\delta_2, \ldots, 1+\delta_{k-1}), \tag{B.1}$$

其中 δ_i 是一些小的实数，它们与整数不存在线性相关关系，即对于 $^{\forall}I_i \in \mathbb{Z}$,

$$\delta_1 + \sum_{i=2}^{k-1} I_i\delta_i \neq 0. \tag{B.2}$$

例如，对于 $k = 2$ ，我们可以选择 $\check{}\eta_2 =$ (1，1。001)，而对于 $k = 3$ ，我们可以选择 $\check{}\eta_3 =$(1，1。001，1。0007)，但选择 $\check{}\eta_3 =$(1，1。001，1。002) 并不合适。在 k-瞬子层面，要使一组 k 极点被允许，其对应的向量 $\vec{v}ii = 1^k$ 必须满足以下条件：

$$\check{\eta}_k = \sum_{i=1}^{k} c_i\vec{v}_i, \quad {}^{\exists}c_i > 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{B.3}$$

例如，在 SO($2N$) 理论的双瞬子计算中，我们有附属于 $\epsilon_+ + \phi_1 \pm \mathfrak{a}_\alpha$ 的向量 (1，0) 、附属于 $\epsilon_+ - \phi_1 \pm \mathfrak{a}_\alpha$ 的向量 (-1，0) 、对应于 $\epsilon_+ + \phi_1 + \phi_2 \pm \epsilon_-$ 的向量 (1，1) 等。总的来说，从向量集合中

$$\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}, \tag{B.4}$$

JK 处方中允许的组合为

$$\{(-1, 0), (1, 1)\},\ \{(-1, 1), (1, 1)\},\ \{(0, 1), (1, -1)\},\ \{(0, 1), (1, 1)\},\\ \{(1, 0), (-1, 1)\},\ \{(1, 0), (0, 1)\}. \tag{B.5}$$

加入缺陷贡献，即 $\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \zeta$ 处对于 $i = 1$，2 的极点后，向量集合和允许的组合保持不变。然而，如果我们取缺陷贡献中的一个极点，则该组合必须分别包含 (± 1, 0) 或 (0，± 1)，对应于 $\epsilon_+ \pm \phi_i \pm \zeta$。如果我们不取缺陷贡献中的任何新极点，就得到一项 $\langle Y^D \rangle$；如果取一个极点，就得到一项与 $\left\langle {}^{1}_{Y^D} \right\rangle$ 成正比的项。

—

为了说明在未精细化极限下，qq-特征可表示为 Y-算符期望值的有限组合，我们需要排除两种可能性。第一种是，在缺陷贡献中取多于一个极点的项在未精细化极限下消失。第二种是，$\pm\zeta \pm \epsilon_+$ 形式的极点在未精细化极限下是允许的，但对于 i，$j \in \mathbb{Z}$，$\pm\zeta \pm \epsilon_+ + i\epsilon_1 + j\epsilon_2$ 形式的极点给出平凡的留数。

在上文所示的 SO($2N$) 理论双瞬子计算示例中，我们首先要排除选择极点 $\epsilon_+ + \phi_1 \pm \zeta$ 和 $\epsilon_+ + \phi_2 \pm \zeta$ 的组合 $\{(1,0), (0, 1)\}$。即使在精细化的 Ω 背景下，也很容易证明这些极点会消失。这是因为在变量 中，只要选取上述某种极点组合，就至少有一个变量必须等于 或 。此时，被积函数中的因子 $S(\epsilon_+ \pm \phi_1 \pm \phi_2)^{-1}$ 会引入一个额外的零点，从而消除这种情况的任何贡献。对于本文讨论的所有情况以及任意数量的瞬子，这一论证都成立。

第二种情形更为复杂，因为它在精细化情形下的贡献非零，但只在未精细化极限下才消失。例如，在 SO($2N$) 理论的双瞬子计算中，取极点 $\phi_1 = \zeta - \epsilon_+ - \epsilon_1$，$\phi_2 = \zeta - \epsilon_+$，对应组合 $\{(0, 1), (1, -1)\}$，可得非平凡的留数：

$$\frac{[\![-(\epsilon_1+\epsilon_2)]\!][\![2(\epsilon_1-\zeta)]\!][\![\epsilon_1-2\zeta]\!][\![2\zeta-\epsilon_2]\!][\![2\zeta-\epsilon_1-\epsilon_2]\!][\![2(-\zeta+2\epsilon_1+\epsilon_2)]\!]}{8[\![\epsilon_2]\!][\![-\epsilon_1+\epsilon_2]\!]\prod_{\alpha=1}^{N}[\![\epsilon_1+\zeta\pm\mathfrak{a}_\alpha]\!][\![\epsilon_1+\epsilon_2-\zeta\pm\mathfrak{a}_\alpha]\!][\![2\epsilon_1+\epsilon_2-\zeta\pm\mathfrak{a}_\alpha]\!]} \\ \times[\![2\zeta-2\epsilon_1-\epsilon_2]\!][\![2\zeta-3\epsilon_1-\epsilon_2]\!][\![-2\zeta+3\epsilon_1+2\epsilon_2]\!]\,. \tag{B.6}$$

因子 $[\![-2\epsilon_+]\!] = [\![-(\epsilon_1+\epsilon_2)]\!]$ 的来源可以解释如下。如（2.20）所示，缺陷贡献包含以下各项

$$\mathcal{S}\left(\phi_i \pm \zeta\right) = \frac{[\![\epsilon_- \pm (\phi_i \pm \zeta)]\!]}{[\![\epsilon_+ \pm (\phi_i \pm \zeta)]\!]} \,. \tag{B.7}$$

然而，取极点 $\phi_1 = \zeta - \epsilon_+ - \epsilon_1$ 时，以下因子变为

$$[\![\epsilon_- + \phi_1 - \zeta]\!] = [\![-(\epsilon_2+\epsilon_1)]\!] = [\![-2\epsilon_+]\!], \tag{B.8}$$

$\mathcal{S}(\phi_i \pm \zeta)$ 分子中的表达式。细心的读者可能会注意到，计算留数后，分母中也会出现$[\![\pm 2\epsilon_+]\!]$，但它们会与 (2.19) 中的前因子 $[\![2\epsilon_+]\!]^k$ 相消。因此，在精细化层次 [27]上，SO($2N$) 规范群的 qq-特征无法简单地仅用 Y 和 $1/Y$ 表示。不过，在未精细化极限 $\epsilon_+ = 0$下，这个极点给出平凡留数。对于极点 $\phi_i = \pm\zeta - \epsilon_+ - \epsilon_{1,2}$和 $\phi_i = \pm\zeta + \epsilon_+ + \epsilon_{1,2}$，也有类似的论证。它们的留数在精细化层次下与 $[\![\pm 2\epsilon_+]\!]$ 成正比，因此是平凡的。（注意，在$\phi_i = \pm\zeta - \epsilon_+ + \epsilon_{1,2}$ 和 $\phi_i = \pm\zeta + \epsilon_+ - \epsilon_{1,2}$ 处的留数即使在精细化层次下也为零。）

请注意，在不含缺陷 [21] 的瞬子配分函数中也可以观察到这一现象。无法用杨图分类的极点会给出与 $[\![\pm 2\epsilon_+]\!]$ 成正比的留数。然而，在未精细化层次，这些非平凡极点对配分函数没有贡献，因为它们的留数为零。

上述论证适用于所有 BCD 型规范理论，因为它们都具有类似的结构，并且适用于任意数量的瞬子。由此可以证明，在未精细化极限中，每组 JK 留数里，每个包含缺陷参数的极点最多只能被选取一次。这保证了 qq-特征的有限性；在未精细化极限中，qq-特征可表示为有限个 Y-算符期望值的组合。

C 未精细化极限中的垂直表示

在本附录中，我们验证未精细化极限中垂直表示所满足的代数关系。

类型 A

未精细化极限下的垂直表示由 (4.16) 给出，这里我们验证 Drinfeld流的交换关系。在垂直表ˆ示中，我们设定 $\ell_1 \mapsto 0$ (即 $\hat{}\gamma \mapsto 1$)，因此所有 h_m 都彼此交换。因此，需要验证的唯一非平凡关系是 (4.10) 中的关系。

下面我们来证明（4.10）中的第一个交换关系。一个有用的等式是

$$p_m\left(q^{(\lambda+x)^t+\rho+1/2}\right) - p_m\left(q^{\lambda^t+\rho+1/2}\right) = \left\{q^{\lambda_j^t+1-(j-1)}\right\}^m - \left\{q^{\lambda_j^t-(j-1)}\right\}^m$$

$$=(q^m-1)\left\{q^{\lambda_j^t+1-j}\right\}^m, \tag{C.1}$$

此外，δ函数有如下展开式

$$\delta(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m\ . \tag{C.2}$$

接下来，交换关系的显式计算如下

$$\begin{aligned}
&\left[h_m, x^+(z)\right]|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \\
=&\frac{[\![\hbar]\!]}{m(1-q^m)}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} A_\alpha^m\delta(z/\chi_x)\left(p_m\left(q^{(\lambda^{(\alpha)}+x)^t+\rho+1/2}\right)-p_m\left(q^{(\lambda^{(\alpha)})^t+\rho+1/2}\right)\right)|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle \\
=&-\frac{[\![\hbar]\!]}{m}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{x\in\mathfrak{A}(\lambda^{(\alpha)})} A_\alpha^m\left\{q^{(\lambda^{(\alpha)})_j^t+1-j}\right\}^m\delta(z/\chi_x)\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle \\
=&-\frac{[\![\hbar]\!]}{m}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{x\in\mathfrak{A}(\lambda^{(\alpha)})} \chi_x^m\delta(z/\chi_x)\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle \\
=&-\frac{[\![\hbar]\!]z^m}{m}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{x\in\mathfrak{A}(\lambda^{(\alpha)})} \delta(z/\chi_x)\,|\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle \\
=&-\frac{z^m}{m}x^+(z)\,|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle\,,
\end{aligned} \tag{C.3}$$

其中 $x=((\lambda^{(\alpha)})_j^t+1,\ j)\in\mathfrak{A}(\lambda^{(\alpha)})$。类似地，可以证明交换关系$[h_m,x^-(z)]$。

为了证明（4.10）中的第二个交换关系，我们注意到恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} m[\![\pm m\hbar]\!]h_m z^{-m}\,|A,\lambda\rangle=\sum_{m=1}^{\infty} m(1-q^m)(1-q^{-m})h_m z^{-m}\,|A,\lambda\rangle \\
=&\sum_{m=1}^{\infty}(1-q^{-m})\sum_{j=1}^{\infty}A^m\left[q^{\lambda_j^t+1-j}\right]^m z^{-m}\,|A,\lambda\rangle \\
=&\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A^m\left[q^{\lambda_j^t+1-j}\right]^m z^{-m}-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A^m\left[q^{\lambda_j^t-j}\right]^m z^{-m}\right]|A,\lambda\rangle\,, \\
=&\left[\sum_{x\in\mathfrak{A}(\lambda)}\sum_{m=1}^{\infty}(\chi_x/z)^m-\sum_{x\in\mathfrak{R}(\lambda)}\sum_{m=1}^{\infty}(\chi_x/z)^m\right]|A,\lambda\rangle\,,
\end{aligned} \tag{C.4}$$

这可由满足 $\lambda_j^t=\lambda_{j+1}^t$ 的列之间的抵消得到。同样，我们也有负模的恒等式

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-1}^{-\infty} m[\![\pm m\hbar]\!]h_m z^{-m}\,|A,\lambda\rangle&=\sum_{m=-1}^{-\infty} m(1-q^m)(1-q^{-m})h_m z^{-m}\,|A,\lambda\rangle \\
&=\sum_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\sum_{j=1}^{\infty}A^{-m}\left[q^{\lambda_j^t+1-j}\right]^{-m}z^m\,|A,\lambda\rangle
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$= \left[\sum_{x\in\mathfrak{A}(\lambda)} \sum_{m=1}^{\infty} (\chi_x/z)^{-m} - \sum_{x\in\mathfrak{R}(\lambda)} \sum_{m=1}^{\infty} (\chi_x/z)^{-m} \right] |A,\lambda\rangle \ .$$

那么，交换关系的显式计算如下

$$\begin{aligned}
\left[x^+(z), x^-(w)\right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle =& [\![\hbar]\!]^2 \delta(z/w) \left[\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \delta(z/\chi_x) - \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \delta(z/\chi_x) \right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \\
=& - [\![\pm\hbar]\!] \delta(z/w) \left[\sum_{m\neq 0} m[\![\pm m\hbar]\!] h_m z^{-m} + N \right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \qquad \text{(C.6)} \\
=& - [\![\pm\hbar]\!] \left[\delta(z/w) \sum_{m\neq 0} m[\![\pm m\hbar]\!] h_m z^{-m} + N \sum_{n\in\mathbb{Z}} (z/w)^n \right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \,,
\end{aligned}$$

这表明了（4.10）中涉及 $\hat{}\ \ell_1 \mapsto 0$ 和 $\hat{}\ \ell_2 \mapsto N$的第二个关系。第一行的结果源于这样一个事实：非平凡部分仅来自对杨图增添或移除相同的方格。

总之，（4.16）是量子环面代数$U_{q_1,q_2,q_3}(\mathfrak{gl}_1)$ 未精细化极限（4.10）的一个表示。

类型 BD

现在我们转而讨论 BD-型代数（4.17），并验证向量表示（4.19）的有效性。方法与 A-型的情况类似。利用（C.1），我们可以证明（4.17）中的第一个交换关系

$$\begin{aligned}
& \left[h_m, x^+(z)\right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \\
=& - [\![\hbar]\!] \sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \left(\delta(z/\chi_x) \left(\chi_x^m + \chi_x^{-m}\right) + \delta(z\chi_x) \left(\chi_x^m + \chi_x^{-m}\right) \right) |\vec{A},\vec{\lambda}+x\rangle \\
=& - (z^m + z^{-m}) x^+(z) |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \,, \qquad \text{(C.7)}
\end{aligned}$$

可以用类似的方法验证交换关系 $[h_m, x^-(z)]$ 。

与 (C.4) 和 (C.5) 类似，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} [\![\pm m\hbar]\!] h_m z^{-m} |A,\lambda\rangle &= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} (1-q^m)(1-q^{-m}) h_m z^{-m} |A,\lambda\rangle \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} z^{-m}(1-q^{-m}) \sum_{j=1}^{\infty} A^m \left(q^{\lambda_j^t-(j-1)}\right)^m \qquad \text{(C.8)} \\
&\qquad + z^{-m}(1-q^m) \sum_{j=1}^{\infty} A^{-m} \left(q^{\lambda_j^t-(j-1)}\right)^{-m} |A,\lambda\rangle \\
&= \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0}} \left[\left(\sum_{x\in\mathfrak{A}(\lambda)} - \sum_{x\in\mathfrak{R}(\lambda)} \right) (z^{-m}\chi_x^m + z^{-m}\chi_x^{-m}) \right] |A,\lambda\rangle
\end{aligned}$$

$$= \left[\left(\sum_{x\in\mathfrak{A}(\lambda)} - \sum_{x\in\mathfrak{R}(\lambda)} \right) (\delta(z/\chi_x) + \delta(z\chi_x) - 2) \right] |A,\lambda\rangle$$

于是，(4.17) 与 $\hat{}\ \ell_1 \mapsto 0$ 和 $\hat{}\ \ell_2 \mapsto N$ 的第二个交换关系如下：

$$\begin{aligned}
&\left[x^+(z), x^-(w)\right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \\
=&[\![\hbar]\!]^2 \Bigg[\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} \Big(\delta(z/w)\delta(z/\chi_x) + \delta(zw)\delta(z/\chi_x) + \delta(zw)\delta(z\chi_x) + \delta(z/w)\delta(z\chi_x)\Big) \\
&- \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \Big(\delta(z/w)\delta(z/\chi_x) + \delta(zw)\delta(z/\chi_x) + \delta(zw)\delta(z\chi_x) + \delta(z/w)\delta(z\chi_x)\Big) \Bigg] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \\
=&[\![\hbar]\!]^2 \left(\delta(z/w) + \delta(zw)\right) \left[\left(\sum_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})} - \sum_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})} \right) \left(\delta(z/\chi_x) + \delta(z\chi_x)\right) \right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \\
=&-[\![\pm\hbar]\!] \left(\delta(z/w) + \delta(zw)\right) \left[\sum_{m\neq 0} [\![\pm m\hbar]\!] h_m z^{-m} + 2N \right] |\vec{A},\vec{\lambda}\rangle \,.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

总之，(4.19) 是 BD-型代数 (4.17) 的一个表示。

D 瞬子配分函数的递推关系

在本附录中，我们根据杨图推导 $\mathrm{SU}(N)$ 和 $\mathrm{SO}(n)$ 瞬子配分函数的递推关系。这些递推关系对于 §4.3中 qq-特征的 Ward 恒等式方法至关重要。为此，我们给出未精化瞬子配分函数关于杨图求和的显式表达式，并简要讨论其性质。

类型 A

我们先考虑 2.5) 中瞬子配分函数的递推关系，适用于 A-型规范群。本文引入了若干不同类型的 Y-函数，以给出 qq-特征的解析表达式。这些 Y-函数都与 A-型 Y-函数 (2.11) 有关。态 $|\vec{A},\vec{\lambda}\rangle$ 上的 Y^A-算符 (2.10) 的本征值可分解为若干 $\mathcal{Y}^A$-函数的乘积，每个函数仅依赖于一个杨图：

$$\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z) = \prod_{\alpha=1}^{N} \mathcal{Y}^A_{\lambda^{(\alpha)}}(z), \tag{D.1}$$

其中，与单个杨表 λ 及库仑支参数 $\mathfrak{a}$ 相关联的 $\mathcal{Y}$-函数为

$$\mathcal{Y}^A_{\lambda}(z) = [\![\zeta - \mathfrak{a} + 2\epsilon_+]\!] \prod_{x\in\lambda} \mathcal{S}(\zeta - \phi_x) \,. \tag{D.2}$$

因此，只需列举单个杨表对应的 $\mathcal{Y}$-函数的各种有用性质。最重要的公式在一些文献中被称为“壳公式”，如下：

$$\mathcal{Y}_\lambda^A(z) = \frac{\prod_{x\in\mathfrak{A}(\lambda)}[\![\zeta-\phi_x+\epsilon_+]\!]}{\prod_{x\in\mathfrak{R}(\lambda)}[\![\zeta-\phi_x-\epsilon_+]\!]}. \tag{D.3}$$

另一个有用的表达式，可以从$\mathcal{Y}$-函数的定义轻易推导出来：

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\lambda^A(z) &= -\left(\frac{zq_1q_2}{A}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{x'\in\mathcal{X}_\lambda}\frac{1-\frac{x'}{zq_1q_2}}{1-\frac{q_2x'}{zq_1q_2}} \\ &= \exp\left(-\sum_{m,j=1}^{\infty}\frac{1}{m}(1-q_2^m)A^m q_2^{m(j-2)}q_1^{m(\lambda_j^t-1)}z^{-m}+\pi i+\frac{1}{2}\log(zq_1q_2/A)\right),\end{aligned} \tag{D.4}$$

等价地，

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_\lambda^A(z) &= \left(\frac{A}{zq_1q_2}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{x'\in\mathcal{X}_\lambda}\frac{1-\frac{zq_1q_2}{x'}}{1-\frac{zq_1q_2}{q_2x'}} \\ &= \exp\left(-\sum_{m,j=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_k(1-q_2^{-m})A^{-m}q_2^{-m(j-2)}q_1^{-m(\lambda_j^t-1)}z^m+\frac{1}{2}\log(A/zq_1q_2)\right),\end{aligned} \tag{D.5}$$

其中$\mathcal{X}_\lambda=\{Aq_2^{j-1}q_1^{\lambda_j^t}\}_{j=1}^{\infty}$。

从现在起，我们只考虑未精细化极限，而Nekrasov因子（2.6）有一个等价表达式及相关递归公式 [84]:

$$N_{\lambda\nu}(Q,q)=\prod_{i,j=1}^{\infty}\frac{1-Qq^{-\nu_j^t-\lambda_i+i+j-1}}{1-Qq^{i+j-1}}. \tag{D.6}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{N_{(\lambda^{(1)}+x)\lambda^{(2)}}(A_1/A_2;q)}{N_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}(A_1/A_2;q)} &= \prod_{x'\in\mathcal{X}_{\lambda^{(2)}}}\frac{1-\chi_x/x'}{1-q\chi_x/x'}=(\chi_x/A_2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}_{\lambda^{(2)}}^A(\chi_x), \\ \frac{N_{\lambda^{(1)}(\lambda^{(2)}+x)}(A_1/A_2;q)}{N_{\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}}(A_1/A_2;q)} &= \prod_{x'\in\mathcal{X}_{\lambda^{(1)}}}\frac{1-x'/\chi_x}{1-x'/q\chi_x}=-(A_1/\chi_x)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}_{\lambda^{(1)}}^A(\chi_x),\end{aligned} \tag{D.7}$$

也可以通过本文附带的*Mathematica* 文件直接验证。将上述两个递归关系结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{N_{(\lambda+x)(\lambda+x)}(1;q)}{N_{\lambda\lambda}(1;q)} &= -\lim_{z\to\chi_x}\mathcal{Y}_{\lambda+x}^A(z)\mathcal{Y}_\lambda^A(z) \\ &= -[\![\pm\hbar]\!]\lim_{z\to\chi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]^{-2}\left(\mathcal{Y}_\lambda^A(z)\right)^2 \\ &= -[\![\pm\hbar]\!]^{-1}\lim_{z\to\chi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]^{2}\left(\mathcal{Y}_{\lambda+x}^A(z)\right)^2.\end{aligned} \tag{D.8}$$

在重写瞬子配分函数时，我们还需要用到另一个重要恒等式：

$$N_{\lambda\nu}(Q;q) = (-Q)^{|\lambda|+|\nu|} q^{\frac{1}{2}\kappa(\lambda)-\frac{1}{2}\kappa(\nu)} N_{\nu\lambda}\left(Q^{-1};q\right), \tag{D.9}$$

回顾一下，纯 SU(N) Nekrasov 瞬子配分函数 (2.5) 可写为

$$Z_{\text{inst}}^{\mathfrak{su}(N)} = \sum_{\vec{\lambda}} \mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{su}(N)}, \tag{D.10}$$

其中

$$Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{su}(N)} = \prod_{\alpha=1}^{N} N^{-1}_{\lambda^{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)}}(1,q) \prod_{\alpha\neq\beta} N^{-1}_{\lambda^{(\alpha)}\lambda^{(\beta)}}(A_\alpha/A_\beta,q)\ . \tag{D.11}$$

U由 (D.8)，我们可以导出 $\lambda^{(\alpha)} \to \lambda^{(\alpha)} + x$ 的递归关系如下 :

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{\vec{\lambda}+x}^{\mathfrak{su}(N)}}{Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{su}(N)}} =& -\frac{1}{[\![\pm\hbar]\!]} \lim_{\zeta\to\phi_x} \frac{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2}{\left(\mathcal{Y}^A_{\lambda^{(\alpha)}}(z)\right)^2} \prod_{\beta\neq\alpha} \left(-\frac{1}{\left(\mathcal{Y}^A_{\lambda^{(\beta)}}(\chi_x)\right)^2}\right) \\
=& \frac{(-1)^N}{[\![\pm\hbar]\!]} \lim_{\zeta\to\phi_x} \frac{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2}{\left(\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z)\right)^2} \\
=& (-1)^N [\![\pm\hbar]\!] \lim_{\zeta\to\phi_x} \frac{1}{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2 \left(\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}+x}(z)\right)^2}.
\end{aligned} \tag{D.12}$$

类型 BD

现在我们转向 SO(n) 规范群。SO($2N$) 规范群的未精化瞬子配分函数可表示为对杨图求和 [21]。配分函数如下：

$$\begin{aligned}
Z_{\text{inst}}^{\mathfrak{so}(2N)} =& \sum_{\vec{\lambda}} \mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} Z_{\vec{\lambda}}^{\mathfrak{so}(2N)} \\
:=& \sum_{\vec{\lambda}} \mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|} M_{\vec{\lambda}}(\vec{A})^2 \prod_{\alpha=1}^{N} A_\alpha^{(N-4)|\lambda^{(\alpha)}|} \prod_{\alpha=1}^{N} q^{-\frac{(N-4)\kappa(\lambda^{(\alpha)})}{2}} \\
& \times \prod_{\alpha=1}^{N} A_\alpha^{|\vec{\lambda}|} N_{\lambda^{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)}}(1,q)^{-1} \prod_{\alpha\neq\beta} N_{\lambda^{(\alpha)}\lambda^{(\beta)}}(A_\alpha A_\beta^{-1},q)^{-1}
\end{aligned} \tag{D.13}$$

其中 $\kappa(\lambda) := 2\sum_{(i,\ j)\ \in\lambda}(j-i)$，而 M-因子表示为

$$\begin{aligned}
& M_{\vec{\lambda}}(A_1,A_2,\ldots,A_N) \\
:=& \frac{\prod_{\alpha=1}^{N} \prod_{(i,j)\in\lambda^{(\alpha)}} (1-A_\alpha^2 q^{i-j+(\lambda^{(\alpha)})^t_j-\lambda^{(\alpha)}_i})}{\prod_{1\le\alpha<\beta\le N} \prod_{(i,j)\in\lambda^{(\alpha)}} (1-A_\alpha A_\beta q^{i+j-1-\lambda^{(\alpha)}_i-\lambda^{(\beta)}_j}) \prod_{(m,n)\in\lambda^{(\beta)}} (1-A_\alpha A_\beta q^{1-m-n+(\lambda^{(\beta)})^t_n+(\lambda^{(\alpha)})^t_m})}\ .
\end{aligned}$$

因此，为了推导配分函数的递推关系，有必要通过在杨图中添加一个方框来推导 M-因子的递推公式$\lambda^{(\alpha)} \to \lambda^{(\alpha)} + x$

$$\frac{M_{\vec{\lambda}+x}}{M_{\vec{\lambda}}} = \text{P.E.}(X), \tag{D.14}$$

其中 $x \in (m,\ \lambda_m^{(\alpha)} + 1)$ 且

$$\begin{aligned} X(\vec{\lambda}) = &- A_\alpha^2 q^{m-1-\lambda_m^{(\alpha)}} \Big((1+q) q^{m-1-\lambda_m^{(\alpha)}} - q^{\ell(\lambda^{(\alpha)})} + (q-1) \sum_{i \neq m} q^{i-1-\lambda_i^{(\alpha)}} \Big) \\ &+ A_\alpha q^{m-1-\lambda_m^{(\alpha)}} \sum_{\beta \neq \alpha} A_\beta \Big(q^{\ell(\lambda^{(\beta)})} + (1-q) \sum_{i=1}^{\ell(\lambda^{(\beta)})} q^{i-1-\lambda_i^{(\beta)}} \Big). \end{aligned} \tag{D.15}$$

利用 $\chi_x = A_\alpha q^{m-\lambda_m^{(\alpha)}-1}$，我们可以改写为

$$\begin{aligned} X(\vec{\lambda}) = &- \chi_x \left((1+q)\chi_x - A_\alpha q^{\ell(\lambda^{(\alpha)})} + (1-q^{-1}) \sum_{y \in \mathfrak{S}(\lambda^{(\alpha)}), y \neq x-(0,1)} \chi_y \right) \\ &+ \chi_x \sum_{\beta \neq \alpha} \left(A_\beta q^{\ell(\lambda^{(\beta)})} - (1-q^{-1}) \sum_{y \in \mathfrak{S}(\lambda^{(\beta)})} \chi_y \right), \end{aligned} \tag{D.16}$$

其中，我们将 $\mathfrak{S}(\lambda) = \{(i,\ \lambda_i)\}_{i=1}^{\ell(\lambda)}$ 记为杨图 λ 边界上的方格集合。注意，如果 $\lambda_i = \lambda_{i+1}$，那么 $\chi_{(i,\lambda_i)} = q^{-1}\chi_{(i+1,\lambda_{i+1})}$，因此

$$\begin{aligned} X(\vec{\lambda}) = &- \chi_x \left(\chi_x + \sum_{y \in \mathfrak{R}(\lambda^{(\alpha)})} \chi_y - \sum_{y \in \mathfrak{A}(\lambda^{(\alpha)}), y \neq x} \chi_y \right) \\ &- \chi_x \sum_{\beta \neq \alpha} \left(\sum_{y \in \mathfrak{R}(\lambda^{(\beta)})} \chi_y - \sum_{y \in \mathfrak{A}(\lambda^{(\beta)})} \chi_y \right). \end{aligned} \tag{D.17}$$

将其代回式（D.14），得到以下递归关系

$$\frac{M_{\vec{\lambda}+x}}{M_{\vec{\lambda}}} = (1-\chi_x^2) \prod_{\beta=1}^{N} \frac{\prod_{y \in \mathfrak{R}(\lambda^{(\beta)})} (1-\chi_x\chi_y)}{\prod_{\substack{y \in \mathfrak{A}(\lambda^{(\beta)}) \\ y \neq x}} (1-\chi_x\chi_y)}. \tag{D.18}$$

可以直接使用本文附带的 *Mathematica* 文件，在*arXiv*上检验上述公式。

注意

$$q^{c\kappa(\lambda+x)/2} / q^{c\kappa(\lambda)/2} = \chi_x^{-c} A^c, \tag{D.19}$$

我们得到 SO($2N$) 配分函数的如下递归关系 (D.13)

$$\frac{Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}+x}}{Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}}} = \left(\prod_{\alpha=1}^{N} A_\alpha \right) \chi_x^{(N-4)} \frac{(-1)^{N-1}}{[\![\hbar]\!]^2} \lim_{\zeta \to \phi_x} \frac{[\![\zeta - \phi_x]\!]^2}{\left(\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z) \right)^2}$$

$$\times\left((1-\chi_x^2)^2\prod_{\beta=1}^{N}\frac{\prod_{y\in\mathfrak{R}(\lambda^{(\beta)})}(1-\chi_x\chi_y)}{\prod_{y\in\mathfrak{A}(\lambda^{(\beta)})}(1-\chi_x\chi_y)}\right)^2. \tag{D.20}$$

利用式 (D-型 $\mathcal{Y}$-函数（定义见式 (2.28）及其壳公式

$$\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}}(z)=\frac{\prod_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}[\![\zeta\pm\phi_x]\!]}{\prod_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}[\![\zeta\pm\phi_x]\!]}=-(z^N\prod_{\alpha=1}^{N}A_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^A_{\vec{\lambda}}(z)\frac{\prod_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}(1-\chi_x z)}{\prod_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}(1-\chi_x z)}, \tag{D.21}$$

我们得到用 $\mathcal{Y}^D$-函数表示的递归公式,

$$\begin{aligned}\frac{Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}+x}}{Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}}}=&\frac{1}{[\![\hbar]\!]^2}\lim_{\zeta\to\phi_x}\frac{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2[\![2\zeta]\!]^4}{\left(\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}}(z)\right)^2}\\=&(-[\![\hbar]\!])^2\lim_{\zeta\to\phi_x}\frac{[\![2\zeta\pm\hbar]\!]^2}{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2\left(\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}+x}(z)\right)^2}.\end{aligned} \tag{D.22}$$

对于 SO($2N+1$) 理论，配分函数为

$$\begin{aligned}Z^{\mathfrak{so}(2N+1)}_{\text{inst}}=&\sum_{\vec{\lambda}}\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|}Z^{\mathfrak{so}(2N+1)}_{\vec{\lambda}} \qquad\qquad (D.23)\\:=&\sum_{\vec{\lambda}}\mathfrak{q}^{|\vec{\lambda}|}M_{\vec{\lambda}}(\vec{A})^2\prod_{\alpha=1}^{N}A_\alpha^{(N-4)|\lambda^{(\alpha)}|}\prod_{\alpha=1}^{N}(-q)^{-\frac{(N-4)\kappa(\lambda^{(\alpha)})}{2}}\prod_{\alpha\neq\beta}N_{\lambda^{(\alpha)}\lambda^{(\beta)}}(A_\alpha A_\beta^{-1},q)^{-1}\\&\times\prod_{\alpha=1}^{N}A_\alpha^{|\vec{\lambda}|}N_{\lambda^{(\alpha)}\lambda^{(\alpha)}}(1,q)^{-1}N_{\lambda^{(\alpha)}\emptyset}(A_\alpha,q)^{-1}N_{\emptyset\lambda^{(\alpha)}}(A_\alpha^{-1},q)^{-1}\ .\end{aligned}$$

（D.13）与（D.23）之间的关键区别在于存在以下项： $N_{\lambda^{(\alpha)}\emptyset}N_{\emptyset\lambda^{(\alpha)}}$其递推关系为

$$\frac{N_{\lambda^{(\alpha)}+x\emptyset}(A_\alpha,q)N_{\emptyset\lambda^{(\alpha)}+x}(A_\alpha^{-1},q)}{N_{\lambda^{(\alpha)}\emptyset}(A_\alpha,q)N_{\emptyset\lambda^{(\alpha)}}(A_\alpha^{-1},q)}=-[\![\chi_x]\!]^2 \tag{D.24}$$

该递推关系补偿了 $\mathcal{Y}$-函数（2.28）在 SO($2N$) 和 SO($2N+1$) 规范群之间的差异, 如下式所示:

$$\left(\mathcal{Y}^{B_N}_{\lambda}(z)\right)^2=[\![\zeta]\!]^2\left(\mathcal{Y}^{D_N}_{\lambda}(z)\right)^2.$$

总之， B 型瞬子配分函数的递归关系为

$$\begin{aligned}\frac{Z^{\mathfrak{so}(2N+1)}_{\vec{\lambda}+x}}{Z^{\mathfrak{so}(2N+1)}_{\vec{\lambda}}}=&\frac{1}{[\![\hbar]\!]^2}\lim_{\zeta\to\phi_x}\frac{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2[\![2\zeta]\!]^4}{[\![\zeta]\!]^2\left(\mathcal{Y}^D_{\vec{\lambda}}(z)\right)^2}=\frac{1}{[\![\hbar]\!]^2}\lim_{\zeta\to\phi_x}\frac{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2[\![2\zeta]\!]^4}{\left(\mathcal{Y}^B_{\vec{\lambda}}(z)\right)^2}\\=&[\![\hbar]\!]^2\lim_{\zeta\to\phi_x}\frac{[\![2\zeta\pm\hbar]\!]^2}{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2\left(\mathcal{Y}^B_{\vec{\lambda}+x}(z)\right)^2}.\end{aligned} \tag{D.25}$$

公式（D.22）和（D.25）同样可以通过我们的*Mathematica* 文件进行验证。

D.1 极点抵消的证明

现在我们准备证明 qq-特征表达式（2.29）中的极点消去。对于 C-型，我们对（2.34）中的极点抵消给出一个部分解答。

回顾表达式（D.21）以及定义（2.28）和（2.33），可知

$$\mathcal{Y}^{B_N}_{\vec{\lambda}}(z) = [\![\zeta]\!]\mathcal{Y}^{D_N}_{\vec{\lambda}}(z), \tag{D.26}$$

$$\mathcal{Y}^{C_N}_{\vec{\lambda}}(z) = \frac{1}{[\![2\zeta]\!]^2[\![2\zeta \pm \hbar]\!]}\mathcal{Y}^{D_{N+4}}_{\vec{\lambda}}(z), \tag{D.27}$$

因此，$\mathrm{Y}^{BCD}_{\vec{\lambda}}(z)$ 在 $\zeta = \phi_{x\in\mathfrak{R}(\vec{\lambda})}$ 处有极点，而 $1/\mathrm{Y}^{BCD}_{\vec{\lambda}}(z)$ 在 $\zeta = \phi_{x\in\mathfrak{A}(\vec{\lambda})}(z)$ 处有极点。对于所有大小为 $k+1$ 的杨图，$\mathrm{Y}^{BCD}_{\vec{\lambda}}(z)$ 中这类极点的集合与杨图大小为 k 的 $1/\mathrm{Y}^{BCD}_{\vec{\lambda}}(z)$ 中的极点集合相同。我们还注意到，尽管 Sp(N) 的计算中有四个扇区，关系 (D.27) 对所有扇区都普遍成立。

我们先计算 $\mathcal{Y}^{D_N}_{\vec{\lambda}+x}(z)Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}+x}$ 在 $\zeta = \phi_x$ 处的留数，它包含在期望值 $\langle Y^D(z)\rangle$ 中。

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\mathcal{Y}^{D_N}_{\vec{\lambda}+x}(z)Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}+x} &= \lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\frac{Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}+x}}{Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}}}\mathcal{Y}^{D_N}_{\vec{\lambda}+x}(z)Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}} \\
&= \lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\frac{[\![\hbar]\!]^2[\![2\zeta\pm\hbar]\!]^2}{[\![\zeta-\phi_x]\!]^2\mathcal{Y}^{D}_{\vec{\lambda}+x}(z)}Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}} \\
&= -\lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\frac{[\![2\zeta]\!]^2[\![2\zeta\pm\hbar]\!]}{\mathcal{Y}^{D}_{\vec{\lambda}}(z)}Z^{\mathfrak{so}(2N)}_{\vec{\lambda}},
\end{aligned} \tag{D.28}$$

其中我们在未精细化极限下使用递归关系（D.22）和（2.28）、（2.4）。上述改写表明，$\zeta = \phi_x$ 处来自$\langle Y^D(z)\rangle$ 的留数恰好等于 $\zeta = \phi_x$ 处来自$\langle Y^D(z)^{[\![2\zeta]\!]^2[\![2\zeta\pm\hbar]\!]}_{z}()\rangle$的留数的相反数。这表明极点被抵消，qq-特征（2.29）中 $\zeta = \phi_x$ 处的总留数为零。相同的论证也可以类似地应用于 B型情形。

对于 C型情形，计算过程遵循类似的模式，但我们需要结合关系（2.32）：

$$\frac{Z^{\mathfrak{sp}(N),\pm}_{\vec{\lambda}+x}}{Z^{\mathfrak{sp}(N),\pm}_{\vec{\lambda}}} = \frac{C_{\vec{\lambda}+x,\vec{A}}}{C_{\vec{\lambda},\vec{A}}}\frac{Z^{\mathfrak{so}(2N+8)}_{\vec{\lambda}+x}}{Z^{\mathfrak{so}(2N+8)}_{\vec{\lambda}}}, \tag{D.29}$$

其中四个额外参数 A_s、$s = N+1$、……、$N+4$，根据 $\pm$-扇区以及瞬子的偶数/奇数个数相应确定，并且它们取值于 $\{\pm 1、\ \pm q^{\frac{1}{2}}、\ \pm q\}$ [21]。系数 $C_{\vec{\lambda}}$、$\vec{A}$ 只取决于数目 $\bar{m}_s$；该数目统计了额外杨图中满足 $\lambda^{(s)}_j \geq j$ 或 $\lambda^{(s)}_j \geq j+1$ 的行数，这些杨图根据 A_s 的值标记为 $s = N+1$、……、$N+4$（见图 2 和图 3）。我们将不处于特定位置的方格（分别具有 $x = {}^{\exists}(i、\ i)$ 和

$x = {}^{\exists}(i,\ i+1)$ 在 $\lambda^{(s)}$ 中对于 $s = N+1$、.....、 $N+4$）会改变特征数 m，称为一般盒子。显然，当添加的方格 x 是一般盒子时，我们有

$$\frac{C_{\vec{\lambda}+x,\vec{A}}}{C_{\vec{\lambda},\vec{A}}} = 1. \tag{D.30}$$

对于这类一般盒子，计算可简化如下

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\mathcal{Y}^{C_N}_{\vec{\lambda}+x}(z)Z^{\mathfrak{sp}(2N),\pm}_{\vec{\lambda}+x} &= \lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\frac{Z^{\mathfrak{so}(2N+8)}_{\vec{\lambda}+x}}{Z^{\mathfrak{so}(2N+8)}_{\vec{\lambda}}}\frac{\mathcal{Y}^{D_{N+4}}_{\vec{\lambda}+x}(z)Z^{\mathfrak{sp}(2N),\pm}_{\vec{\lambda}}}{[\![2\zeta]\!]^2[\![2\zeta\pm\hbar]\!]}\\ &= -\lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\frac{1}{\mathcal{Y}^{D_{N+4}}_{\vec{\lambda}}(z)}Z^{\mathfrak{sp}(2N),\pm}_{\vec{\lambda}}\\ &= -\lim_{\zeta\to\phi_x}[\![\zeta-\phi_x]\!]\frac{1}{[\![2\zeta]\!]^2[\![2\zeta\pm\hbar]\!]\mathcal{Y}^{C_N}_{\vec{\lambda}}(z)}Z^{\mathfrak{sp}(2N),\pm}_{\vec{\lambda}}.\end{aligned} \tag{D.31}$$

上述计算表明，qq-特征（2.37）在极点 ϕ_x 处发生极点抵消，该极点对应额外杨图中的一个一般盒子 x。与特殊位置上的方格相对应的极点位于 $\zeta = 0,\ \pi i,\ \pm\frac{\hbar}{2}$, $\pm(\frac{\hbar}{2}+\pi i)$ $\pm\hbar,\ \pm(\hbar+\pi i)$。有趣的是，在这些极点处，我们仍然观察到瞬子展开中高度非平凡的抵消，直至六个瞬子阶。

我们指出，此处展示的极点抵消是对附录B中所述结果的一项独立计算，但二者都示意性地表明，qq-特征具有相同的形式： $Y + 1/Y$。

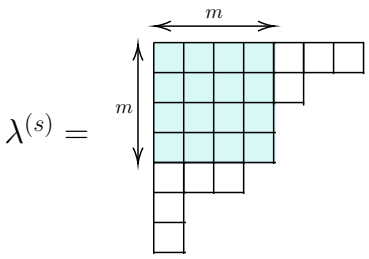
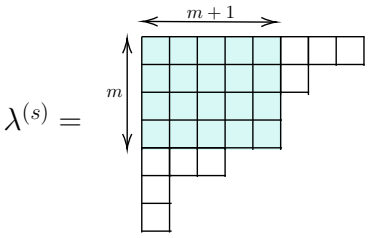


图 2。对于 $A_s = \pm 1,\ \pm q^{\frac{1}{2}},\ m$ 定义为满足 $\lambda^{(s)}_j \geq j$ 的行数。



Fig图 3。对于 $A_s = \pm q,\ \ m$ 定义为满足 $\lambda^{(s)}_j \geq j +$ 的行数 1.

参考文献

[1] *N. Seiberg* 和 *E. Witten*, 《*N*=2 超对称杨-米尔斯理论中的电磁对偶、磁单极子凝聚与禁闭》, 《核物理*B*》*426* (*1994*年) 19 [hep-th/9407087].[2] *N. Seiberg* 和 *E. Witten*, 《*N*=2超对称*QCD*中的磁单极子、对偶与手征对称性破缺》, 《核物理*B*》*431* (*1994*年) 484 [hep-th/9408099].[3] *A. Gorsky*、*I. Krichever*、*A. Marshakov*、*A. Mironov* 和 *A. Morozov*, 《可积性与*Seiberg-Witten*精确解》, 《物理快报*B*》*355* (*1995*年) 466 [hep-th/9505035].[4] *E.J. Martinec* 和 *N.P. Warner*, 《可积系统与超对称规范理论》, 《核物理*B*》*459* (*1996*年) 97 [hep-th/9509161].[5] *R. Donagi* 和 *E. Witten*, 《超对称杨-米尔斯理论与可积系统》, 《核物理*B*》*460* (*1996*年) 299 [hep-th/9510101].[6] *N.A. Nekrasov*, 《通过瞬子计数得到*Seiberg-Witten*预势》, *Adv.Theor.Math.Phys. 7* (*2004*年) 831 [0206161].[7] *D. Maulik* 和 *A. Okounkov*, 《量子群与量子上同调》, 《*Astérisque*》*408* (*2019*年) *ix*+209 [1211.1287].[8] *O. Schiffmann* 和 *E. Vasserot*, 《*Cherednik*代数、*W*-代数与 A^2上瞬子模空间的等变上同调》, 《高等科学研究所数学出版物》*118* (*2013*年) 213 [1202.2756].[9] *H. Awata*、*B. Feigin* 和 *J. Shiraishi*, 《精化拓扑顶点的量子代数方法》, 《高能物理杂志》*03* (*2012*年) 041 [1112.6074].[10] *R.-D. Zhu*, 《一种用于*M*弦的*Awata-Feigin-Shiraishi*型椭圆顶点》, 《高能物理杂志》*08* (*2018*年) 050 [1712.10255].[11] *Y. Zenkevich*, 《希格斯化网络演算》, 《高能物理杂志》*08* (*2021*年) 149 [1812.11961].[12] *J.E. Bourgine* 和 *K. Zhang*, 《关于四维 $N = 2$ 超杨-米尔斯理论代数工程的注记》, 《物理快报*B*》*789* (*2019*年) 610 [1809.08861].[13] *M. Ghoneim*、*C. Kozçaz*、*K. Kurşun* 和 *Y. Zenkevich*, 《四维希格斯化网络演算与椭圆*DIM*代数》, 《核物理*B*》*978* (*2022*年) 115740 [2012.15352].[14] *Y. Zenkevich*, 《混合网络演算》, 《高能物理杂志》*12* (*2021*年) 027 [2012.15563].[15] *J.-E. Bourgine*, 《使用量子仿射*sl(2)*代数构造三维 *N*=2 理论》, 《核物理*B*》*985* (*2022*年) 115979 [2107.10063].[16] *J.-E. Bourgine*, 《超对称规范理论中的移位量子群与物质多重态》, *2205.01309*.[17] *C. Hwang*、*J. Kim*、*S. Kim* 和 *J. Park*, 《一般瞬子计数与五维超共形场论》, 《高能物理杂志》*07* (*2015*年) 063 [1406.6793].[18] *S. Nakamura*、*F. Okazawa* 和 *Y. Matsuo*, 《经典李群 *Nekrasov*配分函数的递归方法》, *PTEP 2015* (*2015*年) *033B*01 [1411.4222]。

[19] *S. Nakamura*，《*BCD*瞬子的*Jeffrey–Kirwan*留数》，*PTEP 2015*（*2015*）*073B 02* [1502.04188]。[20] *H. Hayashi* 和 *R.-D. Zhu*，《带有 *O5*平面的五膜网的拓扑顶点形式》，《高能物理杂志》*04*（*2021*） 292 [2012.13303]。[21] *S. Nawata* 和 *R.-D. Zhu*，《瞬子计数与 *O*-顶点》，《高能物理杂志》*09*（*2021*）*190*[2107.03656]。[22] *Y. Chen*、*J. Jiang*、*S. Nawata* 和 *Y. Shao*，《带有物质场的杨图上的瞬子》，*2301.02342*。[23] *N. Nekrasov*，《*BPS/CFT* 对应：非微扰 *Dyson–Schwinger*方程与 *qq*-特征》，《高能物理杂志》*03*（*2016*） 181 [1512.05388]。[24] *T. Kimura* 和 *V. Pestun*，《箭图*W*代数》，*Lett. Math. Phys. 108*（*2018*）*1351*[1512.08533]。[25] *T. Kimura* 和 *V. Pestun*，《箭图椭圆*W*代数》，*Lett. Math. Phys. 108*（*2018*）1383 [1608.04651]。[26] *N. Nekrasov*、*V. Pestun* 和 *S. Shatashvili*，《量子几何与箭图规范理论》，*Commun. Math. Phys. 357*（*2018*） 519 [1312.6689]。[27] *N. Haouzi* 和 *J. Oh*，《*Seiberg–Witten*几何的量子化》，《高能物理杂志》*01*（*2021*） 184 [2004.00654]。[28] *N. Haouzi*，《五维超杨–米尔斯理论中的量子几何与 θ-角》，《高能物理杂志》*09*（*2020*） 035 [2005.13565]。[29] *H.-C. Kim*，《线缺陷与五维瞬子配分函数》，《高能物理杂志》*03*（*2016*）*199*[1601.06841]。[30] *J.-E. Bourgine*、*Y. Matsuo* 和 *H. Zhang*，《SH^c 的全纯场实现与箭图规范理论的量子几何》，《高能物理杂志》*04*（*2016*） 167 [1512.02492]。[31] *J.-E. Bourgine*、*M. Fukuda*、*Y. Matsuo*、*H. Zhang* 和 *R.-D. Zhu*，《量子 $W_{1+\infty}$ 代数中的相干态与五维超杨–米尔斯理论的 *qq*-特征》，*PTEP 2016*（*2016*）*123B*05 [1606.08020]。[32] *E. Frenkel* 和 *N. Reshetikhin*，《量子仿射代数表示的 *q*-特征与 *W*代数变形》，*Contemp. Math. 248*（*1999*）*163*[math/9810055]。[33] *L.C. Jeffrey* 和 *F.C. Kirwan*，《非阿贝尔群作用的局部化》，*Topology 34*（*1995*） 291 [alg-geom/9307001]。[34] *M. Brion* 和 *M. Vergne*，《超平面配置 *I*：有理函数与 *Jeffrey–Kirwan*留数》，载于《高等师范学校科学年鉴》，第*32*卷，第*715–741*页，*1999*年。[35] *F. Benini*、*R. Eager*、*K. Hori* 和 *Y. Tachikawa*，《二维 $N = 2$ 规范理论的椭圆属》，*Commun. Math. Phys. 333*（*2015*） 1241 [1308.4896]。

[36] *N. Nekrasove* 和 *S. Shadchin*，《瞬子 *ABCD*》，《数学物理通讯》*252*（*2004*） 359 [hep-th/0404225]。[37] *H.-C. Kim*、*S.-S. Kim* 和 *K. Lee*，《具有增强 *En* 全局对称性的五维超共形指标》，《高能物理杂志》*10*（*2012*） 142 [1206.6781]。[38] *N.A. Nekrasov*，《*BPS/CFT* 对应：非微扰戴森-舒温格方程与 *qq*-特征》，《高能物理杂志》*03*（*2016*） 181 [1512.05388]。[39] *D. Gaiotto*，《渐近自由 $N = 2$ 理论与非规则共形块》，*J. Phys. Conf. Ser. 462*（*2013*） 012014 [0908.0307]。[40] *Y. Matsuo*、*C. Ri m* 和 *H. Zhang*，《用基本粒子构造 *Gaiotto* 态

l

多重态与退化 *DAHA*，*JHEP 09 (2014)* 028 [1405.3141].[41] *T. Kimura*，*Seiberg–Witten*几何的双重量子化与 *W*-代数，*Proc. Symp. Pure Math. 100 (2018*年*)* 405 [1612.07590].[42] *N. Nekrasov* 和 *V. Pestun*，四维 *N=2*箭图规范理论的 *Seiberg–Witten*几何，*1211.2240*.[43] *O. Bergman*、*D. Rodríguez-Gómez* 和 *G. Zafrir*，离散 θ 与五维超共形指标，*JHEP 01 (2014)* 079 [1310.2150].[44] *P.C. Argyres* 和 *A.D. Shapere*，具有经典规范群的 *N=2* 超 *QCD* 的真空结构，《核物理*B*》*461 (1996*年*)* 437 [hep-th/9509175].[45] *U.H. Danielsson* 和 *B. Sundborg*，*N=2*超对称 *SO(2r+1)* 杨-米尔斯理论的模空间与单值化，《物理快报*B*》*358 (1995*年*) 273*[hep-th/9504102].[46] *E. D'Hoker*、*I.M. Krichever* 和 *D.H. Phong*，*N=2*超对称 *SO(N(c))* 和 *Sp(N(c))* 规范理论的有效预势，《核物理*B*》*489 (1997*年*)*211 [hep-th/9609145].[47] *A. Brandhuber*、*J. Sonnenschein*、*S. Theisen* 和 *S. Yankielowicz*，*M* 理论与 *Seiberg-Witten* 曲线：正交群和辛群，《核物理*B*》*504 (1997*

)

175 [hep-th/9705232].[48] *K. Landsteiner*、*E. Lopez* 和 *D.A. Lowe*，《*N=2* 超对称规范理论、膜与定向投影》，《核物理*B*》*507 (1997*年*)* 197 [hep-th/9705199].[49] *X. Li* 和 *F. Yagi*，《带 *O5*平面的 *5*膜网的 *Nekrasov* 配分函数热力学极限》，《高能物理杂志》*06 (2021*年*)* 004 [2102.09482].[50] *D. Tong*，《 $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$的全息对偶》，《高能物理杂志》*04 (2014) 193*[1402.5135].[51] *J. Gomis* 和 *F. Passerini*，《全息威尔逊环》，《高能物理杂志》*08 (2006) 074*[hep-th/0604007].[52] *D. Tong* 和 *K. Wong*，《瞬子、威尔逊线与 *D*膜》，《物理评论*D*》*91 (2015*年*)* 026007 [1410.8523]。

[53] *J.-E. Bourgine*、*M. Fukuda*、*K. Harada*、*Y. Matsuo* 和 *R.-D. Zhu*，《*DIM* 表示的 *(p, q)*-网、五维 $N = 1$ 瞬子配分函数与 *qq*-特征》，《高能物理杂志》*11 (2017*年*)* 034 [1703.10759].[54] *J. Ding* 和 *K. Iohara*，《*Drinfeld* 量子仿射代数的推广》，*Lett. Math. Phys. 41 (1997*年*)* 181 [q-alg/9608002v2].[55] *K. Miki*，《量子环面代数的 *(q, γ)* 类比》，《数学物理杂志》*48 (2007*年*) 3520*。[56] *B. Feigin*、*E. Feigin*、*M. Jimbo*、*T. Miwa* 和 *E. Mukhin*，《量子连续 $\mathfrak{gl}_\infty$：表示的半无限构造》，《京都数学杂志》*51 (2011*年*) 337*[1002.3100].[57] *B. Feigin*、*M. Jimbo*、*T. Miwa* 和 *E. Mukhin*，《量子环面 $\mathfrak{gl}_1$ 与 *Bethe Ansatz*》，《物理学杂志 *A*》*48 (2015*年*)* 244001 [1502.07194].[58] *K. Harada*，《利用 *Ding-Iohara-Miki* 代数分析可积模型及其在二维共形场论中的应用》，硕士论文，东京大学 *(2016*年*)*。[59] *S. Sasa*、*A.WatanabeandY.Matsuo*，《关于自由费米子系统中的 *S* 对偶基的注记》，*PTEP 2020 (2020*年*) 023B02* [1904.04766].[60] *A. Negut*，《量子环面代数与洗牌代数》，《数学进展》*372 (2020*年*) 107288*[1302.6202].[61] *A. Tsymbaliuk*，《仿射 *Laumon* 空间 *K* 理论中的量子仿射 *Gelfand-Tsetlin* 基与量子环面代数》，*arXiv* 电子预印本 *(2009) arXiv:0903.0917*[0903.0917].[62] *A. Litvinov* 和 *I. Vilkoviskiy*，《*BCD* 共形场论的可积结构与仿射 *Yangian* 的边界 *Bethe Ansatz*》，《高能物理杂志》*08 (2021*年*)* 141 [2105.04018].[63] *J. Kim*、*S.-S. Kim*、*K.-H. Lee*、*K. Lee* 和 *J. Song*，《来自爆破的瞬子》，《高能物理杂志》*11 (2019*年*)* 092 [1908.11276].[64] *N. Nekrasov*，《*BPS/CFT* 对应中的爆破与 *Painlevé VI*》，*2007.03646*。[65] *S. Jeong* 和 *N. Nekrasov*，《*Riemann-Hilbert* 对应与爆破曲面缺陷》，《高能物理杂志》*12 (2020*年*)* 006 [2007.03660].[66] *G. Bonelli*、*F. Globlek* 和 *A. Tanzini*，《通过表面算符重整化群流计数杨-米尔斯瞬子》，《物理评论快报》*126 (2021*年*) 231602* [2102.01627].[67] *H.-C. Kim*、*M. Kim* 和 *S.-S. Kim*，《来自爆破的五维/六维威尔逊环》，《高能物理杂志》*08 (2021*年*)* 131 [2106.04731].[68] *G. Bonelli*、*F. Globlek* 和 *A. Tanzini*，《超对称 *Yang-Mills* 理论中表面缺陷的 *Toda* 方程与经典李群的瞬子计数》，《物理学杂志 *A*》*55 (2022*年*) 454004*[2206.13212]。

[69] *J. Chen, B. Haghighat, H.-C. Kim, K. Lee, M. Sperling and X. Wang*, 《六维 *SO(N)* 理论的椭圆量子曲线》, 《高能物理杂志》*03 (2022年)* 154 [2110.13487].[70] *H. Hayashi and K. Ohmori*, 《通过网图三价粘合得到五维/六维 *DE* 瞬子》, 《高能物理杂志》*06 (2017年)* 078 [1702.07263].[71] *H. Hayashi, H.-C. Kim and K. Ohmori*, 《由网图构造六维/五维例外规范理论》, 《高能物理杂志》*07 (2021年)* 128 [2103.02799].[72] *J.-E. Bourgine, M. Fukuda, Y. Matsuo and R.-D. Zhu*, 《*Ding-Iohara-Miki* 代数中的反射态与 *D* 型箭图的膜网》, 《高能物理杂志》*12 (2017年) 015*[1709.01954].[73] *T. Kimura and R.-D. Zhu*, 《*ABCD EFG* 与仿射箭图规范理论的网构造》, 《高能物理杂志》*09 (2019年)* 025 [1907.02382].[74] *S.-S. Kim and X.-Y. Wei*, 《含 *ON* 平面的精化拓扑顶点》, 《高能物理杂志》*08 (2022年)* 006 [2201.12264].[75] *B. Feigin and A. Tsymbaliuk*, 《通过洗牌代数实现希尔伯特概形等变 *K* 理论中的海森堡作用》, *arXiv* 电子预印本 *(2009年) arXiv:0904.1679*[0904.1679].[76] *H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida*, 《关于 *Ding-Iohara* 代数与 *AGT* 猜想的札记》, *arXiv* 电子预印本 *(2011年) arXiv:1106.4088*[1106.4088].[77] *H. Awata, H. Fujino and Y. Ohkubo*, 《变形维拉索罗代数、*Ding-Iohara-Miki* 代数与五维 *AGT* 对应的结晶化》, 《数学物理杂志》*58 (2017年)*071704 [1512.08016].[78] *M. Fukuda, Y. Ohkubo and J. Shiraishi*, 《福克张量空间上的广义麦克唐纳函数与改变优选方向的对偶公式》, 《数学物理通讯》*380 (2020年)* 1 [1903.05905].[79] *J.-E. Bourgine*, 《*BCD* 型量子 $W_{1+\infty}$ 子代数与对称多项式》, 《数学物理杂志》*62 (2021年)* 063505 [2101.03877].[80] *S.-S. Kim and F. Yagi*, 《含 *O5*平面的拓扑顶点形式》, *Phys. Rev. D 97 (2018年)* 026011 [1709.01928].[81] *T. Kimura and V. Pestun*, 《超瞬子计数与局部化》, *arXiv* 电子预印本 *(2019年) arXiv:1905.*01513 [1905.01513].[82] *T. Kimura and Y. Sugimoto*, 《拓扑顶点／反顶点与超群规范理论》, 《高能物理杂志》*04 (2020年)* 081 [2001.05735].[83] *G. Noshita*, 《从量子环面代数得到的超群规范理论五维 *AGT* 对应》, 《高能物理杂志》*12 (2022年)* 157 [2209.08313].[84] *H. Awata and H. Kanno*, 《从 *Nekrasov* 公式与麦克唐纳函数得到的精细化 *BPS* 态计数》, *Int. J. Mod. Phys. A 24 (2009年)* 2253 [0805.0191]。