

伯南布哥联邦大学 物理系 - 自然科学中心 物理学研究生课程

JOÁS DA SILVA VENÂNCIO

arXiv:2302.00529v1 [gr-qc] 1 Feb 2023

广义Nariai时空中的准正规模

累西腓
2021。

JOÁS DA SILVA VENÂNCIO

广义Nariai时空中的准正规模

提交给伯南布哥联邦大学物理系研究生项目的论文，部分满足获得物理学哲学博士学位的要求。

研究方向：理论与计算物理

导师：Prof. Dr. Carlos Alberto Batista da Silva Filho

累西腓
2021。

在版编目 图书馆员 Fernanda Bernardo Ferreira，CRB4-2165

V448q Venâncio, Joás da Silva
广义Nariai时空中的准正规模/ Joás da Silva Venâncio – 2021。
96页：插图、图、表。

导师：Carlos Alberto Batista da Silva Filho。
博士论文 – 伯南布哥联邦大学。自然科学中心，物理学，累西腓，2021。
含参考文献和索引。

1. 理论与计算物理学。2. 准正规模。3 广义Nariai时空 广义Nariai时空。I. Silva Filho, Carlos Alberto Batista da（导师）。II. 标题。

530.1 杜威十进分类法（第23版）伯南布哥联邦大学-自然科学中心 2021 - 60

JOÁS DA SILVA VENÂNCIO

广义Nariai时空中的准正规模

提交给伯南布哥联邦大学物理系研究生项目的论文，旨在部分满足获得物理学哲学博士学位的要求。

通过日期：2021年2月25日。

答辩委员会：

Carlos Alberto Batista da Silva Filho教授、博士
导师
伯南布哥联邦大学（PD-伯南布哥联邦大学，巴西）

Azadeh Mohammadi 教授、博士
内部审查委员
伯南布哥联邦大学（PD-伯南布哥联邦大学，巴西）

Fernando Jorge Sampaio Moraes 教授、博士
内部审查委员
伯南布哥联邦农村大学（PD-UFRPE，巴西）

Riccardo Sturani 教授、博士
外部考官
北里奥格兰德联邦大学（IIP-UFRN，巴西）

安德烈斯·费尔南多·阿纳巴隆·杜普伊博士教授 外部考官 阿道夫·伊瓦涅斯大学（维尼亚德尔马，智利）

摘要

准正规模是耗散系统的本征模。例如，当具有事件视界或宇宙学视界的时空偏离其平衡态受到微扰时，会出现准正规模，表现为具有复频率谱的阻尼振荡；这些复频率称为准正规频率，且与激发的具体细节无关。事实上，这些频率仅取决于定义时空几何的荷，例如质量、电荷和角动量。准正规模已得到长期研究，而近期引力波的探测重新激发了人们对这一主题的兴趣，因为这类构型正是实验通常测量的对象。在数学上，准正规模的离散谱源于必须对在此类时空中传播的物理场施加特定边界条件。本书将研究带电纳里艾时空的一种高维推广，它由二维德西特空间 dS_2 与任意数量的二维球面 S^2 的直积构成，并考察自旋-s 场微扰在 $s = 0$、$1/2$、1 和 2 下的动力学。首先，我们将推导出该几何中各类微扰运动方程的可分离性，并将其化为薛定谔型微分方程，其势属于 Rosen-Morse 可积势类，而所谓的 Pöschl-Teller 势是其中一个特例。为实现这种可分离性，关键步骤是根据所需描述的张量自由度的秩，选取适当的角函数基。本文将定义这样的基，它是张量球谐函数的一种推广，适用于多个常曲率空间的直积空间。最后，在完成薛定谔型微分方程的积分后，我们将分析导出准正规模的边界条件，并解析地求得准正规频率。

关键词：准正规模。广义纳里艾时空。可分离性。边界条件。

摘要

准正规模是耗散系统的本征模。例如，如果一个带有事件视界或宇宙学视界的时空受到扰动而偏离平衡态，便会出现准正规模，表现为阻尼振荡，其频谱由复数频率构成，这些频率称为准正规频率，且与激发的具体细节无关。事实上，这些频率仅取决于定义扰动传播所在时空几何的荷，例如：质量、电荷和角动量。准正规模早已得到长期研究，而近期引力波的探测重新激发了人们对这一主题的兴趣，因为实验通常测量的正是这些构型。从数学上看，准正规模的离散谱源于必须对在此类时空中传播的物理场施加某些边界条件。本书将考虑带电纳里艾时空在高维情况下的一种推广，它由二维德西特空间dS_2与若干二维球面 S^2的直积构成，并研究自旋为 s、 $s=0$、$1/2$、1和2的场扰动动力学。首先，我们将使这种几何中每类扰动的运动方程实现可分离，随后将其化为薛定谔型微分方程，其势属于Rosen-Morse可积势类，其中包含所谓的Pöschl-Teller势这一特例。实现可分离性的一个关键步骤，是根据所需描述的张量自由度的秩，选用适当的角函数基底。这里我们定义了这样的基底，它是张量球谐函数的一种推广。该基底也适用于由多个常曲率空间构成的任意直积空间。最后，在求得薛定谔型微分方程的积分解后，我们将分析导出准正规模的边界条件，并解析地求得准正规频率。

关键词： 准正规模。广义Nariai时空。可分离性。边界条件。

出版物列表

已发表论文

• J. Venâncio 和 C. Batista，狄拉克方程在二维空间直积背景上的可分离性，《物理评论D》 95 (2017年)，084022。

• J. Venâncio 和 C. Batista，广义纳里艾时空中的准正规模，《物理评论D》97 （2018年），105025。

• J. Venâncio 和 C. Batista，自旋2 广义纳瑞时空中的准正规模，《物理评论D》101 （2020年），084037。

已出版著作

• J. Venâncio，旋量形式体系：旋量形式主义及其在物理学中的应用简介，Lambert Academic Publishing，（2019年）。

已投稿的文章

• J. Venâncio 和 C. Batista，用于六维时空的四元数二分量旋量形式体系，（2020年）。arXiv:2007.04296v2

符号表

准正规模（QNMs）：第11页。准正规频率（QNFs）：第11页。反德西特空间（AdS）：第12页。共形场论（CFT）：第12页。$\mathcal{R}$ 里奇标量：第13页。$\mathcal{R}_{\mu\nu}$ 里奇张量：第14页。$\mathcal{T}_{\mu\nu}$ 能量-动量张量：第14页。∂_μ 微分算子 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$：第15页。有效势（EP）：第15页。S g^S, f_S 施瓦西：第15页。RW $V_{s=2}^{RW}(r)$ Regge-Wheeler：第23页。Z $V_{s=2}^{Z}(r)$ Zerilli：第25页。$\star, H^\star$ 复共轭：第31页。GN g^{GN} 广义纳里艾：第38页。N g^N 纳里艾：第39页。PT $V^{PT}(x)$ Pöschl-Teller：第40页。$P_l, \xrightarrow{P_l}$ 宇称变换：第40页。$F(a,b,c;\ y)$ 超几何函数：第43页。$\pounds_{\underline{\boldsymbol{K}}}$ 沿 $\boldsymbol{K}$ 的李导数：第61页。$\mathbb{V}$ 二维向量空间：第78页。$\mathbb{S}$ 二维旋量空间：第79页。$\mathcal{C}\ell(\mathbb{V}, \hat{\boldsymbol{g}})$ 配备 $\hat{\boldsymbol{g}}$ 的 $\mathbb{V}$ 的克利福德代数：第78页。$\wedge, \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{U}$ 外积：第78页。$\mathbb{C}$ 复数域：第80页。$\boldsymbol{R}_\zeta$ 旋转算子：第81页。$SPin(\mathbb{V})$ $\mathbb{V}$ 的旋群：第81页。$\omega_{ab}{}^c$, ω_{abc} 旋量联络的分量：第83页。${}_sY_{j,m}(\theta,\phi)$ 自旋-s 球谐函数：第85页。$\boldsymbol{g}$ 流形的度规：第86页。

目录

I 准正规模与若干经典结果 10

1 研究动机与大纲 11

2 准正规模：简介 13

2.1 线性微扰理论.13 2.2 有效势与准正规模.14 2.2.1 例1：施瓦西背景下的自旋0场微扰.15 2.2.2 例2：施瓦西背景下的自旋-1场扰动.17 2.2.3 例3：施瓦西背景下的自旋-2场微扰.21 2.3 准正规模与背景稳定性.31 2.4 准正规模与黑洞面积量子化.32

II 广义纳里艾背景中的准正则模 37

3 场扰动：自旋0和1 38

3.1 广义纳里艾时空.38 3.2 求解 Rosen-Morse 可积势类 . . . . . 42 3.3 边界条件.44 3.4 自旋0场微扰.48 3.4.1 标量准正规模.50 3.5 自旋-1场微扰.53 3.5.1 麦克斯韦方程分离的试探形式 53 3.5.2 麦克斯韦准正常模.56

4 自旋-2场微扰 6 **0**

4.1 自旋-2微扰的场方程.60 4.2 线性化爱因斯坦场方程分离的设定 . . . 62 4.2.1 规范变换.66 4.3 引力准正则模.66

4.3.1 奇扰动.67 4.3.2 偶宇称微扰.71

5 自旋-1/2场微扰 77

5.1 克利福德代数与旋量.77 5.2 狄拉克方程分离的试探形式.82 5.3 狄拉克方程的可分离性.87 5.3.1 狄拉克方程的角向部分.90 5.4 自旋 1/2 准正规模.93 5.4.1 解的正则性分析.95

6 结论与展望 100

参考文献 103

索引 113

第一部分

准正规模与一些经典结果

第1章

动机与概要

众所周知，当有人拨动吉他弦时，琴弦会发出一种特有的声音。这种特有的声音，是系统响应外部激励的自然方式。有趣的是，类似现象在处于平衡态的动力系统中普遍存在。这类系统通常会在平衡构型附近振荡，以响应微扰；振荡频率取一组固有频率，也称为正规频率。特别地，当系统呈现某个特定频率时，我们称其处于一种正规模态。那么，黑洞也有特有的“声音”吗？答案是肯定的。Vishveshwara 研究史瓦西几何中的散射时发现，微扰的演化表现为阻尼振荡，其固有频率不依赖于激励的细节 [1]。由于这些微扰随时间呈指数衰减，因此可用复频率来描述。于是，这些频率被称为准正规频率（QNFs），而只有单一频率的构型则称为准正规模（QNMs） [2, 3]。“准”这一修饰词表明，这些模与正规模相似，但并不完全相同。准正规频率的实部对应于微扰的振荡频率，而虚部则与其衰减率有关。这种阻尼源于事件视界的存在：事件视界会阻止入射信号反射回来，从而导致耗散。有趣的是，这些频率取决于黑洞的荷，例如质量、电荷和角动量。因此，测量准正规频率可以用来确定天体物理黑洞的荷 [1, 4]。这促使人们投入大量精力，寻找多种引力构型的准正规频率，并发展出各种数值和解析方法[5, 6, 7, 8]。近期引力波的探测 [9], 重新激发了人们对准正规模的兴趣，因为准正规频率如今更有望通过实验观测到。研究准正规模的另一个原因是，依照玻尔对应原理，我们期望它们能为引力的量子本质提供一些线索[112]。事实上，人们已经提出了准正规频率与事件视界面积量子化之间的联系 [11, 12, 13]。

从理论角度来看，近期大多数关于准正规模的研究都聚焦于高维时空 [14, 15, 16]。例如，准正规模被用于

检验某些解的稳定性。这在维数大于四时尤为有用，因为此时黑洞不存在唯一性定理，因此稳定性可能成为从多个引力解中选出物理构型的标准 [17, 18]。研究四维以上的引力构型有多种动机。例如，旨在以统一框架描述自然界基本相互作用的弦理论要求时空具有10个维数 [19]。实际上，还有许多其他理论试图借助高维理论解释我们的宇宙；综述请参见 [20, 21]。人们对高维时空感兴趣的另一个原因是反德西特/共形场论（AdS/CFT）对应，它通过研究 $d+1$ 维中的引力解，为处理生活在d 维中的场论提供了工具 [22, 23, 24]。通过AdS/CFT对应，准正规频率可以与有限温度场论中微扰的热化联系起来 [25, 26, 27, 28, 29, 30]。

基于上述动机，本书将考虑带电纳里艾时空的一种高维推广 [31] ，并研究自旋为 0、$1/2$、1 和 2 的试探场微扰动力学。特别是，我们将考察导出准正规模的边界条件，并解析地求得准正规频率的谱。这里采用的背景是常曲率二维时空的直积 $dS_2 \times S^2 \times \ldots \times S^2$，而最广为人知的纳里艾时空高维推广则由 $dS_2 \times S^{D-2}$ [32, 33] 给出。这里所考察的时空的一个有趣特征是，除电荷外，它还具有磁荷 [31], ，从而带来更丰富的物理。此外，二维空间的直积也可能与弦理论紧化中的内部空间建模相关 [34]。

第2章

准正规模：简介

微扰研究在几乎所有物理学分支中都至关重要，因为物理系统通常处于稳定构型，其变化往往都源于不会随时间累积的小扰动。当描述系统动力学的数学方程为非线性时，微扰形式更是不可或缺，因为微扰的影响通常可以通过线性方程处理，从而大大简化问题。爱因斯坦广义相对论是一个重要例子：其在 D 维中的场方程——爱因斯坦方程——是一组耦合的 $D\left(D+1\right)/2$ 非线性（涵盖所有阶）的偏微分方程，在一般情形下，即不假设存在特殊对称性的情况下，不可能解析求解。这种非线性使得广义相对论中度规和物质场微扰的研究成为一个非平凡问题，因为物质场通过能量动量张量出现在爱因斯坦方程中，而该张量通常是物质场的二次或更高阶函数。为克服这一困难，通常采用线性微扰理论，假设解处于弱场情形，即能量动量张量足够小，以至于可以将其忽略。下面我们将更详细地介绍这一方法，并说明如何定义准正规模。

2.1 线性微扰理论

在 D 维中，带有宇宙学常数 Λ 的弯曲时空中的广义相对论动力学由以下版本的爱因斯坦-希尔伯特作用量描述

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^{D}x\sqrt{|g|}\left[\mathcal{R}-(D-2)\Lambda\right] + S_{m}, \tag{2.1}$$

其中， $|g|$ 为度规的行列式， $g_{\mu\nu}$为里奇标量， $\mathcal{R}$ 为与引力耦合的物质场 S_m 的作用量。最小作用量原理使我们能够

求出场 $g_{\mu\nu}$ 和 Φ_i 的运动方程，它们分别为

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\Lambda(D-2) - \mathcal{R}\right] g_{\mu\nu} = 8\pi \mathcal{T}_{\mu\nu}\,, \tag{2.2}$$

$$\frac{\delta S_m}{\delta \Phi_i} = 0\,, \tag{2.3}$$

where $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ 是里奇张量，而对称张量 $\mathcal{T}_{\mu\nu}$由下式定义

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}\,, \tag{2.4}$$

是与物质场相关联的能量-动量张量。现在，设 $g^0_{\mu\nu}$ 和 Φ^0_i 是一组满足运动方程 (2.2) 和 (2.3) 的解。接下来，为了研究这一解附近的微扰，我们将场写成未扰动场 $g^{(0)}_{\mu\nu}$ 和 $\Phi^{(0)}_i$ 与小微扰 $h_{\mu\nu}$ 和 ϕ_i之和

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad \Phi_i = \Phi^{(0)}_i + \phi_i\,, \tag{2.5}$$

其中，假设 $h_{\mu\nu}$和 ϕ_i分别相较于 $g^0_{\mu\nu}$和 Φ^0_i足够小。在这种情况下，我们可以在所有方程中舍去 $\mathcal{O}(h^2_{\mu\nu})$、 $\mathcal{O}(\phi^2_i)$ 和 $\mathcal{O}(h_{\mu\nu}\phi_i)$ 阶及更高阶的项，从而得到线性化广义相对论。具体而言，将上述试探形式 (2.5) 代入 (2.2) 和 (2.3)，并忽略微扰场的二次及更高阶项后，我们得到一组由 $h_{\mu\nu}$ 和 ϕ_i满足的线性方程。一般来说，这些方程是耦合的，即 ϕ_i 是 $h_{\mu\nu}$ 的源项，反之亦然。然而，在特定背景场 $g^{(0)}_{\mu\nu}$ 和 $\Phi^{(0)}_i$ =0 附近，控制微扰场 ϕ_i 的方程可以与度规微扰 $h_{\mu\nu}$ 解耦，反之亦然。其原因在于，当 $\Phi^{(0)}_i = 0$时，能量-动量张量 $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ 在微扰的一阶上可设为零，因为它通常是物质场的二次或更高阶项，因此可以忽略。在这种情况下，物质场的一般小微扰的动力学等同于研究固定背景 $g^{(0)}_{\mu\nu}$中的试探场 ϕ_i 。

2.2 有效势与准正规模

为了求解给定背景 $g^{(0)}_{\mu\nu}$ 中传播的给定测试场 ϕ_i 的微扰方程，首先要仔细选择角基，将 ϕ_i 的自由度分离出来，使微扰方程中的角变量解耦。变量解耦后，大多数关于求解微扰方程的问题，例如标量场（自旋-0）、

狄拉克场（自旋-1/2）、麦克斯韦场（自旋-1）和引力场（自旋-2），都可以归结为关于径向变量和时间变量的二阶偏微分方程，其形式为

$$\left[\partial_x^2 - \partial_t^2 - V(x)\right] Q(t,x) = 0\,, \quad \text{where} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \tag{2.6}$$

其中，Q 是与微扰的径向函数相关的场，x 是定义域为整个实数轴的乌龟坐标，而 $V(x)$是依赖于微扰的有效势（EP）。然而，化简过程并非总是那么容易。事实上，对于任意背景上的微扰而言，只要背景不具有任何对称性，微扰方程中的变量甚至无法解耦。实际上，合适的角基的选择直接取决于背景的对称性。因此，要使化简过程成为可能，背景必须具有足够的对称性。这种对称性体现为Killing矢量以及其他与对称性相关的张量的存在，例如Killing张量、Killing-Yano张量及其共形版本，以及共形Killing张量 [35, 36, 37, 38]。在这种情形下，为角函数选择合适的自旋基对化简过程起着核心作用 [39, 40, 41]。

在继续之前，我们先研究四维中的一些示例，详细推导各种场微扰在施瓦西背景中的有效势。为此，关键在于为角函数选择合适的自旋基，从而将施瓦西背景的球对称性考虑在内。

2.2.1 示例 1：施瓦西背景下的自旋0场微扰

作为一个简单的示例，我们来研究自旋零场在四维施瓦西（S）背景上的场微扰动力学。质量为 M 的球形天体的史瓦西线元为

$$g^S_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f_S(r)dt^2 + \frac{1}{f_S(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\,, \tag{2.7}$$

其中，函数 $f_S = f_S(r)$ 为

$$f_S = 1 - \frac{2M}{r}\,. \tag{2.8}$$

由于背景具有球对称性，因此将标量场 $\mathbf{\Phi}$ 的角向依赖展开为标量球谐函数 $Y^m_{\ell_l}(\theta, \phi)$ 是很有用的，即

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{\ell,m} R_{\ell,m}(t,r)\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi). \tag{2.9}$$

对于给定的 $\ell \geq 0$ 值以及满足 $0-\ell \leq m \leq \ell$ 的整数 m，标量球谐函数是球面上满足特征值方程的唯一正则函数

$$\Delta_{S^2} Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\ell(\ell+1)\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,, \tag{2.10}$$

其中， Δ_{S^2} 是单位球面 S^2上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，即

$$\Delta_{S^2} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\partial_\phi^2\,. \tag{2.11}$$

现在，质量为 μ 的标量场 $\mathbf{\Phi}$ 受克莱因-戈尔登方程支配。在弯曲时空中，该方程为

$$\frac{1}{\sqrt{|g^S|}}\,\partial_\mu\left(g^{S\,\mu\nu}\sqrt{|g^S|}\,\partial_\nu\right)\mathbf{\Phi} \;=\; \mu^2\mathbf{\Phi}\,. \tag{2.12}$$

使用标量球谐函数作为角基，即（2.9），其优点在于，上述方程中的角向依赖会自动分解为一个整体乘法项，因此最终得到的方程只依赖坐标 r。事实上，将试探形式（2.9）代入方程（2.12），可得关于场$R_{\ell,\ m}$的二阶偏微分方程:

$$f_S^2\,\partial_r^2(rR_{\ell,m}) + f_S f_S'\,\partial_r(rR_{\ell,m}) - \partial_t^2(rR_{\ell,m}) - f_S\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\mu^2\right](rR_{\ell,m}) = 0\,. \tag{2.13}$$

一个非常常见且实用的技巧是变换到乌龟坐标 x ，其定义方程为

$$dx = \frac{1}{f_S}\,dr \quad \Rightarrow \quad x = r + 2M\ln(r-2M)\,. \tag{2.14}$$

事实上，除了进行这一变量变换外，如果我们对场作如下重定义

$$R_{\ell,m}(t,r) = \frac{\phi_{\ell,m}(t,r)}{r}\,, \tag{2.15}$$

利用（2.13），可得关于场$\phi_{\ell,\ m}$的以下一维类波方程:

$$\left[\partial_x^2 - \partial_t^2 - V_{s=0}(r)\right]\phi_{\ell,m}(t,r) = 0\,, \tag{2.16}$$

其中有效势 $V_{s=0}$ 的形式为

$$V_{s=0}(r) = f_S\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2M}{r^3}+\mu^2\right]. \tag{2.17}$$

$s=0$ 标签表示标量场的自旋。

□

2.2.2 例2：施瓦西背景下的自旋-1场扰动

考虑一个无质量、无电荷的自旋-1场 $\boldsymbol{A}$，它在由度规 $g^{S}_{\mu\nu}$（即式 (2.7)）描述的背景中传播。为分离角向依赖，鉴于背景具有球对称性且场的自旋为 1，矢量球谐函数为角函数提供了合适的角基，本文将其记为 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{a,\ \ell m}$，其中 $a \in \{1,2,3\}$。这些对象由下式给出

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{1,\ell m} = \frac{1}{r}\,\boldsymbol{r}\; Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{2,\ell m} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{3,\ell m} = r\,\boldsymbol{\nabla} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中，$\{r,\theta,\phi\}$ 是 $\mathbb{R}^3$中的球坐标系。由于这三个向量场彼此正交，因此它们线性无关，进而构成了 $\mathbb{R}^3$中向量场空间的一个标架。因此，在球对称问题中，自然可以将向量场 $\boldsymbol{A}$ 按基 $\{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{a,\ \ell m}\}$ 展开为

$$\boldsymbol{A} = A^{a}(r)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}_{a,\ell m}\,, \tag{2.19}$$

其中，为简洁起见，省略了对$Y_{\ell,\ m}$ 的指标 ℓ 和 m 求和。利用球坐标中的梯度表达式，可得矢量球谐函数为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{1,\ell m} &= Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r\ , \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{2,\ell m} &= \frac{-1}{\sin\theta}\partial_\phi Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\ \hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \partial_\theta Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\,, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{3,\ell m} &= \partial_\theta Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\ \hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{aligned}$$

其中，$\{\hat{\boldsymbol{e}}_r,\ \hat{\boldsymbol{e}}_\theta,\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\}$ 是与球坐标$\{r,\theta,\phi\}$对应的正交归一标架。更具体地说，它们与坐标标架 $\{\partial_r,\partial_\theta,\partial_\phi\}$ 的关系如下：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \partial_r \quad , \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta \quad , \quad \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\,. \tag{2.20}$$

因此，式 (2.19) 中的一般向量场 $\boldsymbol{A}$ 可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} =& A^1\,Y_{\ell,m}\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \left(A^3\partial_\theta Y_{\ell,m} - A^2\frac{\partial_\phi Y_{\ell,m}}{\sin\theta}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &+ \left(A^3\frac{\partial_\phi Y_{\ell,m}}{\sin\theta} + A^2\partial_\theta Y_{\ell,m}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

˜同样，在球对称问题中，1-形式 $\boldsymbol{A}$ 可方便地展开为以下形式

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{A}} =& A_1\, Y_{\ell,m}\, \hat{\boldsymbol{e}}^r + \left(A_3 \partial_\theta Y_{\ell,m} - A_2 \frac{\partial_\phi Y_{\ell,m}}{\sin\theta} \right) \hat{\boldsymbol{e}}^\theta \\ &+ \left(A_3 \frac{\partial_\phi Y_{\ell,m}}{\sin\theta} + A_2 \partial_\theta Y_{\ell,m} \right) \hat{\boldsymbol{e}}^\phi \,, \end{aligned} \tag{2.22}$$

其中 $\{\hat{\boldsymbol{e}}^r,\ \hat{\boldsymbol{e}}^\theta,\ \hat{\boldsymbol{e}}^\phi\}$ 表示与向量场标架 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_r,\ \hat{\boldsymbol{e}}_\theta,\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\}$对偶的1-形式标架，即 $\hat{\boldsymbol{e}}^a(\hat{\boldsymbol{e}}_b) = \delta^a_b$。此标架与坐标标架$\{dr, d\theta, d\phi\}$ 的关系如下：

$$\hat{\boldsymbol{e}}^r = dr\,,\ \hat{\boldsymbol{e}}^\theta = r d\theta\,,\ \hat{\boldsymbol{e}}^\phi = r\sin\theta d\phi\,, \tag{2.23}$$

因此， $\mathbb{R}^3$ 的线元用球坐标表示为 $ds^2 = (\hat{\boldsymbol{e}}^r)^2 + (\hat{\boldsymbol{e}}^\theta)^2 + (\hat{\boldsymbol{e}}^\phi)^2$。由此，在具有球对称性的情形下，1-形式场最一般的分解为：

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = A_1^+ Y_{\ell,m}\, dr + A^+\, V^+_{\ell,m} + A^-\, V^-_{\ell,m}\,, \tag{2.24}$$

其中 $A_1^+ = A_1$， $A^+ = rA_3$， $A^- = -rA_2$ 和 $V^{\pm}_{\ell\ ,\ m}$ 是背景具有球对称性时角向依赖的理想基

$$V^+_{\ell,m} = \partial_\theta Y_{\ell,m} d\theta + \partial_\phi Y_{\ell,m} d\phi \quad \text{and} \quad V^-_{\ell,m} = \frac{1}{\sin\theta}\, \partial_\phi Y_{\ell,m}\, d\theta - \sin\theta\, \partial_\theta Y_{\ell,m}\, d\phi\,. \tag{2.25}$$

考虑到史瓦西背景的球对称性，与这些对称性相符的规范场试探形式$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$ 为

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \left(A_0^+\, dt + A_1^+\, dr \right) Y_{\ell,m} + A^+\, V^+_{\ell,m} + A^-\, V^-_{\ell,m}\,, \tag{2.26}$$

其中现在 $A_0^+ = A_0^+(t,r) A_1^+ = A_1^+(t,r)$ 和 $A^\pm = A^\pm(t,r)$。然而请注意，上述表达式可以改写为以下形式

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \left(A_0^+\, dt + \tilde{A}_1^+\, dr \right) Y_{\ell,m} + A^-\, V^-_{\ell,m} + d\tilde{A}^+\,, \tag{2.27}$$

其中 $\tilde{A}_1^+ = A_1^+ - \partial_r A^+$ 和 $\tilde{A}^+ = A^+ Y_{\ell,\ m}$。 在 $U(1)$ 形式规范场理论中，我们可以忽略前一个方程中的˜自由度 A^+ ，因为恰当微分可以通过规范变换消去。因此，去掉波浪号后，我们可以说，对于具有球对称性的施瓦西背景问题，1-形式规范场的自然试探形式为：

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \sum_{\ell,m} \left[A^+_{0,\ell m}(t,r)\, dt + A^+_{1,\ell m}(t,r)\, dr \right] Y_{\ell,m} + A^-_{\ell,m}(t,r)\, V^-_{\ell,m}\,, \tag{2.28}$$

恢复对指标 ℓ， m 求和之后。

现在，自旋-1场扰动由麦克斯韦方程支配

$$\nabla_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} \,=\, 0\,, \quad \text{with} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} \,=\, \partial_\mu \mathcal{A}_\nu \,-\, \partial_\nu \mathcal{A}_\mu\,, \tag{2.29}$$

其中， $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ 是麦克斯韦张量， $\mathcal{A}^\mu$ 是规范场$\boldsymbol{\mathcal{A}}$的分量。值得一提的是，将$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 按基 $\{Y_{\ell,m}, V^+_{\ell,m}, V^-_{\ell,m}\}$ 展开，是实现麦克斯韦方程分离过程的关键，因为这样其角向依赖便成为一个整体乘法因子，最终得到的方程只依赖于坐标 r。此外，采用这种基的另一项重要优势在于，$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 在宇称变换下的行为，如下所述。宇称变换是一种非连续操作 P，满足

$$P\,:\,\theta \to \theta - \pi \quad \text{and} \quad \phi \to \phi + \pi\,. \tag{2.30}$$

所谓非连续，是指该操作不能分解为无穷小操作，因此这类操作没有生成元。由于操作 P作用于自身时等于恒等操作，算符 P的特征值只能是 ± 1。因此，通过式（2.30）作用于规范场$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的角向依赖时，宇称变换P会将其分解为两类不同的场。为说明这一点，注意到场$A^+_{0\ ,\ell m}$,$A^+_{1\ ,\ell m}$ 和$A^\pm_{\ell\ ,m}$ 在施加宇称变换后保持不变，因此$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的宇称完全由其角向部分——角基 $\{Y_{\ell,m}, V^+_{\ell,m}, V^-_{\ell,m}\}$决定。在宇称变换（2.30）下，标量球谐函数变换为

$$Y_{\ell,m} \,\overset{P}{\to}\, (-1)^\ell\, Y_{\ell,m}\,, \tag{2.31}$$

利用这一点，很容易看出矢量球谐函数按$V^\pm_{\ell\ ,m} \overset{P}{\to} \pm(-1)^\ell\, V^\pm_{\ell\, m,}$变换。因此，我们可以将$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 写成

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^+ + \boldsymbol{\mathcal{A}}^-\,, \tag{2.32}$$

其中，物体$\boldsymbol{\mathcal{A}}^\pm$ 定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{A}}^+ &= \sum_{\ell,m} \left[A^+_{0,\ell m}(t,r)\,dt + A^+_{1,\ell m}(t,r)\,dr\right] Y_{\ell,m}\,, \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^- &= \sum_{\ell,m} A^-_{\ell,m}(t,r)\, V^-_{\ell,m}\,, \end{aligned} \tag{2.33}$$

在宇称变换下按 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^\pm \overset{P}{\to} \pm(-1)^\ell \boldsymbol{\mathcal{A}}^\pm$ 变换。特征值为 $+1$ 的场称为偶场，而特征值为 -1的场称为奇场，这也是采用 $\pm$ 来标记这些场的原因。具体而言，偶场具有宇称 $(-1)^\ell$，而奇场具有宇称 $(-1)^{\ell+1}$。最后，

由于施瓦西背景度规在施加宇称变换后保持不变，我们预期微扰方程不会混合 $(-1)^\ell$ 和 $(-1)^{\ell+1}$ 宇称。因此，我们可以在不失一般性的前提下，将微扰分解为$\boldsymbol{\mathcal{A}}^+$ 部分和 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^-$ 部分，并分别进行研究。

偶宇称微扰（自旋-1）

偶宇称微扰是指给定 ℓ, m 和宇称 $(-1)^\ell$ 时最一般的微扰，即

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^+ = \sum_{\ell,m} \left[A^+_{0,\ell m}(t,r)\,dt + A^+_{1,\ell m}(t,r)\,dr\right] Y_{\ell,m}\,. \tag{2.34}$$

将这一无质量自旋-1场扰动的试探形式代入麦克斯韦方程，最终可得以下方程:

$$\begin{aligned}
E^+_t &\equiv \partial_x\left[r^2\left(\partial_r A^+_{0,\ell m} - \partial_t A^+_{1,\ell m}\right)\right] - \ell(\ell+1)A^+_{0,\ell m} = 0\,, && (2.35)\\
E^+_r &\equiv \partial_t\left[r^2\left(\partial_r A^+_{0,\ell m} - \partial_t A^+_{1,\ell m}\right)\right] - \ell(\ell+1)f_S A^+_{1,\ell m} = 0\,, && (2.36)\\
E^+_\theta &\equiv \partial_t E^+_t - \partial_x E^+_r = 0\,, && (2.37)\\
E^+_\phi &\equiv E^+_\theta = 0\,. && (2.38)
\end{aligned}$$

假设 $E^+_t = 0$ 和 $E^+_r = 0$，可得 $E^+_\theta = 0$ ，因此 E^+_ϕ 显然成立。现在定义一个新场 $A^{\ell m}_{01} = A^{\ell m}_{01}(t,r)$，如下:

$$A^{\ell m}_{01} := r^2\left(\partial_r A^+_{0,\ell m} - \partial_t A^+_{1,\ell m}\right)\,, \tag{2.39}$$

并假设场方程 $E^+_t = 0$ 和 $E^+_r = 0$，由下列关系立即可得

$$\partial_x E^+_t - \partial_t E^+_r = 0 \tag{2.40}$$

$A^{\ell m}_{01}$满足一维类波方程

$$\left[\partial_x^2 - \partial_t^2 - V_{s=1}(r)\right] A^{\ell m}_{01}(t,r) = 0\,, \tag{2.41}$$

其中有效势 $V_{s=1}$ 的形式为

$$V_{s=1}(r) = f_S\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\,, \tag{2.42}$$

其中，标签 $s=1$ 表示麦克斯韦场的自旋。特别地，麦克斯韦微扰的场$A^+_{0\ ,\ \ell m}$ 和 $A^+_{1\ ,\ \ell m}$ 与$A^{\ell m}_{01}$的关系为

$$A^+_{0,\ell m} = \frac{1}{\ell(\ell+1)}\,\partial_x A^{\ell m}_{01} \quad \text{and} \quad A^+_{1,\ell m} = \frac{1}{\ell(\ell+1)}\,\frac{\partial_x A^{\ell m}_{01}}{f_S}\,, \tag{2.43}$$

其中，与前一个例子一样，我们使用式 (2.14) 中定义的乌龟坐标。

奇宇称微扰（自旋-1）

所谓奇宇称微扰，是指给定 ℓ, m 和宇称 $(-1)^{\ell+1}$ 时最一般的微扰，即

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-} = \sum_{\ell,m} A^{-}_{\ell,m}(t,r)\, V^{-}_{\ell,m}\,. \tag{2.44}$$

将上述试探形式代入麦克斯韦方程后，我们得到以下方程:

$$\begin{aligned} E^{-}_{\theta} &\equiv \left[\partial_x^2 - \partial_t^2 - V_{s=1}(r)\right] A^{-}_{\ell,m} = 0\,, \\ E^{-}_{\phi} &\equiv E^{-}_{\theta} = 0\,, \end{aligned}$$

其中， $V_{s=1}$（r）是式（2.42）中定义的势。因此，假设$E^{-}_{\theta} = 0$，我们有$E^{-}_{\phi} = 0$ ，并且$A^{-}_{\ell\ ,\ m}$ 满足与 $A^{\ell m}_{01}$相同的薛定谔型微分方程。

□

2.2.3 示例 3：施瓦西背景下的自旋-2场微扰

我们来考虑施瓦西背景下的自旋-2场微扰。施瓦西背景是爱因斯坦方程的一个球对称真空解， $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$。为此，考虑 $g^{S}_{\mu\nu}$ 中的一个小微扰 $h_{\mu\nu}$ ，使得微扰度规可以写成未扰动背景度规与微扰之和，

$$g_{\mu\nu} = g^{S}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{2.45}$$

其中 $h_{\mu\nu}$ 与 $g^{S}_{\mu\nu}$相比非常小。为了构建自旋-2微扰 $h_{\mu\nu}$的试探形式，我们必须注意到，它的 10 个自由度在球面 S^2上的旋转作用下具有不同的变换性质。实际上，将微扰 $\boldsymbol{h} = h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$分解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} = \;& h_{tt}\, dt^2 + 2h_{tr}\, dtdr + h_{rr}\, dr^2 + (h_{ta}dx^a)dt + (h_{ra}dx^a)dr + \\ &+\; h_{ab}\, dx^a dx^b \quad \text{where} \quad a,b \in \{\theta,\phi\}\,, \end{aligned} \tag{2.46}$$

我们看到，在这样的旋转下，微扰 $h_{\mu\nu}$ 由 3 个按标量场方式变换的场、2 个按相对于 S^2 的 1- 形式分量方式变换的场，以及最后 1 个在 S^2 中按二阶张量分量方式变换的场组成。每种场都应按具有相同性质的角基展开。标量场 h_{tt}， h_{tr} 和 h_{rr} 自然按

标量球谐函数展开；Y_{ℓ}、$_m$以及 1-形式 $h_{ta}dx^a$ 和 $h_{ra}dx^a$ 则按矢量球谐函数 $V^{\pm}_{\ell}$、$_m$展开，如例 1 和例 2 所示。现在，对于二阶张量 $h_{ab}\,dx^a dx^b$，有三种基本类型的元素，分别是：$T^{\oplus}_{\ell}$、$_m$ $=Y_{\ell}$、$_m\hat{}g_{ab}\,dx^a dx^b$、$T^{+}_{\ell}$、$_m$ $=\hat{}\nabla_a\hat{}\nabla_b Y_{\ell}$、$_m dx^a dx^b$ 以及 T^{-}_{ℓ}、$_m$ $=($^ $\epsilon_{ac}\hat{}\nabla_b\hat{}\nabla^c Y_{\ell}$、$_m+\hat{}\epsilon_{bc}\hat{}\nabla_a\hat{}\nabla^c Y_{\ell}$、$_m)dx^a dx^b$，其中 $\hat{}g_{ab}$ 是球面上的度规张量，$\hat{}g_{\theta\theta}=1$、$\hat{}g_{\theta\phi}=0$、$\hat{}g_{\phi\phi}=\sin^2\theta$，而 $\hat{}\epsilon_{ab}$是球面上的体积形式。具体而言，我们有

$$T^{\oplus}_{\ell,m} = \; Y_{\ell,m}d\theta^2+\sin^2\theta\, Y_{\ell,m}d\phi^2 \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} T^{+}_{\ell,m} = \; & \partial^2_\theta Y_{\ell,m}d\theta^2+2\left(\partial_\theta\partial_\phi Y_{\ell,m}-\cot\theta\,\partial_\phi Y_{\ell,m}\right)\,d\theta d\phi \\ + \; & \left(\partial^2_\phi Y_{\ell,m}+\cos\theta\,\sin\theta\,\partial_\theta Y_{\ell,m}\right)\,d\phi^2 \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} T^{-}_{\ell,m} = & \,2\csc\theta\left(\partial_\theta\partial_\phi Y_{\ell,m}-\cot\theta\,\partial_\phi Y_{\ell,m}\right)d\theta^2+ \\ + \; & \,2\left(\cos\theta\,\partial_\phi Y_{\ell,m}-\sin\theta\,\partial_\theta\partial_\phi Y_{\ell,m}\right)\,d\phi^2 \\ + \; & \,4\left(\csc\theta\,\partial^2_\phi Y_{\ell,m}+\cos\theta\,\partial_\theta Y_{\ell,m}-\sin\theta\,\partial^2_\theta Y_{\ell,m}\right)\,d\theta d\phi\,. \end{aligned} \tag{2.49}$$

因此可知，展开微扰 $\boldsymbol{h}$ 最合适的方式是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} = \; & \left[H_{tt}(t,r)\,dt^2+H_{rr}(t,r)\,dr^2+2H_{tr}(t,r)\,dtdr\right]Y_{\ell,m} \\ + \; & \left[H^{+}_{t}(t,r)dt+H^{-}_{r}(t,r)dr\right]V^{+}_{\ell,m}+\left[H^{-}_{t}(t,r)dt+H^{-}_{r}(t,r)dr\right]V^{-}_{\ell,m} \\ + \; & H^{\oplus}(t,r)\,T^{\oplus}_{\ell,m}+H^{+}(t,r)\,T^{+}_{\ell,m}+H^{-}(t,r)\,T^{-}_{\ell,m}\,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

自旋-2场微扰由爱因斯坦方程的线性化形式支配

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu}=0 \quad \Rightarrow \quad 2\nabla^\sigma\nabla_{(\mu}h_{\nu)\sigma}\,-\,\Box h_{\mu\nu}\,-\,\nabla_\mu\nabla_\nu\,h=0\,, \tag{2.51}$$

其中

$$\Box=g^{SB\,\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \quad \text{and} \quad h=g^{SB\,\mu\nu}h_{\mu\nu}\,. \tag{2.52}$$

尽管方程（2.51）比完整的爱因斯坦方程容易求解得多，但即使是在最简单的情形下，例如史瓦西背景上的微扰，求解它仍然颇具挑战。Regge 和 Wheeler 首先在史瓦西背景下，将自旋2扰动按角基 $\{Y_{\ell,m},V^{\pm}_{\ell,m},T^{\oplus}_{\ell,m},T^{\pm}_{\ell,m}\}$[42] 分解。使用这种基的最大优势在于，他们能够据此将自旋2扰动分为两类：奇类，其宇称为 $(-1)^{\ell+1}$；以及偶类，其宇称为 $(-1)^{\ell}$，即

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}^{+}+\boldsymbol{h}^{-}\,, \tag{2.53}$$

其中 $\boldsymbol{h}^{\pm}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}^{+} = & \left[H_{tt}(t,r)\,dt^2 + H_{rr}(t,r)\,dr^2 + 2H_{tr}(t,r)\,dtdr\right] Y_{\ell,m} \\ & + \left[H_t^{+}(t,r)dt + H_r^{+}(t,r)dx\right] V_{\ell,m}^{+} \\ & + H^{\oplus}(t,r)\,T_{\ell,m}^{\oplus} + H^{+}(t,r)\,T_{\ell,m}^{+}\,,\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\boldsymbol{h}^{-} = \left[H_t^{-}(t,r)dt + H_x^{-}(t,r)dx\right]\, V_{\ell,m}^{-} + H^{-}(t,r)\,T_{\ell,m}^{-}\,. \tag{2.55}$$

标签 $\pm$ in $\boldsymbol{h}^{\pm}$ 表示，在宇称变换 (2.30) 下， $\boldsymbol{h}^{\pm}$ 会乘以$\pm(-1)^{\ell}$。因此，物体 $\boldsymbol{h}^{+}$ 被称为具有偶宇称，$(-1)^{\ell}$；而 $\boldsymbol{h}^{-}$ 被称为具有奇宇称，$(-1)^{\ell+1}$。由于施瓦西背景度规在施加宇称变换后保持不变，我们预期微扰方程不会混合 $(-1)^{\ell}$ 和 $(-1)^{\ell+1}$ 宇称。因此，我们可以在不失一般性的前提下，将微扰分解为 $\boldsymbol{h}^{+}$ 部分和 $\boldsymbol{h}^{+}$ 部分，并分别进行研究。

奇宇称微扰（自旋-2）

Regge 和 Wheeler 指出， $\boldsymbol{h}^{-}$ 的方程可以写成带有不可积势的薛定谔型微分方程。不过，Regge 和 Wheeler 给出的方程中存在一些小错误。事实上，Manasse 指出，文献中的方程包含错误，并且与爱因斯坦场方程 [43]不一致。Brill 和 Hartle 重新推导了奇宇称方程，但其发表的版本中仍然存在一些错误 [44]。现在，我们来推导施瓦西度规上奇宇称微扰的正确微分方程。Vishveshwara [45], 在其博士论文附录中给出了奇、偶两种宇称的方程，之后又在参考文献 [46]中发表。为此，我们可以利用选择规范的自由度，简化微扰的一般形式。下面采用经典的 Regge-Wheeler（RW）规范，此时奇扰动的典范形式为 [42]

$$\boldsymbol{h}_{RW}^{-} = \left[H_t^{-}(t,r)dt + H_x^{-}(t,r)dx\right] V_{\ell,m}^{-}\,. \tag{2.56}$$

将此试探形式代入方程 (2.51)，我们发现，在 10 个爱因斯坦方程中，只有 3 个彼此独立。它们是：

$$E^-_{t\phi} \equiv \partial_r^2 H_t^- - \partial_r \partial_t H_r^- - \frac{2}{r}\,\partial_t H_r^- - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{4M}{r^3}\right]\frac{H_r^-}{f_S} = 0\,, \tag{2.57}$$

$$E^-_{r\phi} \equiv \partial_t^2 H_r^- + \left(\frac{2}{r} - \partial_r\right)\partial_t H_t^- + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r} - \frac{2}{r}\right]\frac{f_S}{r}\,H_r^- = 0\,, \tag{2.58}$$

$$E^-_{\theta\phi} \equiv \partial_t H_t^- - f_S\,\partial_r(f_{SB} H_r^-) = 0\,. \tag{2.59}$$

看起来，我们只有两个场 H_t^-和 H_r^-，却有三个微分方程。然而，不难验证，第一个方程是另外两个方程的推论。定义场

$$Q^-_{RW}(t,r) := \frac{f_{SB}}{r}\,H_r^-(t,r)\,, \tag{2.60}$$

由方程可立即得到

$$\left(\frac{2}{r} - \partial_r\right) E^-_{\theta\phi} - E^-_{r\phi} = 0\,, \tag{2.61}$$

这是由 $E^-_{\theta\phi} = 0$ 和 $E^-_{r\phi} = 0$ 满足的关系直接推得的；Q^-_{RW} 满足一维类波方程：

$$\left[\partial_x^2 - \partial_t^2 - V^{RW}_{s=2}(r)\right] Q^-_{RW}(t,r) = 0\,, \tag{2.62}$$

其中， x 是通常所说的乌龟坐标，即式（2.14），有效势 $V^{RW}_{s=2}$由下式给出

$$V^{RW}_{s=2}(r) = f_S\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right], \tag{2.63}$$

其中， $s=2$ 标签表示引力场的自旋。方程（2.62）后来被称为 Regge-Wheeler 方程，而有效势（2.63）则被称为 Regge-Wheeler 势。

偶宇称微扰（自旋-2）

与奇宇称微扰的情形类似，我们可以利用规范自由度来简化微扰的一般形式。对于偶宇称微扰，由于所涉及的场数量更多，情况要复杂得多；在这种情况下，恰当地进行规范场固定可以极大地简化计算。在此，考虑到 t 是施瓦西度规中的循环坐标，将微扰的时间依赖性分解为 t 是有益的，这样在微扰方程中就只通过Killing 矢量出现。具体而言，在 Regge-Wheeler 规范中，的形式为

微扰的时间依赖性为 $\boldsymbol{h}^{+} = e^{-i\omega t}\tilde{\boldsymbol{h}}^{+}$，因此 t 在微扰方程中只通过Killing 矢量 ∂_t出现。具体而言，在 Regge-Wheeler 规范中， $\tilde{\boldsymbol{h}}^{+}$ 的形式为

$$\tilde{\boldsymbol{h}}^{+}_{RW} = \left[f_S\, H_0(r)\, dt^2 + \frac{H_2(r)}{f_S}\, dr^2 + 2H_1(r)\, dtdr \right] Y_{\ell,m} + r^2 K(r)\, T^{\oplus}_{\ell,m}\,, \tag{2.64}$$

场 H_0, H_1, H_2 和 K 由下式给出

$$\begin{aligned} H_0(r) &= \frac{\tilde{H}_{tt}(r)}{f_S} \quad , \quad H_2(r) = f_S \tilde{H}_{tt}(r)\,, \\ H_1(r) &= \tilde{H}_{tr}(r) \quad , \quad K(r) = \frac{\tilde{H}^{\oplus}(r)}{r^2}\,. \end{aligned} \tag{2.65}$$

将此试探形式代入方程 (2.51)，对于 $\ell > 1$，我们从线性化爱因斯坦场方程的 10 个分量中最终只得到 7 个独立方程。然而，可以不必求解这些耦合方程，而是将它们组合成薛定谔型微分方程，就像处理奇扰动那样。Regge 和 Wheeler 未能像处理奇扰动方程那样将其化简到同等程度，但 Zerilli (Z) 在很久以后发现，偶宇称扰动方程也可以写成薛定谔型方程，其势 [47] 的形式更为复杂。为此，他通过以下方程隐式定义了一个新场 Q_Z

$$\begin{aligned} K =&\ \left[\frac{\lambda(\lambda+1)r^2 + 3\lambda M r + 6M^2}{r^2(\lambda r + 3M)^2} \right] Q_Z + \partial_x Q_Z\,, \\ H_1 =&\ -i\omega \left[\frac{\lambda r^2 - 3\lambda M r - 3M^2}{r^2(\lambda r + 3M)^2} \right] \frac{r}{f_S}\, Q_Z + \partial_x Q_Z - \frac{i\omega r}{f_S}\, Q_Z + \partial_x Q_Z\,, \end{aligned} \tag{2.66}$$

其中 $\lambda = (\ell-1)(\ell+2)/2$，而 H_0 由以下代数关系得到

$$\begin{aligned} &\left[(\ell-1)(\ell+2) + \frac{6M}{r} \right] H_0 - \left[\frac{\ell(\ell+1)M}{i\omega r^2} + 2i\omega r \right] H_1 + \\ &\quad - \left[(\ell-1)(\ell+2) - \frac{2\omega^2 r^2}{f_S^2} - \frac{2M(M - r f_S)}{r} \right] K = 0\,. \end{aligned} \tag{2.67}$$

于是，偶宇称扰动的爱因斯坦方程可以写成关于场 Q_Z 的薛定谔型方程，其有效势 $V^{Z}_{s=2}$ 为

$$V^{Z}_{s=2} = f_S \left[\frac{2\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 6\lambda^2 M r^2 + 18\lambda M^2 r + 18M^3}{r^3(\lambda r + 3M)^2} \right]. \tag{2.68}$$

这种势后来被称为 Zerilli 势，其性质与 Regge-Wheeler 势几乎完全相同。具有上述

势的薛定谔型微分方程后来被称为 Zerilli方程。Zerilli方程极大地简化了对此类微扰的分析，他的工作对于研究非对称引力坍缩产生的引力辐射具有重要意义。还值得一提的是，Fackerell 对 Zerilli方程解的分析所作的贡献 [48]。Regge-Wheeler形式体系后来被推广到四维 [47, 49, 50] 和高维 [51, 32]中的其他静态黑洞。Teukolsky 在其开创性研究中处理了四维旋转黑洞[52, 53]。近年来，有人提出了一些基于单值性计算的技术，以求得五维 Kerr背景中微扰准正规谱的解析表达式 [54]。然而，后者的谱是用超越方程表示的，必须通过数值方法求解 [55]。

□

总结这些例子，我们看到，在四维史瓦西背景中，自旋-s 场扰动可以用带有史瓦西势（SP）的薛定谔型微分方程来描述

$$V_s(r) = f_S \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (1-s^2) \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{(4-s^2)\mu^2}{4} \right) \right] , \tag{2.69}$$

其中， s 标签表示微扰的自旋， $s = 0$ 对应标量场，$s = 1$ 对应麦克斯韦场，而 $s = 2$ 对应引力微扰的奇部。不同 $s \in \{0, 1, 2\}$取值下的势（2.69）曲线见图2.1。

旋量场情形，即 $s = 1/2$，其势具有不同的形式。例如，在无质量情形下，该势为 [56]（见图2.2）：

$$V^{\pm}_{s=1/2}(r) = f_S \left[\frac{|\nu|}{r^2} \pm \frac{|\nu|}{\sqrt{f_S}} \frac{M}{r^3} \mp \frac{|\nu|\sqrt{f_S}}{r^2} \right] , \tag{2.70}$$

其中， ν为非零整数， $\nu = \pm 1,\ \pm 2,$ ……，而 $\pm$ 标签表示与旋量扰动的上（+）分量和下（−）分量相对应的势。Brill 和 Wheeler 首先在文献 [57] 中讨论了这一情形，随后 Page[58] 和 Unruh [59]对其进行了扩展。关于广义纳里艾时空中有质量自旋-$1/2$ 场扰动的详细推导将在后续章节中给出，另见 [60]。关于自旋-$3/2$ 场扰动，参见文献 [61]。

得到势之后，我们应当寻找满足适当边界条件的解，即准正规模。为了理解准正规模是什么，可以方便地将场 Q 对坐标 t 的依赖按傅里叶基展开，即:

$$Q(t, x) = e^{-i\omega t} H(x) , \tag{2.71}$$

场 Q 的最终通解包含对所有傅里叶频率取值的“求和” ω ，并带有任意的傅里叶系数。这对于 ∂_t 是 Killing 矢量的背景尤其方便，因为 t 在微扰方程中只通过导数算符出现

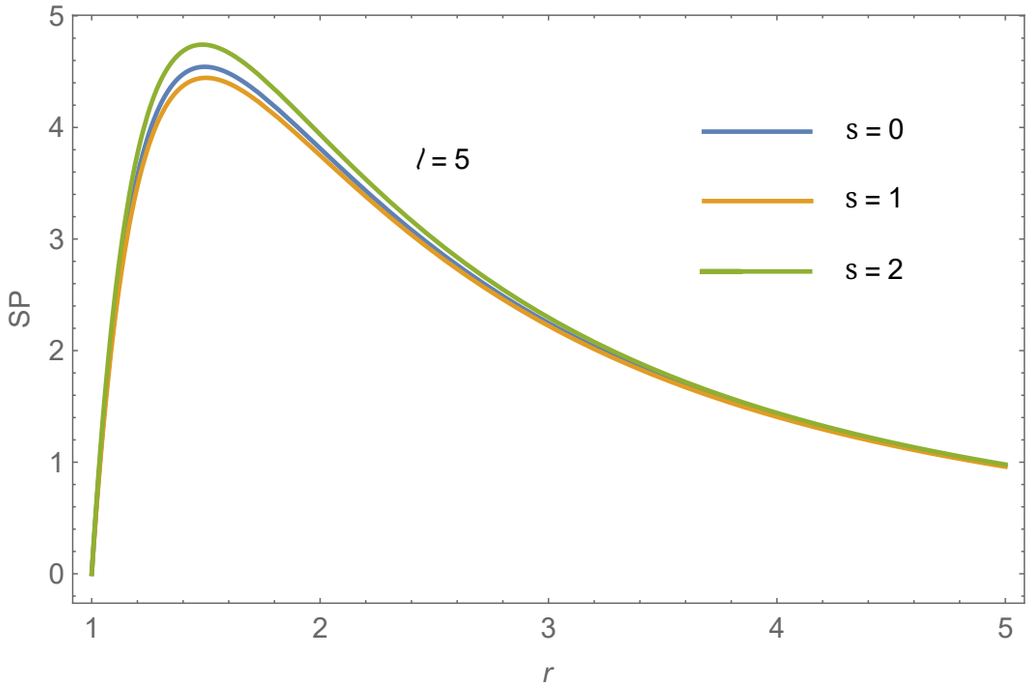


图2.1：在施瓦西时空中，不同 $s = 0$,1,2 和 $\ell = 5$ 值下的有效势（2.69）曲线，单位为 $2M = 1$。

。将这一分解代入式 (2.6)，可得到场H满足的以下薛定谔型微分方程：

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x)\right] H(x) = 0\,, \tag{2.72}$$

这正是研究准正规模的理想形式，其方式与正规模分析相平行。得到上述形式的方程后，需要施加适当的边界条件来求解。准正规模正是满足特定边界条件的微扰方程解。值得指出的是，定义准正规模解的边界条件直接取决于背景。对于史瓦西背景，通常将边界选为事件视界和无穷远。具体而言，事件视界位于 $r = 2M$，此处 (2.7) 中 dr^2 的系数发散。注意，在边界 $r = 2M$ 和 $r = \infty$ 附近，乌龟坐标（2.14）的行为为

$$x|_{r\to 2M} \to -\infty \quad \text{and} \quad x|_{r\to\infty} \to +\infty\,. \tag{2.73}$$

在此类边界处，方程 (2.70) 中给出的实势 V_s 满足

$$V_s(x)|_{x\to+\infty} \to 0 \quad \text{and} \quad V_s(x)|_{x\to-\infty} \to 0\,, \tag{2.74}$$

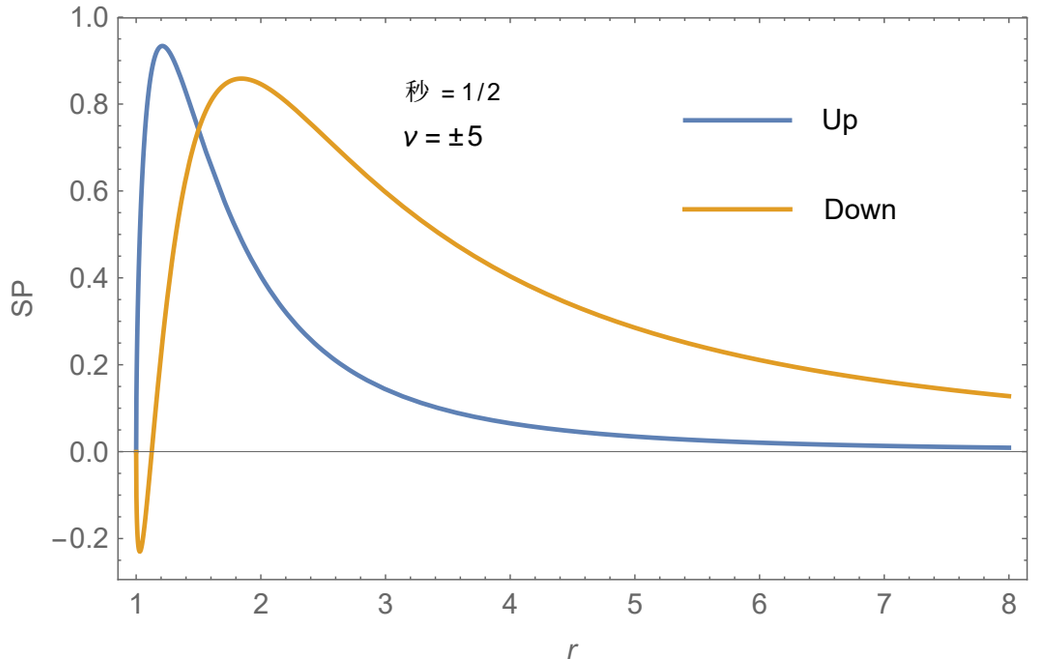


图2.2：以 $2M = 1$为单位的施瓦西时空中与旋量分量（向上和向下）相关的有效势（2.70）图像，其中取$\nu = \pm 5$。

其中， $V_s(x)$ 隐式定义为 $V_s(x) = V_s[r(x)],$ ，而 $r(x)$ 可通过反演方程 (2.14) 得到。上述方程意味着，函数 H 在边界 $x = \pm\infty$ 附近可取为平面波。事实上，由于有效势满足方程 (2.74)，此类解可以

$$H(x)|_{x\to-\infty} \simeq e^{\pm i\omega x} \quad \text{and} \quad H(x)|_{x\to+\infty} \simeq e^{\pm i\omega x}\,. \tag{2.75}$$

为了确定上述指数项中的一个符号，我们需要应用恰当的边界条件。首先回顾一下史瓦西背景中准正规模边界条件背后的物理推理。要猜测给定背景下准正规模具有物理意义的边界条件，我们应考察其光锥结构。例如，在史瓦西背景中，引入坐标 $v = t + x$ 是很有用的，此时关系式 $dv = dt + \frac{1}{f_S}\,dr$ 成立，其中用到了恒等式 $dx = \frac{1}{f_S}\,dr$ 。通过分析径向波传播，即 $d\theta = d\phi = 0$，史瓦西线元可化为 $g^S_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f_S dv^2 + 2dvdr$。现在注意到，函数 $f_S > 0$ 在 $r > 2M$ 处以及 $f_S < 0$ 在 $r < 2M$ 处，因而该时空的零测地线，即 $g^S_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$，由下式给出

$$v = cte \quad \text{and} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{2}{f_S}\begin{cases} > 0 & \text{if} \quad r > 2M\,, \\ < 0 & \text{if} \quad r < 2M\,. \end{cases} \tag{2.76}$$

尤其是，$\frac{dv}{dr}$ 在趋近区域 $r = 2M$ 时趋于无穷大。由于传播发生在光锥内部（有质量情形）或光锥上（无质量情形），事件视界处的观测者（$r = 2M$）不可能增大其径向坐标；它将不可避免地向较小的 r 值坠落，如图 2.3 所示。因此，

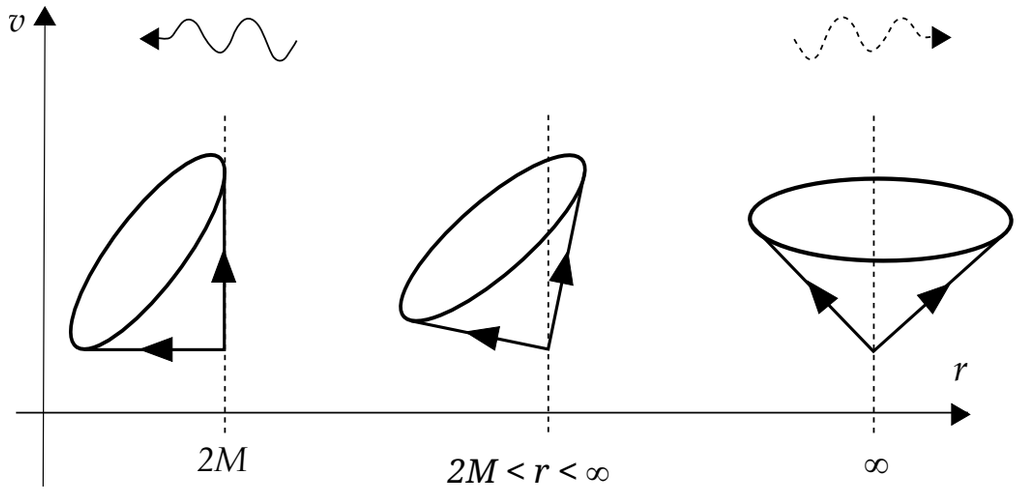


图 2.3：施瓦西时空中光锥结构的示意图，其中$r = 2M$ 为事件视界。波浪箭头表示自然边界条件。

自然的做法是在 $r = 2M$ 处采用波入射的边界条件，如图 2.3 中落入的波浪箭头所示。相应地，在无穷远处，通常的边界条件是没有波从无穷远传来，而某些波在被黑洞 [62, 63]散射后可以到达无穷远。因此，在无穷远处，自然的做法是施加波出射的条件，如图 2.3 中虚线波浪箭头所示。若假设微扰场 H 在视界处为入射波、在无穷远处为出射波，则它是一个准正规模解，

$$H(x)|_{x\to-\infty} \simeq e^{-i\omega x} \quad \text{and} \quad H(x)|_{x\to+\infty} \simeq e^{+i\omega x}\,. \tag{2.77}$$

这些边界条件对 ω施加了一个非平凡条件，即所谓的准正规频率[5, 6, 16, 60, 124]。事实上，定义好所用的边界条件后，我们需要从微分方程（2.72）中求出频率 ω，并将其视为一个特征值问题：

$$\hat{D}H(x) = -\omega^2 H(x) \quad \text{where} \quad \hat{D} = \frac{d^2}{dx^2} - V(x)\,. \tag{2.78}$$

ˆ 现在，问题归结为求取 D 算符的特征值。为了满足边界条件 (2.77)，我们可以寻找一个解，并假设其具有如下

试探形式

$$H(x) = exp\left[i\int_0^x h(x)\,dx\right], \tag{2.79}$$

其中，函数 $h(x)$ 的行为如下

$$h(x)|_{x\to+\infty} \to +\omega \quad \text{and} \quad h(x)|_{x\to-\infty} \to -\omega\,. \tag{2.80}$$

然后，将试探形式 (2.79) 代入方程 (2.72)，得到一个非线性方程，称为黎卡提方程

$$i\frac{dh(x)}{dx} - h(x)^2 + \omega^2 - V(x) = 0\,. \tag{2.81}$$

然后，为了求得准正规模，需要对黎卡提方程进行数值积分[65]。钱德拉塞卡证明，只有 ω 的离散取值才能使该方程存在解 [66]。实际上，如巴什洛和莫泰-巴什洛所示，存在离散无穷多个 ω [67]。与正规模不同，这个问题对应的特征值自然是复数，并且成对出现

$$\omega = \pm\mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega)\,, \tag{2.82}$$

其中，实部 Re(ω) 表示微扰的振荡频率，即 Re(ω) $= 2\pi/T$，其中 T 为振荡周期；而虚部 Im(ω) 给出特征时间尺度 τ，即 Im(ω) $= 1/\tau$，这表明能量以引力辐射的形式泄漏出去的速度有多快。此类准正规频率与引发振荡的过程无关，只取决于势参数，而势参数又包含了场微扰和背景的信息，例如质量、电荷和角动量。因此，准正规模完全由这些参数决定。

对于许多重要的背景，例如施瓦西和克尔时空，无法精确求得其准正规频率的值，因此必须采用近似方法或数值方法。有多种数值和半解析方法可用于求解形式如（2.72）的薛定谔型微分方程，进而高精度地获得准正规频率，其中包括：

- 马舒恩方法 [68]
- 射击法 [69]
- WKB方法 [70]
- 特征积分法 [71]
- 连分数法 [72]
- 弗罗贝尼乌斯级数 [73]
- 合流 Heun 方程 [74]

例如，Nollert 使用连分数法发现，在施瓦西背景中传播的自旋-s 扰动 $s=0$, 2 的准正规频率为[75]

$$\omega = 0.0437123M^{-1} - \frac{i}{4M}(2n+1) + \mathcal{O}[(n+1)^{-1}] \quad (n \in \mathbb{N}\,, n \gg 1)\,. \tag{2.83}$$

标记这些模的索引 n 称为泛音指标。特别要注意，ω 完全由一个参数决定，即质量 M，这正是施瓦西黑洞本身的特征。通常，准正规频率可作为一种高效且准确的工具，用于推断定义背景几何的荷，而给定的微扰正是在该背景中传播，例如质量、电荷和角动量。

2.3 准正则模与背景稳定性 ty

我们已经论证，准正规频率有无穷多个离散值，并且成对出现；也就是说，如果 $\omega = \mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega)$ 是一个准正规频率，那么 $\omega = -\mathrm{Re}(\omega) + i\mathrm{Im}(\omega)$ 也会是一个准正规频率，通常按其虚部计数。例如，基频标记为平凡的泛音指标（$n=0$），即虚部最小的频率；虚部次小的频率标记为泛音指标（$n=1$），依此类推。频率中出现虚部，是视界存在时微扰的一个重要特征。具体而言，$\mathrm{Im}(\omega)$ 的符号使我们能够分析给定背景的线性稳定性。利用（2.82），场 Q 的时间分解在傅里叶基（2.71）中可改写为

$$Q(t,x) = e^{-i[\mathrm{Re}(\omega)+i\mathrm{Im}(\omega)]t} H(x) = e^{\mathrm{Im}(\omega)t}\left[\cos \mathrm{Re}(\omega)t - i \sin \mathrm{Re}(\omega)t\right] H(x)\,, \tag{2.84}$$

由此可以得出，场 Q 会在 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ 时呈指数增长。因此，这表明系统可能存在不稳定性。事实上，将（2.72）乘以 H 的复共轭场（此处记为 $H^\star$），并对结果进行积分，我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[H^\star(x)\, \frac{d^2 H(x)}{dx^2} + \left(\omega^2 - V(x)\right) |H(x)|^2 \right] dx = 0\,. \tag{2.85}$$

对上述表达式的第一项进行分部积分后，我们得到

$$H^\star(x)\, \frac{dH(x)}{dx}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\omega^2 - V(x)\right) |H(x)|^2 - \left| \frac{dH(x)}{dx} \right|^2 \right] dx = 0\,. \tag{2.86}$$

现在，我们应施加适当的边界条件，以确定 Im(ω) 的符号。在渐近平坦背景中，势 V 为正，并满足式 (2.74)，因此准正规模边界条件由式 (2.77) 给出。考虑到后一边界条件以及势处处为实这一事实，前一表达式的虚部导出以下约束：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(x)|^2 \, dx = -\frac{|H(\infty)|^2 + |H(\infty)|^2}{2\,\mathrm{Im}(\omega)} \quad \text{for} \quad \mathrm{Re}(\omega) \neq 0\,. \tag{2.87}$$

因此，由于 Re(ω) $\neq 0$ ， ω 的虚部必定满足 Im(ω) < 0。这意味着渐近平坦背景是稳定的 [76]。一般而言，如果某个背景的谱中至少存在一个增长模，就称其不稳定；否则，至少在本分析所作假设下，它是稳定的。总而言之：

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\omega) < 0 \quad &: \quad \text{exponential damping (stable)}\,, \\ \mathrm{Im}(\omega) > 0 \quad &: \quad \text{exponential growth (unstable)}\,. \end{aligned} \tag{2.88}$$

研究施瓦西背景上的微扰演化时，Vishveshwara 发现，方程 (2.72) 与边界条件 (2.77) 无法同时允许任何满足 Im(ω) > 0 的解，因此根据 (2.88)，该背景是稳定的。事实上，Wald 严格证明了施瓦西背景的线性扰动在所有时间内都必须保持一致有界 [77]。因此，准正规模对于研究某些背景的稳定性具有重要意义。然而，这需要极其复杂的数值证明，更多详情请见 [7, 17]。一般而言，其准正规频率的值无法以精确形式计算。少数例外之一将在本书第二部分介绍。

2.4 准正则模与黑洞面积量子化

当微扰在黑洞背景中传播时，由于黑洞是引力效应极其强烈的引力构型，其附近的量子效应不容忽视。因此，这些天体为检验量子引力的思想提供了理想场所，其作用与氢原子之于量子力学十分相似。反过来，这意味着对黑洞振荡的诠释在理解基础物理学中的各种谜题方面可能发挥重要作用。这就是人们多次尝试将准正规模与黑洞激发态的量子谱联系起来的原因。特别是，最近有人猜想，实部非常大 n 的准正规频率与黑洞面积谱的能级间距之间存在联系。Bekenstein 和 Mukhanov 提出了一种关于黑洞面积量子化的启发式论证

根据这一论证，面积量子为 [78]

$$\delta A = \alpha l_P^2 \,, \tag{2.89}$$

其中，l_P在自然单位制下等于 1，即普朗克长度；α 是一个未定义的无量纲常数。例如，施瓦西黑洞的几何完全由一个参数——其质量——决定。在黑洞热力学中，视界面积 A 与质量 M 之间的关系为 $A = 16\pi M^2$。由此我们可以立即看出，质量变化 δM 对应的黑洞面积变化 δA 为

$$\delta A = 32\pi M \delta M \,. \tag{2.90}$$

因此，贝肯斯坦的论证表明，质量量子化将导致黑洞面积 [78]量子化。这看起来是一个合理且直观的猜想，但实际上并非显而易见。确切来说，应该采用怎样的 δM？迄今为止，这个问题仍没有最终答案，也没有证据证实这一猜想确实正确，因此它至今仍只是一个猜想。

受贝肯斯坦思想的启发，Hod 提议通过一种玻尔对应原理来确定 α，其中具有极大 n 的准正规频率发挥着关键作用[112]。当时，唯一可用的极大 n 准正规频率数据，是 Nollert 在施瓦西黑洞背景下通过数值计算得到、列于式（2.83）中的频率 [75]。注意到 $0.0437123 \sim \ln 3/(8\pi)$ 后，Hod 推测这类频率可以写成

$$\omega = \frac{\ln 3}{8\pi M} - \frac{i}{4M}(2n+1) + \mathcal{O}[(n+1)^{-1}] \,. \tag{2.91}$$

有趣的是，几年后，Motl 在 [79] 中通过解析方法得到了这一结果，随后 Andersson 又通过独立分析验证了该结果 [80]。特别需要注意的是，在此极限下，$\mathrm{Re}(\omega)$ 仅取决于黑洞质量 M，而与参数 ℓ，m 和 n 无关，因此它是黑洞本身的标志。这一关键特征可用于探究一个非常有趣的猜想，该猜想将准正规模与黑洞热力学联系起来。依据玻尔对应原理，即大量子数下的跃迁频率应等于经典振荡频率，Hod 随后提出，相邻两个模之间的能量差等于准正规频率的实部 [112], ，即

$$\delta M = \mathrm{Re}(\omega) = \frac{\ln 3}{8\pi M} \,. \tag{2.92}$$

利用这一点，变化量 δA 可写为

$$\delta A = 4\ln 3 l_P^2 \,, \tag{2.93}$$

由此我们可以将式（2.89）中出现的因子识别为 $\alpha = 4\ln 3$。

根据 Hod 获得的结果，几年后 Dreyer 得以确定所谓的 Barbero-Immirzi 参数，这是圈量子引力（LQG）中唯一的自由参数 [11]；有关近期综述，参见 [81] 和参考文献 [82, 83, 84, 85]。假设量子黑洞的跃迁以携带规范群 SU(2) 的最低允许不可约表示 $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\}$的刺点的出现或消失为特征，Dreyer 发现，与 Bekenstein-Hawking 熵结果完全一致的是，黑洞视界态的计数由满足 $j = j_{min} = 1$ 的构型主导，从而确定了 Barbero-Immirzi 参数的取值。具体而言，一旦黑洞的面积发生由$A(j) = 8\pi\gamma l_P^2\sqrt{j(j+1)}$给出的变化量（在圈量子引力背景下），并假设 $\delta A = A(j_{min} = 1)$，Dreyer 随后由式（2.93）得出，因子 γ 由 $\gamma = \ln 3/(2\pi) \approx 0.124$给出。然而，这一结果带来了一些技术问题。例如，上述取值与几年后由大视界的熵得到的近似值 [86]不一致。值得回顾的是，统计力学通过给定宏观态所对应的微观态数量的自然对数来描述系统的熵。Dogamala 和 Lewandowski，随后还有 Gosh-Mitra，认为文献中使用的态计数过程存在错误，并给出了获得与大黑洞的霍金-贝肯斯坦公式一致所需的 Barbero-Immirzi 参数的正确取值。具体而言，在 Dogamala-Lewandowski 对微观态数量的计数中，Barbero-Immirzi 参数必须为 $\gamma \approx 0.238$ [87]，而在 Gosh-Mitra 的计数中必须为 $\gamma \approx 0.274$ [88]。除此之外，Barbero-Immirzi 参数的确定方式还必须与所考虑的黑洞无关。例如，计算大 n 极限下克尔黑洞的准正规频率，然后令旋转参数 an 趋于零，所得结果并不能化为式（2.92）。实际上，这些渐近准正规模在 $a = 0$处并非解析的，在 $a \to 0$ 极限下它们表现为 $a^{1/3}$ 。这意味着大 n 极限与 $a \to 0$ 极限不可交换 [89, 90], ，因此 Re(ω) 的渐近值，即式（2.92），取决于微扰的自旋，并非黑洞的内禀性质。由于这些问题，Hod 的主要假设后来受到 Maggiore 在 [12]中的批评。作为消除 Hod 猜想所带来部分困难的替代方法，Maggiore 建议，不应使用 Re(ω)，而应使用阻尼谐振子连续模的固有频率之差，即$\delta\omega_0 = (\omega_0)_n - (\omega_0)_{n-1}$。这为$\delta M$给出了不同的取值。事实上，将 $\xi = \xi(t)$视为方程的解

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0\xi = 0\,, \tag{2.94}$$

其中， β 为阻尼常数， ω_0 为谐振子的固有频率，我们发现

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0 - \beta^2} - i\beta \tag{2.95}$$

是特征方程 $\omega + 2i\beta\omega - \omega_0 = 0$ 的两个根。因此，场 (2.84) 可由一个阻尼谐振子重现，对应关系为

$$\mathrm{Re}(\omega) = \pm\sqrt{\omega_0 - \beta^2} \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}(\omega) = -\beta\,. \tag{2.96}$$

反演这些表达式，我们发现 ω_0 可以用 Re(ω) 和 Im(ω) 表示如下：

$$\omega_0 = \sqrt{\mathrm{Re}(\omega)^2 + \mathrm{Im}(\omega)^2}\,. \tag{2.97}$$

对于非常大的 n，Im(ω) $\gg$ Re(ω)，若考虑一个跃迁 $n \to n-1$，由 (2.91) 可得

$$\delta M = \delta\omega_0 \approx \delta\mathrm{Im}(\omega) = \frac{1}{4M}\,. \tag{2.98}$$

利用方程 (2.90)，Maggiore 得出

$$\delta A = 8\pi l_P^2\,, \tag{2.99}$$

由此可将方程 (2.89) 中出现的因子识别为 $\alpha = 8\pi$。这恰好是 Bekenstein 基于不同推理提出的面积量子。与 Re(ω) 的情形不同，对于非常大的 n，由 $\delta\omega_0 \approx \delta$Im($\omega$) 得到的面积量子似乎是黑洞内禀属性最自然的候选者。特别是，大 n 极限与 $a \to 0$ 极限可以交换，且 (2.98) 的值不依赖于微扰的自旋。尽管对于带电旋转四维几何，高度阻尼区间并不像 Hod 猜想所暗示的那样简单，但 Maggiore 的设想也可以推广到克尔黑洞。具体而言，考虑一个极端克尔黑洞，其视界面积 A 与质量 M 之间满足关系 $A = 8\pi M^2$。由此可知，质量的变化 δM 会导致黑洞面积发生变化 δA，即

$$\delta A = 16\pi M\delta M \approx 16\pi M\delta\mathrm{Im}(\omega)\,. \tag{2.100}$$

克尔黑洞中 n 非常大的准正规频率已由 Berti 及其合作者在文献 [91] 中通过数值方法求得。具体而言，他们证明，对于任意 a，虚部 Im(ω) $\gg$ Re(ω)，且是 a 的单调递增函数，即

$$\mathrm{Im}(\omega) = \frac{1}{2} + 0.0438a - 0.0356a^2\,, \tag{2.101}$$

其中 a 是无量纲克尔旋转参数。在这种情况下，极端情形对应于数值 $M = 1/2$ 和 $a = 1/2$ [91, 92]。假设取这两个数值，我们得到

$$\mathrm{Im}(\omega) = 1.026\,\frac{1}{2} = 1.026\,\frac{1}{4M}\,, \tag{2.102}$$

由此可见，该值比史瓦西值高 2.6%。这意味着面积量子近似为

$$\delta A \approx 4\pi l_P^2\,, \tag{2.103}$$

贝肯斯坦值的一半。迄今为止，尚不清楚 Maggiore 的方法能否以一致的方式推广到所有几何中。这一切仍然只是猜想，但是，

如果能证明它成立，就能在广义相对论与量子力学之间建立独特的联系。值得一提的是，尽管 Hod 猜想无法以任何简单的方式推广到带电旋转黑洞，且大多被视为一种奇特的巧合，但 Hod 猜想至少是迈向我们当前量子引力图景的关键一步。

第二部分

广义纳里艾背景中的准正规模

第3章

场扰动：自旋 0 和 1

在弯曲时空中传播的标量场、自旋场以及规范场（阿贝尔和非阿贝尔）的研究，在广义相对论及其他引力理论的研究中发挥着核心作用。其主要原因是，除了探测引力辐射以及观测物体之间通过引力产生的直接相互作用之外，探测充斥我们时空的引力场最自然、最简单的方式，就是让其他场与之相互作用。在本章中，我们将对 Rose-Morse 势类的薛定谔型微分方程进行积分，以研究广义纳里艾时空中 $s = 0$,1 的自旋-s 场扰动的动力学。具体而言，我们将解析地求得与这些场相关的准正规谱。

3.1 广义Nariai时空

让我们考虑在参考文献 [31], 所述背景中传播的物质场，该背景是纳里艾时空的一种高维推广。我们认为，广义纳里艾时空不仅本身值得研究，也有助于深入理解波在广义Schwarzschild时空中的传播。在广义Nariai（GN）背景中， $D = 2d$ 维度的度规由二维德西特空间 dS_2 与 $(d-1)$ 个半径各异的球面 S^2 R_j的直积构成，即

$$g^{GN}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + \sum_{l=2}^{d} R_l^2\, d\Omega_l^2\,, \tag{3.1}$$

其中 $d\Omega_l^2$ 是第 l 个二维球面的线元 S^2,

$$d\Omega_l^2 = \hat{g}_{a_l b_l}dx^{a_l}dx^{b_l} = d\theta_l^2 + \sin^2\theta_l\, d\phi_l^2 \quad \forall\ a_l, b_l \in \{\theta_l, \phi_l\}\,, \tag{3.2}$$

其中对称二阶张量 $\hat{}g_{a_l b_l}$ 是第 l 个二维球面上的度规。函数 $f(r)$ 对坐标 r 的依赖关系如下:

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{R_1^2}\,, \tag{3.3}$$

且半径 R_1 和 R_l 是由下式给出的常数

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[\Lambda - \tfrac{1}{2}Q_1^2 + \frac{Q}{2(D-2)}\right]^{-1/2}, \\ R_l &= \left[\Lambda + \tfrac{1}{2}Q_l^2 + \frac{Q}{2(D-2)}\right]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 Q_1 和 Q_l 分别为电荷和磁荷，而 Q 定义为

$$Q \equiv Q_1^2 - \sum_{l=2}^{d} Q_l^2\,. \tag{3.5}$$

广义纳里艾时空在电磁规范场存在的情况下，局部上是方程 (2.2) 的一个静态解

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{GN} = Q_1\, r\, dt + \sum_{l=2}^{d} Q_l R_l^2 \cos\theta_l\, d\phi_l\,. \tag{3.6}$$

值得回顾的是，若存在一个由等距变换构成的 $SO(3)$ 群作用，且其轨道为类空二维球面，则称该时空具有球对称性。显然，情况并非如此，因为线元的角向部分是若干二维球面的直积，因此背景具有 $SO(3) \times SO(3) \times \ldots \times SO(3) d-1$ 倍的对称性，而通常的 D维纳里艾（N）背景具有 $SO(D-1)$ 对称性。对于每个 $(d-1)$ 球面，都存在三个独立的 Killing 矢量，它们生成旋转，即

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{1,l} = \sin\phi_l\, \partial_{\theta_l} + \cot\theta_l \cos\phi_l\, \partial_{\phi_l}\,, \\ \mathbf{K}_{2,l} = \cos\phi_l\, \partial_{\theta_l} - \cot\theta_l \sin\phi_l\, \partial_{\phi_l}\,, \\ \mathbf{K}_{3,l} = \partial_{\phi_l}\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

除了这些Killing矢量之外，$\mathbf{K}_t = \partial_t$ 也生成一个等距变换。特别是，这个Killing矢量在闭曲面 $r = \pm\Lambda^{-1/2}$上是类光的，因此这些曲面是基林视界。准正规模的边界条件将在这些曲面上给出，正如参考文献 [60] 中所讨论的。这些施加边界条件的曲面，正是广义Nariai时空[96]静态区域的边界。这恰好是静态坐标 $\{t, r, \theta_2, \phi_2, \ldots, \theta_d, \phi_d\}$ 所覆盖的区域，因此，基林视界在几何上得到了明确界定，并非任意选取。这一点对于引入准正规模尤其重要，因为

在静态坐标中，度规的系数与坐标 t无关，因此背景度规具有Killing矢量场 $\boldsymbol{K}_t = \partial_t$。在这种情况下，方便的做法是将场对该坐标的时间依赖性分解到傅里叶基中。在静态区域之外，前述论述并未阻止我们使用傅里叶基展开场分量。然而，这并非最合适的选择，因为时间这一概念对于引入准正规模至关重要。为此，本书将只考虑广义Nariai时空的静态区域。

除了由 Killing 矢量（3.7）生成的连续对称性外，还存在一些离散对称性。例如，我们在例2中看到，S^2 上的线元在变换（θ，ϕ）$\rightarrow$（$\pi-\theta$，$\phi+\pi$）下是不变的，该变换称为宇称变换（空间反演）。然而，在这里，线元在每个球面上的宇称变换下都是不变的。更准确地说，变化

$$\theta_l \rightarrow \pi - \theta_l \quad \text{and} \quad \phi_l \rightarrow \phi_l + \pi \tag{3.8}$$

不会改变线元（3.1）。将该变换记为 P_l，可知P_l^2是恒等变换，因此该变换的特征值为 ± 1。在 P_l 下保持不变的对象（特征值为 $+1$）称为具有偶宇称，而那些仅改变一个整体符号的对象（特征值为 -1）称为具有奇宇称。

正如我们将在下文看到的，在此处所考虑的背景中研究微扰方程的一个重要性质——该背景是文献 [31], 中提出的纳里艾时空的高维推广——是所有方程最终都可进行解析积分。事实上，我们将看到，求解文献 [60] 中发表的标量场（自旋-0）、狄拉克场（自旋-$1/2$）和麦克斯韦场（自旋-1）的微扰方程，以及文献 [93] 中发表的引力场（自旋-2）的微扰方程，归结为对一个薛定谔型方程进行积分；其有效势 V（x）属于 Rosen-Morse 可积势类，如文献 [94]的表 I 所示。对于这一类势，其中包含众所周知的 Pöschl-Teller（PT）势作为特例，方程（2.72）的所有解都是解析的。特别地，Pöschl-Teller 势最初被引入作为一种能够使薛定谔方程精确求解的势 [95] ，其形式为

$$V^{PT}(x) = \frac{C^2 V_0}{\cosh^2\left[C\left(x - x_0\right)\right]}\,, \tag{3.9}$$

其中 C, V_0 和 x_0 为常数。如前所述，我们可以证明，广义纳里艾时空有助于深入了解波在广义Schwarzschild时空中的传播。请注意，Pöschl-Teller 势关于 x_0 对称，并且在 $x \rightarrow 0$ 极限下呈指数衰减，而 Schwarzschild势则不具备这些性质。尽管如此，Schwarzschild势只有一个峰值（见图 3.1）；通过适当选择常数，可以使 Pöschl-Teller 势在该峰值附近拟合 Schwarzschild势。例如，对于无质量标量场、

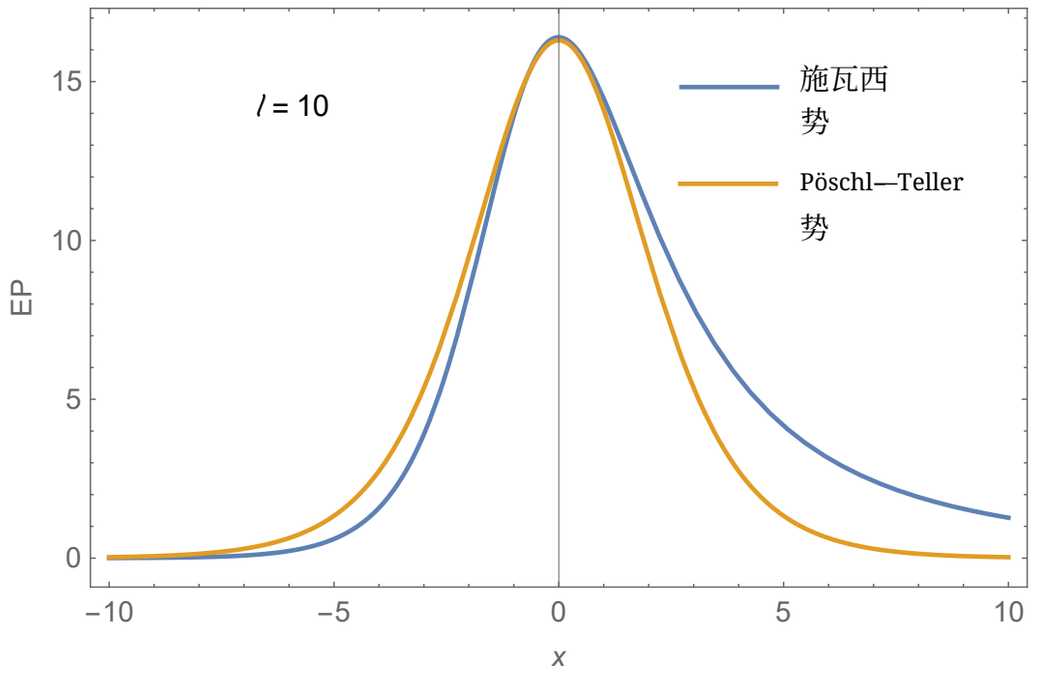


图 3.1：在四维中，以 $2M = 1$为单位，对比施瓦西和纳里艾时空中自旋为 $s = 0$、1、2的微扰的有效势。常数为 $x_0 = 0$、$C = 2/\sqrt{27}$ 和 $V_0 = \ell\,(\ell+1)$。在此，我们为方便起见，选择了式（2.14）中定义的施瓦西乌龟坐标的积分常数，使得势垒的峰值（位于 $r = 3M$）与 $x_0 = 0$重合，即$x = r + 2M\ln(r - 2M) - (3M - 2M\ln 2)$。

狄拉克场、麦克斯韦场以及四维施瓦西背景中的引力场，其薛定谔型微分方程在采用以下变换后，均可拟合为具有 Pöschl-Teller 势 (3.9) 的薛定谔型微分方程

$$x_S \to \frac{x_N}{C}\,, \qquad t_S \to \frac{t_N}{C}\,, \qquad \omega_S \to C\,\omega_N\,, \quad \text{where} \quad C = \frac{1}{\sqrt{27}M}\,, \tag{3.10}$$

值得回顾的是，标签 S 和 N 分别表示施瓦西和纳里艾。通过这一变换，我们可以对四维中的这两种时空进行近似。具体而言，这意味着可以将纳里艾时空作为模型，利用 Pöschl-Teller 势的精确解来探究施瓦西时空的性质，例如准正常模频谱。这一点尤为有用，因为施瓦西几何中任意场微扰的有效势都是不可积的。基于这些原因，下一节将专门讨论 Rosen-Morse 可积势类的积分。

3.2 罗森-莫尔斯可积势类的积分

考虑求解薛定谔型微分方程 (2.72) 的问题，其中势 $V(x)$ 为

$$V(x) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\tanh(\mathfrak{d}\,x) + \frac{\mathfrak{c}}{\cosh^2(\mathfrak{d}\,x)}\,, \tag{3.11}$$

其中， $\mathfrak{a}$、 $\mathfrak{b}$、 $\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$ 为常数，且 $\mathfrak{d} > 0$。这些常数会根据场微扰的类型取不同的值。此类 V（x）属于莫尔斯可积势类，其中 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = 0$ 的情形就是著名的波施尔-特勒势，见 [95]。为求解后一个常微分方程，我们定义一个新的自变量：

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(\mathfrak{d}\,x). \tag{3.12}$$

假设 x 的定义域为整个实数轴，我们发现 $y \in (0,\ 1)$，其中边界 $x = \pm\infty$ 由 $y = 0$ 和 $y = 1$给出。特别是在边界附近，坐标 x 和 y 之间的关系具有较简单的形式

$$\begin{cases} x \to -\infty \ \Rightarrow\ y \simeq e^{2\mathfrak{d}\,x}\,, \\ x \to +\infty \ \Rightarrow\ (1-y) \simeq e^{-2\mathfrak{d}\,x}\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

现在，我们将常参数 a、 b和 c 定义如下

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\mathfrak{d}}\left(\mathfrak{d} + \sqrt{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\omega^2} - \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\omega^2} + \sqrt{\mathfrak{d}^2-4\mathfrak{c}}\right)\,, \\ b = \dfrac{1}{2\mathfrak{d}}\left(\mathfrak{d} + \sqrt{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\omega^2} - \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\omega^2} - \sqrt{\mathfrak{d}^2-4\mathfrak{c}}\right)\,, \\ c = \dfrac{1}{\mathfrak{d}}\sqrt{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\omega^2} + 1\,, \end{cases} \tag{3.14}$$

并且，不再使用 H（x），而改用由下式定义的因变量 G（y）

$$H(x) = y^{(c-1)/2}\,(1-y)^{\frac{1}{2}(a+b-c)}\,G(y)\,. \tag{3.15}$$

然后，经过一些代数运算，可以验证函数 $G(y)$ 满足方程

$$y(1-y)\frac{d^2G}{dy^2} + [c - y(a+b+1)]\,\frac{dG}{dy} - ab\,G = 0. \tag{3.16}$$

这是超几何方程，其通解为

$$G(y) = \alpha\, F(a,b,c;y) + \beta\, y^{(1-c)}\, F(1+a-c,1+b-c,2-c;y)\,, \tag{3.17}$$

其中， F 是超几何函数（通常记作 ${}_2F_1$），而 α 和 β 是任意积分常数，可由边界条件确定。综上，根据式 (3.15) 和 (3.17)，满足式 (2.72) 的函数 H 的解为

$$\begin{aligned} H = \; & (1-y)^{\frac{1}{2}(a+b-c)} \left[\alpha\, y^{(c-1)/2}\, F(a,b,c;y) \right. \\ & + \left. \beta\, y^{-(c-1)/2}\, F(1+a-c,1+b-c,2-c;y) \right]\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

下文将用到超几何函数的两个性质。第一个涉及 $y=0$处的超几何函数，即

$$F(a,b,c;0) = 1\,. \tag{3.19}$$

在这种情况下，后一种解的写法特别适合用于施加 $y=0$处的边界条件，即 $x=-\infty$。事实上，利用式 (3.13)，可以立即验证以下极限成立

$$H|_{x\to-\infty} = \alpha\, e^{\mathfrak{d}(c-1)x} + \beta\, e^{-\mathfrak{d}(c-1)x}\,, \tag{3.20}$$

这对于施加 $x=-\infty$处的边界条件将会很有用。第二个性质涉及 $y=1$处的超几何函数，可利用恒等式求得

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,, \tag{3.21}$$

其中 Γ 表示伽马函数。然后，为了在 $y=1$处施加边界条件，即 $x=+\infty$，将超几何函数写成 $(1-y)$ 的函数会更方便，这样它们在边界处的值便为 1。可以利用以下恒等式 [97]，重写式 (3.18) 中出现的超几何函数：

$$\begin{aligned} F(a,b,c;y) \;=\; & F(a,b,c;1)\, F(a,b,a+b-c+1;1-y) \\ + \; & F(c-a,c-b,c;1)\,(1-y)^{(c-a-b)} F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-y)\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

如此处理并使用式 (3.13)，最终可得解在 $x=+\infty$ 处的如下行为：

$$\begin{aligned} H|_{x\to+\infty} \simeq\; & e^{-\mathfrak{d}(a+b-c)x} \left[\alpha\, \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \beta\, \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \right] \\ & + e^{\mathfrak{d}(a+b-c)x} \left[\alpha\, \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + \beta\, \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \right]\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

常数 a, b 和 c 的精确表达式取决于所研究的微扰类型。接下来，我们将使用本节所得的解，研究背景 (3.1) 中自旋$0, 1/2$,1 和 2 场的准正规模。我们将视界 $r = \pm R_1$ 作为该空间的边界，并考虑下节所述的四种边界条件。由于此处研究的时空是德西特时空与若干球面的直积，因此并非渐近平坦时空，选择合适的边界条件可能会是个棘手的问题。事实上，关于在纯德西特空间中应施加何种边界条件才能计算出定义良好的准正规模，这一问题在文献中已有多番讨论 [98, 99, 100, 101]。同样，反德西特时空中准正规模的合适边界条件问题也已在其他文献中探讨 [102, 103, 104]。在下一节中，我们打算为现有文献中的相关讨论添砖加瓦。

3.3 边界条件

准正规模是满足特定边界条件的波动型方程的解，通常构成一个离散集合。因此，场的边界条件是决定准正规频率 [6, 5, 8, 105] 的核心信息。本节旨在讨论本书所研究的广义纳里艾时空类别中，准正规模适用的边界条件。

为了说明下文所采用的边界条件，我们先回顾施瓦西时空中准正规模边界条件背后的物理依据。观察图 2.3 所示的施瓦西时空光锥结构可知，在事件视界 ($r = 2M$) 处，观测者不可能增大其径向坐标，只会不可避免地落向 r 的较小值。因此，自然的做法是在 $r = 2M$ 处采用这样的边界条件：波向内传播，这在图 2.3 中以一支表示落入的波浪箭头示出。另一方面，在无穷远处，通常的边界条件是没有波从无穷远传来，而有些波在被黑洞 [62, 63] 散射后可以到达无穷远。因此，在无穷远处，自然应施加波向外传播的条件，如图 2.3 中的虚线波浪箭头所示。

类似地，为了猜测广义Nariai时空中准正规模的合理边界条件，我们应考察其光锥结构。这种时空是二维德西特时空 dS_2 与若干球面的直积。在径向波传播的情形下，也就是 $d\theta_l = d\phi_l = 0$，线元由 dS_2 给出，

$$ds^2 = -\, f\, dt^2 + \frac{1}{f}\, dr^2 \quad \text{where} \quad f = 1 - \frac{r^2}{R_1^2}\,, \tag{3.24}$$

其中 R_1 为正的常数。实际上，后一个线元仅表示整个 dS_2 时空的一个片段，而该时空严格定义为曲面

$$-T^2+X^2+Y^2=R_1^2 \tag{3.25}$$

嵌入于具有洛伦兹线元 $ds^2=-dT^2+dX^2+dY^2$ 的三维平直空间中。该曲面的参数化由坐标 $\{t,r\}$ 给出，其定义如下

$$\begin{cases} T=\sqrt{R_1^2-r^2}\,\sinh(t/R_1)\,, \\ X=\sqrt{R_1^2-r^2}\,\cosh(t/R_1)\,, \\ Y=r\,. \end{cases} \tag{3.26}$$

用参数 $\{t,r\}$ 表示，曲面 (3.25) 的度规即为方程 (3.24) 所给出的度规。为使坐标 T 和 X 为实数，必须满足 $r\in[-R_1,R_1]$。因此，特别地，我们发现 $-R_1\le Y\le R_1$ 和 $X\ge 0$，所以定义 dS_2 的曲面并未被坐标系 $\{t,r\}$ 完全覆盖。此外，请注意，我们不应忽略 r 的负值，因为定义域 r 的这一部分描述了 dS_2 的一部分，它不同于 $r>0$ [106, 107] 所覆盖的部分。这是一个重要之处，与高维德西特时空 [1] 中的情况不同。为了研究 dS_2 中的光锥，引入由关系式 $dv=dt+\frac{1}{f}dr$ 定义的坐标 v 很有用；用该坐标表示，线元为

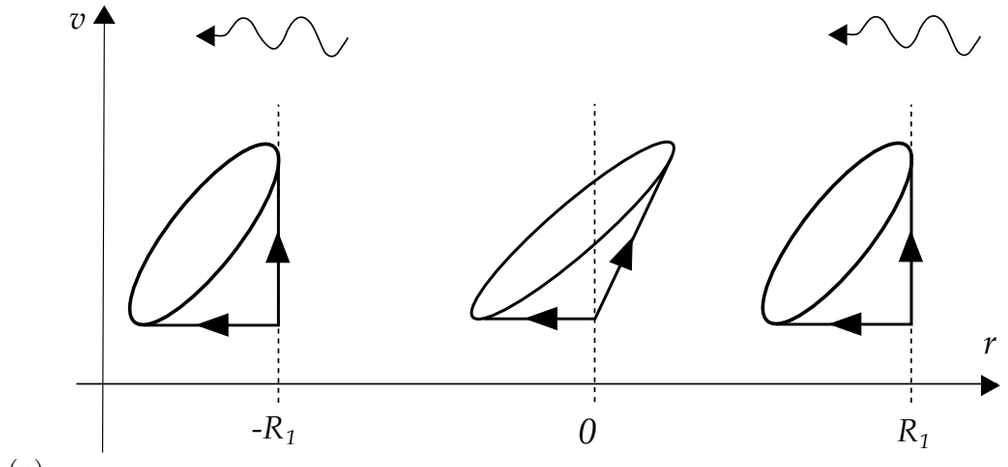
$$ds^2=-f dv^2+2dvdr\,. \tag{3.27}$$

特别地，由于 $f>0$ 位于定义域 $r\in(-R_1,R_1)$ 中，我们看到 ∂_v 是一个类时向量场，因此 v 可以视为时间坐标。我们可以假设该坐标随时间推移而递增，也就是说，∂_v 指向未来。该时空的零测地线为

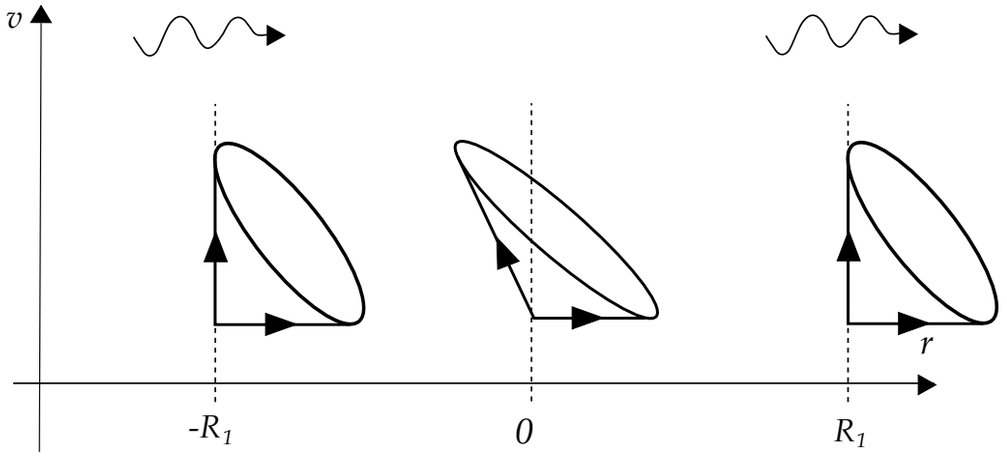
$$ds^2=0\;\Rightarrow\;\begin{cases} dv=0\,, \\ dv=(2/f)dr\,. \end{cases} \tag{3.28}$$

第一条光线由 $dv=0$ 定义，与向量场 ∂_r 相切。由于 ∂_r 和 ∂_v 的内积为正，因此类光向量场 ∂_r 指向过去，换言之，$-\partial_r$ 指向未来。因此，随着时间流逝，这条光线的径向坐标必定减小，如图 3.2(a) 部分线锥中的水平箭头所示。第二条光线由 $dv=(2/f)dr$ 给出，与 $2\partial_v+f\partial_r$ 相切；后者是一个指向未来的零向量场。由于 ∂_v 前面的系数为正，因此随着时间流逝，这条光线的坐标 v 增大，正如图 3.2(a) 部分线锥中的箭头所示。另请注意，在边界 $r=\pm R_1$ 处，我们有 $f=0$，因此第二条光线指向

[1] 例如，dS_3 是浸入平直空间 $ds^2=-dT^2+dX^2+dY^2+dZ^2$ 中的曲面 $-T^2+X^2+Y^2+Z^2=R^2$。由 $T=\sqrt{R_1^2-r^2}$ 定义的坐标 $\{t,r,\phi\}$ 为 $\sinh(t/R_1)$、$X=\sqrt{R_1^2-r^2}\,\cosh(t/R_1)$、$Y=r\cos(\phi)$ 和 $Z=r\sin(\phi)$，覆盖了 dS_3 的一部分。在这种情况下，请注意，如果我们采用定义域 $\phi\in[0,2\pi]$，只需考虑 r 的正分支。



(a)



(b)

图3.2：广义Nariai时空的光锥结构示意图。波浪箭头表示自然边界条件。在（a）部分，假设类时向量场 ∂_v 指向未来；在（b）部分，假设 ∂_v指向过去。

∂_v 的方向。接着，分析图 3.2(a) 部分所示的光锥结构，可以看出，观测者位于边界 $r = \pm R_1$ 处时，其径向坐标无法增大。这表明，在这个时空中，波的自然边界条件是在两个边界处都为落入波，如波浪状箭头所示。上述结论基于一个任意假设，即 ∂_v 指向未来。如果我们曾考虑过 ∂_v 指向过去，就会得到图 3.2(b) 部分所示的光锥结构。在后一种情况下，自然边界条件是波在两个边界处都应为出射波，

如波浪箭头所示。由于线元（3.24）的对称性 $t \to -t$ 和 $r \to -r$，可知对于 ∂_v，两种时间定向的选择都是同样合理的，不存在首选方案。

因此，我们可以说，波的自然边界条件是：波在两个边界处都为落入，或在两个边界处都为出射。然而，正如我们将在下文看到的，事实证明，这些边界条件虽然具有物理动机，却不会导出准正规模。另一方面，当我们设定波在一个边界处落入、在另一个边界处出射时，就会得到我们所要寻找的结果：一组离散的准正规模。因此，为了使我们的计算更加完整，在接下来的章节中，我们将考虑四种不同类型的边界条件，即图 3.3 所定义的边界条件。在该图中，

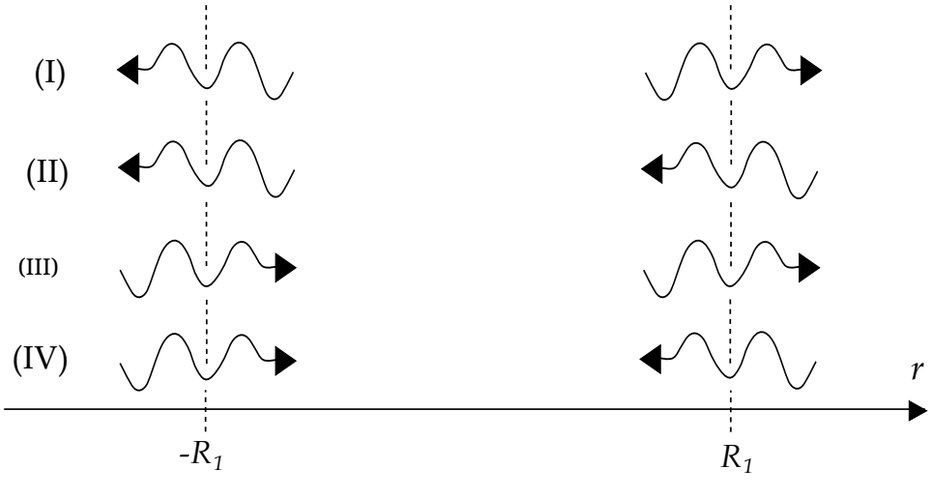


图3.3：本文所考虑的边界条件类型。从数学上讲，指向右侧的波浪箭头表示 $e^{-i\omega(t-x)}$，而指向左侧的波浪箭头表示 $e^{-i\omega(t+x)}$。

指向右侧的波浪箭头表示波向 r 的较大值传播，数学上表示为 $e^{-i\omega(t-x)}$；指向左侧的波浪箭头则表示波向 r 的较小值传播，数学上表示为 $e^{-i\omega(t+x)}$，其中坐标 x 将在下文定义。正如上一段所述，边界条件 (II) 和 (III) 在物理上有依据，尽管它们不会导出准正规模。相较之下，我们将看到，条件 (I) 和 (IV) 与准正规模相关。尽管如此，之所以考虑边界条件 (I) 和 (IV)，是因为它们与施瓦西情形中因果上适用的视界处入射和无穷远处出射解相对应。

3.4 自旋-0场扰动

既然已经利用一般势 (3.11) 对方程 (2.72) 进行了积分，我们现在可以继续研究几种物质场的微扰。首先来看自旋零场的微扰，即质量为 μ 的标量场 $\mathbf{\Phi}$。值得指出的是，研究各种背景下标量微扰所对应的准正规模一直是一个活跃的研究课题。特别是在黑洞背景下，研究表明，有质量标量微扰在许多方面都与无质量标量微扰大不相同。例如，它会出现所谓的超辐射不稳定性，而这种现象在无质量情形下并不存在 [108], ；它还可能具有无穷多个长寿命模，称为准共振 [109, 110]。最后，在渐近晚期，有质量场会表现出与场的自旋无关的普适行为[111] ，并且在微扰较小的情况下，可以将其解释为自相互作用标量场 [112]。然而，关于有质量标量微扰的准正规谱，目前只有少数研究对此进行了探讨 [113, 114, 115]。因此，研究广义纳里艾背景下有质量标量微扰所对应的准正规模十分重要。

标量场在背景中传播时满足的方程是克莱因-戈尔登方程，其形式为 (3.1)

$$\frac{1}{\sqrt{|g^{GN}|}}\,\partial_\mu\left(g^{GN\,\mu\nu}\sqrt{|g^{GN}|}\,\partial_\nu\right)\mathbf{\Phi}\;=\;\mu^2\mathbf{\Phi}\,, \tag{3.29}$$

其中， $g^{GN}_{\mu\nu}$是广义纳里艾背景中的度规，即（3.1）。为求解此方程，适合引入由下式定义的乌龟坐标 x ：

$$dx=\frac{1}{f(r)}\,dr\quad\Rightarrow\quad x=R_1\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{r}{R_1}\right)\,. \tag{3.30}$$

特别要注意，乌龟坐标将两个视界之间的定义域$r\in(-R_1,\;R_1)$映射到区间 $x\in(-\infty,\infty)$。用此坐标表示时，线元写作

$$ds^2=f\,(-dt^2+dx^2)+\sum_{l=2}^{d}R_l^2\,d\Omega_l^2\,. \tag{3.31}$$

其中

$$f=f(x)=\mathrm{sech}^2(x/R_1)\,.$$

因此，用这些坐标表示式 (3.29)，最终可得以下场方程

$$\left[\frac{1}{f}\,\left(\partial_x^2-\partial_t^2\right)+\sum_{l=2}^{d}\frac{\Delta_l}{R_l^2}-\mu^2\right]\mathbf{\Phi}(x)=0\,, \tag{3.32}$$

其中

$$\Delta_l \equiv \frac{1}{\sin\theta_l}\,\partial_{\theta_l}(\sin\theta_l\,\partial_{\theta_l}) \;+\; \frac{1}{\sin^2\theta_l}\,\partial^2_{\phi_l}\,, \tag{3.33}$$

是单位球面上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。 Δ_l 的特征函数是众所周知的标量球谐函数，$Y_{\ell_l,\ m_l}(\theta_l,\ \phi_l)$，其特征值由以下方程确定

$$\Delta_l Y_{\ell_l,m_l}(\theta_l,\phi_l) \;=\; -\ell_l(\ell_l+1)\,Y_{\ell_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)\,, \tag{3.34}$$

其中 ℓ_l 和 m_l 为整数，满足 $|m_l| \leq \ell_l$ 和 $\ell_l \geq 0$，以确保 $Y_{\ell_l,\ m_l}$ 在点 $\theta_l = 0$ 和 $\theta_l = \pi$ 处是正则的；我们的坐标系在这些点处失效。索引 ℓ_l 标记与线元球面部分相关的 $SO(3)$ 等距子群的不可约表示，而 m_l 标记不可约表示 ℓ_l 的基中的 $(2\ell_l+1)$ 个元素。我们已经看到，只要背景具有球对称性，将标量场的角向依赖展开为标量球谐函数就很有用；这些对象在等距子群 $SO(3)$ 的作用下具有相同的性质，参见示例 1。然而，广义纳里艾背景的对称性是球对称性的乘积，即 $SO(3) \times SO(3) \times \ldots SO(3)$。在这种情况下，标量场的克莱因–戈尔登方程可通过如下分解进行分离

$$\mathbf{\Phi} = \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t}\phi^{\omega}_{\ell,m}(x)\,\mathcal{Y}_{\ell,m}, \tag{3.35}$$

其中

$$\mathcal{Y}_{\ell,m} = \prod_{l=2}^{d} Y_{\ell_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)\,. \tag{3.36}$$

在本书中，为简化记号，我们通常省略傅里叶变换中对频率 ω 的“求和”。因此，场 $\mathbf{\Phi}$ 的通解必须包含对傅里叶频率 ω 所有取值的“求和”，并带有任意的傅里叶系数。在方程 (3.35) 中，我们考虑到了 t 是度规的循环坐标这一事实，因此，将场 Φ 的时间依赖性分解到傅里叶基中很有用。对集体索引 $\{\ell, m\}$ 求和，意味着对集合 $\{\ell_2, m_2, \ell_3, m_3, \ldots, \ell_d, m_d\}$的所有取值求和。

然后，将表达式 (3.35) 代入场方程，可得关于分量$\phi^{\omega}_{\ell,\ m}$的以下常微分方程：

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} \;+\; \omega^2 \;-\; V_{s=0}(x)\right]\phi^{\omega}_{\ell,m} \;=\; 0\,, \tag{3.37}$$

其中，势 $V_{s=0}$ 是上一节研究的势，见式 (3.11)，参数 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$、$\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$ 为：

$$\mathfrak{a} = 0 \quad , \quad \mathfrak{b} = 0 \quad , \quad \mathfrak{c} = \mu^2 + \sum_{l=2}^{d} \frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} \quad , \quad \mathfrak{d} = \frac{1}{R_1}\,. \tag{3.38}$$

将这些参数代入式 (3.14)，可得超几何方程中的常数为

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2} + iR_1\sqrt{\mu^2 + \textstyle\sum_{l=2}^{d} \dfrac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} - \dfrac{1}{4R_1^2}}, \\
b &= \frac{1}{2} - iR_1\sqrt{\mu^2 + \textstyle\sum_{l=2}^{d} \dfrac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} - \dfrac{1}{4R_1^2}}, \\
c &= 1 + i\,R_1\,\omega\,.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

特别地，以下关系成立：

$$
\mathfrak{d}(c-1) = i\omega \quad \text{and} \quad \mathfrak{d}(a+b-c) = -i\omega\,. \tag{3.40}
$$

3.4.1 标量准正规模

现在，我们可以施加边界条件了。

边界条件（I）

为了研究准正规模解，我们必须施加适当的边界条件。首先来看图 3.3 所示的边界条件（I）。在这种情况下，假设场在边界 $x=-\infty$ 处沿 x 减小的方向运动，而在边界 $x=+\infty$ 处则应朝 x增大的方向运动。由于模的时间依赖形式 $\phi^{\omega}_{\ell,\ m}$ 为 $e^{-i\omega t}$型，这意味着 $e^{-i\omega t}\phi^{\omega}_{\ell,\ m}\big|_{x\to-\infty}$ 应具有如下形式： $e^{-i\omega(t+x)}$ ，这是一个向左传播（沿 x负方向）的平面波；而 $e^{-i\omega t}\phi^{\omega}_{\ell,\ m}\big|_{x\to+\infty}$ 则应具有 $e^{-i\omega(t-x)}$ 的形式，这是一个向右传播（沿 x正方向）的平面波。请注意，在本节所讨论的情形中，式（3.20）可写为

$$
e^{-i\omega t}\phi^{\omega}_{\ell,m}\big|_{x\to-\infty} = \alpha\, e^{-i\omega(t-x)} + \beta\, e^{-i\omega(t+x)}\,. \tag{3.41}
$$

对于边界条件（I），边界附近准正规模的条件 $x=-\infty$ 因此为

$$
\alpha = 0\,. \tag{3.42}
$$

接下来，我们研究边界 $x=\infty$ 附近标量模的行为。在该区域内，假设后一项要求成立，方程 (3.23) 和 (3.39) 立即

给出

$$\phi^{\omega}_{\ell,m}\big|_{x\to+\infty} \simeq \beta\,\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\,e^{-i\omega(t-x)} + \beta\,\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}\,e^{-i\omega(t+x)}\,. \tag{3.43}$$

通过要求乘以$e^{-i\omega(t+x)}$ 的系数为零，并要求乘以 $e^{-i\omega(t-x)}$ 的系数非零，即可确保边界条件（I）。由于 β 不能为零，否则该模将恒等于零，因此伽马函数的组合必须满足

$$\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \neq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} = 0\,. \tag{3.44}$$

现在，既然伽马函数没有零点，实现这一点的方法是令分母中的伽马函数发散，即令 $\Gamma(a-c+1) = \infty$ 或 $\Gamma(b-c+1) = \infty$。由于伽马函数仅在非正整数处发散，因此我们得到以下约束：

$$a-c+1 = -n \quad \text{or} \quad b-c+1 = -n \quad \text{where} \quad n \in \{0,1,2,\ldots\}. \tag{3.45}$$

因此，假设满足后一个约束，并利用公式（3.39），最终得到

$$\omega_{\rm I} = \pm\sqrt{\mu^2 + \sum_{l=2}^{d}\frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} - \frac{1}{4R_1^2}} + \frac{i}{2R_1}(2n+1), \tag{3.46}$$

其中 n 为任意非负整数，称为泛音指标。在这里，我们开始采用记号 $\omega_{\rm I}$ 表示满足边界条件（I）时的频率，采用 $\omega_{\rm II}$表示满足边界条件（II）时的频率，依此类推。需要注意的重要一点是，这些频率是唯一与边界条件（I）相容的频率。它们就是所谓的准正规模频率。请注意频率中虚部的存在，它体现了场的阻尼，这是视界存在时微扰的一个特征。此外，还应注意，平方根也可能导致频率出现虚部；在这种情况下，微扰模将完全受到阻尼，不具有特征性振荡。例如，对于无质量场，球对称模（$\ell_l = 0$）的频率将是纯虚数。

边界条件（II）

现在，让我们研究边界条件（II）。在这种情况下，模式 $e^{-i\omega t}\phi^{\omega}_{\ell,\ m}$在两个边界 $x = \pm\infty$ 处都应表现为 $e^{-i\omega(t+x)}$，如图 3.3 所示。因此，由于在 $x = -\infty$ 处的行为与边界条件（I）下相同，可知方程（3.41）对于边界条件（II）仍然成立。唯一的区别是

在方程（3.43）中，我们应消去项 $e^{-i\omega(t-x)}$，这只有在 $\Gamma(1-a)$ 或 $\Gamma(1-b)$ 发散时才可能实现。由于 a 和 b 不依赖于频率 ω（见方程（3.39）），因此，约束 $1-a=-n$ 和 $1-b=-n$（其中 n 为非负整数）将对已经确定的参数构成限制，例如质量 μ 以及描述背景的半径 R_l。因此我们得出结论：一般而言，假设边界条件（II）时，微扰不存在解。

边界条件（III）

对于边界条件（III），模 $e^{-i\omega t}\phi^{\omega}_{\ell,\ m}$ 在两个边界 $x=\pm\infty$ 处都应表现为 $e^{-i\omega(t-x)}$。因此，在方程（3.41）中，我们应令 $\beta=0$，此时在 $x=+\infty$ 处得到以下形式：

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t}\phi^{\omega}_{\ell,m}\big|_{x\to\infty} \simeq\ & \alpha\,\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,e^{-i\omega(t-x)} \\ & +\alpha\,\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,e^{-i\omega(t+x)}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

为了消去项 $e^{-i\omega(t+x)}$，我们需要令 $a=-n$ 或 $b=-n$，其中 $n\in\{0,1,2,\cdots\}$。与边界条件（II）的情况一样，这个约束一般无法满足。因此，不存在满足边界条件（III）的准正规模。

边界条件（IV）

最后，对于边界条件（IV），场在 $x=-\infty$ 处必须表现为 $e^{-i\omega(t-x)}$，而在 $x=+\infty$ 处则应按 $e^{-i\omega(t+x)}$ 变化。因此，在方程（3.47）中，我们应消去项 $e^{-i\omega(t-x)}$，这可以通过令 $c-a=-n$ 或 $c-b=-n$ 来实现，其中 n 为非负整数。后一个约束与方程（3.39）一起给出以下准正规频率：

$$\omega_{\mathrm{IV}}=\pm\sqrt{\mu^2+\sum_{j=2}^{d}\frac{\ell_j(\ell_j+1)}{R_j^2}-\frac{1}{4R_1^2}}-\frac{i}{2R_1}(2n+1). \tag{3.48}$$

该谱几乎等同于边界条件（I）下得到的谱，唯一的区别在于虚部的符号。因此，对于边界条件（IV），模在 $t\to-\infty$ 时衰减，并在 $t\to+\infty$ 时发散；而对于边界条件（I），情况则正好相反。

3.5 自旋-1场微扰

在本节中，我们将考虑麦克斯韦场 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$（一种无质量自旋-1场）的微扰。在这种情况下，我们假设背景的电磁荷为零，即 $Q_1 = Q_l = 0$，因此背景中的麦克斯韦场为零，$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{GN} = 0$。如第2章所述，这对于验证背景度规和物质场中微扰的可分离性非常重要。特别是，这意味着在这种情况下，半径 R_1 和 R_l 全部相等，见公式（3.4）。关于其他背景中自旋-1场的准正规模计算，参见 [116, 117, 118, 119]。

3.5.1 麦克斯韦方程的分离试探形式

正如我们在例2中证明的，对于具有球对称性的四维背景中的自旋-1规范场 $\boldsymbol{A} = A_\mu dx^\mu$，麦克斯韦方程可通过如下分解实现分离：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t,r,\theta_l,\phi_l) = & \sum_{\ell_l,m_l}\big[\big(G^+_{0,\ell_l m_l}\,dt + G^+_{1,\ell_l m_l}\,dr\big)\,Y_{\ell_l,m_l} \\ & + \; G^+_{\ell_l,m_l}\,V^+_{\ell,m} + G^-_{\ell_l,m_l}\,V^-_{\ell_l,m_l}\big]\,. \end{aligned} \tag{3.49}$$

这里，$\{\theta_l,\phi_l\}$ 表示单位二维球面上的角变量，其度规张量为 $\hat{}g_{a_l b_l}$，如式 (3.2) 所定义，指标 $a_l b_l$ 取遍$\{\theta_l,\phi_l\}$。在此分解下，我们可以将 $\nabla^\mu\nabla_{[\mu}A_{\nu]}$ 的每个分量改写为一个依赖于变量 $\{t,r\}$ 的函数与一个依赖于角变量 $\{\theta_l,\phi_l\}$的非零函数之积，因此 $\nabla^\mu\nabla_{[\mu}A_{\nu]} = 0$ 仅依赖于坐标 $\{t,r\}$。这清楚地表明，只要背景具有球对称性，使用角基 $\{Y_{\ell_l,m_l}, V^+_{\ell_l,m_l}, V^-_{\ell_l,m_l}\}$ 就至关重要；其中，$Y_{\ell_l,\ m_l}$ 是标量球谐函数，而 $V^\pm_{\ell_l\ ,\ m_l}$ 是矢量球谐函数，定义见例2，即

$$\begin{aligned} V^+_{\ell_l,m_l} = & \;\; \partial_{\theta_l} Y_{\ell_l,m_l} d\theta_l + \partial_{\phi_l} Y_{\ell_l,m_l} d\phi_l\,, \\ V^-_{\ell_l,m_l} = & \;\; \frac{1}{\sin\theta_l}\,\partial_{\phi_l} Y_{\ell_l,m_l}\,d\theta_l - \sin\theta_l\,\partial_{\theta_l} Y_{\ell_l,m_l}\,d\phi_l\,. \end{aligned} \tag{3.50}$$

请注意，由于标量球谐函数构成球面上函数的基，前述论证并未排除我们像展开标量场那样用它们展开分量 A_μ，即

$$A_\mu = \sum_{\ell_l,m_l} G_{\mu,\ell_l m_l}(t,r) Y_{\ell_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)\,. \tag{3.51}$$

然而，这并非最合适的选择，因为每种类型的场都应按照具有相同性质的角基展开。事实上，尽管分量 A_t 和 A_r 相对于等距子群 $SO(3)$ 的作用按标量场的方式变换，但分量 A_{θ_l} 和 A_{ϕ_l} 则像二维球面上的余向量分量那样变换。因此，展开 A_{θ_l} 和 A_{ϕ_l} 最自然的方式是使用球面上的 1-形式基，即式（3.50）。特别是，后一组 1-形式基用二维球面上的协变导数表示时形式优雅，本文将其记为 ∇_{a_l}。从球面上的标量场——球谐函数$Y_{\ell_l,\ m_l}$——出发，并取协变导数，我们可以将 1-形式（3.50）优雅地表示为:

$$V^{\pm}_{\ell_l,m_l} = V^{\pm}_{a_l} dx^{a_l}\,, \tag{3.52}$$

其中分量 $V^{\pm}_{a_l} = V^{\pm}_{a_l}(\theta_l,\ \phi_l)$ 定义为

$$V^{+}_{a_l} = \hat{\nabla}_{a_l} Y_{\ell_l,m_l} \quad \text{and} \quad V^{-}_{a_l} = \epsilon_{a_l c_l}\hat{\nabla}^{c_l} Y_{\ell_l,m_l}\,, \tag{3.53}$$

其中 $\epsilon_{a_l b_l}$ 是第 l 个二维球面上的体积形式。

我们现在可以自然地将广义纳里艾背景中的自旋-1场微扰 $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu$ 展开。该背景的对称性是 $(d-1)$ 个球对称性的乘积。因此，对于四维球对称情形所建立的许多公式仍然适用，只需形式上将 $Y_{\ell_l,\ m_l}$ 替换为式 (3.36) 中定义的标量球谐函数的乘积，即 $\mathcal{Y}_{\ell m} = \prod_{l=2}^{d} Y_{\ell_l,\ m_l}$。例如，$\mathcal{A}_t$ 和 $\mathcal{A}_x$ 是相对于 $(d-1)$ 个球面的标量，应像处理标量场时那样，按标量球谐函数的乘积展开，即式 (3.35)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} A^{+}_{0,\ell m}\mathcal{Y}_{\ell m}\,,\\
\mathcal{A}_x &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} A^{+}_{1,\ell m}\mathcal{Y}_{\ell m}\,,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

其中 $A^{+}_{0\ ,\ \ell m}$，$A^{+}_{1\ ,\ \ell m}$ 是乌龟坐标 x（式 (3.30)）的任意函数，而对 $\{\ell, m\}$ 的求和表示对集合 $\{\ell_2, m_2, \ell_3, m_3, \ldots,\ \ell_d,\ m_d\}$ 的所有可能取值求和。除此之外，我们可以说，物件 $V^{\pm}_{\ell_l\ ,\ m_l}$ 是关于第 l 个球面上的旋转的 1-形式。不过，严格来说，$V^{\pm}_{\ell_l\ ,\ m_l}$ 必须依赖于所有指标 $\{\ell_2, m_2, \ell_3, m_3, \ldots, \ell_d, m_d\}$，而不只是依赖于记号 $V^{\pm}_{\ell_l\ ,\ m_l}$ 所暗示的 $\{\ell_2, m_2\}$。因此，为满足这一要求，对于任意 d，一个自然的推广形式为

$$\mathcal{V}^{\pm}_{l,\ell m} = \mathcal{V}^{\pm}_{a_l} dx^{a_l}\,, \tag{3.55}$$

其中 $\mathcal{V}^{\pm}_{a_l}$ 定义为关于 $V^{\pm}_{a_l}$ 的如下表达式:

$$\mathcal{V}^{\pm}_{a_l} = V^{\pm}_{a_l}(\theta_l, \phi_l) \prod_{n=2, n\neq l}^{d} Y_{\ell_n,m_n}(\theta_n, \phi_n)\,, \tag{3.56}$$

其中 $V^{\pm}_{a_l}$ 已在式 (3.53) 中定义。因此，

$$\mathcal{A}_{a_l} dx^{a_l} \;=\; \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left(A^{+}_{l,\ell m} \mathcal{V}^{+}_{l,\ell m} + A^{-}_{l,\ell m} \mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \right) , \tag{3.57}$$

其中 $A^{\pm}_{l\ ,\ \ell m}$ 是关于 x的任意函数。容易验证，式（3.55）中定义的 1-形式 $\mathcal{V}^{\pm}_{l\,\ell\ ,,m}$ 与式（3.50）中定义的 1-形式 $V^{\pm}_{\ell_l\ ,\ m_l}$ 形式相同，只需将 ℓ_l，m_l 替换为 l，ℓm，并将 $Y_{\ell_l,\ m_l}$ 替换为 $\mathcal{Y}_{\ell m}$。

利用这些对象，并考虑此处所讨论背景的对称性，即式（3.31），为了分离场方程，规范场的一个合适试探形式为

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left[\left(A^{+}_{0,\ell m}\, dt + A^{+}_{1,\ell m}\, dx \right) \mathcal{Y}_{\ell m} + \sum_{l=2}^{d} \left(A^{+}_{l,\ell m}\, \mathcal{V}^{+}_{l,\ell m} + A^{-}_{l,\ell m}\, \mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \right) \right] . \tag{3.58}$$

因此，场 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的最终通解必须包含对所有傅里叶频率 ω 的“求和”，其傅里叶系数任意。这是表达麦克斯韦场自由度最自然的方式，因为麦克斯韦场是自旋-1场，因此球对称性应通过矢量球谐函数体现出来。

注意，我们可以利用选择规范的自由来简化麦克斯韦扰动的一般形式。事实上，上述表达式可以改写为以下形式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{A}} = \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \Bigg[\left(A^{+}_{0,\ell m}\, dt + \tilde{A}^{+}_{1,\ell m}\, dx \right) \mathcal{Y}_{\ell m} + \sum_{l=2}^{d} A^{-}_{l,\ell m}\, \mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \\ + \; d \left(\sum_{l=2}^{d} A^{+}_{l,\ell m} \mathcal{Y}_{\ell m} \right) \Bigg] , \end{aligned} \tag{3.59}$$

其中

$$\tilde{A}^{+}_{1,\ell m} = A^{+}_{1,\ell m} - \partial_x \sum_{l=2}^{d} A^{+}_{1,\ell m} \, . \tag{3.60}$$

在 $U(1)$ 规范场理论中，最后一项并不代表相关的自由度，因为它是一个恰当微分，因此我们可以通过规范变换将其消去。这样做并省略波浪号后，我们可以说，广义纳里艾背景中的 1-形式规范场最自然的试探形式为——该问题具有 $(d-1)$ 球对称性的乘积：

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left[\left(A^{+}_{0,\ell m}\, dt + A^{+}_{1,\ell m}\, dx \right) \mathcal{Y}_{\ell m} + \sum_{l=2}^{d} A^{-}_{l,\ell m}\, \mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \right] . \tag{3.61}$$

此时值得回顾的是，对于给定的 ℓ_l，对象 $V^+_{\ell_l\,,\,m_l}$ 应在 l号二维球面上的宇称变换下按 $(-1)^{\ell_l}$ 变换，而 $V^-_{\ell_l\,,\,m_l}$ 则应按 $(-1)^{\ell_l+1}$ 变换；也就是说，公式 (3.8) 是由以下事实得出的：$Y_{\ell_l,\,m_l} \overset{P_l}{\to} (-1)^{\ell_l} Y_{\ell_l,\,m_l}$。然而，广义纳里艾背景的对称性是球对称性的乘积。因此，在每个球面上进行宇称变换时，我们发现标量 $\mathcal{Y}_{\ell m} = \prod_{l=2}^{d} Y_{\ell_l,\,m_l}$ 的变换为

$$\mathcal{Y}_{\ell m} \overset{\text{parity}}{\longrightarrow} (-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d} \mathcal{Y}_{\ell m}\,, \tag{3.62}$$

这意味着 $\mathcal{V}^{\pm}_{l\,,\,\ell m} \overset{\text{宇称}}{\longrightarrow} \pm(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}\, \mathcal{V}^{\pm}_{l\,,\,\ell m}$。在宇称变换下，其变换方式与 $\mathcal{Y}_{\ell m}$ 相同的对象称为偶，而相较于 $\mathcal{Y}_{\ell m}$ 多出一个负号的对象称为奇。特别地，我们称 $\mathcal{V}^{+}_{l\,,\,\ell m}$ 具有偶宇称，$(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}$，而 $\mathcal{V}^{-}_{l\,,\,\ell m}$ 具有奇宇称，$(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d+1}$。由此可知，我们可以将 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 写为

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^+ + \boldsymbol{\mathcal{A}}^-\,, \tag{3.63}$$

由 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\pm}$ 定义的对象

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{A}}^+ &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left(A^+_{0,\ell m}\, dt + A^+_{1,\ell m}\, dx \right) \mathcal{Y}_{\ell m}\,, \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^- &= \sum_{\ell,m} \sum_{l=2}^{d} A^-_{l,\ell m}\, \mathcal{V}^-_{l,\ell m}\,, \end{aligned} \tag{3.64}$$

按 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\pm} \overset{\text{宇称}}{\longrightarrow} \pm(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}\, \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\pm}$的方式变换。特别地，这意味着 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^+$ 是一个宇称为 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}$的偶场，而 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^-$ 是一个宇称为 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d+1}$的奇场。

3.5.2 麦克斯韦准正则模

自旋-1 场扰动由麦克斯韦无源方程支配

$$\nabla_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0\,, \quad \text{with} \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu\,, \tag{3.65}$$

其中，$\mathcal{F}^{\mu\nu}$ 是麦克斯韦张量，$\mathcal{A}^\mu$ 是规范场 (3.63) 的分量。由于对每个球面施加宇称变换时，广义纳里艾背景度规保持不变，因此我们预计微扰方程不会将 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^+$ 部分与 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^-$ 部分混合，因为二者具有不同的宇称，即 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}$ 和 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d+1}$，且背景在宇称变换下是不变的。因此，为了求得通解，可以先忽略 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^-$ 部分，对 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^+$进行积分；然后令 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^+$ 为零，并求出 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^-$。这种分离并未失去一般性。

奇宇称微扰

奇宇称微扰是指给定一组球谐指标 $\{\ell_2, m_2, \ell_3, m_3, \ldots, \ell_d, m_d\}$ 和宇称 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d+1}$ 时的最一般微扰，即

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^- = \sum_{\ell,m}\sum_{l=2}^{d} e^{-i\omega t} A^-_{l,\ell m}\, \mathcal{V}^-_{l,\ell m}\,. \tag{3.66}$$

将此试探形式代入麦克斯韦无源方程后，我们得到分量 A^-_l 、ℓm满足的以下微分方程:

$$E^-_{\theta_l} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \omega^2 - V_{s=1}(x)\right] A^-_{l,\ell m}(x) = 0\,, \tag{3.67}$$

$$E^-_{\phi_l} \equiv E^-_{\theta_l} = 0\,, \tag{3.68}$$

$$E^-_{\theta_l} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \omega^2 - V(x)\right] A^-_{l,\ell m}(x) = 0\,, \tag{3.69}$$

$$E^-_{\phi_l} \equiv E^-_{\theta_l} = 0\,, \tag{3.70}$$

其中，势 $V_{s=1}$ 就是上一节研究的势，见式 (3.11)，其参数 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$、$\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$ 为:

$$\mathfrak{a} = 0 \quad , \quad \mathfrak{b} = 0 \quad , \quad \mathfrak{c} = \sum_{l=2}^{d} \frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} \quad , \quad \mathfrak{d} = \frac{1}{R_1}\,. \tag{3.71}$$

那么，假设 $E^-_{\theta_l} = 0$，这意味着 $E^-_{\phi_l} = 0$，可直接推出A^-_l 、ℓm 满足与标量场模 $\phi^{\omega}_{\ell m}$ 相同的方程，其中标量场的质量为零（$\mu = 0$）。因此，与麦克斯韦场这一分量相关的准正规谱必定与无质量标量场的准正规谱相同。特别是，这意味着对于边界条件 (II) 和 (III)，不存在准正规模；而对于边界条件 (I) 和 (IV)，允许频率必定具有以下形式

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{I}} &= \pm\sqrt{\sum_{l=2}^{d}\frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} - \frac{1}{4R_1^2}} + \frac{i}{2R_1}(2n+1)\,,\\
\omega_{\mathrm{IV}} &= \pm\sqrt{\sum_{l=2}^{d}\frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} - \frac{1}{4R_1^2}} - \frac{i}{2R_1}(2n+1)\,.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

偶宇称微扰

偶宇称微扰是指对于给定的球谐指标 $\{\ell_2, m_2, \ell_3, m_3, \ldots, \ell_d, m_d\}$ 和宇称 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}$，最一般的微扰，即

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^+ = \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left(A^+_{0,\ell m}\, dt + A^+_{1,\ell m}\, dx \right) \mathcal{Y}_{\ell m} \,. \tag{3.73}$$

将此场微扰代入麦克斯韦方程，最终可得以下由分量 $A^+_{0\ ,\ell m}$ 和 $A^+_{1\ ,\ell m}$ 满足的方程：

$$E^+_t \equiv \ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}A^+_{0,\ell m} + i\omega A^+_{1,\ell m}\right)\right] - \sum_{l=2}^{d} \frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} A^+_{0,\ell m} = 0\,, \tag{3.74}$$

$$E^+_x \equiv \ i\omega\left[\frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}A^+_{0,\ell m} + i\omega A^+_{1,\ell m}\right)\right] + \sum_{l=2}^{d} \frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2} A^+_{1,\ell m} = 0\,, \tag{3.75}$$

$$E^+_{\theta_l} \equiv \ \frac{d}{dx}E^+_x - i\omega E^+_t = 0, \tag{3.76}$$

$$E^+_{\phi_l} \equiv \ E^+_{\theta_l} = 0\,. \tag{3.77}$$

为了求解这组方程，可以使用由下式定义的函数 $\breve{A}_{\ell m} = \breve{A}_{\ell m}(x)$

$$\breve{A}_{\ell m} = \frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}A^+_{0,\ell m} + i\omega A^+_{1,\ell m}\right)\,, \tag{3.78}$$

而非自由度 $A^+_{0\ ,\ell m}$ 和 $A^+_{1\ ,\ell m}$，因为 $\breve{A}_{\ell m}$ 是满足薛定谔型微分方程的场。事实上，由关系式可立即得出

$$\frac{d}{dx}E^+_t + i\omega E^+_x = \left[\frac{d}{dx} + \omega^2 - V_{s=1}(x)\right]\breve{A}_{\ell m}(x) = 0\,, \tag{3.79}$$

这是麦克斯韦场方程的分量 $E^+_t = 0$和 $E^+_t = 0$所导致的结果：$A_{\ell m}$ 满足与 $A^-_{l\ ,\ell m}$ 相同的薛定谔方程，具有相同的有效势，因此也具有相同的谱，即式 (3.72)。现在，假设 $\breve{A}_{\ell m}$ 是式 (3.79) 的一个解，则恒等式 $E^+_t = 0$ 和 $E^+_t = 0$ 表明，$A^+_{0\ ,\ell m}$ 以及 $A^+_{1\ ,\ell m}$ 与 $\breve{A}_{\ell m}$ 之间满足以下方程：

$$A^+_{0,\ell m} = \ \left(\sum_{l=2}^{d} \frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2}\right)^{-1} \frac{d}{dx}\,\breve{A}_{\ell m}\,, \tag{3.80}$$

$$A^+_{1,\ell m} = \ -\left(\sum_{l=2}^{d} \frac{\ell_l(\ell_l+1)}{R_l^2}\right)^{-1} i\omega\breve{A}_{\ell m}\,. \tag{3.81}$$

因此，规范场的分量 $A_0^+{}_{,\ell m}$ 和 $A_1^+{}_{,\ell m}$ 必须具有相同的 $\breve{A}_{\ell m}$谱。事实上，利用 $\breve{A}_{\ell m}$ 满足式 (3.79) 这一点，我们可以很容易地验证，$A_0^+{}_{,\ell m}$ 和 $A_1^+{}_{,\ell m}$满足式 (3.79)，但带有一个源项，即:

$$\left[\frac{d}{dx}+\omega^2-V_{s=1}(x)\right]A^+_{i,\ell m}(x)\;\propto\;\delta_{i0}\,\breve{A}_{\ell m}(t,x)\frac{d}{dx}V_{s=1}(x)\quad(i=0,1)\,,\tag{3.82}$$

其中，δ_{i0} 是克罗内克δ。带源项的线性微分方程的通解由方程齐次部分的通解加上一个依赖于源项的特解构成。现在，当 $dV_{s=1}/dx$在边界 $x=\pm\infty$处趋于零时，由此可知，在这些边界附近，$A_i^+{}_{,\ell m}\breve{}$满足与 $A_{\ell m}$ 相同的薛定谔型微分方程，因此具有相同的谱。总之，我们得出麦克斯韦场的所有自由度具有相同的谱，由式（3.72）给出。

第 4 章

自旋-2 场微扰

众所周知，线性微分方程广泛用于描述科学各个领域中与不同种类信息的微扰传播相关的诸多现象。在物理学中，更确切地说，在广义相对论中，微扰理论的一项重大成就体现在其对引力波的应用上；引力波可能是爱因斯坦广义相对论最重要的预言之一。近期对引力辐射的测量，使这一主题的重要性进一步提升。这使自旋-2场微扰成为众多场微扰类型中最重要的类型之一。具体而言，在引力波实验中探测到它们的准正规模，有助于精确测量引力背景的荷，例如质量和自旋。本章将解析地求得广义Nariai时空中自旋-2场微扰的准正规谱。为获得这一结果，关键一步是根据所需描述的张量自由度的秩，选取合适的角函数基。本文将在此定义这样一种基，它是张量球谐函数的一种推广，适用于由多个常曲率空间构成的乘积空间。

4.1 自旋-2 微扰的场方程

本章将考察广义纳里艾背景 $g_{\mu\nu}^{GN}$ 中引力场（一个无质量自旋 2 场）的微扰。这里我们假设背景的电磁荷为零，即 $Q_1 = Q_l = 0$，因此背景中的麦克斯韦场为零，$\mathcal{A}^{GN} = 0$ 从而引力微扰与电磁微扰解耦。在这种情况下，场方程简化为带有宇宙学常数 Λ 的爱因斯坦真空方程

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \Lambda\, g_{\mu\nu}\,. \tag{4.1}$$

值得指出的是，前几章并未假设爱因斯坦真空方程成立，因此广义纳里艾背景的球面半径可以不同，具体取决于背景的电磁荷；而在这里，我们假设电磁荷为零，因此引力微扰与电磁微扰解耦。否则，我们就必须同时考虑引力微扰和电磁微扰，因为电磁微扰场会成为引力微扰的源项。

我们对 $h_{\mu\nu}$ 在 $g^{GN}_{\mu\nu}$中施加一个小微扰，使微扰度规可以视为未扰动的背景度规与微扰之和，

$$g_{\mu\nu} \,=\, g^{GN}_{\mu\nu} \,+\, h_{\mu\nu}\,, \tag{4.2}$$

其中假设 $h_{\mu\nu}$ 是“小”的。所谓小，是指将上述方程代入式 (4.1) 后，在一阶近似中可以忽略 $\sim h^2_{\mu\nu}$ 阶及更高阶的项。随后，围绕 $g^{GN}_{\mu\nu}$将爱因斯坦真空方程线性化，得到关于 $h_{\mu\nu}$的下列方程：

$$\delta\left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\nabla^\sigma \nabla_{(\mu} h_{\nu)\sigma} \,-\, \Box h_{\mu\nu} \,-\, \nabla_\mu \nabla_\nu\, h \,-\, 2\Lambda\, h_{\mu\nu} = 0\,, \tag{4.3}$$

其中，∇_μ 是相对于未扰动背景$g^{GN}_{\mu\nu}$的列维-奇维塔协变导数，而 $\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$则是用背景度规的逆 $g^{GN\,\mu\nu}$升起指标得到的。这里考虑的背景时空是德西特空间 dS_2 与 $(d-1)$ 个球面 S^2 的直积，它具有三个独立的 Killing 矢量 $\mathbf{K}_{p,\,l}$ $(p = 1,\ 2,\ 3)$，它们生成旋转，即式 (3.7)。特别地，这意味着

$$\pounds_{\mathbf{K}_{p,l}}\, g^{GN}_{\mu\nu} = 0\,, \tag{4.4}$$

其中，算符 $\pounds_{\mathbf{K}_{p,l}}$ 是沿 $\mathbf{K}_{p,l}$ 的李导数。现在，由于列维-奇维塔协变导数仅依赖于 $g^{GN}_{\mu\nu}$，因此 $\pounds_{\mathbf{K}_{p,l}} \nabla_\mu = \nabla_\mu \pounds_{\mathbf{K}_{p,l}}$。于是，方程（4.3）中作用于 $h_{\mu\nu}$ 的算符与 $\pounds_{\mathbf{K}_{p,l}}$ 对易。因此，由于 $\pounds_{\mathbf{K}_{p,l}}$ 生成第 l 个球面上的无穷小旋转，若 $h_{\mu\nu}$ 是方程（4.3）的一个解，那么旋转后的形式也将是一个解。这个看似平凡的结论有着重要的实际意义：将 $h_{\mu\nu}$ 按 $SO(3)$ 的不可约表示展开时，我们只需考虑表示基中满足 $m_l = 0$ 的元素，其中 m_l 是关于 $\mathbf{K}3,_l$ 的特征值。m_l 的其他可能取值可通过升降算符得到；这些算符只是由 $\mathbf{K}1,_l$ 和 $\mathbf{K}2,_l$ 生成的旋转的线性组合。这大大简化了计算。引入用于展开 $h_{\mu\nu}$ 分量的基时，我们将再回到这一点。

当背景的电磁荷消失时，此时半径 R_1 和 R_l 均相等，其值为

$$R_1 = R_l = \Lambda^{-1/2}\,. \tag{4.5}$$

特别地，曲面 $r = \pm R_1$ 是事件视界，准正规模的边界条件将在这些视界上设定，具体讨论见第3.3节，另见 [93]。

4.2 线性化爱因斯坦场方程的分离试探形式

正如我们在例3中证明的，在具有球对称性的四维背景中，自旋-2场微扰 $\boldsymbol{h}=h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 的线性化爱因斯坦场方程可通过如下分解进行分离

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}=&\sum_{\ell_l.m_l}e^{i\omega t}\left[\left(H_{tt}\,dt^2+H_{xx}\,dr^2+2H_{tx}\,dtdx\right)Y_{\ell_l,m_l}+\left(H_t^+dt+H_x^+dx\right)V^+_{\ell_l,m_l}\right.\\&+\left.\left(H_t^-dt+H_x^-dx\right)V^-_{\ell_l,m_l}+H^-\,T^-_{\ell_l,m_l}+H^\oplus\,T^\oplus_{\ell_l,m_l}+H^+\,T^+_{\ell_l,m_l}\right],\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中，基 $\{Y_{\ell_l,m_l},V^\pm_{\ell_l,m_l},T^\oplus_{\ell_l,m_l},T^\pm_{\ell_l,m_l}\}$ 已在第2章中定义。例如，对象 $V^\pm_{\ell_l\,,\,m_l}$ 表示 $V^\pm_{a_l}dx^{a_l}$，其中

$$V^+_{a_l}=\hat\nabla_{a_l}Y_{\ell_l,m_l}\quad\text{and}\quad V^-_{a_l}=\epsilon_{a_lc_l}\hat\nabla^{c_l}Y_{\ell_l,m_l}\,,\tag{4.7}$$

而对象 $T^{\oplus,\ \pm}_{\ell_l\ m_l,}$ 表示 $T^{\oplus,\ \pm}_{\ a_lb_l}dx^{a_l}dx^{b_l}$，其中

$$\begin{aligned}T^\oplus_{a_lb_l}&=Y_{\ell_l,m_l}\,\hat g_{a_lb_l}\,,\\T^+_{a_lb_l}&=\hat\nabla_{a_l}\hat\nabla_{b_l}Y_{\ell_l,m_l}\,,\\T^-_{a_lb_l}&=\hat\epsilon_{a_lc_l}\hat\nabla_{b_l}\hat\nabla^{c_l}Y_{\ell_l,m_l}+\hat\epsilon_{b_lc_l}\hat\nabla_{a_l}\hat\nabla^{c_l}Y_{\ell_l,m_l}\,.\end{aligned}\tag{4.8}$$

这十个 H仅是 x 的函数，它们对应于四维中与 $h_{\mu\nu}$相关的十个自由度。$V^+_{\ell_l\,,\,m_l}$，$T^\oplus_{\ell_l\,,\,m_l}$和 $T^+_{\ell_l\,,\,m_l}$具有偶宇称，即在宇称变换下的变化方式与标量 $Y^{m_l}_{\ell_l}$相同，宇称变换由公式 (3.8)给出；而 $V^-_{\ell_l\,,\,m_l}$，$T^-_{\ell_l\,,\,m_l}$具有奇宇称。采用这一关于 $h_{\mu\nu}$的试探形式，比起仅用标量球谐函数展开场的角向部分，积分公式 （4.3）要容易得多。

有了式（4.6），我们便可以用自然的方式，将广义Nariai时空中的引力微扰$\mathbf{h}=h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 按任意 d展开。具体而言，将微扰$\mathbf{h}=h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ 分解为

$$\begin{aligned}\mathbf{h}=&\ h_{tt}\,dt^2+2h_{tx}\,dtdx+h_{xx}\,dx^2+\sum_{l=2}^{d}h_{ta_l}dx^{a_l}dt+h_{xa_l}dx^{a_l}dx\\&+\sum_{l=2}^{d}h_{a_lb_l}\,dx^{a_l}dx^{b_l}+\sum_{l=2}^{d}\sum_{n>l}^{d}h_{a_lb_n}\,dx^{a_l}dx^{b_n}\quad\text{where}\quad a_l,b_l\in\{\theta_l,\phi_l\}\,.\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h} = \; & h_{tt}\, dt^2 + 2h_{tx}\, dtdx + h_{xx}\, dx^2 \\
& + \sum_{l=2}^{d} h_{ta_l} dx^{a_l} dt + h_{xa_l} dx^{a_l} dx \\
& + \sum_{l=2}^{d} h_{a_l b_l}\, dx^{a_l} dx^{b_l} + \sum_{l=2}^{d} \sum_{n>l}^{d} h_{a_l b_n}\, dx^{a_l} dx^{b_n} \,.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

鉴于背景在每个球面上都具有球对称性，我们现在根据与线元中各球面部分相关的 $SO(3)$等距子群，对引力微扰进行分解和分类。分量 h_{tt}、h_{xx}和 h_{tx} 相对于（$d-1$）球面是标量，因此，它们的角向依赖应由标量球谐函数 $\mathcal{Y}_{\ell m}$ 的乘积给出，就像我们处理标量场时那样，即式（3.35）

$$
\begin{aligned}
h_{tt} &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} H^{+}_{tt}\, \mathcal{Y}_{\ell m} \,, \\
h_{tx} &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} H^{+}_{tx}\, \mathcal{Y}_{\ell m} \,, \\
h_{xx} &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} H^{+}_{xx}\, \mathcal{Y}_{\ell m} \,,
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

其中 H^{+}_{tt}, H^{+}_{tx}和 H^{+}_{xx}是乌龟坐标 x的任意函数，即式 (3.30)。严格来说，所有用于描述 $h_{\mu\nu}$ 在 $D = 2d$ 维空间中相关的 $2d(2d+1)/2$ 个自由度的 $2d(2d+1)/2$ 函数 H 都依赖于球谐指标 $\{\ell, m\}$。为简洁起见，从现在起将在场中省略这些指标。

反过来，相对于 l个球面中的旋转， h_{ta_l} 和 h_{xa_l} 表现为 1-形式的分量；但相对于其他 $(d-2)$ 个球面中的旋转，它们表现为标量。因此，角向依赖的一个合适的基为 $\{\mathcal{V}^{\pm}_{l,\ell,m}\}$，正如我们对麦克斯韦场所做的那样，即式 (3.57)

$$
\begin{aligned}
h_{ta_l} dx^{a_l} &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left(H^{+}_{tl}\, \mathcal{V}^{+}_{l,\ell m} + H^{-}_{tl}\, \mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \right) \,, \\
h_{xa_l} dx^{a_l} &= \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left(H^{+}_{xl}\, \mathcal{V}^{+}_{l,\ell m} + H^{-}_{xl}\, \mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \right) \,,
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

其中 $H^{\pm}_{tl\ ,\ell m}$ 和 $H^{\pm}_{xl\ ,\ell m}$ 是 x的任意函数。

以类似的方式， $h_{a_l b_l}$ 在第 l 个球面上的旋转下表现为对称二阶张量，在第 n 个球面上的旋转下表现为标量

当 $n \neq l$ 时。因此，这部分角向依赖的一个合适的基为

$$\mathcal{T}^{\oplus,\pm}_{a_l b_l} = T^{\oplus,\pm}_{a_l b_l}(\theta_l, \phi_l) \prod_{n=2, n\neq l}^{d} Y^{m_n}_{\ell_n}(\theta_n, \phi_n)\,, \tag{4.13}$$

其中 $T^{\oplus}_{a_l b_l}$ 和 $T^{\pm}_{a_j b_j}$ 已在式 (4.8) 中定义。因此，相应的张量定义为

$$\mathcal{T}^{\oplus,\pm}_{l,\ell m} = \mathcal{T}^{\oplus,\pm}_{\theta_l\theta_l} d\theta_l^2 \,+\, 2\mathcal{T}^{\oplus,\pm}_{\theta_l\phi_l} d\theta_l d\phi_l \,+\, \mathcal{T}^{\oplus,\pm}_{\phi_l\phi_l} d\phi_l^2\,, \tag{4.14}$$

其中 $\mathcal{T}^{\oplus}_{l,\ell m}$ 和 $\mathcal{T}^{+}_{l,\ell m}$ 具有偶宇称，而 $\mathcal{T}^{-}_{l,\ell m}$ 具有奇宇称。任何在旋转下满足上述性质的对称二阶张量，都可以写成这些张量的线性组合

$$h_{a_l b_l} dx^{a_l} dx^{b_l} = \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left(H^{\oplus}_l \mathcal{T}^{\oplus}_{l,\ell m} + H^{+}_l \mathcal{T}^{+}_{l,\ell m} + H^{-}_l \mathcal{T}^{-}_{l,\ell m} \right)\,, \tag{4.15}$$

其中 $H^{\oplus,\pm}_l$ 是关于 x的任意函数。

一种更棘手的分量类型是 $h_{a_n b_l}$，其中 $n \neq l$在第 n 个和第 l 个球面的旋转下，其变换方式与 1-形式的分量相同，而相对于其他球面的旋转则表现为标量。我们需要一个具有这一性质的角向依赖基。此外，我们还希望基元素具有确定的宇称。满足这些约束的一种方法是定义

$$\mathcal{W}^{+}_{a_n b_l} = V^{+}_{a_n}(\theta_n, \phi_n) V^{+}_{b_l}(\theta_l, \phi_l) \prod_{k\neq n,l} Y_{\ell_k, m_k}(\theta_k, \phi_k)\,, \tag{4.16}$$

$$\mathcal{W}^{\oplus}_{a_n b_l} = V^{-}_{a_n}(\theta_n, \phi_n) V^{-}_{b_l}(\theta_l, \phi_l) \prod_{k\neq n,l} Y_{\ell_k, m_k}(\theta_k, \phi_k)\,, \tag{4.17}$$

$$\mathcal{W}^{-}_{a_n b_l} = V^{+}_{a_n}(\theta_n, \phi_n) V^{-}_{b_l}(\theta_l, \phi_l) \prod_{k\neq n,l} Y_{\ell_k, m_k}(\theta_k, \phi_k)\,, \tag{4.18}$$

$$\mathcal{W}^{\ominus}_{a_n b_l} = V^{-}_{a_n}(\theta_n, \phi_n) V^{+}_{b_l}(\theta_l, \phi_l) \prod_{k\neq n,l} Y_{\ell_k, m_k}(\theta_k, \phi_k)\,. \tag{4.19}$$

利用这些分量，我们可以按自然方式定义对称二阶张量 $\mathcal{W}^{+}_{nl}$、$\mathcal{W}^{\oplus}_{nl}$、$\mathcal{W}^{-}_{nl}$ 和 $\mathcal{W}^{\ominus}_{nl}$。例如，

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{+}_{nl,\ell m} =& \mathcal{W}^{+}_{\theta_n\theta_l} d\theta_n d\theta_l \,+\, \mathcal{W}^{+}_{\theta_n\phi_l} d\theta_n d\phi_l & (4.20)\\ &+\, \mathcal{W}^{+}_{\phi_n\theta_l} d\phi_n d\theta_l \,+\, \mathcal{W}^{+}_{\phi_n\phi_l} d\phi_n d\phi_l\,, & (4.21) \end{aligned}$$

另外三个张量也可类似地处理，因此

$$h_{a_l b_n} dx^{a_l} dx^{b_n} = \sum_{\ell,m} e^{-i\omega t} \left(H^{+}_{ln} \mathcal{W}^{+}_{ln,\ell m} + H^{\oplus}_{ln} \mathcal{W}^{\oplus}_{ln,\ell m} + H^{-}_{ln} \mathcal{W}^{-}_{ln,\ell m} + H^{\ominus}_{ln} \mathcal{W}^{\ominus}_{ln,\ell m} \right)\,, \tag{4.22}$$

其中， $H^{\pm}{}_{,ln}{}^{\oplus}$ 是任意函数，依赖于 x。$\mathcal{W}^{+}_{ln\ ,\ell m}$ 和$\mathcal{W}^{\oplus}_{ln\ ,\ell m}$ 具有正宇称，因为它们在宇称变换下的变换方式与 $\mathcal{Y}_{\ell m}$ 相同，而$\mathcal{W}^{-}_{ln\ ,\ell m}$ 和$\mathcal{W}^{\ominus}_{ln\ ,\ell m}$ 具有负宇称。请注意，奇宇称模态来自宇称相反的模的乘积，而正宇称模态则来自宇称相同的元素的乘积。此前为角向依赖寻找合适基底所采取的步骤不容低估。事实上， $h_{\mu\nu}$ 的微扰方程相当复杂；若不采用自然基底， $h_{\mu\nu}$ 的各分量之间可能会产生难以忍受的纠缠。

因此，将展开式 (4.11)、(4.12)、(4.15) 和 (4.22) 代入方程 (4.9)，我们得出，引力微扰 $\mathbf{h} = h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ 的一种合适展开方式如下：

$$\mathbf{h} = \sum_{\ell m} e^{-i\omega t}\Big[(H^{+}_{tt}dt^2 + 2H^{+}_{tx}dtdx + H^{+}_{xx}dx^2)\mathcal{Y}_{\ell m} \tag{4.23}$$

$$+ \sum_{l=2}^{d}\left(H^{+}_{tl}\mathcal{V}^{+}_{l,\ell m} + H^{-}_{tl}\mathcal{V}^{-}_{l,\ell m}\right)dt + \left(H^{+}_{xl}\mathcal{V}^{+}_{l,\ell m} + H^{-}_{xl}\mathcal{V}^{-}_{l,\ell m}\right)dx \tag{4.24}$$

$$+ \sum_{l=2}^{d} H^{+}_{l}\,\mathcal{T}^{+}_{l,\ell m} + H^{\oplus}_{l}\,\mathcal{T}^{\oplus}_{l,\ell m} + H^{-}_{l}\,\mathcal{T}^{-}_{l,\ell m} \tag{4.25}$$

$$+ \sum_{l=2}^{d}\sum_{n>l}^{d} H^{+}_{ln}\mathcal{W}^{+}_{ln,\ell m} + H^{\oplus}_{ln}\mathcal{W}^{\oplus}_{ln,\ell m} + H^{-}_{ln}\mathcal{W}^{-}_{ln,\ell m} + H^{\ominus}_{ln}\mathcal{W}^{\ominus}_{ln,\ell m}\Big], \tag{4.26}$$

其中， H 都是坐标 x 的函数。计算独立函数的数量，方程右侧前一行给出了三个，分别来自 H^{+}_{tt}、 H^{+}_{tx} 和 H^{+}_{xx}；第二行有 $(d-1)$ 个函数H^{+}_{tl} ，类似地，来自 H^{-}_{tl} 、 H^{+}_{xl} 和 H^{-}_{xl} 的分量还有 $3(d-1)$ 个；第三行有 $3(d-1)$ 个独立函数；最后，第四行应注意到 $n > l$，因此有 $4\binom{(d-1)(d-2)}{2}$ 个函数。将这些函数的数量相加，得到：

$$3 + 4(d-1) + 3(d-1) + 2(d-1)(d-2) = \frac{2d(2d+1)}{2}, \tag{4.27}$$

这恰好是 $2d$ 维中 $h_{\mu\nu}$ 的独立分量数，正如预期的那样。这证明微扰场的任何可能自由度都没有被忽略。

对 $h_{\mu\nu}$ 作适当展开后，我们就可以开始对方程（4.3）进行积分。为此，我们可以利用球对称性，只考虑所有 l 下的 $m_l = 0$ 情形，这样就不会出现对 ϕ_l 的依赖。因此， ∂_{ϕ_l} 这类导数都不会产生贡献，包括定义基时出现的那些导数。例如，在这种情况下， $\mathcal{V}^{+}_{\phi_l}$ 和 $\mathcal{V}^{-}_{\theta_l}$ 会自动为零。如前所述，这不会造成实质性的普遍性损失，因为其他解都可以通过对具有 $m_l = 0$ 的解施加旋转来得到。

此外，本文只关注准正规模的频率，这些频率在球面上的旋转下保持不变，因此我们甚至无需费心生成 m_l 非零的解。

4.2.1 规范变换

研究准正规模时，计算中的一个简化来源是：选择 $h_{\mu\nu}$ 的自由度来自坐标系选择的自由度。事实上，若我们对坐标作如下变换

$$x^\mu \;\mapsto\; \tilde{x}^\mu = x^\mu + \zeta^\mu \,, \tag{4.28}$$

其中 $\zeta^\mu = \zeta^\mu(x)$ 是无穷小量，则新坐标系中的度规分量为

$$g_{\mu\nu} \;\mapsto\; \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu \,.$$

因此，先对度规施加微扰（4.2），再作无穷小坐标变换（4.28），与仅对度规施加微扰等价；在无穷小参数的一阶近似下，此时微扰场为

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu \,. \tag{4.29}$$

由于物理学不受坐标变换影响，因此变换

$$h_{\mu\nu} \;\mapsto\; h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu \,. \tag{4.30}$$

只是一种规范变换，也就是说，它不会改变物理结果。尤其是，这些变换不会改变引力微扰的准正规谱。接下来，我们将谨慎选择向量场 ζ^μ，以消除微扰场的一些自由度。

4.3 引力准正规模

在每个球面上施加宇称变换 (3.8) 后，我们可以将 $\mathbf{h}$ 分解为在该变换下的两类不同微扰之和，如下所示：

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}^+ + \mathbf{h}^- \,, \tag{4.31}$$

其中，$\mathbf{h}^{\pm}$ 部分由下式给出

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{+} = \sum_{\ell m} e^{-i\omega t}\Big[&(H^{+}_{tt}dt^2 + 2H^{+}_{tx}dtdx + H^{+}_{xx}dx^2)\mathcal{Y}_{\ell m} \\ &+ \sum_{l=2}^{d}\left(H^{+}_{tl}\mathcal{V}^{+}_{l,\ell m}dt + H^{+}_{xl}\mathcal{V}^{+}_{l,\ell m}dx + H^{+}_{l}\,\mathcal{T}^{+}_{l,\ell m} + H^{\oplus}_{l}\,\mathcal{T}^{\oplus}_{l,\ell m}\right) \\ &+ \sum_{l=2}^{d}\sum_{n>l}^{d} H^{+}_{ln}\,\mathcal{W}^{+}_{ln,\ell m} + H^{\oplus}_{ln}\,\mathcal{W}^{\oplus}_{ln,\ell m}\Big]\,,\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{-} = \sum_{\ell m}\sum_{l=2}^{d} e^{-i\omega t}\,&\left[\left(H^{-}_{tl}\,dt + H^{-}_{xl}\,dx\right)\mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \;+\; H^{-}_{l}\,\mathcal{T}^{-}_{l,\ell m}\right. \\ &\left.+\sum_{n>l}^{d}\left(H^{-}_{ln}\,\mathcal{W}^{-}_{ln,\ell m} + H^{\ominus}_{ln}\,\mathcal{W}^{\ominus}_{ln,\ell m}\right)\right]\,,\end{aligned} \tag{4.33}$$

按 $\mathbf{h}^{\pm}\xrightarrow{\text{宇称}}\pm(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}\,\mathbf{h}^{\pm}$变换。特别地，这意味着$\mathbf{h}^{+}$是宇称为 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}$ 的偶宇称微扰，而$\mathbf{h}^{-}$是宇称为 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d+1}$ 的奇宇称微扰。我们可以利用这一事实，因为 $h_{\mu\nu}$ 的场方程不会混合宇称相反的分量。因此，接下来我们将分别对奇自由度和偶自由度的微扰方程进行积分；前者将在下一节讨论，后者将在第 4.3.2 节讨论。

4.3.1 奇扰动

奇宇称微扰是指给定一组球谐指标 $\{\ell_2, m_2, \ell_3, m_3, \ldots, \ell_d, m_d\}$ 和宇称 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d+1}$ 时最一般的微扰，即

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{-} \;=\; &\sum_{\ell m}\sum_{l=2}^{d} e^{-i\omega t}\,\left[\left(H^{-}_{tl}\,dt + H^{-}_{xl}\,dx\right)\mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \;+\; H^{-}_{l}\,\mathcal{T}^{-}_{l,\ell m}\right. \\ &\left.+\;\sum_{n>l}^{d}\left(H^{-}_{ln}\,\mathcal{W}^{-}_{ln,\ell m} + H^{\ominus}_{ln}\,\mathcal{W}^{\ominus}_{ln,\ell m}\right)\right]\,.\end{aligned}$$

然而，可以通过规范变换消去一些自由度。事实上，执行变换（4.30），其中 ζ_μ 由下式给出：

$$\zeta_\mu dx^\mu = -e^{-i\omega t}\sum_{l=2}^{d} H^{-}_{l}\,\mathcal{V}^{-}_{l,\ell m}\,, \tag{4.34}$$

˜由此可知，变换后的场 $h_{\mu\nu}$ 具有与展开式（4.34）中所示相同的形式，但场 $H^{-}(x)$ 变换为 $H^{-}(x)$，其中 ˜

$$\begin{cases} \tilde{H}^{-}_{tl} = H^{-}_{tl} + i\omega H^{-}_{l}\,, \\ \tilde{H}^{-}_{xl} = H^{-}_{xl} - \frac{d}{dx} H^{-}_{l}\,, \\ \tilde{H}^{-}_{l} = 0\,, \\ \tilde{H}^{-}_{ln} = H^{-}_{ln} - H^{-}_{n}\,, \\ \tilde{H}^{\ominus}_{ln} = H^{\ominus}_{ln} - H^{-}_{l}\,. \end{cases} \tag{4.35}$$

因此，我们看到，试探形式（4.34）的分量 H^{-}_{l} 可以通过规范变换消去，而其他分量只需重新定义即可。因此，在下文中，我们˜可以忽略自由度 H^{-}_{l} ，并认为引力微扰由下式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{-} \;&=\; \sum_{\ell m} \sum_{l=2}^{d} e^{-i\omega t} \left[\left(H^{-}_{tl}\, dt + H^{-}_{xl}\, dx \right) \mathcal{V}^{-}_{l,\ell m} \right. \\ &+\; \left. \sum_{n>l}^{d} \left(H^{-}_{ln}\, \mathcal{W}^{-}_{ln,\ell m} + H^{\ominus}_{ln}\, \mathcal{W}^{\ominus}_{ln,\ell m} \right) \right] . \end{aligned}$$

现在，将这一微扰代入场方程（4.3），最终得到以下方程:

$$\begin{aligned} E^{-}_{t\phi_l} \;&\equiv\; \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^{-}_{tj} + i\omega H^{-}_{xl}\right)\right] - \Lambda\,(\kappa-2)\,H^{-}_{tl} - i\omega\Lambda \textstyle\sum_{n\neq l}\kappa_n (H^{\ominus}_{ln} + H^{-}_{nl}) = 0\,, \\ E^{-}_{x\phi_j} \;&\equiv\; \frac{i\omega}{f}\left(\frac{d}{dx}H^{-}_{tl} + i\omega H^{-}_{xl}\right) - \Lambda\,(\kappa-2)\,H^{-}_{xl} + \Lambda \textstyle\sum_{n\neq j}\kappa_n \dfrac{d}{dx}\left(H^{\ominus}_{ln} + H^{-}_{nl}\right) = 0\,, \\ E^{-}_{\theta_l\phi_l} \;&\equiv\; \frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^{-}_{xl} + i\omega H^{-}_{tl}\right) - \Lambda \textstyle\sum_{n\neq l}\kappa_n \left(H^{\ominus}_{ln} + H^{-}_{nl}\right) = 0\,, \\ E^{-}_{\theta_l\phi_n} \;&\equiv\; \frac{d^2}{dx^2}\left(H^{\ominus}_{nl} + H^{-}_{ln}\right) + \left[\omega^2 - f\,\Lambda\,(\kappa-2)\right]\left(H^{\ominus}_{nl} + H^{-}_{ln}\right) - f\,E^{-}_{\theta_n\phi_n} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.36}$$

在这些方程的左侧， $E^{-}_{\mu\nu}$ 这些对象只是为了强调，方程 $E^{-}_{\mu\nu} = 0$ 是通过要求式（4.3）的分量 $\mu\nu$ 成立而得到的。上文未出现的分量，例如 E^{-}_{tt} ，恒等为零。在式（4.36）的最后一行中，假设了 $n \neq l$。此外，我们还使用了以下定义

$$\kappa_l = \ell_l(\ell_l+1) \quad \text{and} \quad \kappa = \sum_{l=2}^{d} \kappa_l\,. \tag{4.37}$$

因此，上述方程包含了与 $h_{\mu\nu}$ 所满足的奇扰动方程相关的所有限制条件。

为了得到式 (4.36)，我们假设球谐函数 $Y_{\ell_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)$ 具有 $m_l=0$，这由球对称性所保证，正如前文所述。因此，我们使用了 $Y_{\ell_l,m_l}=Y_{\ell_l}(\theta_l)$，其中 $Y_{\ell_l}(\theta_l)$ 满足以下微分方程：

$$\frac{1}{\sin\theta_l}\frac{d}{d\theta_l}\left(\sin\theta_l\,\frac{d}{d\theta_l}Y_{\ell_l}\right)+\kappa_l Y_{\ell_l}=0\,. \tag{4.38}$$

在 (4.36) 所列出的方程中，场 $H^{\ominus}_{ln}$ 和H^{-}_{ln} 仅通过组合 $(H^{\ominus}_{nl}+H^{-}_{ln})$ 出现。不过需要注意的是，我们始终假设$n\neq l$，因此 $n>l$ 或 $n<l$必然成立。这些场通过方程 (4.34) 定义，其中始终假设第二个索引大于第一个索引。因此， $H^{\ominus}_{ln}$ 和 H^{-}_{ln} 且满足 $l>n$ 的场并未定义。因此，方程 (4.36) 中的约定是将这些未定义的场取为零。这样一来，在求和式 $(H^{\ominus}_{ln}+H^{-}_{nl})$ 中看似出现的两个场，实际上只有一个场。事实上，如果 $n>l$，则H^{-}_{nl} 为零，因此 $(H^{\ominus}_{ln}+H^{-}_{nl})=H^{\ominus}_{ln}$；而如果 $l>n$，则有 $(H^{\ominus}_{ln}+H^{-}_{nl})=H^{-}_{nl}$。总而言之，在方程 (4.36) 中，我们有

$$(H^{\ominus}_{ln}+H^{-}_{nl})=\begin{cases}H^{-}_{nl}\,,\ \text{if } l>n\\ \\ H^{\ominus}_{ln}\,,\ \text{if } n>l\end{cases}\,. \tag{4.39}$$

根据 (4.36) 中的第三个方程，假设 $E^{-}_{\theta_l\phi_l}$ 为零，则由 (4.36) 的最后一行可知，场 H^{-}_{ln} 和 $H^{\ominus}_{nl}$ 都满足薛定谔型微分方程，其有效势是著名的 Pöschl-Teller 势，即前一章中研究的势，见 (3.11)，其参数 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$ 由下式给出：

$$\mathfrak{a}=0\quad,\quad \mathfrak{b}=0\quad,\quad \mathfrak{c}=\Lambda(\kappa-2)\quad,\quad \mathfrak{d}=\sqrt{\Lambda}\,. \tag{4.40}$$

上述势对应的薛定谔型微分方程是著名的 Pöschl-Teller方程，可以进行解析求解 [95]。为了求出这些分量的频率谱，我们需要施加适当的边界条件。然而，当标量场的质量为零（$\mu=0$）且约束条件$R_1=R_l=\Lambda^{-1/2}$ 成立时，标量场模 $\phi^{\omega}_{\ell m}$ 满足的方程与上述方程相同。因此，与引力场这一分量相关的准正规谱必然与无质量标量场的准正规谱相同。特别是，假设微扰场的边界条件如图 3.3所示，则边界条件（II）和（III）不会产生准正规模，而对于边界条件（I）和（IV），允许频率的谱为

$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{I}}&=\sqrt{\Lambda}\left[\sqrt{\kappa-\frac{9}{4}}-i\,(n+\frac{1}{2})\right],\\ \omega_{\mathrm{IV}}&=\sqrt{\Lambda}\left[\sqrt{\kappa-\frac{9}{4}}+i\,(n+\frac{1}{2})\right],\end{aligned} \tag{4.41}$$

其中 $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$。关于谱的计算和边界条件的选择，详情请参阅参考文献 [60, 93]。总而言之，我们刚刚证明，自由度 H^-_{ln} 和$H^{\ominus}_{ln}$ 的谱由式（4.41）给出。接下来需要检查 H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 是否具有相同的谱。定义场

$$\breve{H}^-_l = \frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^-_{tl} + i\omega H^-_{xl}\right), \tag{4.42}$$

由该方程可立即得出

$$\frac{d}{dx}E_{t\phi_l} + i\omega E_{x\phi_l} = 0 \tag{4.43}$$

$\breve{H}^-_l$ 也满足 Pöschl-Teller方程 (4.40)，因此，场 H^-_{ln} 和 $H^{\ominus}_{ln}$ 具有相同的谱，即 (4.41)。接着，利用方程$E^-_{t\phi_l} = 0$ 和 $E^-_{x\phi_l} = 0$ ，我们可以用满足 Pöschl-Teller方程的场来表示场 H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 。更确切地说，我们有:

$$\begin{aligned} H^-_{tl} &= \frac{1}{\Lambda(\kappa-2)}\frac{d}{dx}\breve{H}^-_l - \frac{i\omega}{\kappa-2}\textstyle\sum_{n\neq l}\kappa_n(H^{\ominus}_{ln} + H^-_{nl}), \\ H^-_{xl} &= \frac{1}{\kappa-2}\textstyle\sum_{n\neq l}\kappa_n\frac{d}{dx}(H^{\ominus}_{ln} + H^-_{nl}) - \frac{i\omega}{\Lambda(\kappa-2)}\breve{H}^-_l . \end{aligned} \tag{4.44}$$

因此，H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 必定具有相同的 $\breve{H}^-_l$ 、 H^-_{ln} 和 $H^{\ominus}_{ln}$ 谱，即 (4.41)。事实上，由于场 $\breve{H}^-_l$ 、 H^-_{ln} 和 $H^{\ominus}_{ln}$ 满足图 3.3 所示的边界条件，因此在边界 $x \to \pm\infty$ ($r \to \pm 1/\sqrt{\Lambda}$) 附近，这些场的行为为 $e^{\pm i\omega x}$。这样，这些场及其导数的线性组合也满足相同的边界条件。理解H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 为何具有谱 (4.41) 的另一种方法，是将作用于 H 的微分算子（见方程 (4.40)）作用于上述 H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 的表达式。如此一来，我们可以验证 H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 满足带源项的 Pöschl-Teller方程，即

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - \frac{\Lambda(\kappa-2)}{\cosh^2(\sqrt{\Lambda}\,x)}\right] H^-_{tl} = F_l\frac{df}{dx}, \tag{4.45}$$

其中 $F_l = F_l(x)$ 是满足 Pöschl-Teller方程的某个场， H^-_{xl} 也同样如此。带源项的线性微分方程的通解由方程齐次部分的通解（在后一种情况下即 Pöschl-Teller方程）加上一个依赖于源项的特解构成。在所讨论的情形中，由于项 df/dx，源项在边界处呈指数衰减。因此，在边界附近， H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 满足 Pöschl-Teller方程，故具有相同的谱 (4.41)。

迄今为止，我们已施加并求解了方程 $E^-_{t\phi_l}=0$、$E^-_{x\phi_l}=0$ 和 $E^-_{\theta_l\phi_n}=0$，而对于 $E^-_{\theta_l\phi_l}=0$，我们只是直接假定其成立，并未真正求解。然而，将 H^-_{tl} 和 H^-_{xl} 的后一个表达式代入方程 (4.36) 的第三行可知，只要 $H^{\ominus}_{ln}$ 和 H^-_{ln} 满足 Pöschl-Teller方程 (4.40)，就有 $E^-_{\theta_l\phi_l}=0$；因此，求解 (4.36) 中的其他方程后，约束 $E^-_{\theta_l\phi_l}=0$ 便已自动满足。总之，奇宇称微扰的所有自由度都具有谱 (4.41)。

4.3.2 偶宇称微扰

偶宇称微扰是指对于给定的一组球谐指标 $\{\ell_2,m_2,\ell_3,m_3,\ldots,\ell_d,m_d\}$ 和宇称 $(-1)^{\ell_2+\ell_3+\ldots+\ell_d}$，最一般的微扰，即

$$\begin{aligned}\mathbf{h}=\sum_{\ell m}e^{-i\omega t}\Big[&(H_{tt}dt^2+2H_{tx}dtdx+H_{xx}dx^2)\mathcal{Y}_{\ell m}\\&+\sum_{l=2}^{d}\left(H^+_{tl}\mathcal{V}^+_{l,\ell m}dt+H^+_{xl}\mathcal{V}^+_{l,\ell m}dx+H^+_l\,\mathcal{T}^+_{l,\ell m}+H^{\oplus}_l\,\mathcal{T}^{\oplus}_{l,\ell m}\right)\\&+\sum_{l=2}^{d}\sum_{n>l}^{d}H^+_{ln}\,\mathcal{W}^+_{ln,\ell m}+H^{\oplus}_{ln}\,\mathcal{W}^{\oplus}_{ln,\ell m}\Big],\end{aligned}\tag{4.46}$$

然后，使用规范变换（4.30），其中

$$\zeta_\mu dx^\mu=\frac{e^{-i\omega t}}{2}\left[A\,\mathcal{Y}dt+B\,\mathcal{Y}dx-\sum_{l=2}^{d}H^+_l\,\mathcal{V}^+_{l,\ell m}\right],$$

其中，$A=A(x)$ 和 $B=B(x)$ 是坐标 x 的函数，由下式给出

$$A=-i\omega\,H^+_l-2H^+_{t2},\tag{4.47}$$

$$B=\frac{d}{dx}H^+_l-2H^+_{x2},\tag{4.48}$$

˜由此可知，变换后的微扰场 $h_{\mu\nu}$ 可以展开为˜，如公式（4.46）所示，但其中的场 H (x) 变换为 H(x)，其中

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{tt} &= H_{tt} - \frac{f'}{2f}\left(\frac{d}{dx}H_2^+ - 2H_{x2}^+\right) - \omega^2 H_2^+ + 2i\omega H_{x2}^+ \,, \\
\tilde{H}_{xx} &= H_{tt} - \frac{f'}{2f}\left(\frac{d}{dx}H_2^+ - 2H_{x2}^+\right) + \frac{d^2}{dx^2}H_2^+ - 2\frac{d}{dx}H_{x2}^+ \,, \\
\tilde{H}_{tx} &= H_{tx} - \frac{f'}{2f}\left(\frac{d}{dx}H_2^+ - 2H_{x2}^+\right) - i\omega\frac{d}{dx}H_2^+ - 2\frac{d}{dx}H_{t2}^+ + i\omega H_{x2}^+ \,, \\
\tilde{H}_{tl}^+ &= H_{tl}^+ - H_{t2}^+ - \frac{i\omega}{2}\left(H_2^+ - H_l^+\right) \quad \forall\, l \neq 2 \,, \\
\tilde{H}_{xl}^+ &= H_{xl}^+ - H_{x2}^+ + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(H_2^+ - H_l^+\right) \quad \forall\, l \neq 2 \,, \\
\tilde{H}_{ln}^{\oplus} &= H_{ln}^{\oplus} - \frac{1}{2}\left(H_l^+ + H_n^+\right) \\
\tilde{H}_{t2}^+ &= 0 \,, \\
\tilde{H}_{x2}^+ &= 0 \,, \\
\tilde{H}_l^+ &= 0 \,.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

因此，不失一般性，我们可以令

$$\tilde{H}_{t2}^+ = 0 \quad , \quad \tilde{H}_{x2}^+ = 0 \quad , \quad \tilde{H}_l^+ = 0 \,, \tag{4.50}$$

因为这些（$d+1$）自由度可以通过规范变换消去，˜而其他的 H's 只是等于原先的 H' s 加上 x 的函数。因此，假设采用这一规范选择并省略波浪号，我们可以设微扰场具有如下形式

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} = \sum_{\ell m} e^{-i\omega t}\Big[&(H_{tt}dt^2 + 2H_{tx}dtdx + H_{xx}dx^2)\mathcal{Y}_{\ell m} + \sum_{l=3}^{d}\left(H_{tl}^+\mathcal{V}_{l,\ell m}^+ dt + H_{xl}^+\mathcal{V}_{l,\ell m}^+ dx\right) \\
&+ \sum_{l=2}^{d}\sum_{n>l}^{d}\left(H_{ln}^+\mathcal{W}_{ln,\ell m}^+ + H_{ln}^{\oplus}\mathcal{W}_{ln,\ell m}^{\oplus}\right) + \sum_{l=2}^{d} H_l^{\oplus}\mathcal{T}_{l,\ell m}^{\oplus}\Big] \,,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

现在，将这一试探形式代入场方程（4.3），我们得到以下微分 r-

方程，场 H' 满足这些方程:

$$
\begin{aligned}
E^+_{tt} \equiv\ & \frac{d^2}{dx^2}H_{tt} - 2i\omega\,\frac{d}{dx}H_{tx} + \Lambda\,(2-\kappa f)\,H_{tt} - (\omega^2+2\Lambda)\,H_{xx} \\
& +\ 2\Lambda f\sum_{l=2}^{d}\left[\,i\omega\left(\kappa_l\,H^+_{tl} - i\omega H^\oplus_l\right) - \frac{f'}{2f}\left(\kappa_l H^+_{xl} + \frac{d}{dx}H^\oplus_l\right)\right] \\
& +\ \frac{f'}{2f}\left(\frac{d}{dx}H_{xx} - 3\,\partial_x H_{tt} + 2i\omega\,H_{tx}\right) \,=\, 0\,, \\
E^+_{tx} \equiv\ & \sum_l\left[\kappa_l f\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}H^+_{tl}\right) + i\omega\kappa_l H^+_{xl} - \kappa_l\,H_{tx} + 2i\omega\sqrt{f}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{f}}H^\oplus_l\right)\right] = 0\,, \\
E^+_{xx} \equiv\ & \frac{d^2}{dx^2}H_{tt} - 2i\omega\,\frac{d}{dx}H_{tx} - \left[\omega^2+\Lambda\,(2-\kappa f)\right]H_{xx} + 2\Lambda\,H_{tt} \\
& -\ 2\Lambda f\sum_{l=2}^{d}\left[\kappa_l\,\frac{d}{dx}H^+_{xl} + \frac{d^2}{dx^2}H^\oplus_l - \frac{f'}{2f}\left(\kappa_l H^+_{xl} + \frac{d}{dx}H^\oplus_l\right)\right] \\
& +\ \frac{f'}{2f}\left(\frac{d}{dx}H_{xx} - 3\,\frac{d}{dx}H_{tt} + 2i\omega\,H_{tx}\right) \,=\, 0\,, \\
E^+_{t\theta_l} \equiv\ & \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^+_{tl} - i\omega H^+_{xl}\right)\right] + i\omega\left[\frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^+_{xl} - i\omega H^+_{tl}\right)\right] - \Lambda(\kappa-2)H^+_{tl} + \\
& -\ \frac{1}{f}\,\frac{d}{dx}H_{tx} + \frac{i\omega}{2f}\,(H_{tt}+H_{xx}) + \Lambda\sum_{n=2}^{d}\left(i\omega H^\oplus_n + \kappa_n H^+_{tn}\right) - i\omega E^I_{\phi_l\phi_l} = 0\,, \\
E^+_{x\theta_l} \equiv\ & i\omega\left[\frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^+_{tl} - i\omega H^+_{xl}\right)\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^+_{xl} - i\omega H^+_{tl}\right)\right] - \Lambda(\kappa-2)H^+_{xl} + \\
& +\ \frac{i\omega}{f}\,H_{tx} - \frac{1}{2f}\,\frac{d}{dx}\,(H_{tt}+H_{xx}) + \Lambda\sum_{n=2}^{d}\left(\frac{d}{dx}H^\oplus_n + \kappa_n H^+_{xn}\right) - \frac{d}{dx}E^I_{\phi_l\phi_l} = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E^+_{\theta_l\theta_n} \equiv\ & \frac{d^2}{dx^2}(H^+_{ln}+H^+_{nl}) + \left[\omega^2 - \Lambda f(\kappa-2)\right](H^+_{ln}+H^+_{nl}) - E^I_{\phi_l\phi_l} - E^I_{\phi_n\phi_n} = 0\,, \\
E^+_{\phi_l\phi_n} \equiv\ & \frac{d^2}{dx^2}(H^\oplus_{ln}+H^\oplus_{nl}) + \left[\omega^2 - \Lambda f(\kappa-2)\right](H^\oplus_{ln}+H^\oplus_{nl}) = 0\,, \\
E^I_{\phi_l\phi_l} \equiv\ & \frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^+_{xl} - i\omega H^+_{tl}\right) + \Lambda H^\oplus_l - \Lambda\sum_{n=2}^{d}\left[H^\oplus_n + \kappa_n(H^+_{ln}+H^+_{nl})\right] \\
& +\ \frac{1}{2f}(H_{tt}-H_{xx}) = 0\,, \\
E^{II}_{\phi_l\phi_l} \equiv\ & \frac{d^2}{dx^2}H^\oplus_l + \left[\omega^2 - \Lambda f(\kappa-2)\right]H^\oplus_l = 0\,, \\
E^I_{\theta_l\theta_l} \equiv\ & E^I_{\phi_l\phi_l} = 0\,, \\
E^{II}_{\theta_l\theta_l} \equiv\ & E^{II}_{\phi_l\phi_l} + 2\kappa_l\,E^I_{\phi_l\phi_l} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

其中， f'表示 df/dx。使用角基 $\{\mathcal{Y}_{\ell m}, \mathcal{V}^{+}_{l,\ell m}, \mathcal{T}^{\oplus}_{l\ ,\ \ell m},\ \cdots\}$，而非仅使用标量球谐函数 $\mathcal{Y}_{\ell m}$，其巨大优势在于：当我们计算微扰方程（4.3）的分量时，角向依赖会自动作为一个整体乘法项分离出来，因此最终得到的方程只依赖坐标 x；正如上一节的奇宇称微扰以及刚才偶宇称微扰的上述方程所示。尽管如此，在偶宇称微扰方程的分量 $\phi_l\phi_l$ 和 $\theta_l\theta_l$ 中，角函数并不会自动分离出来，我们面对的反而是如下类型的方程

$$P(x)\, Y_{\ell_l,0}(\theta_l) + Q(x)\, \cot\theta_l \frac{d}{d\theta_l} Y_{\ell_l,0}(\theta_l) = 0\,. \tag{4.53}$$

然而，一般而言，球谐函数$Y_{\ell_l,\ 0}$与 $\cot\theta_l \frac{d}{d\theta_l} Y_{\ell_l,\ 0}$线性无关，因此，后一个方程意味着 $P(x) = 0$ 和 $Q(x) = 0$。这就是由分量 $\phi_l\phi_l$ 和 $\theta_l\theta_l$ 得出的方程被拆分为两个独立约束的原因；在式（4.52）中，这些约束记为 $E^{I}_{\phi_l\phi_l}$、 $E^{II}_{\phi_l\phi_l}$、 $E^{I}_{\theta_l\theta_l}$和 $E^{II}_{\theta_l\theta_l}$。在式（4.53）中，只有当两个角函数线性相关时，我们才能得出 $P(x)$和 $Q(x)$不同时为零；也就是说，当

$$\alpha\, Y_{\ell_l,0}(\theta_l) + \beta\, \cot\theta_l \frac{d}{d\theta_l} Y_{\ell_l,0}(\theta_l) = 0 \tag{4.54}$$

对于某些常数 α 和 β。对这一约束积分后，我们得出，只有在以下情况下才会出现线性相关：

$$Y_{\ell_l,0}(\theta_l) = c\,(\cos\theta_l)^{\alpha/\beta}\,, \tag{4.55}$$

其中， c 是某个常数。这仅在 $\ell_l = 0$时成立，此时 $\alpha/\beta = 0$；而在$\ell_l = 1$时成立，此时 $\alpha/\beta = 1$。因此，对于任意 $\ell_l > 1$ ，我们可以直接假设，在式 (4.53) 中， $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别为零。

由方程 $E^{+}_{\theta_l\theta_n} = 0, E^{+}_{\phi_l\phi_n} = 0, E^{II}_{\phi_l\phi_l} = 0$可知，场 $H^{+}_{ln}\,, H^{\oplus}_{ln}$ 和 $H^{\oplus}_{l}$ 满足 Pöschl-Teller方程，即式 (4.40)。特别地，假设满足准正规模边界条件，可得允许频率的谱由式 (4.41) 给出。现在，将场 $V^{I}_{ln} = V^{I}_{[ln]}$ 和 $V^{II}_{ln} = V^{II}_{[ln]}$ 定义为

$$\begin{aligned} V^{I}_{ln} &:= \frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^{+}_{tl} + i\omega H^{+}_{xl} - \frac{d}{dx}H^{+}_{tn} - i\omega H^{+}_{xn}\right)\,, \\ V^{II}_{ln} &:= \frac{1}{f}\left(\frac{d}{dx}H^{+}_{xl} + i\omega H^{+}_{tl} - \frac{d}{dx}H^{+}_{xn} - i\omega H^{+}_{tn}\right)\,, \end{aligned} \tag{4.56}$$

由这些恒等式可立即得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(E^{+}_{t\theta_l} - E^{+}_{t\theta_n}\right) + i\omega\left(E^{+}_{x\theta_l} - E^{+}_{x\theta_n}\right) &= \frac{d^2}{dx^2}V^{I}_{ln} + \left[\omega^2 - (\kappa-2)\, f\right] V^{I}_{ln} = 0\,, \\ \frac{d}{dx}\left(E^{+}_{x\theta_l} - E^{+}_{x\theta_n}\right) + i\omega\left(E^{+}_{t\theta_l} - E^{+}_{t\theta_n}\right) &= \frac{d^2}{dx^2}V^{II}_{ln} + \left[\omega^2 - \Lambda\,(\kappa-2)\, f\right] V^{II}_{ln} = 0\,, \end{aligned} \tag{4.57}$$

这是由于分量 $E^+_{t\theta_l}=0$ 和 $E^+_{x\theta_l}=0$，以及V^I_{ln}和 V^{II}_{ln}同样满足 Pöschl-Teller方程，因此与这些自由度相关的谱由式（4.41）给出。

值得回顾的是，我们使用规范变换来消去微扰的某些自由度，尤其是 $H^+_{t2}=H^+_{x2}=0$。因此，由恒等式$E_{t\theta_l}-E_{t\theta_2}=0$和 $E_{x\theta_l}-E_{x\theta_2}=0$，并假设 $E^I_{\phi_l\phi_l}=0$，可得

$$\begin{aligned} H^+_{tl} &= \frac{1}{\Lambda(\kappa-2)}\left(\frac{d}{dx}V^I_{2l}-i\omega V^{II}_{2l}\right), \\ H^+_{xl} &= \frac{1}{\Lambda(\kappa-2)}\left(\frac{d}{dx}V^{II}_{2l}-i\omega V^I_{2l}\right), \end{aligned} \tag{4.58}$$

因此，与这些场相关的谱必须与 V^I_{ln} 和V^{II}_{ln}的谱相同，即式 (4.41)。

接下来需要检验 H^+_{tt}，H^+_{tx}和 H^+_{xx}是否具有相同的谱。由 $E^+_{tx}=0$可直接得到

$$H^+_{tx}=\frac{1}{\kappa}\sum_l\left[\kappa_l f\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f}H^+_{tl}\right)-i\omega\kappa_l H^+_{xl}-2i\omega\sqrt{f}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{f}}H^\oplus_l\right)\right], \tag{4.59}$$

因此，场 H^+_{tl}，H^+_{xl}和 $H^\oplus_l$具有相同的谱；而这一谱也正是满足 Pöschl-Teller方程的场的谱。最后，由恒等式 $E^I_{\phi_l\phi_l}=0$ 和 $E^+_{t\theta_l}=0$可知，场 $H^+_{tt}-H^+_{xx}$ 和 $H^+_{tt}+H^+_{xx}$ 与 V^{II}_{ln}，$H^\oplus_l$，H^+_{ln}，H^+_{tl}，H^+_{tx}之间满足以下关系：

$$\begin{aligned} H^+_{tt}-H^+_{xx} &= V^{II}_{2l}-2\Lambda f H^\oplus_l+\Lambda f\sum_n\left[H^\oplus_n+\kappa_n(H^+_{ln}+H^+_{nl})\right], \\ H^+_{tt}+H^+_{xx} &= \frac{2i}{\omega}\left[\frac{d}{dx}H_{tx}-\Lambda f\sum_n\left(\kappa_n H^+_{tn}-i\omega H^\oplus_n\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.60}$$

因此，根据关于 $H^+_{tt}\pm H^+_{xx}$ 的这些方程，我们得出结论：这些场可以用我们已证明具有谱（4.41）的场来表示。这就完成了证明：在广义纳里艾时空中，引力微扰的所有自由度——标量、矢量和张量，偶和奇——都具有相同的准正规模谱。这与其他高维时空（例如施瓦西时空和（反）德西特时空）中的情况不同；在那些时空中，引力微扰的不同部分具有不同的谱。这里所考虑的高维纳里艾时空的这种等谱性质表明，引力场不同自由度具有不同谱这一现象，与其说取决于微扰自由度的张量性质或背景的维数，不如说更多地取决于时空的对称性。特别是，当 $D=4$ 时，我们有 $\kappa=\ell(\ell+1)$；而在假设的

边界条件为 (I) 时，谱（4.41）可写为

$$\frac{\omega}{\sqrt{\Lambda}} = \pm\sqrt{(\ell+2)(\ell-1)-\frac{1}{4}} - i\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{4.61}$$

这一结果与 $D=4$ 中 Cardoso 在参考文献 [120] 中给出的频率谱一致。该文获得了四维近极值施瓦西-德西特黑洞引力微扰准正规模的精确表达式。众所周知，当黑洞视界与宇宙学视界合并时，施瓦西-德西特解的极值极限对应于纳里艾时空 [121, 122, 33]。然而，当 $D=4$ 时，我们的解析结果与参考文献 [123, 124] 中展示的引力微扰张量自由度的准正规频率并不一致。我们认为，这种差异可能源于参考文献 [123] 中的一个笔误，并被参考文献 [124] 沿用。

为了获得引力微扰偶部分的谱，无需使用式（4.52）中列出的全部场方程。更准确地说，我们没有针对 $E^{+}_{tt}=0, E^{+}_{xx}=0$ 和 $E^{I}_{\phi_n\phi_n}=0$ 求解 $n>2$。因此，审慎起见，应检查这些剩余方程是否与我们所用方程的解相一致。经过一些代数运算，我们确认这种一致性确实成立。因此，一旦假设 $H^{+}_{ln}, H^{\oplus}_{ln}, H^{\oplus}_{l}, V^{I}_{ln}$ 和 V^{II}_{ln} 满足 Pöschl-Teller 方程（4.40），并且 H^{+}_{tl} ,H^{+}_{xl} ,H^{+}_{tx},H^{+}_{tt} 和 H^{+}_{xx} 由上文给出的表达式确定，爱因斯坦方程的其余分量便自动满足。

第5章

自旋-1/2 场微扰

本章中，我们考察自旋-1/2 场的微扰，即质量为 μ 的狄拉克场。首先，我们将求得狄拉克方程在广义纳里艾背景中的分离形式，并将其化为一组具有特定有效势的薛定谔型微分方程，该有效势属于罗森–莫尔斯型势。值得指出的是，尽管对准正规模的研究历史悠久，但在广义相对论中，这一研究始于一个关于自旋-2微扰演化的稳定性问题 [42]。由于自旋-2微扰实际上包含变换为自旋0,1和2场的分量，因此准正规模频率主要是针对这些自旋的场求得的。我们希望，对广义纳里艾时空周围有质量狄拉克扰动所对应的准正规模进行研究，能够弥补这一研究空白。关于其他背景中狄拉克场准正规模的先前研究，参见 [56, 125, 126]。

5.1 克利福德代数与旋量

定义克利福德代数和旋量有多种方式。这里介绍其中一种，详情请参见 [127, 128, 129]。我们采用一种简化的方法，以实现我们的目的，即为自旋-1/2 场微扰 $\hat{}$ 提出自然的试探形式，该场是满足狄拉克方程的旋量场 $\mathbf{\Psi}$ 。

让我们在带有坐标 $\{\theta_l, \phi_l\}$ 的第 l 个二维单位球面 S^2 上求解狄拉克方程，其线元已在公式（3.1）中给出，即

$$d\Omega_l^2 = d\theta_l^2 + \sin^2\theta_l d\phi_l^2 \,. \tag{5.1}$$

在 S^2的每个点，由以下各项给出的正交标架场

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \partial_{\theta_l} \quad \text{and} \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sin\theta_l}\partial_{\phi_l} \,, \tag{5.2}$$

张成一个二维向量空间，记作 $\mathbb{V}$ 。所谓正交归一标架，是指度规$\hat{\boldsymbol{g}}$ 相对于该标架场的分量为

$$\hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}) = \delta_{\mathfrak{mn}} \quad \forall\, \mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \{1, 2\}\,. \tag{5.3}$$

在此标架下，任意向量场 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{V}$ 都可以写成如下线性表达式

$$\boldsymbol{V} = V^1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + V^2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 = V^{\mathfrak{m}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\,. \tag{5.4}$$

现在引入克利福德代数，这是一种定义在赋有度规的向量空间上的特殊代数。为此，将二次型 $\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V}) = \hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}},\ \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}) V^{\mathfrak{m}} V^{\mathfrak{n}}$ 写成 $\boldsymbol{V}$的平方，即 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V})$。这定义了所谓的克利福德乘积，记作并置形式。因此，假设乘法满足分配律，标架的元素 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\}$ 必须满足以下代数关系

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} = 2\, \hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}})\,, \tag{5.5}$$

这正是赋有度规 $\hat{\boldsymbol{g}}$的向量空间 $\mathbb{V}$ 的克利福德代数的定义，记作 $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\ \hat{\boldsymbol{g}})$。值得注意的是，由于两个向量 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}$ 的克利福德乘积定义为其对称部分给出度规分量，因此它仅能确定到一个在向量上呈反对称的乘积。事实上，不失一般性，我们可以将其写成

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} = \hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}) + \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\,, \tag{5.6}$$

其中，两个向量的外积 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \equiv -\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}$ 由以下关系定义：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} - \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \equiv 2\, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\,, \tag{5.7}$$

而这又将外积定义为 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}$的克利福德乘积的完全反对称部分。

因此，在二维空间中，集合 $\{1, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}},\ \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\}$ 含有 $2^2 = 4$ 个元素，并构成 $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\ \hat{\boldsymbol{g}})$的一组基，因此一般元素 $\boldsymbol{\mathcal{C}} \in C\ell(\mathbb{V},\ \hat{\boldsymbol{g}})$总可以写成如下形式：

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = S + V^{\mathfrak{m}} \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} + B^{\mathfrak{mn}}\, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\,, \tag{5.8}$$

其中，上式中求和项内由 S 表示的项在二维球面上旋转时按标量变换，而 $V^{\mathfrak{m}}$ 按向量分量变换，最后，元素 $B^{\mathfrak{mn}} = -B^{\mathfrak{nm}}$ 按反对称二阶张量的分量变换。值得一提的是，在高维空间中，我们必须考虑更高阶的反对称积。例如，在 3 维空间中，集合 $\{1, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}},\ \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}},\ \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{p}}\}$ 含有 $2^3 = 8$ 个元素，可构成克利福德代数的一组基；其中三个对象 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}$ 对每种 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n} = 1,\ 2,\ 3$ 的取值均按式 (5.7) 写出，而单个最高阶元素 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{p}}$ 定义为

克利福德乘积的完全反对称部分。一般而言，在 D 维空间中，克利福德代数的一组基包含 2^D 个元素 [127, 128]。

定义克利福德代数 $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})$ 后，我们将用它来定义所谓的旋量。旋量可以定义为向量空间 $\mathbb{S}\subset\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})$ 的元素，在该空间上，克利福德代数的一个线性忠实表示（即所谓的旋量表示）起作用。这意味着，若 $\{\boldsymbol{\xi}_A\}$ 是 $\mathbb{S}$ 的任意旋量标架，且索引 A 取值于 $\{+,-\}$，则我们可以方便地选取该标架，使得在 S^2的某个给定邻域内，标架 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\}$ 对旋量 $\{\boldsymbol{\xi}_A\}$ 的克利福德作用为常数。

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{\xi}_A=(\sigma_{\mathfrak{m}})^B{}_A\boldsymbol{\xi}_B\,, \tag{5.9}$$

其中，常数矩阵 $(\sigma_{\mathfrak{m}})^B{}_A$ 是已知的狄拉克矩阵。将 (5.9) 乘以 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}$，再将结果与 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\boldsymbol{\xi}_A$ 相加，由 (5.5) 可得这些矩阵满足以下反对易关系

$$(\sigma_{\mathfrak{m}})^A{}_B(\sigma_{\mathfrak{n}})^B{}_C+(\sigma_{\mathfrak{n}})^A{}_B(\sigma_{\mathfrak{m}})^B{}_C=\delta_{\mathfrak{mn}}\,\delta^A{}_C\,, \tag{5.10}$$

这就是克利福德代数的定义。

注意，$\mathbb{S}\subset\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})$的引入，是为了表示克利福德代数 $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})$，因为 $\mathbb{S}$ 是一个向量空间，并且根据定义，$\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})$将 $\mathbb{S}$映射到 $\mathbb{S}$。作为一个向量空间，空间 $\mathbb{S}$ 称为旋量空间，其元素称为旋量场。特别地，还要注意，旋量空间在克利福德乘积下是 $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})$的一个子代数。在二维情形下，旋量空间 $\mathbb{S}$的旋量标架 $\{\boldsymbol{\xi}_A\}$ 可由 $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})$中的以下元素张成

$$\boldsymbol{\xi}_A=\boldsymbol{m}_A(1+\boldsymbol{m}_{-A})\,, \tag{5.11}$$

其中，复向量 $\boldsymbol{m}_A$ 定义为

$$\boldsymbol{m}_A=\hat{\boldsymbol{e}}_1+iA\hat{\boldsymbol{e}}_2\,, \tag{5.12}$$

张成球面上的一个零标架。事实上，利用式（5.5），很容易证明$\boldsymbol{m}_{(A}\boldsymbol{m}_{B)}=\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{m}_A,\boldsymbol{m}_B)$，其度规分量为

$$\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{m}_A,\boldsymbol{m}_B)=\begin{cases}0 & \text{for } A=B\,,\\ 1 & \text{for } A\neq B\,.\end{cases} \tag{5.13}$$

在 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}$ 的作用下，旋量 $\boldsymbol{\xi}_A$ 简洁地满足以下关系

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1\boldsymbol{\xi}_A=\boldsymbol{\xi}_{-A}\quad\text{and}\quad\hat{\boldsymbol{e}}_2\boldsymbol{\xi}_A=iA\boldsymbol{\xi}_{-A}\quad\text{for}\quad A\in\{+,-\}\,, \tag{5.14}$$

也就是说，$\mathbb{V}$ 在 $\mathbb{S}$ 上的作用会产生 $\mathbb{S}$上的元素。特别是，这意味着 $\mathbb{S}$ 在 $\mathcal{C}\ell$（$\mathbb{V}$，$\hat{\boldsymbol{g}}$）的作用下是不变的。因此，如果 $\Psi^A=\Psi^A$（θ_l，ψ_l）是相对于标架 $\{\boldsymbol{\xi}_A\}$而言的$\hat{\boldsymbol{\Psi}}$的分量，那么旋量空间 $\mathbb{S}$ 的维数为 2^1，并定义为

$$\mathbb{S}=\left\{\hat{\boldsymbol{\Psi}}\in\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\hat{\boldsymbol{g}})\mid\hat{\boldsymbol{\Psi}}=\Psi^A\boldsymbol{\xi}_A\;\forall\;\Psi^A\in\mathbb{C}\right\}. \tag{5.15}$$

ˆ这些元素 $\boldsymbol{\Psi}$ 即为已知的旋量场。在高维情况下，可以证明，若 $D = 2d$ 是向量空间的维数，则旋量空间的维数为 2^d；详尽的综述请参见参考文献 [127, 128, 130]。

$\mathbb{S}$ 在 $\mathcal{C}\ell$（$\mathbb{V}$，$\hat{\boldsymbol{g}}$）的作用下保持不变，这意味着代数 $\mathcal{C}\ell$（$\mathbb{V}$，$\hat{\boldsymbol{g}}$）可以忠实地表示为 2×2 矩阵。为明确说明这一点，我们只需让张成 $\mathbb{V}$ 的元素（即$\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 和$\hat{\boldsymbol{e}}_2$ ）作用于$\mathbb{S}$的一个一般元素，具体如下：

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \Psi^+\boldsymbol{\xi}_- + \Psi^-\boldsymbol{\xi}_+ \quad \text{and} \quad \hat{\boldsymbol{e}}_2\hat{\boldsymbol{\Psi}} = i\Psi^+\boldsymbol{\xi}_- - i\Psi^-\boldsymbol{\xi}_+,, \tag{5.16}$$

这里用到了式（5.14）。特别地，这使我们能够明确求出向量$\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 和$\hat{\boldsymbol{e}}_2$的旋量表示。事实上，式（5.16）给出了这些基向量的如下旋量表示：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \tag{5.17}$$

为简洁起见，这里省略了旋量指标。因此，在二维中，$\mathbb{S}$ 的旋量标架 $\{\boldsymbol{\xi}_A\}$可以由以下列向量表示，常数矩阵作用于这些列向量上：

$$\xi_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \xi_- = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{5.18}$$

事实上，请注意，矩阵 $(\sigma_{\mathfrak{m}})^{A}{}_{B}$ 对上述列向量的作用可以简洁地概括为：

$$\sigma_1\,\xi_A = \xi_{-A} \quad \text{and} \quad \sigma_2\,\xi_A = iA\,\xi_{-A}\,, \tag{5.19}$$

这正是式（5.14）的矩阵表示。因此，若 $V^{\mathfrak{m}}$ 是向量场 $\boldsymbol{V}$ 在正交标架场 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\}$中展开后的分量，则有

$$\boldsymbol{V} = V^{\mathfrak{m}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \quad \Longleftrightarrow \quad V^{A}{}_{B} = V^{\mathfrak{m}}(\sigma_{\mathfrak{m}})^{A}{}_{B}\,, \tag{5.20}$$

其中 $V^{A}{}_{B}$ 是二维向量场 $\boldsymbol{V}$ 的旋量表示。在高维中，可以证明，若 $D = 2d$ 是向量空间的维数，则狄拉克矩阵通过 $2^d \times 2^d$ 个矩阵忠实地表示克利福德代数。

克利福德代数提供了一种非常清晰而简洁的旋转运算方法，其能力远胜于通常采用的旋转群向量表示方法。事实上，设 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{V}$ 为一个非零向量，$\boldsymbol{n}^2 = \hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}) \neq 0$。这些元素在 $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V},\ \hat{\boldsymbol{g}})$ 中可逆，

$$\boldsymbol{n}^{-1} = \frac{\boldsymbol{n}}{\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\,. \tag{5.21}$$

特别注意，$\boldsymbol{n}^{-1} = \boldsymbol{n}$ 当 $\boldsymbol{n}$ 是单位向量时，即 $\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}) = 1$。现在，考虑由下式给出的两个单位向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$

$$\boldsymbol{n}_1 = \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_2 \quad \text{and} \quad \boldsymbol{n}_2 = \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_2\,. \tag{5.22}$$

然后，我们可以构造以下元素

$$\boldsymbol{R}_\zeta := \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = \cos\left(\frac{\zeta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_2\,, \tag{5.23}$$

由单个实参数 $\zeta = \varphi_2 - \varphi_1 \in [0, 2\pi]$ 标记。因此，对于由 (5.23) 给出的每个 $\boldsymbol{R}_\zeta$，我们可以定义一个在由 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1、\hat{\boldsymbol{e}}_2\}$ 张成的平面上绕 ζ 旋转的变换，如下:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\boldsymbol{R}_\zeta} \hat{\boldsymbol{e}}'_{\mathfrak{m}} = \boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \boldsymbol{R}_\zeta^{-1}\,. \tag{5.24}$$

根据定义，旋转是保持度规的线性变换，因此我们应检验这个旋转表达式是否具有所需的性质，即保持度规不变。利用 (5.5)，可作如下简单证明:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \boldsymbol{R}_\zeta^{-1}, \boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \boldsymbol{R}_\zeta^{-1}) &= \frac{(\boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \boldsymbol{R}_\zeta^{-1})(\boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \boldsymbol{R}_\zeta^{-1}) + (\boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \boldsymbol{R}_\zeta^{-1})(\boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \boldsymbol{R}_\zeta^{-1})}{2} \\
&= \boldsymbol{R}_\zeta \left(\frac{\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} + \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}}{2}\right) \boldsymbol{R}_\zeta^{-1} \\
&= \hat{\boldsymbol{g}}(\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}, \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}})\,,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

根据定义，这就是一个旋转。以下关系不难证明:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_1 \boldsymbol{R}_\zeta^{-1} &= \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_1\, \hat{\boldsymbol{e}}_1\, \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = \cos\zeta\, \hat{\boldsymbol{e}}_1 - \sin\,\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_2, \\
\boldsymbol{R}_\zeta \hat{\boldsymbol{e}}_2 \boldsymbol{R}_\zeta^{-1} &= \boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_1\, \hat{\boldsymbol{e}}_2\, \boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = \sin\zeta\, \hat{\boldsymbol{e}}_1 + \cos\zeta\, \hat{\boldsymbol{e}}_2\,.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

显然，这是在平面 $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_2$ 上的旋转，其中 ζ 是旋转角。既然旋转的复合仍是旋转，所有元素 $\boldsymbol{R}_\zeta$ 在克利福德乘积下构成一个群。这个群记作 $SPin(\mathbb{V})$，称为旋群

$$SPin(\mathbb{V}) = \{\boldsymbol{R} \in \mathcal{C}\ell(\mathbb{V}, \hat{\boldsymbol{g}}) \mid \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\zeta_p}\boldsymbol{R}_{\zeta_{p-1}} \ldots \boldsymbol{R}_{\zeta_1}\}\,. \tag{5.27}$$

事实上，注意到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{\zeta_1}\boldsymbol{R}_{\zeta_2} &= \left[\cos\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_2\right]\left[\cos\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta_2}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_2\right] \\
&= \cos\left(\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{R}_{\zeta_1+\zeta_2}\,,
\end{aligned} \tag{5.28}$$

我们看到存在一个元素 $e := \boldsymbol{R}_{\zeta=0} \in SPin(\mathbb{V})$，称为单位元，使得 $e\boldsymbol{R}_\zeta = \boldsymbol{R}_\zeta \,\forall\, \boldsymbol{R}_\zeta \in SPin(\mathbb{V})$；存在一个元素 $\boldsymbol{R}_\zeta^{-1} := \boldsymbol{R}_{-\zeta} \in SPin(\mathbb{V})$，称为

$\boldsymbol{R}_\zeta \in SPin(\mathbb{V})$ 的逆元，使得 $\boldsymbol{R}_\zeta \boldsymbol{R}_\zeta^{-1} = e$；最后，乘积满足结合律，即 $\boldsymbol{R}_{\zeta_1}(\boldsymbol{R}_{\zeta_2}\boldsymbol{R}_{\zeta_3}) = (\boldsymbol{R}_{\zeta_1}\boldsymbol{R}_{\zeta_2})\boldsymbol{R}_{\zeta_3}\ \forall\, \boldsymbol{R}_{\zeta_1},\ \boldsymbol{R}_{\zeta_2},\ \boldsymbol{R}_{\zeta_3} \in SPin(\mathbb{V})$。

而向量 $\hat{}\boldsymbol{e}_{\mathfrak{m}}$ 在旋转下按照（5.24）变换，旋量 $\boldsymbol{\xi}_A$ 则按如下方式变换：

$$\boldsymbol{\xi}_A \xrightarrow{\boldsymbol{R}_\zeta} \boldsymbol{\xi}'_A = \boldsymbol{R}_\zeta\, \boldsymbol{\xi}_A\,. \tag{5.29}$$

事实上，很容易证明，$\boldsymbol{R}_\zeta$ 对旋量标架 $\{\boldsymbol{\xi}_A\}$ 的作用为[1]

$$\boldsymbol{R}_\zeta\, \boldsymbol{\xi}_+ = e^{i\zeta/2}\, \boldsymbol{\xi}_+ \quad \text{and} \quad \boldsymbol{R}_\zeta\, \boldsymbol{\xi}_- = e^{-i\zeta/2}\, \boldsymbol{\xi}_-\,. \tag{5.30}$$

特别要注意，当对 $\zeta = 2\pi$ 施加旋转时，向量在 $\boldsymbol{R}_{2\pi} \in SPin$（$\mathbb{V}$）的作用下保持不变，而当 $\boldsymbol{R}_{2\pi}$作用于旋量空间 $\mathbb{S}$时，旋量会乘以 -1 。

5.2 狄拉克方程分离的试探形式

在前几章中，我们开始探讨这一问题，并回顾了如下事实：为了求解自旋-s 场微扰的场方程（对于 $s = 0$，1、2），其角向依赖应按具有相同性质的角基展开。对于自旋-0 扰动，它们在球面上的旋转下表现为标量场，因此适合将其角向依赖展开在基 $\{Y_{\ell_l m_l}\}$ 中，因为标量球谐函数 $Y_{\ell_l m_l}$ 构成了球面上函数的基。然而，对于自旋-1 场扰动，其场既有在球面旋转下表现为标量场的，也有表现为相对于球面的 1-形式分量的，因此 $\{Y_{\ell_l m_l}, V^{\pm}_{\ell_l m_l}\}$提供了合适的基。同理，自旋-2场微扰包含表现为标量场的分量、表现为相对于球面的 1-形式分量的分量，以及表现为球面上二阶对称张量分量的场。在这种情况下，$\{Y_{\ell_l m_l}, V^{\pm}_{\ell_l m_l}, T^{\oplus}_{\ell_l m_l}, T^{\pm}_{\ell_l m_l}\}$给出了合适的基。此外，正如前几章所示，这些基的元素可以通过对标量球谐函数应用协变导数算子生成。能否将这一过程推广到自旋-1/2微扰？自旋-1/2微扰具有在球面旋转下表现为旋量场分量的分量。因此，第一步必须扩展协变导数算子，使其能够作用于旋量场。

[1]该变换必须保持旋量空间 $\mathbb{V}$上定义的内积。该内积 $\widetilde{\ }$ 定义为 $\langle \boldsymbol{\xi}_A, \boldsymbol{\xi}_B \rangle = \boldsymbol{\xi}_A \boldsymbol{\xi}_B$，其中运算 $\tilde{}$ 会颠倒任意乘积中向量的顺序，$\widetilde{\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}} = -\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} \wedge \hat{}\boldsymbol{e}_{\mathfrak{m}}$。特别地，这意味着 $\boldsymbol{R}_\zeta^{-1} = \widetilde{\boldsymbol{R}_\zeta}$。由此可知，在 $\boldsymbol{R}_\zeta$的作用下，下列关系成立：$\langle \boldsymbol{R}_\zeta\, \boldsymbol{\xi}_A, \boldsymbol{R}_\zeta\, \boldsymbol{\xi}_B \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}_A, \boldsymbol{\xi}_B \rangle$，正如预期。因此，旋量空间上的这个内积在旋群的作用下保持不变。

$\hat{}$ 标架向量场 $\hat{}\boldsymbol{e}_{\mathfrak{m}}$ 的协变导数 $\nabla_{\mathfrak{m}}$ 通过以下关系确定旋量联络 $\hat{}\omega_{\mathfrak{mn}}{}^{p}$的分量:

$$\hat{\nabla}_{\mathfrak{m}}\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}} = \hat{\omega}_{\mathfrak{mn}}{}^{\mathfrak{p}}\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{p}}\,. \tag{5.31}$$

特别是，由于度规 $\hat{}\boldsymbol{g}$ 是协变常张量，因此所有指标均取下的旋量联络系数 $\hat{}\omega_{\mathfrak{mnp}} = \hat{}\omega_{\mathfrak{mn}}{}^{\mathfrak{q}}\delta_{\mathfrak{qp}}$ 在其后两个指标 $\hat{}\omega_{\mathfrak{mnp}} = -\hat{}\omega_{\mathfrak{mpn}}$ 上反对称。事实上，旋量联络中唯一可能非零的分量为

$$\hat{\omega}_{212} = -\hat{\omega}_{221} = \cot\theta_l\,. \tag{5.32}$$

然而请注意，旋量联络的指标分别用 $\delta_{\mathfrak{mn}}$ 和 $\delta^{\mathfrak{mn}}$ 升降，因此标架指标可以自由升降。特别是，$\hat{}\omega_{\mathfrak{m}}{}^{\mathfrak{np}} = \hat{}\omega_{\mathfrak{m}}{}^{[\mathfrak{np}]}$，其中方括号内的指标表示反对称化。由此可证明，协变导数 $\nabla_{\mathfrak{m}}$ 在旋量标架 [2] 中的作用如下

$$\hat{\nabla}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{\xi}_A \;=\; (\hat{\Omega}_{\mathfrak{m}})^{B}{}_{A}\boldsymbol{\xi}_B \quad \text{where} \quad \hat{\Omega}_{\mathfrak{m}} = -\frac{1}{4}\,\hat{\omega}_{\mathfrak{m}}{}^{\mathfrak{np}}\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{p}}\,. \tag{5.33}$$

$\hat{}$ 旋量场 $\boldsymbol{\Psi}\in\mathbb{S}$ 的协变导数为

$$\hat{\nabla}_{\mathfrak{m}}\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \left(\partial_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}\,\hat{\omega}_{\mathfrak{m}}{}^{\mathfrak{np}}\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{n}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{p}}\right)\hat{\boldsymbol{\Psi}}\,, \tag{5.34}$$

其中 $\partial_{\mathfrak{m}}$ 表示沿向量场 $\hat{}\boldsymbol{e}_{\mathfrak{m}}$ 的偏导数。

既然我们已经知道如何对旋量场作用协变导数，就可以像前几章中那样，将该协变导数作用于标量球谐函数，从而构造一类定义在球面上的函数。随后，我们可以将这类函数作为基，用来展开旋量分量。不过请注意，协变导数算符 $\nabla_{\mathfrak{m}}$ 携带一个来自 $\hat{}\boldsymbol{e}_{\mathfrak{m}}$ 的向量指标，这意味着与之等价的旋量形式携带两个旋量指标，即 $\nabla^{A}{}_{B}$，而旋量分量只有一个旋量指标，即 Ψ^{A}。因此，我们需要找到一种方法，得到仅带一个旋量指标的协变导数。为了绕过这一限制，相较于沿 $\hat{}\boldsymbol{e}_{\mathfrak{m}}$ 方向使用协变导数，对我们的目的而言，使用沿零向量$\boldsymbol{m}_A$ 的协变导数更为方便；该导数在 $\boldsymbol{R}_\zeta\in SPin(\mathbb{V})$ 的作用下变换为

$$\boldsymbol{m}_A \xrightarrow{\boldsymbol{R}_\zeta} \boldsymbol{m}'_A = e^{iA\zeta}\,\boldsymbol{m}_A\,. \tag{5.35}$$

[2]形式上，为了得到式 (5.33)，要求协变导数相对于克利福德作用满足莱布尼茨法则 $\hat{}\,\nabla_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{V}\hat{}\boldsymbol{\Psi}) = (\hat{}\nabla_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{V})\,\hat{}\boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{V}(\hat{}\nabla_{\mathfrak{m}}\hat{}\boldsymbol{\Psi})\;\forall\,\boldsymbol{V}\in\mathbb{V}$，$\hat{}\boldsymbol{\Psi}\in\mathbb{S}$并且与旋量空间上的内积相容，$\hat{}\nabla_{\mathfrak{m}}\left\langle\hat{}\boldsymbol{\Psi},\ \hat{}\boldsymbol{\Phi}\right\rangle = \left\langle\hat{}\nabla_{\mathfrak{m}}\hat{}\boldsymbol{\Psi},\ \hat{}\boldsymbol{\Phi}\right\rangle + \left\langle\hat{}\boldsymbol{\Psi},\ \hat{}\nabla_{\mathfrak{m}}\hat{}\boldsymbol{\Phi}\right\rangle\;\forall\,\hat{}\boldsymbol{\Psi},\ \hat{}\boldsymbol{\Phi}\in\mathbb{S}$。

利用向量 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}$ 对旋量 $\boldsymbol{\xi}_A$ 的作用满足方程 (5.14)，并结合自旋系数 (5.32)，将协变导数沿零向量 $\hat{\boldsymbol{m}}_A$ 投影，即 $\nabla_A \boldsymbol{\Psi} = (\nabla_1 + iA\nabla_2 \boldsymbol{\Psi})$，可得

$$\hat{\nabla}_A \hat{\boldsymbol{\Psi}} = \left(\hat{\nabla}_A \Psi^B\right) \boldsymbol{\xi}_B \,, \tag{5.36}$$

with

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_A \Psi^B &= \left(\partial_{\theta_l} + \frac{iA}{\sin\theta_l}\,\partial_{\phi_l} + \frac{AB}{2}\,\cot\theta_l\right)\Psi^B \\ &= (\sin\theta_l)^{As_l}\,\boldsymbol{m}_A\,(\sin\theta_l)^{-As_l}\Psi^B \,, \end{aligned} \tag{5.37}$$

其中，式 (5.12) 中定义的零向量 $\boldsymbol{m}_A$ 可视为作用于 S^2 上函数空间的微分算子，并且我们引入了参数 $s_l = -B/2$。在算符 ∇_A 的作用下，满足式 (5.37) 的分量 Ψ^B 称为具有自旋权重 $s_l = -B/2$。这是表征自旋权重数量的另一种方式，与纽曼和彭罗斯[3] 通过引入一阶微分算子 $\eth$ 和 $\bar{\eth}$ [131, 132, 133] 所做的工作非常相似。一般而言，定义在 S^2 上的量 Q，若在变换 (5.35) 下变为 [131, 132, 133]，则称其具有自旋权重 s_l

$$Q \to Q' = e^{is_l\zeta_l}\,Q \,. \tag{5.38}$$

接下来，我们应当检验分量 Ψ^A 在变换 (5.35) 下是否确实具有预期的自旋权重。为此，我们使用式 (5.30)，由此可得

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}} \xrightarrow{\boldsymbol{R}_\zeta} \hat{\boldsymbol{\Psi}}' = \Psi'^{+}\boldsymbol{\xi}'_{+} + \Psi'^{-}\boldsymbol{\xi}'_{-} \,. \tag{5.39}$$

其中 Ψ^A 由下式给出

$$\Psi'^{+} = e^{-i\zeta/2}\Psi^{+} \quad \text{and} \quad \Psi'^{-} = e^{i\zeta/2}\Psi^{-} \,, \tag{5.40}$$

因此，旋量分量 Ψ^+ 的自旋权重实际上为 $s_l = -1/2$，而旋量分量 Ψ^- 的自旋权重为 $s_l = +1/2$，这与式 (5.37) 完全一致。

使用协变导数算子 ∇_A 所进行的最大优势在于，∇_A 作用于所谓的自旋-$\frac{A}{2}$ 球谐函数时，其效果通常记作

[3]微分算子 $\eth$ 和 $\bar{\eth}$ 作用于自旋权重为 s_l 的量 Q 时，若将算符 $\eth$ 记为 $\eth_+$，将 $\bar{\eth}$ 记为 $\eth_-$，则可用更紧凑的形式表示。在特定的 $\{\theta_l, \phi_l\}$ 坐标系中，后两个算符定义为满足：

$$\begin{aligned} \eth_A Q &= \left[(\sin\theta_l)^{As_l}\,\boldsymbol{m}_A\,(\sin\theta_l)^{-As_l}\right] Q \\ &= \left(\partial_{\theta_l} + \frac{iA}{\sin\theta_l}\,\partial_{\phi_l} - A\,s_l\cot\theta_l\right) Q \,, \end{aligned}$$

其中，s_l 是量 Q [131]的所谓自旋权重。通过比较方程（5.37）与上式，可以立即得出旋量分量 Ψ^A 的自旋权重为 $s_l = -A/2$。

$_{-\ \ {}_{\frac{A}{2}}}Y_{j_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)$是众所周知的，任何自旋权重为 $s_l = -A/2$ 的量都可以展开为关于 ${}_{\frac{A}{2}}Y_{j_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)$的级数。对于给定的一组半整数参数$\{j_l, m_l, s_l\}$，自旋-$s_l$球谐函数可由以下方程[131, 132, 133]定义：

$$\hat{\nabla}_A\,({}_{s_l}Y_{j_l,m_l}) = A\sqrt{j_l(j_l+1)-s_l(s_l+A)}\,{}_{s_l+A}Y_{j_l,m_l} \quad \text{for} \quad j_l \in \{1/2, 3/2, 5/2\ldots\}\,, \tag{5.41}$$

由此可见，若${}_{s_l}Y_{j_l,m_l}$ 的自旋权重为 s_l，则 $\nabla_A({}_{s_l}Y_{j_l,m_l})$的自旋权重为$s_l + A$。注意，${}_{s_l}Y_{j_l,m_l}$ 在 $|s_l| > j_l$时未定义。事实上，很容易看出，对于 $A = +1$ ， ∇_A 会湮灭${}_{j_l}Y_{j_l,m_l}$；而对于 $A = -1$， ∇_A 会湮灭${}_{-j_l}Y_{j_l,m_l}$。自旋-s_l 球谐函数对于满足条件 $|s_l| \le j_l$ 的每个 s_l 值构成完备正交集，也就是说，它们定义了一个基，任何自旋权重为 s_l 的函数都可据此展开为关于${}_{s_l}Y_{j_l,m_l}$的级数。

考虑到旋量场$\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ 的旋量分量 Ψ^A 具有半整数自旋权重 $s_l = -A/2$，将它们按自旋-$\frac{A}{2}$ 球谐函数$\underline{{}_{\frac{A}{2}}}Y_{\ell_l,m_l}$展开会很方便，因此二维球面上旋量场的自然试探形式为

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\theta_l,\phi_l) = \sum_A \Psi_A(\theta_l,\phi_l)\boldsymbol{\xi}_A \quad \text{with} \quad \Psi_A(\theta_l,\phi_l) = \sum_{j_l,m_l} c_{j_l,m_l}\,{}_{-\frac{A}{2}}Y_{j_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)\,, \tag{5.42}$$

现在，狄拉克旋量是狄拉克算子 $\boldsymbol{D}_l = \delta^{\mathfrak{mn}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}\nabla_{\mathfrak{n}}$ 的一个特征函数，其特征值为 λ_l ，即

$$\hat{\boldsymbol{D}}_l\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \lambda_l\,\hat{\boldsymbol{\Psi}}\,. \tag{5.43}$$

因此，由于向量 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathfrak{m}}$ 作用于旋量 $\boldsymbol{\xi}_A$ 时满足公式（5.14），可知上述以 ${}_{\frac{A}{2}}Y_{j_l,\ m_l}(\theta_l,\ \phi_l)$ 表示的狄拉克方程可写为：

$$\hat{\nabla}_A\left({}_{-\frac{A}{2}}Y_{j_l,m_l}\right) = \lambda_l\ {}_{\frac{A}{2}}Y_{j_l,m_l}\,. \tag{5.44}$$

为了得到上述表达式，我们在求和中将索引 A 改为 $-A$。由于对 A 的求和遍历集合 $\{+,-\}$的所有取值，而这些取值与 $-A$的取值列表相同，因此最终结果保持不变。根据公式（5.41），我们得出结论：狄拉克方程（5.44）仅当特征值为非零整数[134, 135]时才存在正则解析解

$$\lambda_l = A\left|j_l+\frac{1}{2}\right| = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \quad \text{for} \quad j_l \in \{1/2, 3/2, 5/2\ldots\}\,. \tag{5.45}$$

现在，旋量场的试探形式可以自然地推广到高维。为此，第一步是引入一个合适的向量场正交归一标架。在本书所讨论的问题中，背景

是 dS_2 与二维球面的直积，因此每个二维球面都具有球对称性。该空间的一个合适的正交归一标架 $\boldsymbol{e}_\alpha$ ，其中$\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ D = 2d$，可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \ &= \ -i\cosh(x/R_1)\,\partial_t \quad , \quad \boldsymbol{e}_l \ = \ \frac{1}{R_l \sin\theta_l}\,\partial_{\phi_l}\,, \\ \boldsymbol{e}_{\tilde{1}} \ &= \ \cosh(x/R_1)\,\partial_x \quad , \quad \boldsymbol{e}_{\tilde{l}} \ = \ \frac{1}{R_l}\,\partial_{\theta_l}\,, \end{aligned} \tag{5.46}$$

其中索引 l 的取值范围为 2 到 d。由于 $\{\boldsymbol{e}_\alpha\}$ 是正交归一的，因此度规 $\boldsymbol{g}$ 在该标架中的分量为常数。采用这一记号，特别有

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta) \ = \ \delta_{\alpha\beta} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b) \ = \ \delta_{ab}\,, \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_{\tilde{b}}) \ = \ 0\,, \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_{\tilde{a}}, \boldsymbol{e}_{\tilde{b}}) \ = \ \delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\,, \end{cases} \tag{5.47}$$

其中 a 和 $\tilde{a}$ 是索引，取值范围为 1 到 d。例如，索引 a仅用于标记正交归一标架 $\{\boldsymbol{e}_a\}$中前 d 个向量场，而索引 $\tilde{a}$则用于标记该标架 $\{\boldsymbol{e}_{\tilde{a}}\}$中其余的 d 个向量。这些向量场可由狄拉克矩阵 Γ_α 表示；在 $D = 2d$ 维空间中，这些矩阵通过满足以下关系的 $2^d \times 2^d$ 个矩阵忠实地表示克利福德代数：

$$\Gamma_\alpha\,\Gamma_\beta + \Gamma_\beta\,\Gamma_\alpha = 2\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta)\,\mathbb{I}_d\,, \tag{5.48}$$

其中 $\mathbb{I}_d$ 表示 $2^d \times 2^d$ 单位矩阵。为了实现狄拉克方程的可分离性，需要为狄拉克矩阵选取合适的表示。下文中， 2×2 单位矩阵记为 $\mathbb{I}$，而泡利矩阵则采用通常的记号：

$$\sigma_1 \ = \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_2 \ = \ \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_3 \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.49}$$

Usi采用这一记号，狄拉克矩阵的一种方便表示如下 ：

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \underbrace{\sigma_3 \otimes \ldots \otimes \sigma_3}_{(a-1)\ \text{times}} \otimes \sigma_1 \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \ldots \otimes \mathbb{I}}_{(d-a)\ \text{times}}, \\ \Gamma_{\tilde{a}} &= \underbrace{\sigma_3 \otimes \ldots \otimes \sigma_3}_{(a-1)\ \text{times}} \otimes \sigma_2 \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \ldots \otimes \mathbb{I}}_{(d-a)\ \text{times}}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

事实上，我们可以很容易地验证，上述矩阵[4]确实满足方程（5.48）给出的克利福德代数。在这种情况下，旋量场由列向量表示，这些列向量具有 d 个分量，矩阵作用于其上。因此，由于旋量

[4]在 $D = 2d+1$ 中，除了 $2d$ 狄拉克矩阵 Γ_a 和 $\Gamma_{\tilde{a}}$ 外，我们还需要加入一个矩阵，记作 Γ_{d+1}，其定义为 $\Gamma_{d+1} = \underbrace{\sigma_3 \otimes \sigma_3 \ldots \otimes \sigma_3}_{d\ 次}$.

$\{\boldsymbol{\xi}_A\}$ 可以用列向量 $\{\xi_A\}$表示，若引入一个旋量指标 A_a，其取值为“ $+1''$ 和“ $-1''$，那么旋量空间中的一个 $D=2d$ 维基由元素的直积张成，直积中的元素重复 ξ_{A_a} d 次，即$\xi_{A_1}\otimes\xi_{A_2}\otimes\ldots\xi_{A_d}$。基定义后，任意旋量场都可以在此基上表示为

$$\Psi = \sum_A \Psi_{A_1A_2\ldots A_d}\,\xi_{A_1}\otimes\xi_{A_2}\otimes\cdots\otimes\xi_{A_d}\,. \tag{5.51}$$

由于每个索引 A_a 只能取两个值，因此对 $\{A\}\equiv\{A_1,A_2,\ldots,A_d\}$ 求和共包含 2^d 项，这恰好等于 $D=2d$ 维时旋量场的自由度数。分量 $\Psi_{A_1A_2\ldots A_d}$ 在旋转下的变换方式与自旋为 $1/2$ 的场的分量相同，因此，其角向依赖应由自旋为 $A/2$ 的球谐函数 ${}_{\frac{A}{2}}Y_{\ell_l,\ m_l}$的乘积给出；这与我们对标量场、麦克斯韦场和引力场所做的处理非常相似。因此，与背景对称性相符的旋量分量试探形式为

$$\Psi_{A_1A_2\ldots A_d} = \sum_{j,m}\Psi^{jm}_{A_1}(t,x)\ {}_{\frac{\breve{A}}{2}}\mathcal{Y}_{jm}\,, \tag{5.52}$$

其中

$${}_{\frac{\breve{A}}{2}}\mathcal{Y}_{jm} = \prod_{l=2}^{d}{}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}(\theta_l,\phi_l)\,. \tag{5.53}$$

集体索引 $\{j,m\}$ 上的求和意味着我们对集合 $\{j_2,m_2,j_3,m_3,\ldots j_d,m_d\}$ 中的所有取值求和，而集体索引 $\{\breve{A}\}$ 则表示集合 $\{A_2,A_3,\ldots A_d\}$ 中的所有取值。

5.3 狄拉克方程的可分离性

以上所有内容都是解决广义纳里艾背景中狄拉克方程分离问题所必需的工具。一个自旋 1/2 场 Ψ，如式 (5.51) 中所定义，带有电荷 q 和质量 μ，在这种背景中传播时，是一个满足以下形式狄拉克方程的旋量场：

$$\not{D}\Psi = \mu\Psi\,, \tag{5.54}$$

其中，算符 $\not{D}$ 是与背景规范场 $\mathcal{A}^{GN}_\alpha$ 的分量最小耦合的狄拉克算子，即

$$\not{D} = \Gamma^\alpha(\nabla_\alpha - iq\mathcal{A}^{GN}_\alpha)\,, \tag{5.55}$$

其中，算符 ∇_α 表示旋量协变导数，其作用于旋量场 Ψ 上时可表示为

$$\nabla_\alpha \Psi = \left(\partial_\alpha - \frac{1}{4} \omega_\alpha{}^{\beta\gamma} \Gamma_\beta \Gamma_\gamma \right) \Psi \,, \tag{5.56}$$

其中 ∂_α 表示沿向量场 $\mathbf{e}_\alpha$ 的偏导数。

请注意，满足 $\omega_\alpha{}^{\beta\gamma}$反对称性质 $\omega_{\alpha\beta\gamma} = -\omega_{\alpha\gamma\beta}$的旋量联络分量 ∇_α ，由协变导数算子 ∇_α 作用于向量场标架 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 的结果确定，即 $\nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = \omega_\alpha{}^{\beta\gamma} \boldsymbol{e}_\gamma$。由此可得，旋量联络中唯一可能不为零的分量为

$$\omega_{1\tilde{1}1} = -\omega_{11\tilde{1}} = -\frac{1}{R_1} \sinh(x/R_1) \,, \tag{5.57}$$

$$\omega_{l\tilde{l}l} = -\omega_{ll\tilde{l}} = \frac{1}{R_l} \cot\theta_l \,. \tag{5.58}$$

为求解狄拉克方程，我们需要分离场的自由度，而这通常颇具挑战性。然而，引入 1-形式的对偶标架 $\{\boldsymbol{E}^\alpha\}$，定义其对 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 的作用为 $\boldsymbol{E}^\alpha(\boldsymbol{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$，即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^1 &= \frac{i}{\cosh(x/R_1)} \, dt \quad , \quad \boldsymbol{E}^l = R_l \sin\theta_l d\phi_l, \\ \boldsymbol{E}^{\tilde{1}} &= \frac{1}{\cosh(x/R_1)} \, dx \quad , \quad \boldsymbol{E}^{\tilde{l}} = R_l \, d\theta_l \,, \end{aligned} \tag{5.59}$$

我们看到，线元和背景规范场 $\mathcal{A}^{GN}_\mu$可写为:

$$g^{GN}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum_{a=1}^{d} \left(\boldsymbol{E}^a \boldsymbol{E}^a + \boldsymbol{E}^{\tilde{a}} \boldsymbol{E}^{\tilde{a}} \right) \tag{5.60}$$

$$\mathcal{A}^{GN}_\mu dx^\mu = \sum_{a=1}^{d} \left(\mathcal{A}^{GN}_a \boldsymbol{E}^a + \mathcal{A}^{GN}_{\tilde{a}} \boldsymbol{E}^{\tilde{a}} \right) \tag{5.61}$$

其中，在所考虑标架中的分量 $\mathcal{A}^{GN}_a$和 $\mathcal{A}^{GN}_{\tilde{a}}$为

$$\mathcal{A}^{GN}_1 = -iQ_1 R_1 \sinh(x/R_1) \quad , \quad \mathcal{A}^{GN}_j = Q_l R_l \cot\theta_l \quad , \quad \mathcal{A}^{GN}_{\tilde{a}} = 0 \,. \tag{5.62}$$

值得注意的是，背景场 $g^{GN}_{\mu\nu}$、 $\mathcal{A}^{GN}_\mu$恰好属于参考文献 [136] 研究的解类μ。事实上，该文的主要目标是证明，在由二维空间直积构成的背景中，最小耦合于背景规范场的狄拉克方程是可分离的。现在，我们来介绍这一分离方法的要点。

用先前介绍的元素 ξ_{A_a} 表示的旋量基十分方便，因为可以轻松计算狄拉克矩阵对旋量场的作用。事实上，利用方程 (5.50) 和 (5.51)，以及泡利矩阵对列向量 ξ_{A_a} 的作用满足以下关系这一事实，

$$\sigma_1\xi_{A_a} = \xi_{-A_a} \quad , \quad \sigma_2\xi_{A_a} = iA_a\xi_{-A_a} \quad , \quad \sigma_3\xi_{A_a} = A_a\xi_{A_a}\,, \tag{5.63}$$

我们最终得到以下方程

$$\begin{aligned}\Gamma_a\Psi = \sum_A (A_1A_2...A_{a-1})\Psi_{A_1A_2...A_d}\xi_{A_1} \otimes \xi_{A_2} \otimes \ldots \otimes \xi_{A_{a-1}} \otimes \xi_{-A_a} \otimes \xi_{A_{a+1}} \otimes \\ \ldots \otimes \xi_{A_d} = \sum_A (A_1A_2\ldots A_a)A_a\Psi_{A_1A_2...A_{a-1}(-A)A_{a+1}...A_d}\xi_{A_1} \otimes \xi_{A_2} \otimes \\ \ldots \otimes \xi_{A_{a-1}} \otimes \xi_{A_a} \otimes \xi_{A_{a+1}} \otimes \ldots \otimes \xi_{A_d},\end{aligned} \tag{5.64}$$

其中，从第一行到第二行，我们将索引 A_a 改为 $-A_a$。由于我们对 A_a 的所有取值求和，而这些取值与 $-A_a$ 的取值构成相同的列表，因此这不会改变最终结果。此外，我们还利用了 $(A_a)^2 = 1$。类似地，我们有：

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tilde{a}}\Psi = \sum_A (A_1A_2...A_{a-1})(iA_a)\Psi_{A_1A_2...A_d}\,\xi_{A_1} \otimes \xi_{A_2} \otimes ... \otimes \xi_{A_{a-1}} \otimes \xi_{-A_a} \otimes \xi_{A_{a+1}} \otimes \\ ... \otimes \xi_{A_d} = -i\sum_A (A_1A_2...A_a)\Psi_{A_1A_2...A_{a-1}(-A_a)A_{a+1}...A_d}\,\xi_{A_1} \otimes \xi_{A_2} \otimes \\ .. \otimes \xi_{A_{a-1}} \otimes \xi_{A_a} \otimes \xi_{A_{a+1}} \otimes ... \otimes \xi_{A_d}\,.\end{aligned} \tag{5.65}$$

为了实现一般方程（5.55）的分离，我们设旋量分量采用式（5.52）中定义的分解形式。利用这一对于实现狄拉克方程的可积性至关重要的重要分解，并结合式（5.64）和（5.65），经过一些仔细的代数运算，可以证明分量 $\Psi^{jm}_{A_1}$ 满足以下微分方程（欢迎读者自行推导下面的两个方程，或参阅文献 [136] 以了解更多详情）：

$$\begin{aligned}\left[\partial_{\tilde{1}} + \frac{\omega_{1\tilde{1}1}}{2} - iq\mathcal{A}^{GN}_{\tilde{1}} - iA_1\left(\partial_1 + \frac{\omega_{\tilde{1}1\tilde{1}}}{2} - iq\mathcal{A}^{GN}_1\right)\right]\Psi^{jm}_{A_1} \\ = (c_1 - iA_1\mu)\Psi^{jm}_{-A_1}\,,\end{aligned} \tag{5.66}$$

其中，后一个方程中出现的参数 c_1 是由狄拉克方程的角向部分确定的一组（$d-1$）分离常数中的一员，即 $\{c_1, c_2, ..., c_{d-1}\}$；其中每个角分量 ${}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,\ m_l}$ 都满足以下微分方程：

$$\begin{aligned}\left[\partial_{\tilde{l}} + \frac{\omega_{l\tilde{l}l}}{2} - iq\mathcal{A}^{GN}_{\tilde{l}} - iA_l\left(\partial_l + \frac{\omega_{\tilde{l}l\tilde{l}}}{2} - iq\mathcal{A}^{GN}_l\right)\right]{}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l} \\ = (c_l + A_1c_{l-1})_{-\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}\,,\end{aligned} \tag{5.67}$$

其中， $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $\mathcal{A}_\alpha^{GN}$分别是旋量联络和背景规范场的分量，从而实现了我们一直寻求的可分离性。

由于自旋-s_l 球谐函数在球面上满足正则性要求，也就是说在坐标系失效的点 $\theta_l = 0$ 和 $\theta_l = \pi$ 处满足要求，因此分离常数 $\{c_1, c_2, ..., c_{d-1}\}$ 只能取离散值。特别是，我们将看到，在某些条件下，这些分离常数恰好是球面上狄拉克算子的特征值。既然我们已经将广义狄拉克方程分离为方程（5.66）和（5.67），现在就进一步研究这些方程。为了研究准正规模，我们需要将一阶微分方程（5.66）转换为关于 $\Psi^{jm}_{A_1}$ 的薛定谔微分方程，而该方程又通过分离常数c_1包含角向部分$_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,\ m_l}$ 的信息。因此，在继续之前，我们首先需要明确确定这个分离常数。

—

5.3.1 狄拉克方程的角向部分

现在来推导狄拉克方程的角向部分，即关于 $_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}$ 的方程。在此处考虑的标架中，根据式 (5.58) 和 (5.62)， $\omega_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathcal{A}_\alpha^{GN}$ 的角分量中可能不为零的只有

$$\omega_{l\tilde{l}l} = -\omega_{l\tilde{l}l} = \frac{1}{R_l}\cot\theta_l \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_l^{GN} = Q_l R_l \cot\theta_l, . \tag{5.68}$$

然后，将这些表达式代入式 (5.67)，可得以下微分方程:

$$\left(\nabla_{A_l} + A_l q Q_l R_l^2 \cot\theta_l\right) {}_{-\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l} = R_l(A_l\, c_{l-1} - c_l)\, {}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}\,. \tag{5.69}$$

为了以更便于处理的形式写出该方程，我们不使用 $(d-1)$ 分离常数 $\{c_1, c_2, ..., c_{d-1}\}$，而引入由下式定义的参数 $\{\lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_d\}$

$$\frac{\lambda_l}{R_l} \equiv \sqrt{c_{l-1}^2 - c_l^2} \quad \text{and} \quad c_d = 0. \tag{5.70}$$

因此，反解这些表达式可证明，参数 $\{c_l\}$ 与参数 $\{\lambda_l\}$ 之间满足以下恒等式

$$c_{l-1} = \sqrt{\frac{\lambda_l^2}{R_l^2} + \frac{\lambda_{l+1}^2}{R_{l+1}^2} + \ldots + \frac{\lambda_d^2}{R_d^2}}\,. \tag{5.71}$$

接下来，如果我们引入参数

$$\varphi_l = \operatorname{arctanh}(c_l/c_{l-1})\,, \tag{5.72}$$

不难证明以下恒等式

$$c_l = \frac{\lambda_l}{R_l}\sinh\varphi_l \quad \text{and} \quad c_{l-1} = \frac{\lambda_l}{R_l}\cosh\varphi_l\,, \tag{5.73}$$

因此，假设后面的关系成立，公式（5.69）右端 ${}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}$ 的乘法因子可以用 λ_l 和 φ_l 表示如下：

$$R_l\left(A_l c_{l-1} - c_l\right) = A_l\lambda_l e^{-A_l\varphi_l}\,. \tag{5.74}$$

将上述表达式代入公式（5.69），可得以下微分方程：

$$\left(\nabla_{A_l} + A_l q Q_l R_l^2\cot\theta_l\right)\left(e^{A_l\varphi_l/2}\,{}_{-\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}\right) = A_l\lambda_l\left(e^{-A_l\varphi_l/2}\,{}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}\right)\,. \tag{5.75}$$

除了改变参数之外，如果再进行一次场重定义，就可以得到一个与参数 φ_l 无关的微分方程。具体而言，进行如下场重定义

$${}_{\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l} := e^{-A_l\varphi_l/2}\,{}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}\,, \tag{5.76}$$

对于 ${}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}$，公式（5.75）具有如下形式：

$$\left(\nabla_{A_l} + A_l q Q_l R_l^2\cot\theta_l\right)\,{}_{-\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l} = A_l\lambda_l\,{}_{\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l}\,. \tag{5.77}$$

注意到，由于 $e^{-A_l\varphi_l/2}$ 只是一个常数乘法因子，${}_{A_l}\mathbb{Y}_{j_l,m_l}$ 具有 ${}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}$ 所满足的相同性质。特别是，${}_{\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l}$ 也是一个自旋-$A/2$ 球谐函数，因此满足公式（5.41）。

使用 $\{\lambda_l,\,{}_{\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l}\}$ 而非 $\{c_l,\,{}_{\frac{A_l}{2}}Y_{j_l,m_l}\}$ 的一大优势，在背景的磁荷消失时，即 $Q_l = 0$，便会显现出来。在这种情况下，关于${}_{\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l}$ 的方程化简为

$$\nabla_{A_l}\left({}_{-\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l}\right) = A_l\lambda_l\,{}_{\frac{A_l}{2}}\mathbb{Y}_{j_l,m_l}\,, \tag{5.78}$$

这正是第 l 个二维单位球面上的狄拉克方程，其特征值已知，即式（5.45）。事实上，只有当特征值 λ_l 为非零整数 [125,126]时，自旋-1/2 球谐函数才是球面上的正则解析函数

$$\lambda_l = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots. \tag{5.79}$$

值得强调的是，参数 c_1 是 $\Psi_{A_1}^{jm}$ 方程中唯一出现的分离常数。特别地，根据公式（5.71），这个分离常数与狄拉克方程的特征值之间的关系为

$$c_1 = \sqrt{\sum_{l=2}^{d}\frac{\lambda_l^2}{R_l^2}}\,. \tag{5.80}$$

由于公式（5.77）中的情形 $Q_l = 0$ 存在已知解，如上文所述，因此我们可以通过微扰方法来寻找情形 $Q_l \neq 0$ 的解，其中 Q_l 是微扰参数。事实上，在著名的论文 [138], 中，Press 和 Teukolsky 也采取了类似的途径，以求出克尔时空中具有任意自旋的场的运动方程的角向部分的解及其特征值；在该情形下，黑洞的角动量是阶参数。关于这一点，另请参见文献 [139]。

关于场 $\Psi^{jm}_{A_1}$ 的微分方程，在所考虑的标架中，自旋系数和背景电磁场唯一非零的径向分量为

$$\omega_{1\tilde{1}1} = -\,\omega_{11\tilde{1}} = -\frac{1}{R_1}\sinh(x/R_1) \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_1^{GN} = -iQ_1R_1\sinh(x/R_1)\,. \tag{5.81}$$

由于方程 $\Psi^{jm}_{A_1}$ 中的系数不依赖坐标 t，这是因为 ∂_t 是我们度规的一个 Killing 矢量场，因此我们可以将 $\Psi^{jm}_{A_1}$ 的时间依赖性按傅里叶基展开，

$$\Psi^{jm}_{A_1}(t,x) \;=\; e^{-i\omega t}\,\psi^{\omega}_{A_1,jm}(x)\,. \tag{5.82}$$

为使符号简洁，这里省略了对傅里叶频率 ω 所有取值的积分。由此可得，场方程 (5.66) 给出

$$\left[\frac{d}{dx} + iA_1\omega + \left(iA_1qQ_1R_1 - \frac{1}{2R_1}\right)\tanh(x/R_1)\right]\psi^{\omega}_{A_1,jm} \\ = \frac{(c_1 - iA_1\,\mu)}{\cosh(x/R_1)}\,\psi^{\omega}_{-A_1,jm}\,.$$

请注意，这些一阶微分方程是耦合的，即自旋子分量 $\psi^{\omega}_{+,jm}$ 是分量 $\psi^{\omega}_{-,jm}$ 的源项，反之亦然。例如，消去 $\psi^{\omega}_{-,jm}$，可得到分量 $\psi^{\omega}_{+,jm}$ 的二阶微分方程。经过这一步及一些代数运算后，我们得到场 $\psi^{\omega}_{A_1,jm}$ 的以下薛定谔型微分方程

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} \;+\; \omega^2 \;-\; V_{s=1/2}(x)\right]\psi^{\omega}_{A_1,jm} \;=\; 0\,, \tag{5.83}$$

其中，势 $V_{s=1/2}(x)$是在式 (3.11) 中讨论的势，其参数$\mathfrak{a}$、 $\mathfrak{b}$， $\mathfrak{c}$ 和 $\mathfrak{d}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \;&=\; \frac{1}{4R_1^2} - q\,Q_1(iA_1 + q\,Q_1\,R_1^2)\,,\\
\mathfrak{b} \;&=\; -\frac{\omega}{R_1}\,(iA_1 + 2\,q\,Q_1\,R_1^2)\,,\\
\mathfrak{c} \;&=\; \mu^2 + \sum_{l=2}^{d}\frac{\lambda_l^2}{R_l^2} + \frac{1}{4R_1^2} + q^2\,Q_1^2R_1^2\,,\\
\mathfrak{d} \;&=\; \frac{1}{R_1}\,.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

这里使用了分离常数 c_1 的表达式，即式 (5.80)。这类势称为 Rosen-Morse 型势，是 Pöschl-Teller 势 [94, 95]的推广。不难看出，这个势满足以下性质：

$$V_{s=1/2}\big|_{x\to+\infty} \to \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \quad \text{and} \quad V_{s=1/2}\big|_{x\to-\infty} \to \mathfrak{a}-\mathfrak{b}\,. \tag{5.85}$$

一般而言，假定势函数 $V_{s=1/2}$ 在 $r=0$ ($x=0$)处正则，特别是它可以等于一个非零常数。在我们的情形中，我们发现

$$V_{s=1/2}\big|_{x\to0} \to \mathfrak{a}+\mathfrak{c}\,, \tag{5.86}$$

显然，这是正则的。因此，我们指出，对于此势，(5.85) 和 (5.86) 中的两个极限都是有限的，所以没有理由要求这些点处存在正则解。请注意，上述势是复数，而在大多数准正规模问题中，势通常是实数。尽管可以通过场重定义使势变为实数，但我们在此不这样做；参见文献 [137]。此外，由于该势在 $x\to\pm\infty$处不为零，边界处的解不是平面波型，参见式 (5.89)。

5.4 自旋-1/2 准正规模

将式 (5.84) 代入式 (3.14)，可得超几何方程中的常数可以写为

$$\begin{aligned}
a &= iR_1\sqrt{\mu^2+\sum_{l=2}^{d}\frac{\lambda_l^2}{R_l^2}+q^2Q_1^2R_1^2}+(1+A_1)\left(\frac{1}{4}-i\omega\frac{R_1}{2}\right)-i(1-A_1)\frac{qQ_1R_1^2}{2}\,,\\
b &= -iR_1\sqrt{\mu^2+\sum_{l=2}^{d}\frac{\lambda_l^2}{R_l^2}+q^2Q_1^2R_1^2}+(1+A_1)\left(\frac{1}{4}-i\omega\frac{R_1}{2}\right)-i(1-A_1)\frac{qQ_1R_1^2}{2}\,,\\
c &= \frac{1}{2}+iA_1\left(qQ_1R_1^2-\omega R_1\right)\,.
\end{aligned} \tag{5.87}$$

现在，有了式 (5.87)，我们可以施加边界条件，以研究准正规模。为此，我们只需要式 (3.20) 和 (3.23) 中得到的渐近行为；由于它们仅取决于指数 $\mathfrak{d}(c-1)$ 和 $\mathfrak{d}(a+b-c)$，因此有必要写出以下组合的显式表达式：

这些组合：

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(c-1) &= -iA_1\omega + iA_1qQ_1R_1 - \frac{1}{2R_1}\,,\\ \mathfrak{d}(a+b-c) &= -i\omega - iqQ_1R_1 + \frac{A_1}{2R_1}\,.\end{aligned} \tag{5.88}$$

现在我们已经可以施加边界条件了。不失一般性，我们可以认为自旋 A_1 已在 $A_1 = +$ 或 $s_1 = -$ 处选定并固定，因为准正规频率不应取决于 $A_1 = \pm$的选择。举例来说，让我们对旋量场的分量 $A_1 = +$ 施加边界条件（IV）。在这种情况下，利用恒等式 (5.88) 以及方程 (3.20)，最终可得解在 $x \to -\infty$处的如下行为：

$$e^{-i\omega t}\psi^{\omega}_{+,jm}\big|_{x\to-\infty} = \alpha\, e^{-i\omega(t+x)}\, e^{\left(iqQ_1R_1-\frac{1}{2R_1}\right)x} + \beta\, e^{-i\omega(t-x)}\, e^{-\left(iqQ_1R_1-\frac{1}{2R_1}\right)x}\,, \tag{5.89}$$

正如预期的那样，这不是平面波型的解，因为势在此处不为零。对于边界条件（IV），图 3.3 告诉我们，$e^{-i\omega t}\psi^{\omega}_{+,\ jm}$ 在 $x \to -\infty$处必须具有 $e^{-i\omega(t-x)}$ 型的依赖关系，而在 $x \to +\infty$处则必须呈现 $e^{-i\omega(t+x)}$ 的形式。因此，由方程 (5.89) 可知，我们必须令 $\alpha = 0$。然后，将 $\alpha = 0$ 代入 (3.23)，可得解在 $x \to +\infty$处的如下行为：

$$\begin{aligned}e^{-i\omega t}\psi^{\omega}_{+,jm}\big|_{x\to+\infty} \simeq\ & \beta\left[\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}\right] e^{-i\omega(t+x)}\, e^{\left(iqQ_1R_1-\frac{1}{2R_1}\right)x}\\ &+\beta\left[\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}\right] e^{-i\omega(t-x)}\, e^{\left(-iqQ_1R_1+\frac{1}{2R_1}\right)x}\,.\end{aligned} \tag{5.90}$$

边界条件（IV）要求乘以 $e^{-i\omega(t-x)}$ 的系数必须为零。由于 β 不能为零，否则该模态将恒等于零，因此我们需要伽马函数的组合为零。伽马函数没有零点，因此要实现这一点，就必须使分母中的伽马函数发散，即 $\Gamma(a-c+1) = \infty$ 或 $\Gamma(b-c+1) = \infty$。由于伽马函数仅在非正整数处发散，因此我们得到以下约束：

$$a-c+1 = -n \quad \text{or} \quad b-c+1 = -n\,, \tag{5.91}$$

with n 为非负整数。这意味着频率必须为

$$\omega_{\rm IV} = \pm\sqrt{\mu^2 + \sum_{l=2}^{d}\frac{\lambda_l^2}{R_l^2} + q^2Q_1^2R_1^2} + \frac{i}{2R_1}\,(2n+1)\,, \tag{5.92}$$

其中包含 $n \in \{0,1,2,\ldots\}$。值得回顾的是，λ_l 是第 l 个二维球面上狄拉克方程的特征值。同样，对

旋量场的分量 $A_1 = -$ 施加边界条件（IV），我们发现必须在式（3.20）中令 $\beta = 0$，然后令 $c - a = -n$ 或 $c - b = -n$，其中 n 为非负整数。由此得到的谱与分量 $A_1 = +$ 所得的谱相同，即（5.92）。

类似地，对于旋量场施加边界条件（II）和（III），我们发现这些情况下不存在准正规模，这与标量场和麦克斯韦场的情况相同。另一方面，施加边界条件（I）时，我们发现准正规频率为

$$\omega_{\rm I} = \pm \sqrt{\mu^2 + \sum_{l=2}^{d} \frac{\lambda_l^2}{R_l^2} + q^2 Q_1^2 R_1^2} - \frac{i}{2R_1} (2n+1) \,, \tag{5.93}$$

其中 $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$。

5.4.1 分析解的正则性

为简化记号，这里省略 jm of $\Psi_{A_1}^{jm}$ 的指标。我们已经看到，旋量分量 Ψ_{A_1} 的解在边界处并非严格的平面波，这是因为势 $V_{s=1/2}(x)$ 在 $x \to \pm\infty$ 处不为零。事实上，当假设边界条件为 (I)，且谱由 (5.92) 给出时，计算时变场 Ψ_{A_1} 的渐近形式，我们得到

$$\begin{aligned}
\Psi_+|_{x\to-\infty} &= \alpha\, e^{-i\omega t} e^{\mathfrak{d}(c-1)x} \\
&= \alpha\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t-x)}\, e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{-(n+1-iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}} \,, && (5.94) \\
\Psi_+|_{x\to+\infty} &= \alpha \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} e^{-i\omega t} e^{-\mathfrak{d}(a+b-c)x} \\
&= \alpha \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t+x)} \\
&\quad \times e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{(n+iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}} \,, && (5.95) \\
\Psi_-|_{x\to-\infty} &= \beta\, e^{-i\omega t} e^{-\mathfrak{d}(c-1)x} \\
&= \beta\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t-x)}\, e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{-(n-iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}} \,, && (5.96) \\
\Psi_-|_{x\to+\infty} &= \beta \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-i\omega t} e^{\mathfrak{d}(a+b-c)x} \\
&= \beta \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t+x)} \\
&\quad \times e^{-(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{(n-iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}} \,. && (5.97)
\end{aligned}$$

观察这些渐近形式，可以发现两个显著特征：(i) 解并不代表向右或向左传播的行波，而边界条件要求解应当如此；(ii) 由于 n 为实数且为正，两个场 $\Psi_{\pm}$ 都在边界处呈指数发散。似乎出了什么问题。尽管如此，这种印象源于我们考察的是场本身，而不是分析描述狄拉克粒子通量的守恒流。

与背景电磁场相互作用的狄拉克场所对应的守恒流为 $J_\alpha = \Psi\Gamma_\alpha\Psi$，其中 Ψ 表示 Ψ的伴随；对于此处采用的表示，它由下式给出

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \left(\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \cdots \otimes \sigma_3\right), \tag{5.98}$$

另见文献 [127]。特别地，径向上的流为：

$$\begin{aligned} J_{\tilde{1}} &= (e_{\tilde{1}})_\alpha \, J^\alpha \\ &= \sum_A \sum_B \left[\Psi_{A_1}(t,x)\xi_{A_1}\right]^\dagger \sigma_2\sigma_3\Psi_{B_1}(t,x)\xi_{B_1} \times (\text{Angular Part}). \end{aligned} \tag{5.99}$$

因此，利用 $\sigma_2\xi_{A_1} = iA_1\xi_{-A_1}, \sigma_3\xi_{A_1} = A_1\xi_{A_1}$ 以及 $\xi^\dagger_{A_1}\xi_{B_1} = \delta_{A_1B_1}$，并忽略由角向依赖性产生的乘法因子，可得径向流为

$$J_{\tilde{1}} = \mathrm{Re}(\Psi_+\Psi_-^\star), \tag{5.100}$$

其中 $\star$表示复共轭，而 Re(···)取其自变量的实部。随后，将渐近形式 (5.95) 代入式 (5.100)，可得边界条件为 (I) 时流的以下渐近行为：

$$\begin{aligned} J_{\tilde{1}}|_{x\to+\infty} &\sim e^{-(2n+1)\frac{(t-x)}{R_1}}, \\ J_{\tilde{1}}|_{x\to-\infty} &\sim e^{-(2n+1)\frac{(t+x)}{R_1}}. \end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned} J_{\tilde{1}}|_{x\to+\infty} &\sim e^{-(2n+1)\frac{(t-x)}{R_1}} = e^{-(2n+1)\frac{u}{R_1}}, \\ J_{\tilde{1}}|_{x\to-\infty} &\sim e^{-(2n+1)\frac{(t+x)}{R_1}} = e^{-(2n+1)\frac{v}{R_1}}. \end{aligned} \tag{5.102}$$

因此，由于 J^1 对坐标 t 和 x 的依赖仅通过组合（$t-x$）和（$t+x$）体现，可知 $J_{\tilde{1}}$ 在边界处成为行波。特别是，在 $x\to+\infty$ 处，粒子流沿 x 增大的方向；而在 $x\to-\infty$ 处，粒子流沿 x 减小的方向，这与边界条件（I）完全一致。

根据式 (5.101) 所示的渐近行为，可以得出结论：流 $J_{\tilde{1}}$ 在边界处呈指数发散。不过，对于任意大的负时间，这一问题都可以避免。具体而言，定义零坐标

$$u = t - x \quad \text{and} \quad v = t + x\,, \tag{5.103}$$

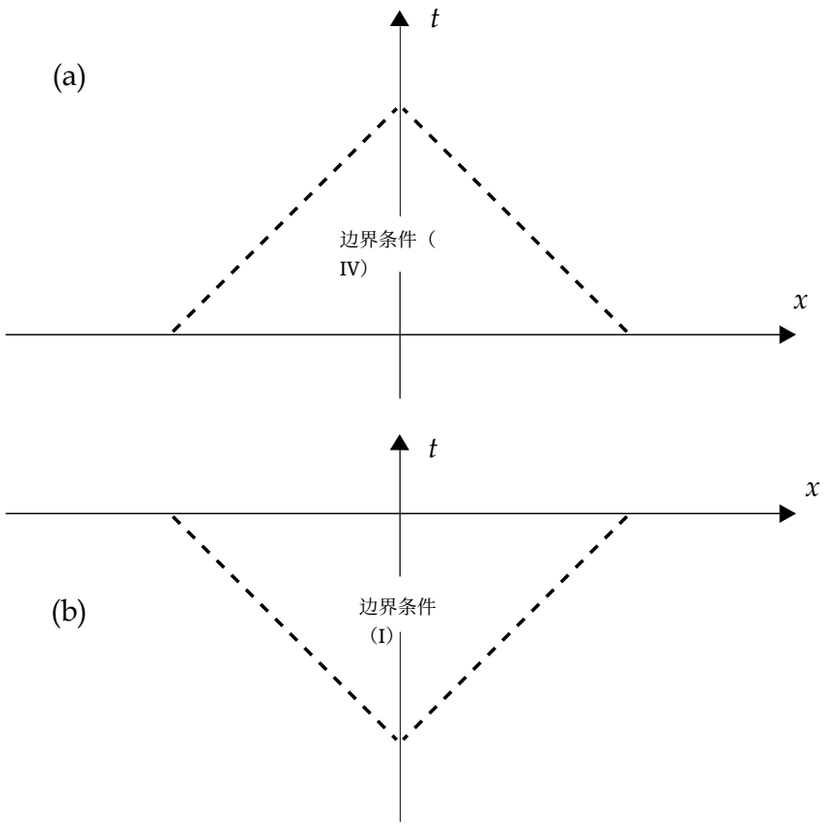


图5.1：虚线表示流未定义的区域。(a) 部分对应边界条件（IV），边界条件（IV）；(b) 部分对应边界条件（I），边界条件（I）。

˜由式 (5.101) 可知，对于 $x \to +\infty$ ，流 J^1 在 $u \to -\infty$处未定义，但在其他地方定义良好。另一方面，对于 $x \to +\infty$ ，流在$v \to -\infty$处发散，而在时空的其他区域定义良好。这意味着，对于边界条件（I），流在过去零无穷远处未定义，但在其他地方不会发散，如图 5.1(b) 部分所示。

类似地，计算满足边界条件 r-

（IV）的解对应的流 {v1} 的渐近形式，即

$$\begin{aligned}
\Psi_+|_{x\to-\infty} &= \beta\, e^{-i\omega t} e^{-\mathfrak{d}(c-1)x} \\
&= \beta\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t-x)}\, e^{(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{-(n+iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}}\,, \qquad (5.104)\\
\Psi_+|_{x\to+\infty} &= \beta\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} e^{-i\omega t} e^{\mathfrak{d}(a+b-c)x} \\
&= \beta\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t+x)} \\
&\quad\times e^{(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{(n+1-iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}}\,, \qquad (5.105)\\
\Psi_-|_{x\to-\infty} &= \alpha\, e^{-i\omega t} e^{\mathfrak{d}(c-1)x} \\
&= \alpha\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t-x)}\, e^{(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{-(n+1+iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}}\,, \qquad (5.106)\\
\Psi_-|_{x\to+\infty} &= \alpha\,\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-i\omega t} e^{\mathfrak{d}(a+b-c)x} \\
&= \alpha\,\frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, e^{\mp i\sqrt{\mu^2+\sum_l \lambda_l^2/R_l^2+q^2Q_1^2R_1^2}(t+x)} \\
&\quad\times e^{(n+\frac{1}{2})\frac{t}{R_1}}\, e^{(n-iqQ_1R_1^2)\frac{x}{R_1}}\,. \qquad (5.107)
\end{aligned}$$

我们发现

$$\begin{aligned}
J_{\tilde{1}}|_{x\to-\infty} &\sim e^{(2n+1)\frac{(t+x)}{R_1}} = e^{(2n+1)\frac{v}{R_1}}\,, \\
J_{\tilde{1}}|_{x\to+\infty} &\sim e^{(2n+1)\frac{(t-x)}{R_1}} = e^{(2n+1)\frac{u}{R_1}}\,.
\end{aligned} \qquad (5.108)$$

因此，对于边界条件（IV），当 $u\to+\infty$ 和$v\to+\infty$时，流发散。换言之，在未来零无穷远处，流的定义不明确，但在其他地方定义良好。图 5.1 的 (a) 部分展示了边界条件（IV）下流发散的区域。

标量场的流也呈现出完全相同的行为，其守恒流定义为

$$\mathcal{J}_\mu = \mathrm{Im}(\Phi\,\partial_\mu\Phi^\star)\,. \qquad (5.109)$$

事实上，利用满足边界条件（I）的标量场渐近形式（即方程 (3.41) 和 (3.43)），计算边界处的流，可得径向流:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_x|_{x\to+\infty} &\sim e^{-(2n+1)\frac{(t-x)}{R_1}} = e^{-(2n+1)\frac{u}{R_1}}\,, \\
\mathcal{J}_x|_{x\to-\infty} &\sim e^{-(2n+1)\frac{(t+x)}{R_1}} = e^{-(2n+1)\frac{v}{R_1}}\,.
\end{aligned} \qquad (5.110)$$

这与边界条件（I）下旋量流的行为相同，见式（5.101）。同样，当采用边界条件（IV）时，利用式（3.41）和（3.47）的渐近形式，边界处的分量 $\mathcal{J}_x$ 具有以下渐近行为

即

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_x|_{x\to+\infty} &\sim e^{(2n+1)\frac{(t+x)}{R_1}} = e^{(2n+1)\frac{v}{R_1}}\,,\\ \mathcal{J}_x|_{x\to-\infty} &\sim e^{(2n+1)\frac{(t-x)}{R_1}} = e^{(2n+1)\frac{u}{R_1}}\,,\end{aligned} \tag{5.111}$$

这与式 (5.108) 中流的渐近形式相同。

时空中存在物理电流未定义的区域，这一事实并不令人意外。事实上，边界条件 (I) 和 (IV) 对应的解之所以称为准正规模而非正常模，是因为允许频率的谱还具有虚部。因此，当 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ 时，场的时间依赖性 $e^{-i\omega t}$ 会在 $t\to\infty$ 处发散；而当 $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ 时，则会在 $t\to-\infty$ 处发散。通常认为，准正规模并非始终存在的状态，而是在特定时间段内出现的激发。尤其是，它们并不构成所考虑场方程 [8]的解空间的完备基。

有了这些结果，我们便补全了前几章所得的结果；在前几章中，已明确计算出自旋为 0、1 和 2 的场的准正规谱。为方便读者，所有得到的准正规频率均汇总于下文的表 5.1 中。

自旋-s 场	ω_{I}	ω_{II}	ω_{III}	ω_{IV}
$s=0$	$\pm\left[\mu^2+\sum_{l=2}^{d}\frac{\kappa_l}{R_l^2}-\frac{1}{4R_1^2}\right]^{1/2}$ $-\frac{i}{2R_1}(2n+1)$	$\times$	$\times$	$\pm\left[\mu^2+\sum_{l=2}^{d}\frac{\kappa_l}{R_l^2}-\frac{1}{4R_1^2}\right]^{1/2}$ $+\frac{i}{2R_1}(2n+1)$
$s=1/2$	$\pm\left[\mu^2+\sum_{l=2}^{d}\frac{\lambda_l^2}{R_l^2}+q^2Q_1^2R_1^2\right]$ $-\frac{i}{2R_1}(2n+1)$	$\times$	$\times$	$\pm\left[\mu^2+\sum_{l=2}^{d}\frac{\lambda_l^2}{R_l^2}+q^2Q_1^2R_1^2\right]$ $+\frac{i}{2R_1}(2n+1)$
$s=1$	$\pm\left[\sum_{l=2}^{d}\frac{\kappa_l}{R_l^2}-\frac{1}{4R_1^2}\right]^{1/2}$ $-\frac{i}{2R_1}(2n+1)$	$\times$	$\times$	$\pm\left[\sum_{l=2}^{d}\frac{\kappa_l}{R_l^2}-\frac{1}{4R_1^2}\right]^{1/2}$ $+\frac{i}{2R_1}(2n+1)$
$s=2$	$\pm\left[\sum_{l=2}^{d}\frac{\kappa_l}{R_l^2}-\frac{9}{4R_1^2}\right]^{1/2}$ $-\frac{i}{2R_1}(2n+1)$	$\times$	$\times$	$\pm\left[\sum_{l=2}^{d}\frac{\kappa_l}{R_l^2}-\frac{9}{4R_1^2}\right]^{1/2}$ $+\frac{i}{2R_1}(2n+1)$

表 5.1：对于本文考虑的每个自旋值的自旋-s 场，以及图 3.3 所述四种边界条件中的每一种，其允许频率。以 ω_{I} 中的下标 I 为例，它表示假定边界条件（I）时的频率，依此类推；$\times$ 表示不存在准正规频率。

第6章

结论与展望

本书研究了自旋为-s的场微扰，其中 $s = 0$、$1/2$、1 和 2，它们在维数为 $D = 2d$ 的带电纳里艾时空高维推广中传播。该背景的一个有趣特征是，微扰也可以解析地积分。研究表明，它们都满足一个类似薛定谔方程的方程，其有效势属于 Rosen-Morse 可积势类，解则可用超几何函数表示，如第 3.2 节所示。这是一项宝贵的性质，因为即便是朴素的史瓦西背景所对应的有效势也不可积，尽管它是可分离的。我们还研究了这些场对应的准正规模，并在此处所考虑的背景中选取了自然边界条件。从因果角度来看，我们发现施加于微扰的自然边界条件是图 3.3 中的 (II) 和 (III)，但它们不会产生准正规模。另一方面，图 3.3 中的特设边界条件 (I) 和 (IV) 确实允许准正规模，相应的准正规频率汇总于表 5.1。分析该表可知，值得注意的是，四种场的准正规频率虚部通常相同，并且不依赖于微扰的任何细节，而只取决于引力背景的荷，其依赖关系通过 R_1体现。与此不同，准正规频率实部取决于场的质量和微扰的角模。另一个值得指出的事实是，费米子场的准正规谱总有实部，这意味着它们总是振荡；而玻色场则可能具有纯虚的准正规模频率。确实，由于标量谱 ($s = 0$) 中平方根内含有负因子“ $-1/(4R_1^2)$”，当 R_1 足够小，且质量和角动量也足够小时，平方根内的表达式可能为负，因此这一项会变为虚数。对于麦克斯韦场 ($s = 1$)，同样的论证也成立；其标量和余向量自由度具有相同的谱，如表 5.1 所示。对于引力场 ($s = 2$)，微扰的所有自由度也具有相同的谱，如表 5.1 所示。这与其他高维时空（例如施瓦西时空和（反）德西特时空 [11, 36, 37],）中的情况不同；在那些时空中，引力微扰的不同部分具有不同的谱。因此，

本文所考察的高维纳里艾时空具有等谱性质，这表明，引力场不同自由度对应不同谱的存在，与其说取决于微扰自由度的张量性质或背景的维数，不如说更多地取决于时空的对称性。这里的背景具有 $SO(3) \times SO(3) \times \ldots \times SO(3)$ 对称性， $d-1$次，而施瓦西黑洞具有 $SO(2d-1)$ 对称性。

通过构造合适的角基，第3、4和5章实现了自旋为 $s=0$、$1/2$、1、2 的微扰自由度的可分离性。反过来，此处构造的角基也可用于分离在具有 $SO(3) \times SO(3) \times \ldots \times SO(3)$ 对称性的其他背景上传播的自旋-s 场微扰。特别是，文献 [31]中介绍的高维黑洞完全可以用此处提出的技术处理。同样的思路也适用于任何由多个常曲率空间直积而成的时空。与各类微扰对应的准正规频率谱均已通过解析方法求得。掌握所有这些谱后，我们可以写出一个适用于所有这些情形的统一公式，条件是背景的电磁荷为零，即 $Q_1 = Q_l = 0$，此时广义纳里艾时空中所有球面的半径均相等：

$$\omega = \sqrt{\Lambda}\left[\pm\sqrt{\mu^2 + \sum_{l=2}^{d}\nu_{s,l} - \left(s-\frac{1}{2}\right)^2} + i\epsilon\left(n+\frac{1}{2}\right)\right], \tag{6.1}$$

其中， $\epsilon=-1$ 表示假设采用边界条件（I）时的准正规频率， $\epsilon=1$表示采用边界条件（IV）时的准正规频率。参数 s 是微扰的自旋，μ 是其质量，而$\nu_{s,\,l}$ 是一个与角动量本征值相关的正数。例如，对于作为无质量自旋 2 场的引力微扰（$\mu=0$, $s=$2），该常数必须为$\nu_{s=2,\,l}=\ell_l\,(\ell_l+1)$；对于标量场（$s=0$）和麦克斯韦场（$s=1$），该常数也相同，因为它们都属于玻色场。另一方面，对于自旋为$1/2$ 的有质量旋量微扰（$s=1/2$），我们必须有$\nu_{s=1/2,\,l}=\lambda_l^2$其中 $\lambda_l \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$ 是单位球面上狄拉克算子的特征值。值得指出的是，第3章中并未假设爱因斯坦真空方程成立，因此广义Nariai时空的球面可以具有不同的半径，具体取决于背景的电磁荷；而在第4章中，我们假设电荷为零，因此引力微扰与电磁微扰相互解耦。否则，我们就必须同时考虑引力微扰和电磁微扰，因为电磁微扰场会成为引力微扰的源项，如上文第3.1节所述。另请注意，我们尚未分析普罗卡场和有质量引力场的微扰 $i.e$。对于自旋为一和二的情况，上述公式目前仅在质量为零时经过验证，$\mu=0$。不过，自然可以预期，上述谱公式同样适用于这些尚未研究的情形。

鉴于本书所得的结果，一个有趣的应用是研究自旋为$1/2$ 的场的超辐射现象。尽管标量场、电磁场和引力场等玻色场在四维Kerr时空中可能表现出超辐射行为 [140], ，但有趣的是，狄拉克场并非如此[137]。因此，研究在此处考虑的背景中是否也会出现类似现象，将很有意义。

在本文所考虑的背景中，对自旋-s 场的微扰进行积分（其中$s = 0, 1/2,$ 1 和 2），并研究其边界条件之后，顺理成章的下一步是考察在纳里艾时空的高维推广中传播的自旋-$3/2$ 场的微扰。该场是满足拉里塔-施温格方程的费米场。后一问题的研究仍在进行中，将在未来的工作中探讨。

另一个有趣的应用方向，是将我们对广义纳里艾时空所做的工作推广到其他由若干常曲率空间的乘积构成的空间。一个值得研究的课题是，研究在施瓦西时空的高维推广中传播的自旋-s 场微扰，其中 $s = 0$， $1/2$， 1， $3/2$， 2；这种时空对应一个静态黑洞，其视界拓扑为 $\mathbb{R} \times S^2 \times \ldots S^2$。这个黑洞的一个有趣特征是，除电荷外，它还具有磁荷；这与赖斯纳-诺德斯特伦解 [141], 的高维推广不同，后者只有电荷。因此，尽管未来工作中要考虑的黑洞是静态的，其中涉及的物理现象仍可能相当丰富。比如，我们希望了解该黑洞中自旋为 0， $1/2$， $3/2$ 和 2 的场，其准正规频率是否相同；极端四维赖斯纳-诺德斯特伦黑洞 [142]也具有这一性质。

参考文献

[1]*C. V. Vishveshwara*，《施瓦西黑洞对引力辐射的散射》，《自然》*227 (1970*年*), 936*。[2] *W. H. Press*，《振荡黑洞产生的长引力波列》，《天体物理学杂志》*170 (1971*年*), L105*。[3] *V. Ferrari* 和 *B. Mashhoon*，《研究黑洞准正规模的新方法》，《物理评论*D*》*30 (1984*年*), 295*。[4] *N. Andersson* 和 *K.D. Kokkotas*，《迈向引力波星震学》，《皇家天文学会月刊》*299 (1988*年*), 1059*。[5] *K.D. Kokkotas* 和 *B. G. Schmidt*，《恒星与黑洞的准正规模》，《相对论生活评论》*2 (1999*年*), 2*。[6] *E. Berti*、*V. Cardoso* 和 *A. O. Starinets*，《黑洞与黑膜的准正规模》，《经典与量子引力》*26 (2009), 163001*。[7]*V. Cardoso*，《黑洞时空中的准正规模与引力辐射》，博士论文 *(2004),* 里斯本技术大学。*arXiv:gr-qc/0404093*。[8] *H. P. Nollert*，《准正规模：黑洞与中子星的特征性"声音"》，*Class. Quantum Grav. 16 (1999), R159*。[9] *B. P. Abbott* 等（*LIGO*科学合作组和 *Virgo*合作组），《双黑洞并合产生的引力波观测》，《物理评论快报》*116 (2016), 061102*。[10] *S. Hod*，《玻尔对应原理与量子黑洞面积谱》，《物理评论快报》*81 (1998), 4293*。[11] *O. Dreyer*，《准正规模、面积谱与黑洞熵》，《物理评论快报》*90 (2003), 081301*。[12] *M. Maggiore*，《黑洞准正规模谱的物理解释》，《物理评论快报》*100 (2008), 141301*。

[13] M. Domagala 和 J. Lewandowski, 《基于量子几何的黑洞熵》, 《经典与量子引力》21 (2004), 5233。[14] R. A. Konoplya、A. Zhidenko, 《黑洞准正规模：从天体物理学到弦理论》, 《现代物理学评论》83 (2001), 793。[15] V. P. Frolov 等, 《Kerr-NUT-(A)dS 时空中的大质量矢量场：可分离性与准正规模》, (2018)。arXiv:1804.00030 [hep-th][16] A. Zhidenko, 《高维黑洞的大质量标量场准正规模》, 《物理评论D》74 (2006), 064017。[17] A. Zhidenko, 《黑洞的线性扰动：稳定性、准正规模与尾波》, 博士论文 (2009), 圣保罗大学。arXiv:0903.3555。[18] L. H. Liu 和 B. Wang, 《BTZ 黑弦的稳定性》, 《物理评论D》78, 064001 (2008)。arXiv:0803.0455 [hep-th][19] S. Mukhi, 《弦理论：过去25年的回顾》, 《经典与量子引力》28 (2011), 153001。[20] R. Emparan 和 H. S. Reall, 《高维中的黑洞》, 《相对论生活评论》11 (2008), 6。[21] C. Csaki, 《TASI 额外维度与膜讲座》, (2005)。arXiv: hep-ph/0404096[22] J. M. Maldacena, 《超共形场论与超引力的大 N 极限》, Int. J. Theor. Phys. 38 (1999), 1113。[23]G. T. Horowitz 和 J. Polchinski, 《规范/引力对偶》, (2009)。arXiv:gr-qc/0602037。[24] V. E. Hubeny, 《反德西特空间/共形场论对应》, 《经典与量子引力》32 (2015), 124010。[25] G. T. Horowitz 和 V. E. Hubeny, 《反德西特黑洞的准正规模与趋近平衡》, 《物理评论D》62 (2000), 024027。[26] D. Birmingham、I. Sachs 和 S.N. Solodukhin, 《黑洞准正规模的共形场论解释》, 《物理评论快报》88 (2002), 151301。[27] C. Chirenti, 《LIGO时代的黑洞准正规模》, 《巴西物理学杂志》48 (2018), 102。[28] A. Nunez 和 A. O. Starinets, 《反德西特空间/共形场论对应、准正规模与 N$=4$ SYM 中的热关联函数》, 《物理评论D》67, 124013 (2003)。

[29] *V. Keranen* 和 *P. Kleinert*，《反德西特空间/共形场论对应中的 *Wightman*函数热化与准正规模》，《物理评论*D*》*94 (2016), 026010*。[30] *J. R. David* 和 *S. Khetrapal*，《格林函数的热化与准正规模》，*JHEP 1507 (2015), 041*。[31] *C. Batista*，《任意偶数维中具有多个磁荷的广义带电纳里艾解》，《广义相对论与引力》*48 (2016), 160*。[32] *H. Kodama* 和 *A. Ishibashi*，《高维带电广义静态黑洞微扰的主方程》，*Progress of Theoretical Physics 111 (2004), 29*。[33] *V. Cardoso*、*O. J. C. Dias* 和 *J. P. S. Lemos*，《高维中的纳里艾解、*Bertotti-Robinson*解与反*Nariai*解》，《物理评论*D*》*70 (2004), 024002*。[34] *A. R. Brown* 和 *A. Dahlen*，《乘积流形紧致化的谱与稳定性》，《物理评论*D*》*90 (2014), 044047*。[35] *B. Carter*，《引力场 *Kerr* 族的全局结构》，《物理评论》*174 (1968), 1559*。[36] *L. Hughston* 和 *P. Sommers*，《具有 *Killing*张量的时空》，*Commun. Math. Phys. 32 (1973), 147*。[37] *V. P. Frolov* 和 *D. Kubiznak*，《高维黑洞：隐藏对称性与变量分离》，《经典与量子引力》*25 (2008), 154005*。[38] *C. Batista*，《 $n-1$阶 *Killing-Yano*张量》，《经典与量子引力》*31 (2014), 165019*。[39] *R. A. Konoplya*，《广义相对论中的微小扰动：任意对称性的张量调和函数》，《物理快报 *A*》*268 (2000), 37*。[40] *B. Carter*，《爱因斯坦方程的 *Hamilton-Jacobi* 与薛定谔可分离解》，*Commun. Math. Phys. 10 (1968), 280*。[41] *V. G. Bagrov*，《*Staeckel*空间中狄拉克方程的变量分离。*2*：外部规范场》，《经典与量子引力》*8 (1991), 163*。[42] *T. Regge* 和 *J. A. Wheeler*，《施瓦西奇点的稳定性》，《物理评论*D*》*108 (1957), 1063*。[43] *F. K. Manasse*，《小质量中心因邻近极大质量物体而产生的度规畸变》，《数学物理杂志》*4 (1963), 746*。[44] *D. R. Brill* 和 *J. B. Hartle*，《广义相对论中的自洽场方法及其在引力*Geon*中的应用》，《物理评论*B*》*271 (1964), 135*。

[45] *C. V. Vishveshwara*，《施瓦西度规的稳定性》，博士论文，马里兰大学（*1967*年）。[46] *L. Edelstein* 和 *C. V. Vishveshwara*，《施瓦西度规上微扰的微分方程》，《物理评论*D*》*1*（*1970*年），*3514*。[47] *F. J. Zerilli*，《偶宇称 *Regge-Wheeler* 引力微扰方程的有效势》，《物理评论快报》*24*（*1970*年），*737*。[48] *E. D. Fackerell*，《偶宇称引力微扰的 *Zerilli* 方程解》，《天体物理学杂志》*166*（*1971*年），*197*。[49] *V. Moncrief*，《*Reissner-Nordström* 的稳定性》，《物理评论*D*》*10*，*1057*（*1974*年）。[50] *V. Moncrief*，《*Reissner-Nordström* 黑洞的奇宇称稳定性》，《物理评论*D*》*9*（*1974*年），*2707*。[51] *T. Takahashi* 和 *J. Soda*，《高维静态 *Lovelock* 黑洞引力微扰的主方程》，*Progress of Theoretical Physics 124*（*2010*年），*5*。[52] *S. A. Teukolsky*，《引力与电磁微扰的可分离波动方程》，《物理评论快报》*29*（*1972*年），*1114*。[53] *S. A. Teukolsky*，《引力与电磁微扰的可分离波动方程》，《天体物理学杂志》*193*（*1974*年），*443*。[54] *J. B. Amado*、*B. Carneiro da Cunha* 和 *E. Pallante*，《论 *Kerr-AdS/CFT* 对应》，高能物理杂志 *08*（*2017*年），*094*。[55] *J. B. Amado*、*B. Carneiro Da Cunha* 和 *E. Pallante*，《*Kerr-AdS5* 的标量准正规模》，《物理评论*D*》*99*（*2019*年），*105006*。[56] *H. T. Cho*，《施瓦西黑洞时空中的狄拉克准正规模》，《物理评论*D*》*68*（*2003*年），*024003*。[57] *D. R. Brill* 和 *J. A. Wheeler*，《中微子与引力场的相互作用》，《现代物理学评论》*29*（*1957*年），*465*。[58] *D. N. Page*，《黑洞的粒子发射率：无电荷、非旋转黑洞发出的无质量粒子》，《物理评论*D*》*13*（*1976*年），*198*。[59] *W. G. Unruh*，《小黑洞的吸收截面》，《物理评论*D*》*14*（*1976*年），*3251*。[60] *J. Venâncio* 和 *C. Batista*，《广义纳瑞时空中的准正规模》，《物理评论*D*》*97*，*105025*（*2018*年）。

[61] *G. F. Torres del Castillo*，《代数特殊真空时空中的 *Rarita-Schwinger* 场》，《数学物理杂志》*30*（*1989*年），*446*。[62] *H. P. Nollert* 和 *B. G. Schmidt*，《施瓦西黑洞的准正规模：通过拉普拉斯变换定义和计算》，《物理评论*D*》*45*（*1992*年），*2617*。[63] *T. Roy Choudhury* 和 *T. Padmanabhan*，《施瓦西-德西特时空中的准正规模：频率能级间距的简单推导》，《物理评论*D*》*69*（*2003*年），*064033*。[64] *A. López Ortega*，《 *D*维球对称时空中的狄拉克方程》，*Lat. Am. Jour. Phys. Educ. 3*（*2009*年），*578*。[65] *B. F. Schutz* 和 *C. M. Will*，《黑洞正规模——一种半解析方法》，《天体物理学杂志》*291*（*1985*年），*L33*。[66] *S. Chandrasekhar*，《黑洞的数学理论》，牛津物理科学经典文本，克拉伦登出版社（*1998*年）。[67]*A. Bachelot* 和 *A. Motet-Bachelot*，《施瓦西黑洞的共振》，《亨利·庞加莱研究所理论物理年刊》*59*（*1993*年），*3*。[68] *H. J. Blome* 和 *B. Mashhoon*，《施瓦西黑洞的准正规振荡》，《物理快报 *A*》*110*（*1984*年），*231*。[69] *S. Chandrasekhar* 和 *S. Detweiler*，《施瓦西黑洞的准正规模》，《伦敦皇家学会会刊 *A* 辑》*344*（*1975*年），*441*。[70] *B. F. Schutz* 和 *C. M. Will*，《黑洞正规模——一种半解析方法》，《天体物理学杂志》*291*（*1985*年），*L33*。[71] *C. Gundlach*、*R. H. Price* 和 *J. Pullin*，《恒星坍缩与爆炸的晚期行为：*I.* 线性化微扰》，《物理评论*D*》*49*（*1994*年），*883*。[72] *E. W. Leaver*，《克尔黑洞准正规模的解析表示》，《伦敦皇家学会会刊 *A* 辑》*402*（*1985*年），*285*。[73] *G. B. Arfken* 和 *H. J. Weber*，《物理学家的数学方法》，学术出版社，纽约，*1995*年。[74] *P. P. Fiziev*，《*Regge-Wheeler* 方程和特乌科尔斯基方程的精确解类》（*2009*年）。*arXiv:0902.1277v3*[75] *H. P. Nollert*，《施瓦西黑洞的准正规模：虚部极大的准正规频率的确定》，《物理评论*D*》*47*（*1993*年），*5253*。

[76] C. V. Vishveshwara, 《施瓦西度规的稳定性》, 《物理评论D》1 (1970年), 2870.[77] R. M. Wald, 《关于施瓦西度规稳定性的注记》, 《数学物理杂志》20 (1979), 1056.[78] J.D. Bekenstein 和 V.F. Mukhanov, 《量子黑洞的光谱学》, 《物理快报B》360 (1995), 7.[79] L. Motl, 《施瓦西黑洞渐近准正规频率的解析计算》, 《理论与数学物理进展》6 (2003), 1135.[80] N. Andersson, 《相位积分法与黑洞正规模》, 《经典与量子引力》10 (1993), L61.[81] A. Perez, 《圈量子引力中的黑洞》, Rep. Prog. Phys. 80 (2017年), 126901.[82] A. Ashtekar 和 J. Lewandowski, 《背景独立量子引力：现状报告》, 《经典与量子引力》21 (2004), R53.[83] C. Rovelli, 《量子引力》, 剑桥大学出版社, (2004).[84] T. Thiemann, 《现代正则量子广义相对论》, 剑桥大学出版社, 2008.[85] R. Gambini 和 J. Pullin, 《圈量子引力入门》, 牛津大学出版社, 2011.[86] K. Meissner, 《圈量子引力中的黑洞熵》, 《经典与量子引力》21 (2004), 5245.[87] M. Dogamala 和 J. Lewandowski, 《基于量子几何的黑洞熵》, 《经典与量子引力》21 (2004), 5233.[88] A. Ghosh 和 P. Mitra, 《量子几何方法中黑洞熵的改进估算》, 《物理快报B》616, 114 (2005).[89] U. Keshet 和 S. Hod, 《旋转黑洞准正规模的解析研究》, 《物理评论D》76 (2007), 061501.[90] L. Motl 和 A. Neitzke, 《黑洞渐近准正规频率》, 《理论与数学物理进展》7 (2003), 307.[91]E. Berti、V. Cardoso 和 S. Yoshida, 《克尔黑洞的高度阻尼准正规模：完整的数值研究》, 《物理评论D》69 (2004), 124018.

[92] S. Carneiro, 《圈量子引力中的准正规模与视界面积量子化》, (2020年)。arXiv:2012.00227v1 [gr-qc][93]J. Venâncio 和 C. Batista, 《广义纳里艾时空中的自旋-2准正规模》, 《物理评论D》101, 084037 (2020年).[94] R. Dutt、A. Khare 和 U. P. Sukhatme, 《超对称性、形状不变性与可精确求解势》, 《美国物理学杂志》56 (1988), 163.[95] G. Pöschl 和 E. Teller, 《关于非谐振子的量子力学的评述》, 《物理学杂志》83 (1933年), 143.[96] S. Dolan、A. C. Ottewill 和 Barr Wardell, 《利用匹配展开和准正规模求和进行自力计算》, 《物理评论D》79 (2009), 124043.[97] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun, 《数学函数手册：公式、图表与数学表格》, Dover, 纽约 (1972年).[98] P. B. Brady、C. M. Chambers, 《施瓦西-德西特时空中的辐射衰减》, 《物理评论D》60, 064003 (1999年).[99] E. Abdalla 等, 《三维时空微扰对德西特/共形场论对应的支持》, 《物理快报B》538, 435 (2002年).[100] E. D. Du、B. Wang、R. Su, 《纯德西特时空中的准正规模》, 《物理评论D》70, 064024 (2004年).[101] Y. S. Myung 和 N. J. Kim, 《反德西特与德西特空间的区别：波动方程方法》, 《经典与量子引力》21 (2004), 63.[102] S. J. Avis、C. J. Isham 和 D. Storey, 《反德西特时空中的量子场论》, 《物理评论D》18 (1978), 3565.[103] P. Breitenlohner、D. Z. Freedman, 《反德西特背景中的正能量与规范化扩展超引力》, 《物理快报B》115 (1982), 197.[104] C.P. Burgess、C.A. Lutk, 《反德西特空间中的传播子与有效势》, 《物理快报B》153 (1984), 137.[105] J. Natario 和 R. Schiappa, 《 D维黑洞与量子引力的渐近准正规频率分类》, 《理论与数学物理进展》8 (2004), 1001.[106] D. Anninos, 《德西特随想》, 《国际现代物理学杂志A辑》27 (2012年), 1230013.[107] M. Spradlin、A. Strominger 和 A. Volovich, 《莱舒什德西特空间讲座》, (2001)。arXiv:hep-th/0110007

[108] *J. D. Bekenstein* 和 *M. Schiffer*，《超辐射的多种面貌》，《物理评论*D*》*58*（*1998*），*064014*。[109]*R. A. Konoplya* 和 *A. V. Zhidenko*，《施瓦西背景中大质量标量场的衰减》，*Phys. Lett. B 609*（*2005*），*377*。[110] *A. Ohashi* 和 *M. Sakagami*，*textit*《大质量准正规模》，《经典与量子引力》*21*（*2004*），*3973*。[111] *R. A. Konoplya*、*C. Molina* 和 *A. Zhidenko*，《黑洞背景中大质量矢量场的晚期尾波》，《物理评论*D*》*75*（*2007*），*084004*。[112] *S. Hod* 和 *T. Piran*，《自相互作用（大质量）标量场引力坍缩中的晚期尾波及自相互作用标量毛发的衰减》，《物理评论*D*》*58*（*1998*），*044018*。[113] *R. A. Konoplya*，《*Reissner-Nordström*黑洞背景中的有质量带电标量场：准正规振铃》，*Phys. Lett. B 550*（*2002*），*117*。[114] *L. Xue*、*B. Wang* 和 *R. Su*，《*Reissner-Nordström*黑洞背景中大质量标量场演化的数值模拟》，《物理评论*D*》*66*（*2002*），*024032*。[115] *L. E. Simone* 和 *C.M. Will*，《施瓦西和克尔黑洞的大质量标量准正规模》，《经典与量子引力》*9*（*1992*），*963*。[116] *V. Cardoso*、*J. P.S. Lemos*，《*BTZ*黑洞的标量、电磁和外尔扰动：准正规模》，《物理评论*D*》*63*（*2001*），*124015*。[117] *G. Koutsoumbas* 等，《具有标量毛发的四维拓扑黑洞的电磁微扰准正规模》，*JHEP 0610*（*2006*），*006*。[118]*R.A. Konoplya*，《施瓦西背景中的大质量矢量场微扰：稳定性与准正规谱》，《物理评论*D*》*73*（*2006*），*024009*。[119] *A. L. Ortega*，《 *D*维黑洞的电磁准正规模 *II*》，《广义相对论与引力》*40*（*2008*），*1379*。[120] *V. Cardoso*，《近极端施瓦西-德西特黑洞的准正规模》，《物理评论*D*》*67*（*2003*），*084020*。[121] *P. H. Ginsparg* 和 *M. J. Perry*，《德西特空间的半经典持存》，*Nucl. Phys. B 222*（*1983*），*245*。[122] *R. Bousso* 和 *S. W. Hawking*，《暴胀期间黑洞的成对产生》，《物理评论*D*》*54*（*1996*），*6312*。

[123] *L. Vanzo* 和 *S. Zerbini*，《多视界黑洞准正规模的渐近行为》，《物理评论*D*》*70*（*2004*），*044030*。[124] *A. Lopez Ortega*，《 D维球对称时空中的狄拉克方程》，《拉丁美洲物理教育杂志》*3*（*2009*），*578*。[125] *A. L. Ortega*，《德西特时空中传播的经典场的吸收与准正规模》$3D$ 和 $4D$，《广义相对论与引力》*38*（*2006*），*743*。[126] *R. Becar*、*P.A. Gonzalez*、*Y. Vasquez*，《具有挠率的陈-西蒙斯黑洞和*BTZ*黑洞的狄拉克准正规模》，《物理评论*D*》*89*（*2014*），*023001*。[127] *J. Venâncio*，《旋量形式体系》，*Lambert Academic Publishing*（*2019*）。[128] *I. Benn* 和 *R. Tucker*，《旋量与几何导论：及其在物理学中的应用》，*Adam Hilger*（*1987*）。[129] *P. Lounesto*，《克利福德代数与旋量》，剑桥大学出版社（*2001*）。[130] *E. Cartan*，《旋量理论》，*Dover*（*1966*）。[131] *J. N. Goldberg*、*A. J. MacFarlane*、*E. T. Newman*、*F. Rohrlich* 和 *E. C. G. Sudarshan*，《自旋-s 球谐函数与 $\eth$》，《数学物理杂志》*8*（*1967*），*2155*。[132] *W. B. Campbell*，《张量与旋量球谐函数及自旋谐波 ${}_sY_{\ell m}$（θ，ϕ）》，《数学物理杂志》*12*（*1971*），*1763*。[133] *M.Boyle*，《自旋加权球函数应如何定义？》，*J.Math. Phys. 57*（*2016*），*092504*。[134] *R. Camporesi* 和 *A. Higuchi*，《球面与实双曲空间上狄拉克算子的本征函数》，《几何与物理杂志》*20*（*1996*），*1*。[135] *A. Trautman*，《超曲面上的自旋结构与球面上狄拉克算子的谱》，《旋量、扭量、克利福德代数与量子变形》，*Kluwer Academic Publishers*，多德雷赫特（*1993*）。[136] *J. Venâncio* 和 *C. Batista*，《二维空间直积背景上的狄拉克方程的可分离性》，《物理评论*D*》*95*（*2017*），*084022*。[137] *R. Güven*，《克尔几何中电子的波动力学》，*Physical Review D 16*（*1977*），*1706*。[138] *W. H. Press* 和 *S. A. Teukolsky*，《旋转黑洞的扰动。*II.* 克尔度规的动力学稳定性》，《天体物理学杂志》*185*，*649*（*1973*）。[139] *S. K. Chakrabarti*，《自旋二分之一的依赖质量球椭函数》，《英国皇家学会会刊*A*辑》*391*，*27*（*1984*）。

[140] J. G.Rosa，天空中的超辐射，《物理评论D》**95**，064017（2017年）。[141] F. R. Tangherlini，n 维空间中的施瓦西场与空间维数问题，NuovoCimento **27**（1963），636。[142] H. T. Cho，球对称黑洞中不同自旋场的渐近准正则频率，《物理评论D》73(2006)，024019。

索引

角基，14–17，19，21，22，53，54，74，82，101 边界条件，1，12，26–29，32，39，43，44，46，47，50，57，61，69，70，93–95，99，100 克利福德代数，77–80，86 克利福德乘积，78，79，81 狄拉克场，15，40，41，77，96，102 狄拉克矩阵，79，80，86，89 爱因斯坦方程，24 偶宇称微扰，20，24，25，58，67，71，74 事件视界，11，27，29，44，61 傅里叶基，26，31，40，49，92 规范变换，18，55，66–68，71，72，75 广义纳里艾时空，12，26，44，102 引力场，40，41，60，69，75，87，100–102 麦克斯韦场，15，20，26，40，41，53，55，57，59，60，63，100，101 奇宇称微扰，21，23–25，57，67，68，71，74 Pöschl-Teller方程，69–71，76 Pöschl-Teller 势，1，40–42，69，93 宇称变换，19，20，23，40，56，62，65，66 准正规频率，1，11，44，52，76，95 准正规模，11，26，28 Rosen-Morse势类，1，40，41，77，93，100 标量场，14–16，21，26，40，48，49，53，54，57，63，69，82，98，101 标量球谐函数，15，16，22，49，53，54，62，69，74，82，83 类薛定谔微分方程，1，21，23，25–27，30，38，40–42，58，59，69，77，90，92 可分离性，1，53，86，90，101 自旋基，15 自旋-s场微扰，1，26，38，82，100，101 自旋1/2球谐函数，84，85，87，90，91 旋量场，26，79，80，82，83，85，87–89 旋量表示，79，80 张量球谐函数，60 乌龟坐标，15，16，20，24，27，41，48，54，63 向量场，80，83，85，86，88，92 矢量球谐函数，17，22，53，55 波动型方程，16，20，24，44