arXiv:2302.00532v1 [math.AP] 1 Feb 2023

量子微积分中米塔格-莱夫勒函数的一些估计及其应用

MICHAEL RUZHANSKY、SERIKBOL SHAIMARDAN 和 Niyaz Tokmagambetov

Abstract. 米塔格-莱夫勒函数及其各种推广形式的研究已成为数学及其应用领域中一个非常热门的课题。在本文中，我们证明了以下关于 q-米塔格-莱夫勒函数的估计：

$$\frac{1}{1+\Gamma_q(1-\alpha)z} \leq e_{\alpha,1}(-z;q) \leq \frac{1}{1+\Gamma_q(\alpha+1)^{-1}z}.$$

对所有 $0<\alpha<1$ 和 $z>0$均成立。

此外，我们将其应用于研究量子微积分中时间分数阶伪抛物方程的直接问题和反问题的可解性结果，涉及一大类具有离散谱的正算子。

1. Introduction

量子微积分理论从量子群上的非交换几何视角分析物理学的基本结构。通过考察经典可观测量代数，并根据某个泊松括号对其进行量子化，我们可以得到一个量子群。众所周知，量子代数和量子群为多种物理现象的理论研究提供了支持。它们在共形场论、统计物理 [5] 以及广泛的应用领域中发挥着重要作用，从宇宙弦和黑洞到固体物理问题[4], [8], [22] 以及 [23] 和 [44]。

在 [7] 和 [25], ，L. Biedenharn 和 A. Macfarlane 指出， q-微积分在具有深刻物理意义的量子群表示中发挥着核心作用，并非单纯的数学练习。在 q-海森堡代数框架下， q-变形的薛定谔方程已于 [41]和 [42]中提出。许多文章探讨了 q-变形微积分的进一步发展和近期成果（例如参见 [3], [6], [10], [26], [37], [38] ，我们还推荐阅读著作 [11] 和 [13]）。

近年来，人们也充分认识到，米塔格-莱夫勒函数在分数阶微积分问题中发挥着根本性作用。1903年，瑞典数学家

2010 年数学主题分类：34C10、39A10、26D15。关键词和短语： q-热方程、 q-导数、 q-微积分。作者获得 FWO Odysseus 1 grant G.0H94.18N：分析学与偏微分方程项目，以及根特大学特别研究基金（BOF）的 Methusalem 计划（资助编号 01M01021）的支持。Michael Ruzhansky 还获得 EPSRC grant EP/R003025/2 的支持，第二作者则获得哈萨克斯坦共和国国际实习项目“Bolashak”的支持。

G¨osta Mittag-Leffler 发现了 [28]由下式定义的函数

$$E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+1)},\quad \Re(\alpha)>0, z\in\mathbb{C},$$

它在整个复平面上收敛。在 [43] （见 [19, 第 1.8] 小节）中，A. Wiman 首次引入了米塔格-莱夫勒函数的推广形式，即二参数版本 $E_{\alpha,\ \beta}(z)$，定义如下：

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)},$$

其中 z、$\beta\in\mathbb{C}$ 和 $\alpha>0$ 分别成立。以下米塔格-莱夫勒函数估计已知（ [39, 定理 4]）：

$$\frac{1}{1+\Gamma(1-\alpha)z}\leq E_{\alpha,1}(-z)\leq\frac{1}{1+\Gamma(\alpha+1)^{-1}z}, \tag{1.1}$$

特别地，由此不等式可得

$$0<E_{\alpha,1}(-z)<1, \tag{1.2}$$

对于 $0<\alpha<1$ 和 $z>0$。此外，我们还可得到如下形式的估计：

$$|E_{\alpha,\beta}(-z)|\leq\frac{C}{1+z}, \tag{1.3}$$

其中 $z>0$、$0<\alpha<2$、$\beta\in\mathbb{R}$ 和 $C>0$ （见 [1] 和 [28, 第 2.1] 小节）。米塔格-莱夫勒函数的这些估计已广泛应用于一些以分数阶微分方程、积分方程和差分方程表述的问题的解中（见 [15], [19], [28] 和 [40]）。因此，近年来，分数阶微积分及其在扩散、次扩散和其他类型方程的反源问题中的应用，已成为许多研究者关注的课题。受这些应用方向的推动，仅近几年就在这一领域发表了大量研究成果（详情见 [2], [33] 和 [34]）。

在 [24], Z. S. I. Mansour 引入了米塔格-莱夫勒函数的 q-类比形式，并得到了具有常系数的齐次线性序列q-差分方程的一组基本解，以及相应非齐次方程的通解（另见 [3]）。Mansour [24], 提出的 q-米塔格-莱夫勒函数和 q-米塔格-莱夫勒函数 $e_{\alpha,\ \beta}(z;q)$ 定义如下

$$e_{\alpha,\beta}(z;q)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma_{q}(\alpha k+\beta)},\quad |z(1-q)^{\alpha}|<1, \tag{1.4}$$

其中 $\alpha>0$、$\beta\in\mathbb{C}$，并且 Γ_q 是 q-伽马函数（见 (2.9)）。

本文为函数 (1.4) 建立了估计式 (1.1)、(1.2) 和 (1.3)（见引理 3.1 和 3.2）。此外，我们应用这些估计，证明了在量子微积分中采用 Caputo分数阶算子、在抽象希尔伯特空间框架下采用自伴算子的时间分数阶伪抛物方程的正问题和反问题的解的存在性与唯一性。

本文的组织结构如下：第 2 节回顾量子微积分的一些必要基本概念。第 3 节给出若干引理，以

证明我们的主要结果。第 4 节和第 5 节将这些结果用于研究正问题和反问题的广义解的存在性与唯一性（见定理 4.1、定理 4.2 和定理 5.1）。

2. Preliminaries

为方便读者，本节回顾量子微积分的一些必要概念和定义，相关内容可参见 [9, 10, 13] 。此外，我们给出一些用于证明主要结果的引理。本文中，我们始终假设 $0 < q < 1$。

设 $\alpha \in \mathbb{R}$。则 q 实数 $[\alpha]_q$ 定义为

$$[\alpha]_q := \frac{1-q^\alpha}{1-q},$$

其中 $\lim_{q\to 1} \frac{1-q^\alpha}{1-q} = \alpha$。

对于 $a \in \mathbb{R}$ 和 $n = 0$、1、$\cdots$, q-移位阶乘定义为

$$(a;q)_0 = 1, \quad (a;q)_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - q^k a\right), \quad (a;q)_\infty = \lim_{n\to\infty} (a;q)_n. \tag{2.1}$$

注意,

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}, \quad (a;q)_{2n} = (a;q^2)_n (aq;q^2)_n. \tag{2.2}$$

T函数 $e_q(x)$ 是一个 q-指数函数，由其 q-泰勒级数 ([9]) 定义 :

$$e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!}, \tag{2.3}$$

其中

$$[k]_q! = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, \\ [1]_q \times [2]_q \times \cdots \times [n]_q, & \text{if } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

回顾一下，作用于变量 x 的函数上的 q-差分算子（或 q-导数） D_q 定义为

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}. \tag{2.4}$$

注意，若 f 在 x 处可微，则 $\lim_{q\to 1} D_q f(x) = f'(x)$，且算子 D_q 称为欧拉–杰克逊差分算子（参见 [14]）。注意,

$$D_q \left[x^\alpha (s/x;q)_\alpha\right] = -[\alpha]_q x^{\alpha-1} (qs/x;q)_{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

其中

$$a^\alpha (s/a;q)_\alpha = a^\alpha \frac{(s/a;q)_\infty}{(q^\alpha s/a;q)_\infty}.$$

q平移算子 ε^y 由 M. E. H. Ismail 在 [16] 中提出，定义如下:

$$\varepsilon^y x^\alpha = x^\alpha (y/x;q)_\alpha,$$

其推广形式如下（参见 [3, 第 1 节2]）：

$$\varepsilon^y\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^\alpha\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^\alpha (y/x;q)_\alpha. \tag{2.6}$$

因此，利用 (2.6)，我们可以将 (1.4) 写成如下更一般的形式

$$\varepsilon^y e_{\alpha,\beta}\left(z^\gamma;q\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\alpha k}(y/x;q)_{\alpha k}}{\Gamma_q(\alpha k+\beta)}. \tag{2.7}$$

q 积分（或 Jackson 积分）定义如下（见 [17]）

$$\int_0^a f(x)d_qx=(1-q)a\sum_{m=0}^{\infty}q^m f(aq^m)$$

and

$$\int_0^\infty f(x)d_qx=(1-q)\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^m f(q^m),$$

若级数绝对收敛，则区间$[a,b]$ 上的 q-Jackson 积分定义为

$$\int_a^b f(x)d_qx=\int_0^b f(x)d_qx-\int_0^a f(x)d_qx.$$

q–分部积分公式为

$$\int_a^b u(x)D_qv(x)d_qx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(qx)D_qu(x)d_qx. \tag{2.8}$$

对于任意 $x>0$， q–伽马函数定义为

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x},\quad \Gamma_q\left(x+1\right)=\Gamma_q\left(x\right)[x]_q. \tag{2.9}$$

阶数为 $\alpha>0$ 的 Riemann-Liouville q 分数阶积分 $I_{q,\ a+}^{\alpha}f$ 定义为（[27]）

$$\left(I_{q,a+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma_q\left(\alpha\right)}\int_a^x(x-qt)_q^{\alpha-1}f\left(t\right)d_qt.$$

T阶数为 $\alpha>0$ 的 Caputo 型分数阶 q 导数定义为（[27]）

$$\left({}^cD_{q,a+}^{\alpha}f\right)(x)=\left(I_{q,a+}^{[\alpha]-\alpha}D_{q,a+}^{[\alpha]}f\right)(x), \tag{2.10}$$

其中， $[\alpha]$ 表示大于或等于 α 的最小整数。

记号。符号 $M\lesssim K$ 表示存在 $\gamma>0$ 使得 $M\le\gamma K$，其中 γ 是一个常数。若 $M\lesssim K\lesssim M$，则记作 $M\approx K$。

3. Some estimates of the q-Mittag-Leffler function

本节通过以下引理，建立函数 (1.4) 的估计式 (1.1)、(1.2) 和 (1.3)。

引理 3.1. 若 $0<\alpha<1$ 和 $z>0$，则

$$\frac{1}{1+\Gamma_q(1-\alpha)z}\le e_{\alpha,1}(-z;q)\le\frac{1}{1+\Gamma_q(\alpha+1)^{-1}z}. \tag{3.1}$$

特别地，我们有

$$0<e_{\alpha,1}(-z;q)<1. \tag{3.2}$$

证明。下界估计。假设 $0<\alpha<1$。由 (2.1) 可得

$$\begin{aligned} q/q^{1-\alpha}=q^{\alpha}\le 1\Rightarrow q\le q^{1-\alpha} \quad &\Rightarrow \quad 1-q^{1-\alpha}\le 1-q \\ &\Rightarrow \quad \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^nq^{1-\alpha})\le\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^nq) \\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad \gamma_{1,q}:=\frac{(q;q)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty}\ge 1; \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} q^k/q^{k\alpha}=q^{k(1-\alpha)}\le 1\Rightarrow q^k\le q^{k\alpha} \quad &\Rightarrow \quad 1-q^{\alpha k+1}\le 1-q^{k+1} \\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad \gamma_{2,q}:=\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_\infty}{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}\le 1; \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} q^{k+1}/q^{\alpha k+1-\alpha}=q^{k(1-\alpha)+\alpha}\le 1 \quad &\Rightarrow \quad q^{k+1}\le q^{\alpha k+1-\alpha} \\ &\Rightarrow \quad 1-q^{\alpha k+1-\alpha}\le 1-q^{k+1} \\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad \gamma_{3,q}:=\frac{\left(q^{\alpha k+1-\alpha};q\right)_\infty}{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}\le 1, \end{aligned} \tag{3.5}$$

对于 $k=0$，1、2、3、$\cdots$。

应用（2.9）以及这些不等式（3.3）—（3.5），可得

$$\begin{aligned} N_q(k) \quad &:= \quad \frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}(1-q)^{\alpha k}-\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty}(1-q)^{\alpha k} \\ &\overset{(3.3)(3.4)}{=} \quad (1-q)^{\alpha k}\left[\gamma_{2,q}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}-\gamma_{1,q}\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}\right] \\ &\le \quad (1-q)^{\alpha k}\left[\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}-\frac{\left(q^{\alpha k+1-\alpha};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}\right] \\ &\overset{(3.5)}{=} \quad \frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}(1-q)^{\alpha k}\left[1-\gamma_{3,q}\right] \\ &\le \quad (1-q)^{\alpha k-k}\left[(1-q)^{1-(k+1)}\frac{(q;q)_\infty}{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}\right]^{-1} \\ &\overset{(2.9)}{=} \quad \frac{(1-q)^{(\alpha-1)k}}{\Gamma_q(k+1)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

因此，

$$N_q(k) \lesssim \frac{(1-q)^{(\alpha-1)k}}{\Gamma_q(k+1)}. \tag{3.7}$$

W假设 $0<\epsilon<1-\alpha$。然后利用（2.1）可得以下不等式 s

$$\begin{aligned} q^{\alpha k+\alpha}/q^{\alpha k+1} = q^{\alpha-1} \geq 1 \Rightarrow q^{\alpha k+1} \leq q^{\alpha k+\alpha} \quad &\Rightarrow \quad 1-q^{\alpha k+\alpha} \leq 1-q^{\alpha k+1} \\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad \left(q^{\alpha k+\alpha};q\right)_\infty \leq \left(q^{\alpha k+1};q\right)_\infty; \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} q^{k+1}/q^{\alpha k+1-\alpha} = q^{k(1-\alpha)+\alpha} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad q^{k+1} \leq q^{\alpha k+1-\alpha} \\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad \left(q^{\alpha k+1-\alpha};q\right)_\infty \leq \left(q^{k+1};q\right)_\infty; \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} q/q^{1-\alpha} = q^{\alpha} \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad q \leq q^{1-\alpha} \\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad \left(q^{1-\alpha};\ q\right)_\infty \leq \left(q;\ q\right)_\infty; \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{aligned} q^{1-\alpha}/(q^\epsilon/3) = 3q^{1-\alpha-\epsilon} \leq 3 \Rightarrow q^{1-\alpha} \leq 3(q^\epsilon/3) \quad &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} 3 \leq \frac{\left(q^{1-\alpha};q\right)_\infty}{\left(q^\epsilon/3;q\right)_\infty} \\ q^{k+1}/q^{\alpha k+\alpha} = q^{-\alpha(k+1)} \geq 1 \Rightarrow q^{\alpha k+\alpha} \leq q^{k+1} \quad &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} 1 \leq \frac{\left(q^{\alpha k+\alpha};q\right)_\infty}{\left(q^{k+1};q\right)_\infty} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_{4,q} := \frac{(q^{1-\alpha};q)_\infty}{(q^\epsilon/3;q)_\infty}\frac{\left(q^{\alpha k+\alpha};q\right)_\infty}{\left(q^{k+1};q\right)_\infty} \geq 3. \tag{3.11}$$

设 $q_0 := q^\epsilon/3$，且 $\gamma_{5,\ q} := \frac{1-q_0^{1-\epsilon\alpha}}{q^{\epsilon(1-\epsilon\alpha)}\ (1-q_0)}$。则 $\lim_{\epsilon\to 0}\gamma_{5,\ q}=1$ 且

$$\begin{aligned} qq_0/q = q_0 \leq 1 \Rightarrow qq_0 \leq q \quad &\Rightarrow \quad 1-q \leq 1-qq_0 \\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \quad (q;q)_\infty \leq (qq_0;q)_\infty, \end{aligned} \tag{3.12}$$

应用上述不等式以及式（2.1）和（3.8）—（3.12），可得

$$\begin{aligned} \widehat{N}_q(k) &:= \gamma_{5,q}\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty} - q^\epsilon\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty} \\ &\overset{(3.8)(3.9)(3.12)}{\geq} \frac{1-q_0^{1-\epsilon\alpha}}{q^{\epsilon(1-\epsilon\alpha)}(1-q_0)}\frac{\left(q^{\alpha k+\alpha};q\right)_\infty}{(qq_0;q)_\infty} - q^\epsilon\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty} \\ &\overset{(2.1)}{=} \frac{1-q_0^{1-\epsilon\alpha}}{q^{\epsilon(1-\epsilon\alpha)}}\frac{\left(q^{\alpha k+\alpha};q\right)_\infty}{(q_0;q)_\infty} - q^\epsilon\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty} \\ &= \frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty}\left[\frac{1-3^{\epsilon\alpha-1}q^{\epsilon(1-\epsilon\alpha)}}{q^{\epsilon(1-\epsilon\alpha)}}\gamma_{4,q} - q^\epsilon\right] \\ &\overset{(3.11)}{\geq} \frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q^{1-\alpha};q)_\infty}\left[3\frac{(1-3^{\epsilon\alpha-1}q^{\epsilon(1-\epsilon\alpha)})}{q^{\epsilon(1-\epsilon\alpha)}} - q^\epsilon\right] \\ &\overset{(3.10)}{\geq} \frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}3\left[q^{-\epsilon(1-\epsilon\alpha)} - 3^{\epsilon\alpha-1} - q^\epsilon/3\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由式（2.9）、（3.6）和（3.13）可得

$$\begin{aligned} N_q(k) &\overset{(3.6)}{=} (1-q)^{\alpha k}\left[\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}-\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{\left(q^{1-\alpha};q\right)_\infty}\right] \\ &\overset{(3.13)}{=} (1-q)^{\alpha k}\lim_{\epsilon\to 0}\widehat{N}_q(k) \\ &\geq (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}3\left[1-1/3-1/3\right] \\ &\geq (1-q)^{\alpha k-k}\left[(1-q)^{1-(k+1)}\frac{(q;q)_\infty}{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}\right]^{-1} \\ &\overset{(2.9)}{=} \frac{(1-q)^{(\alpha-1)k}}{\Gamma_q(k+1)}, \end{aligned}$$

对于 $k=0$、1、2、3、$\cdots$。

因此,

$$\frac{(1-q)^{(\alpha-1)k}}{\Gamma_q(k+1)}\lesssim N_q(k). \tag{3.14}$$

利用 (1.4)、(3.6)、(3.7) 和 (3.14)，我们得到

$$\begin{aligned} \frac{e_{\alpha,1}(-z;q)}{\left[1+\Gamma_q(1-\alpha)z\right]^{-1}} &= e_{\alpha,1}(-z;q)+e_{\alpha,1}(-z;q)\Gamma_q(1-\alpha)z \\ &\overset{(1.4)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma_q(\alpha k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^{k+1}\Gamma_q(1-\alpha)}{\Gamma_q(\alpha k+1)} \\ &= 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma_q(\alpha k+1)}-\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z)^k\Gamma_q(1-\alpha)}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+1)}\right] \\ &= 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma_q(\alpha k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k\Gamma_q(1-\alpha)}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+1)} \\ &= 1+\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k\left[\frac{1}{\Gamma_q(\alpha k+1)}-\frac{\Gamma_q(1-\alpha)}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+1)}\right] \\ &\overset{(2.1)}{=} 1+\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k\left[\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}(1-q)^{\alpha k}\right. \\ &- \left.\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{\left(q^{1-\alpha};q\right)_\infty}(1-q)^{\alpha k}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(3.6)}{=} && 1+\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k N_q(k)\\
&\overset{(3.7)(3.14)}{\approx} && 1+\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k \frac{(1-q)^{\alpha k-k}}{\Gamma_q(k+1)}\\
&\overset{(2.9)}{=} && 1+\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{(1-q)^{1-\alpha}}\right)^k \frac{1}{[k]_q!}\\
&\overset{(2.3)}{=} && 1+e_q\left(-\frac{z}{(1-q)^{1-\alpha}}\right)\\
&\geq && 1.
\end{aligned}$$

因此

$$0<\frac{1}{1+\Gamma_q(1-\alpha)z}\leq e_{\alpha,1}(-z;q), \tag{3.15}$$

并证明了 (3.1) 和 (3.2) 中的下界估计。

上界估计。利用 $0<\alpha<1$ 和 $k\in\mathbb{N}$ 的 (2.1)，我们得到以下不等式

$$\begin{aligned}
&q^{\alpha+1}/q=q^{\alpha}\leq 1\Rightarrow 1-q\leq 1-q^{\alpha+1} \quad\Rightarrow\quad \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{n+1}\right)\leq\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{\alpha+1+n}\right)\\
&\overset{(2.1)}{\Rightarrow}\quad 1\leq\frac{(q^{\alpha+1};q)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}};
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
&q^{\alpha(k-1)+1}/q=q^{\alpha(k-1)}\leq 1\Rightarrow q^{\alpha(k-1)+1}\leq q \quad\Rightarrow\quad 1-q\leq 1-q^{\alpha(k-1)+1}\\
&\overset{(2.1)}{\Rightarrow}\quad 1\leq\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}};
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
&q^{\alpha k+1}/q^{k+1}=q^{\alpha-1}\geq 1\Rightarrow q^{\alpha k+1}\geq q^{k+1} \quad\Rightarrow\quad 1-q^{\alpha k+1}\leq 1-q^{k+1}\\
&\overset{(2.1)}{\Rightarrow}\quad 1\geq\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_{\infty}}{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

我们假设 $0<\xi<\alpha$。然后，利用不等式 $\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}\leq 1$，对于 $k\in\mathbb{N}$，以及式 (3.16)–(3.18)，可得

$$\begin{aligned}
\gamma_{6,q} &:= \frac{1}{1-\xi}\frac{(1-q)^{\alpha k}}{(\xi q;q)_{\infty}}\frac{(q^{\alpha+1};q)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\\
&\overset{(3.16)(3.17)}{\geq} \frac{1}{1-\xi}\frac{(1-q)^{\alpha k}}{(\xi q;q)_{\infty}}\\
&\geq \frac{(1-q)^{\alpha k}}{1-\xi}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\\
&\geq \frac{(1-q)^{\alpha k}}{1-\alpha}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中 $\lim_{\xi\to 0}\frac{q^{\xi}(;)_{\infty}}{-\xi q^{q}}=1$ 且

$$\begin{aligned}\gamma_{7,q} &:= q^{\xi}(1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\\ &= q^{\xi}(1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_{\infty}}{(q^{k+1};q)_{\infty}}\\ &\overset{(3.18)}{\leq} q^{\xi}(1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}. \end{aligned}\tag{3.20}$$

由 (2.1)、(2.9) 和 (3.19)-(3.20) 可得

$$\begin{aligned}M_q(k) &:= \frac{\Gamma_q^{-1}(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+1)}-\frac{1}{2\Gamma_q(\alpha k+1)}\\ &\overset{(2.1)}{=} (1-q)^{\alpha k}\frac{(q^{\alpha+1};q)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}-(1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\\ &\overset{(3.19)(3.20)}{=} \lim_{\xi\to 0}\left[\gamma_{6,q}-\gamma_{7,q}\right]\\ &\geq (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\lim_{\xi\to 0}\left[\frac{1}{1-\alpha}-q^{\xi}\right]\\ &= (1-q)^{\alpha k-k}\left[(1-q)^{(k+1)-1}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\right]\left[\frac{1}{1-\alpha}-1\right]\\ &\overset{(2.9)}{=} \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{(1-q)^{\alpha k-k}}{\Gamma_q(k+1)}. \end{aligned}\tag{3.21}$$

因此,

$$\frac{(1-q)^{\alpha k-k}}{\Gamma_q(k+1)} \lesssim M_q(k).\tag{3.22}$$

再次，对于 $k\in\mathbb{N}$，利用（2.1），我们得到以下不等式

$$\begin{aligned}q^{\alpha k+1}/q^{\alpha(k-1)+1}=q^{-\alpha}\geq 1 &\Rightarrow 1-q^{\alpha(k-1)+1}\leq 1-q^{\alpha k+1}\\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_{\infty}\leq\left(q^{\alpha k+1};q\right)_{\infty};\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}q^{\alpha(k-1)+1}/q^{k+1}=q^{-k-\alpha+\alpha k}\geq 1 &\Rightarrow 1-q^{\alpha(k-1)+1}\leq 1-q^{k+1}\\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_{\infty}\leq\left(q^{k+1};q\right)_{\infty};\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}q^{\alpha}/q=q^{\alpha-1}\geq 1 &\Rightarrow 1-q^{\alpha}\leq 1-q\\ &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \frac{(q^{\alpha};q)_{\infty}}{(q;q)_{\infty}}\leq 1.\end{aligned}\tag{3.25}$$

首先，考虑情形 $q^\alpha \leq 1-q^\alpha < 1$。于是 $\frac{q^\alpha}{1-q^\alpha} \leq 1$。由（2.1）和（3.23）–（3.25），可得 (3.21)

$$\begin{aligned}
M_q(k) &\overset{(3.21)}{=} (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{\alpha+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty} - (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{\alpha k+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\\
&\overset{(3.23)}{\leq} (1-q)^{\alpha k}\left[\frac{\left(q^{\alpha+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty} - \frac{\left(q^{\alpha k-1+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\right]\\
&\leq (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\left[\frac{1-q^\alpha}{1-q^\alpha}\frac{\left(q^{\alpha+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty} - 1\right]\\
&\overset{(2.1)(3.24)}{=} (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\left[\frac{1}{1-q^\alpha}\frac{\left(q^{\alpha};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty} - 1\right]\\
&\overset{(3.25)}{=} (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\left[\frac{1}{1-q^\alpha} - 1\right]\\
&\leq (1-q)^{\alpha k-k}\left[(1-q)^{(k+1)-1}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\right]\left[\frac{1}{1-q^\alpha} - \frac{q^\alpha}{1-q^\alpha}\right]\\
&\overset{(2.9)}{=} \frac{(1-q)^{\alpha k-k}}{\Gamma_q(k+1)}. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

接下来，我们讨论情形 $1-q^\alpha < q^\alpha$。事实上，$1/2 < q^\alpha$。利用（3.26），我们可写为

$$\begin{aligned}
M_q(k) &\leq (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\left[\frac{1}{1-q^\alpha} - 1\right]\\
&\leq (1-q)^{\alpha k}\frac{\left(q^{k+1};q\right)_\infty}{\left(q;q\right)_\infty}\left[\frac{1}{1-1/2} - 1\right]\\
&= \frac{(1-q)^{\alpha k-k}}{\Gamma_q(k+1)}.
\end{aligned}$$

因此，

$$M_q(k) \lesssim \frac{(1-q)^{\alpha k-k}}{\Gamma_q(k+1)}. \qquad (3.27)$$

根据式（2.3）、（2.9）、（3.22）和（3.27），我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{e_{\alpha,1}(-z;q)}{\left[1+\Gamma_q^{-1}(\alpha+1)z\right]^{-1}} &= e_{\alpha,1}(-z;q) + \Gamma_q^{-1}(\alpha+1)\,z e_{\alpha,1}(-z;q)\\
&\overset{(2.9)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma_q(\alpha k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^{k+1}\Gamma_q^{-1}(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha k+1)}\\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma_q(\alpha k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z)^k\Gamma_q^{-1}(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\sum_{k=1}^{\infty}(-z)^k\left[\frac{\Gamma_q^{-1}(\alpha+1)}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+1)}-\frac{1}{\Gamma_q(\alpha k+1)}\right]\\
&\overset{(3.21)}{=} 1-\sum_{k=1}^{\infty}(-z)^k M_q(k)\\
&\overset{(3.22)(3.27)}{\approx} 1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z}{(1-q)^{1-\alpha}}\right)^k}{[k]_q!}\\
&\overset{(2.3)}{=} 1-e_q\left(-\frac{z}{(1-q)^{1-\alpha}}\right)\\
&\leq 1.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha,1}(-z;q) &\leq \frac{1}{1+\Gamma_q^{-1}(\alpha+1)z}\\
&\leq \frac{1}{1+\Gamma_q^{-1}(\alpha+1)z}\\
&\leq 1,
\end{aligned}
$$

这也意味着（3.1）和（3.2）中的上界估计得以证明。证明完毕。□

引理 3.2。设 $0<\alpha<2$、 $0\leq\beta$ 和 $z>0$。则有

$$
|e_{\alpha,\beta}(-z;q)|\leq\frac{C_q}{1+z}, \tag{3.28}
$$

where $C_q:=\frac{e_{q^{1/2}}(\alpha')}{\Gamma_q(\beta)}$ *and* $\alpha':=\frac{2^\alpha}{\left(1-q^\beta\right)(1-q^{1/2})}$.

证明。设 $0<\alpha<2$、 $0\leq\beta$ 和 $k\in\mathbb{N}$。由（2.1）可得以下不等式

$$
\begin{aligned}
q^{2k+\beta}\leq q^{\alpha k+\beta}\leq q^{\alpha(k-1)+\beta} &\Rightarrow 1-q^{\alpha(k-1)+\beta}\leq 1-q^{\alpha k+\beta}\leq 1-q^{2k+\beta}\\
&\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \left(q^{\alpha(k-1)+\beta};q\right)_\infty\leq\left(q^{\alpha k+\beta};q\right)_\infty\leq\left(q^{2k+\beta};q\right)_\infty;\\
&\Rightarrow (1-q)^{\alpha k}\leq(1-q)^{\alpha(k-1)}, \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
q^{\beta+1}\leq q\leq q^{1/2} &\overset{(2.1)}{\Rightarrow} \left(q^{1/2};q^{1/2}\right)_k\leq\left(q^{\beta+1};q^2\right)_k;\\
(q^\beta;q^2)_k &\overset{(2.1)}{=} (1-q^\beta)(1-q^{\beta+2})\ldots(1-q^{\beta+k-2})\\
&\Rightarrow (1-q^\beta)^k\leq(q^\beta;q^2)_k. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

因此，利用 (2.2)、(3.29) 和 (3.30)，可得

$$
\begin{aligned}
\gamma_{8,q} &:= \frac{1}{\Gamma_q(\alpha k+\beta)}+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+\beta)}\\
&\overset{(2.9)}{=} (1-q)^{\alpha k+\beta-1}\frac{\left(q^{\alpha k+\beta};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}\\
&+ (1-q)^{\alpha(k-1)+\beta-1}\frac{\left(q^{\alpha(k-1)+\beta};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}\\
&\overset{(3.29)}{\leq} 2(1-q)^{\alpha(k-1)}\left[(1-q)^{\beta-1}\frac{\left(q^{\beta};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty}\right]\frac{\left(q^{2k+\beta};q\right)_\infty}{\left(q^{\beta};q\right)_\infty}\\
&\overset{(2.9)(2.2)}{=} \frac{2}{\Gamma(\beta)}(1-q)^{\alpha(k-1)}\frac{1}{\left(q^{\beta};q\right)_{2k}}\\
&\overset{(2.2)}{=} \frac{2}{\Gamma(\beta)}(1-q^{1/2})^{\alpha(k-1)}\frac{(1+q^{1/2})^{\alpha(k-1)}}{\left(q^{\beta};q^2\right)_k\left(q^{\beta+1};q^2\right)_k}\\
&\overset{(3.30)}{=} \frac{1}{\Gamma(\beta)}(1-q^{1/2})^{\alpha(k-1)}\frac{2^{\alpha k}}{\left(1-q^{\beta}\right)^k\left(q^{1/2};q^{1/2}\right)_k}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}(1-q^{1/2})^{\alpha(k-1)}\frac{\left[\frac{2^{\alpha}}{\left(1-q^{\beta}\right)\left(1-q^{1/2}\right)}\right]^k}{\left[\frac{\left(q^{1/2};q^{1/2}\right)_k}{\left(1-q^{1/2}\right)^k}\right]}\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}(1-q^{1/2})^{\alpha(k-1)}\frac{(\alpha')^k}{[k]_{q^{1/2}}!}, \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha'=\quad\frac{2^{\alpha}}{\left(1-q^{\beta}\right)\left(1-q^{1/2}\right)}$。

因此，由式 (2.1)、(3.29) 和 (3.31) 可得

$$
\begin{aligned}
\frac{e_{\alpha,\beta}\left(-z;q\right)}{[1+z]^{-1}} &\overset{(1.4)}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma_q(\alpha k+\beta)}+z\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{\Gamma_q(\alpha k+\beta)}\\
&\leq \frac{1}{\Gamma_q(\beta)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma_q(\alpha k+\beta)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+\beta)}\\
&= \frac{1}{\Gamma_q(\beta)}+\sum_{m=1}^{\infty}z^k\left[\frac{1}{\Gamma_q(\alpha k+\beta)}+\frac{1}{\Gamma_q(\alpha(k-1)+\beta)}\right]\\
&\overset{(3.31)}{=} \frac{1}{\Gamma_q(\beta)}+\sum_{m=1}^{\infty}z^k\gamma_{8,q}\\
&\overset{(3.31)}{\leq} \frac{1}{\Gamma_q(\beta)}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{m=1}^{\infty}\left[(1-q^{1/2})^{\frac{\alpha(k-1)}{k}}z\right]^k\frac{(\alpha')^k}{[k]_{q^{1/2}}!}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\Gamma_q(\beta)}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha')^k}{[k]_{q^{1/2}}!} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma_q(\beta)}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha')^k}{[k]_{q^{1/2}}!}\right] \\ &\leq \frac{e_{q^{1/2}}(\alpha')}{\Gamma_q(\beta)}. \end{aligned}$$

因此,

$$|e_{\alpha,\beta}(-z;q)| \leq \frac{e_{q^{1/2}}(\alpha')}{\Gamma_q(\beta)}\frac{1}{1+z},$$

这意味着估计式 (3.28) 成立。证明完毕。 □

4. Direct problem

本节考虑量子微积分中的时间分数阶亚扩散的柯西问题。我们基于 $\mathcal{L}$–傅里叶方法，研究该问题的存在性与唯一性结果。 $\mathcal{L}$-傅里叶分析的介绍和一些基本定义见 [20], [31], [33] 及其中的参考文献。我们简要介绍本文所使用的定义，以及在 [32] 中发展起来的全局傅里叶分析。设 H 为可分希尔伯特空间， $\mathcal{L}$ 为正算子，其对应的离散谱为 $\{\lambda_k\}_{k\in I}$，定义在 H上，使得 $\lambda_k \in \mathbb{R}$: 对所有 $k \in I$，均有 $\lambda_k \geq 0$，其中 I 为可数集（对于某些 k，$I=\mathbb{N}^k$ 或 $I=\mathbb{Z}^k$）。 H 上的普朗歇尔恒等式写成

$$\|u\|_H = \left(\sum_{k\in I}|\langle u,\psi_k\rangle_H|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1}$$

对于 $u \in H$，其中 ψ_k 是与 λ_k对应的 H 的标准正交基。

因此，我们还可以定义与 $\mathcal{L}$ 相关的索伯列夫空间 $\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}$，如下:

$$\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}} := \left\{u \in H : (I+\mathcal{L})^{d/2}u \in H\right\}$$

对于任意 $d \in \mathbb{R}$，利用普朗歇尔恒等式，我们可以将范数写成如下形式:

$$\|u\|_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} := \|(I+\mathcal{L})^{d/2}u\|_H = \left(\sum_{k\in I}(1+\lambda_k)^d|\langle u,\psi_k\rangle_H|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2}$$

对于 $u:\in [0,T]\to\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}$，我们引入空间$W^{\alpha}_q\left([0,T];\ \mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right)$、 $C^m_q\left([0,T];\ \mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right)$和 $L^{\infty}_q[0,T]$，如下:

$$\|u\|_{W^{\alpha}_q([0,T];\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}})} := \max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} + \max_{0\leq t\leq T}\|{}^cD^{\alpha}_q u(t)\|_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}}$$

对于 $0<\alpha<2$，以及

$$\|u\|_{C^m_q([0,T];\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}})} := \sum_{i=0}^{m}\sup_{0<t\leq T}\|D^i_q u(t)\|_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}},$$

and

$$\|u\|_{L_q^\infty([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d)} = \sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d}.$$

4.1. $0 < \alpha \le 1$ 情形。本节的首要目的是研究方程的直接时间分数阶亚扩散问题

$$ {}^cD_q^\alpha u(t) + \mathcal{L}u(t) + mu(t) = f(t) \in H, \quad t > 0, \tag{4.3}$$

满足初始数据

$$u(0) = \varphi \in H, \tag{4.4}$$

其中 ${}^cD_{0+,t}^\alpha u(t)$ 是关于 t 的 $u(t)$ 的 q 阶 Caputo 分数阶导数（参见 (2.10) 和 $m > 0$。

问题 (4.3)-(4.4) 的广义解是一个函数

$$u \in L_q^\infty\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}\right) \cap W_q^\alpha\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}\right).$$

对于所考虑的问题，以下定理成立。

定理 4.1. 设 $0 < \alpha \le 1, 0 < T < \infty, \varphi \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}$ 和 $f \in C_q^1\left([0,T];\ \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d\right)$。那么，存在问题 (4.3)-(4.4) 的唯一解 $u(t)$，使得

$$u \in L_q^\infty\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}\right) \cap W_q^\alpha\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}\right).$$

此外，该解可写成如下形式

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k\in I}\left[\varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^\alpha;q\right)\right]\psi_k \\ &+ \sum_{k\in I}\left[\int_0^t t^{\alpha-1}\left(qs/t;q\right)_{\alpha-1}\varepsilon^{-q^\alpha s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^\alpha;q\right)f_k(s)d_qs\right]\psi_k, \end{aligned}$$

它满足以下估计

$$\|{}^cD_q^\alpha u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d}^2 + \|u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^2 \le C_T\left[\|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^2 + \|f\|_{C_q^1\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d\right)}^2\right], \quad 0 < t \le T,$$

其中，q-平移算子 $\varepsilon^{-q^\alpha s}$ 在 (2.6) 中定义，且 $C_T := \max\{2, \quad T\}$.

证明。存在性。由于特征函数系 ψ_k 是 H 中的一组基，我们设广义解为 $u(t)$ 的如下形式

$$u(t) = \sum_{k\in I} u_k(t)\psi_k, \tag{4.5}$$

并将方程 (4.2) 右端的函数表示为如下形式:

$$f(t) = \sum_{k\in I} f_k(t)\psi_k, \tag{4.6}$$

其中，傅里叶系数由以下公式定义

$$u_k(t) := \langle u(t), \psi_k\rangle_H, \quad f_k(t) := \langle f(t), \psi_k\rangle_H.$$

此外，我们还得到了式（4.5）–（4.6）的导数表达式：

$$ {}^{c}D_{q}^{\alpha}u(t)=\sum_{k\in I}{}^{c}D_{q}^{\alpha}u_{k}(t)\psi_{k}, \tag{4.7} $$

$$ \mathcal{L}u(t)=\sum_{k\in I}\lambda_{k}u_{k}(t)\psi_{k}. \tag{4.8} $$

然后将（4.6）-（4.8）代入（4.3）和（4.4），得到

$$ {}^{c}D_{q,t}^{\alpha}u_{k}(t)+\left(\lambda_{k}+m\right)u_{k}(t)=f_{k}(t), \tag{4.9} $$

$$ u_{k}(0)=\varphi_{k}, \tag{4.10} $$

对于 $k\in I$ 和 $t>0$。

问题（4.8）-（4.10）的广义解（[35, 定理 3.1]）为

$$ \begin{aligned} u_{k}(t) &= \varphi_{k}e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_{k}+m\right)t^{\alpha};q\right) \\ &+ \int_{0}^{t}t^{\alpha-1}\left(qs/t;q\right)_{\alpha-1}\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\left(\lambda_{k}+m\right)t^{\alpha};q\right)f_{k}(s)d_{q}s. \end{aligned} \tag{4.11} $$

结合（4.5）和（4.11），可得

$$ \begin{aligned} u(t) &= \sum_{k\in I}\left[\varphi_{k}e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_{k}+m\right)t^{\alpha};q\right)\right]\psi_{k} \\ &+ \sum_{k\in I}\left[\int_{0}^{t}t^{\alpha-1}\left(qs/t;q\right)_{\alpha-1}\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\left(\lambda_{k}+m\right)t^{\alpha};q\right)f_{k}(s)d_{q}s\right]\psi_{k}. \end{aligned} $$

收敛性。我们假设 $i=0$、1、2.....以及 $0<\alpha\leq 1$。然后根据以下结果（见 [9, 命题 14.1]），我们有

$$ t^{\alpha i-1}(q^{\alpha}s/t;q)_{\alpha i-1}=t^{\alpha(i-1)}(q^{\alpha}s;q)_{\alpha(i-1)}\left[t^{\alpha-1}(qs/t;q)_{\alpha-1}\right]. \tag{4.12} $$

对于固定的 k，记 $\lambda_{0}:=\lambda_{k}+m$ （ $m>0$）。利用 (2.5)、(2.6)、(2.9) 和 (4.12), 可得

$$
\begin{aligned}
D_{q,s}\left[\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\right] &= D_{q,s}\left[e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha}(q^{\alpha}s/t;q)_{\alpha};q\right)\right]\\
&\overset{(2.6)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(-\lambda_0\right)^i}{\Gamma_q(\alpha i+1)}D_{q,s}\left[t^{\alpha i}(q^{\alpha}s/t;q)_{\alpha i}\right]\\
&\overset{(2.5)}{=} -\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\lambda_0\right)^i\frac{[\alpha i]_q}{\Gamma_q(\alpha i+1)}t^{\alpha i-1}(q^{\alpha}s/t;q)_{\alpha i-1}\\
&\overset{(2.9)}{=} -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(-\lambda_0\right)^i}{\Gamma_q(\alpha i)}t^{\alpha i-1}(q^{\alpha}s/t;q)_{\alpha i-1}\\
&\overset{(4.12)}{=} \lambda_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(-\lambda_0\right)^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)}\left[\frac{t^{\alpha(i-1)}(q^{\alpha}s;q)_{\alpha(i-1)}}{\left[t^{\alpha-1}(qs/t;q)_{\alpha-1}\right]^{-1}}\right]\\
&= \lambda_0\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{(-\lambda_k)^i t^{\alpha i}(q^{\alpha}s/t;q)_{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}}{\left[t^{\alpha-1}(qs/t;q)_{\alpha-1}\right]^{-1}}\\
&= \lambda_0\frac{\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)}{\left[t^{\alpha-1}(qs/t;q)_{\alpha-1}\right]^{-1}}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\frac{\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)}{\left[t^{\alpha-1}(qs/t;q)_{\alpha-1}\right]^{-1}} = \frac{D_{q,s}\left[\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\right]}{\lambda_0}. \tag{4.13}
$$

由式 (2.8) 和 (4.13) 可得

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\frac{\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)f_k(s)}{\left[t^{\alpha-1}\left(qs/t;q\right)^{\alpha-1}\right]^{-1}}d_qs &\overset{(4.13)}{=} \int_0^t\frac{D_{q,s}\left[\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\right]f_k(s)d_qs}{\lambda_0}\\
&\overset{(2.8)}{=} \frac{f_k(t)\varepsilon^{-q^{\alpha}t}e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)}{\lambda_0} - \frac{f_k(0)e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)}{\lambda_0}\\
&- \int_0^t\frac{\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)D_qf_k(s)d_qs}{\lambda_0}.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

由于 $\varphi\in\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}$、 $f\in C_q^1\left([0,T];\ \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d\right)$, 由（3.28）、（4.11）和（4.14）可得

$$
\begin{aligned}
\left|\langle u(t),\psi_k\rangle_H\right| &\overset{(4.11)}{\leq} \left|\langle\varphi(t),\psi_k\rangle_H\right|\left|e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\right|\\
&+ \left|\int_0^t t^{\alpha-1}\left(qs/t;q\right)_{\alpha-1}\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\langle f(t),\psi_k\rangle_H d_qs\right|\\
&\overset{(4.14)}{\leq} \left|\langle\varphi(t),\psi_k\rangle_H\right|\left|e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\right| + \frac{\left|\langle f(t),\psi_k\rangle_H\right|\left|\varepsilon^{-q^{\alpha}t}e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\right|}{\lambda_0}\\
&+ \frac{\left|e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^{\alpha};q\right)\right|\left|\langle f(0),\psi_k\rangle_H\right|}{\lambda_0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{\int_0^t \left|\varepsilon^{-q^\alpha s} e_{\alpha,1}\left(-\lambda_0 t^\alpha; q\right) \langle D_q f(t), \psi_k\rangle_H\right| d_q s}{\lambda_0} \\
&\overset{(3.28)}{\lesssim} \quad |\langle \varphi(t), \psi_k\rangle_H| + \frac{|\langle f(t), \psi_k\rangle_H|}{\lambda_0} \\
&+ \quad \frac{|\langle f(0), \psi_k\rangle_H|}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_0}\int_0^t |D_q\langle f(t), \psi_k\rangle_H|\, d_q s \\
&\leq \quad |\langle \varphi, \psi_k\rangle_H| + \frac{2}{\lambda_0}\sup_{0<t\leq T}|\langle f(t), \psi_k\rangle_H| + \frac{T}{\lambda_0}\sup_{0<t\leq T}|\langle D_q f(t), \psi_k\rangle_H|,
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda_k)^{d/2}|\langle u(t), \psi_k\rangle_H| \;\leq\; & C_T\left[\left|\langle (1+\lambda_k)^{d/2}\varphi, \psi_k\rangle_H\right|\right. \\
& + \sup_{0<t\leq T}\left|\langle (1+\lambda_k)^{d/2-1} f(t), \psi_k\rangle_H\right| \\
& \left. + \sup_{0<t\leq T}\left|\langle (1+\lambda_k)^{d/2-1} D_q f(t), \psi_k\rangle_H\right|\right], \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

其中 $C_T := \max\{2, T\}$。

根据傅里叶系数的定义以及（4.9）和（4.15），可得

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda_k)^{d/2}\left|\langle {}^cD_q^\alpha u(t), \psi_k\rangle_H\right| &= (1+\lambda_k)^{d/2}|{}^cD_q^\alpha u_k(t)| \\
&\overset{(4.9)}{\lesssim} (1+\lambda_k)^{d/2+1}|u_k(t)| + (1+\lambda_k)^{d/2}|f_k(t)| \\
&\overset{(4.15)}{\leq} C_T\left[\left|\langle (1+\lambda_k)^{d/2+1}\varphi, \psi_k\rangle_H\right|\right. \\
&\quad + \sup_{0<t\leq T}\left|\langle (1+\lambda_k)^{d/2} f(t), \psi_k\rangle_H\right| \\
&\quad \left. + \sup_{0<t\leq T}\left|\langle (1+\lambda_k)^{d/2} D_q f(t), \psi_k\rangle_H\right|\right] \\
&= C_T\left[\left|\langle (I+\mathcal{L})^{d/2+1}\varphi, \psi_k\rangle_H\right|\right. \\
&\quad + \sup_{0<t\leq T}\left|\langle (I+\mathcal{L})^{d/2} f(t), \psi_k\rangle_H\right| \\
&\quad \left. + \sup_{0<t\leq T}\left|\langle (I+\mathcal{L})^{d/2} D_q f(t), \psi_k\rangle_H\right|\right], \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned}(1+\lambda_k)^{d/2}\left|\langle \mathcal{L}u(t),\psi_k\rangle_H\right| &= (1+\lambda_k)^{d/2}\left|\langle \lambda_k u(t),\psi_k\rangle_H\right| \\ &\overset{(4.15)}{\leq} C_T\left[\left|\left\langle (1+\lambda_k)^{d/2+1}\varphi,\psi_k\right\rangle_H\right|\right. \\ &+ \sup_{0<t\leq T}\left|\left\langle (1+\lambda_k)^{d/2} f(t),\psi_k\right\rangle_H\right| \\ &+ \left.\sup_{0<t\leq T}\left|\left\langle (1+\lambda_k)^{d/2} D_q f(t),\psi_k\right\rangle_H\right|\right] \\ &= C_T\left[\left|\left\langle (I+\mathcal{L})^{d/2+1}\varphi,\psi_k\right\rangle_H\right|\right. \\ &+ \sup_{0<t\leq T}\left|\left\langle (I+\mathcal{L})^{d/2} f(t),\psi_k\right\rangle_H\right| \\ &+ \left.\sup_{0<t\leq T}\left|\left\langle (I+\mathcal{L})^{d/2} D_q f(t),\psi_k\right\rangle_H\right|\right]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

利用（4.2）、（4.16）、（4.17）以及帕塞瓦尔恒等式，可得

$$\begin{aligned}\left\|{}^cD_q^\alpha u(t)\right\|^2_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} &\overset{(4.2)}{=} \sum_{k\in I}(1+\lambda_k)^d\left|\langle {}^cD_q^\alpha u(t),\psi_k\rangle_H\right|^2 \\ &\overset{(4.16)}{\leq} C_T\left\{\sum_{k\in I}\left|\left\langle (I+\mathcal{L})^{d/2+1}\varphi,\psi_k\right\rangle_H\right|^2\right. \\ &+ \sum_{k\in I}\left[\sup_{0<t\leq T}\left|\left\langle (I+\mathcal{L})^{d/2} f(t),\psi_k\right\rangle_H\right|^2\right. \\ &+ \left.\left.\sup_{0<t\leq T}\left|\left\langle (I+\mathcal{L})^{d/2} D_q f(t),\psi_k\right\rangle_H\right|^2\right]\right\} \\ &\overset{(4.2)}{=} C_T\left[\left\|\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2+1}\varphi\right\|^2_H + \sup_{0<t\leq T}\left\|\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2} f(t)\right\|^2_H\right. \\ &+ \left.\sup_{0<t\leq T}\left\|\left(1+\mathcal{L}\right)^{d/2} D_q f(t)\right\|^2_H\right] \\ &= C_T\left[\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} + \|f\|^2_{C^1_q\left([0,T];\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right)}\right] < \infty, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left\|\left(I+\mathcal{L}\right)u(t)\right\|^2_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} &\overset{(4.2)}{=} \sum_{k\in I}\left|(1+\lambda_k)^{d/2}\left\langle \left(I+\mathcal{L}\right)u(t),\psi_k\right\rangle_H\right|^2 \\ &\overset{(4.17)}{\leq} C_T\left[\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} + \|f\|^2_{C^1_q\left([0,T];\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right)}\right] < \infty. \end{aligned}$$

因此，上述估计表明

$$\left\|{}^cD_q^\alpha u(t)\right\|^2_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} + \|u(t)\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} \leq C_T\left[\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} + \|f\|^2_{C^1_q\left([0,T];\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right)}\right],$$

这意味着 $u\in L^\infty_q\left([0,T];\ \mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}\right)\cap W^\alpha_q\left([0,T];\ \mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right)$。

唯一性。假设问题 (4.2)-(4.3) 有两个解 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$。那么对于 $w=u-v$，必有

$$\begin{aligned} {}^cD_q^\alpha w+\mathcal{L}w &= {}^cD_q^\alpha(u-v)+\mathcal{L}(u-v)+mw(u-v)\\ &= {}^cD_t^\alpha u+\mathcal{L}u-\left[{}^cD_q^\alpha v+\mathcal{L}v\right]\\ &= f-f=0, \end{aligned}$$

满足初始条件

$$w(0)=u(0)-v(0)=\varphi-\varphi=0.$$

因此，$w=0$，且解必定唯一。证明完毕。 □

4.2. $1<\alpha<2$ 情形。本小节讨论时间分数阶亚扩散方程的一个柯西问题

$$ {}^cD_q^\alpha u(t)+\mathcal{L}u(t)+mu(t)=f(t)\in H, \tag{4.18}$$

满足初始数据

$$u(0)=\varphi\in H,\quad D_qu(0)=\rho\in H. \tag{4.19}$$

定理 4.2. 设 $1<\alpha<2$、$m>0$ 和 $0<T<\infty$。假设 φ、$\rho\in\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}$ 和 $f\in C_q^1\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d\right)$。则问题（4.18）-（4.19）存在唯一解：

$$u\in L_q^\infty\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}\right)\cap W_q^\alpha\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d\right).$$

此外，该解可以写成如下形式

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k\in I}\Big[\varphi_k e_{\alpha,1}\left(-(\lambda_k+m)t^\alpha;q\right)+t\rho_k e_{\alpha,2}\left(-(\lambda_k+m)t^\alpha;q\right)\\ &+ \int_0^t t^{\alpha-1}(qs/t;q)_{\alpha-1}\varepsilon^{-q^\alpha s}e_{\alpha,\alpha}\left(-(\lambda_k+m)t^\alpha;q\right)f_k(s)d_qs\Big]\phi_k, \end{aligned} \tag{4.20}$$

并满足估计

$$\|{}^cD_q^\alpha u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d}^2+\|u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^2\le C_T\left[\|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^2+\|\rho\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^2+\|f\|_{C_q^1\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d\right)}^2\right], \tag{4.21}$$

对于 $0\le t\le T$。

证明。存在性。重复定理 4.1 证明中的论证，可得方程 (4.7) 及初始条件

$$u_k(0)=\varphi_k,\quad D_qu_k(0)=\rho_k,\quad k\in I, \tag{4.22}$$

以及如下形式的广义解：

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \varphi_k e_{\alpha,1}\left(-(\lambda_k+m)t^\alpha;q\right)+t\rho_k e_{\alpha,2}\left(-(\lambda_k+m)t^\alpha;q\right)\\ &+ \int_0^t t^{\alpha-1}(qs/t;q)_{\alpha-1}\varepsilon^{-q^\alpha s}e_{\alpha,\alpha}\left(-(\lambda_k+m)t^\alpha;q\right)f_k(s)d_qs. \end{aligned} \tag{4.23}$$

利用 (4.5) 和 (4.23)，我们得到解 (4.20)。

收敛性。利用 (4.14) 和 (4.23)，我们得到

$$\begin{aligned} u_k(t) &\overset{(4.14)(4.23)}{=} \varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^\alpha;q\right)+t\rho_k e_{\alpha,2}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^\alpha;q\right)\\ &+ \frac{1}{\lambda_k+m}f_k(t)e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^\alpha(q^\alpha;q)_\alpha;q\right)\\ &- \frac{1}{\lambda_k+m}f_k(0)e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^\alpha;q\right)\\ &- \frac{1}{\lambda_k+m}\int_0^t \varepsilon^{-q^{\alpha+1}s}e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^\alpha;q\right)D_{q,s}f_k(s)d_qs. \end{aligned} \tag{4.24}$$

由 (3.28) 和 (4.24) 可得

$$\begin{aligned} \left(1+\lambda_k\right)^{d/2}\left|\langle u(t),\psi_k\rangle_H\right| &\overset{(3.28)(4.24)}{\leq} C_T\Big\{\left(1+\lambda_k\right)^{d/2}\left|\langle\varphi,\psi_k\rangle_H\right|\\ &+ \left(1+\lambda_k\right)^{d/2}\left|\langle\rho,\psi_k\rangle_H\right|\\ &+ \left(1+\lambda_k\right)^{d/2-1}\sup_{0<s\leq T}\left|\langle f(t,\cdot),\psi_k\rangle_H\right|\\ &+ \left(1+\lambda_k\right)^{d/2-1}\sup_{0<s\leq T}\left|\langle D_qf(s,\cdot),\psi_k\rangle_H\right|\Big\}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

其中 $C_T:=\max\{2,T\}$。

由于 $\varphi,\rho\in\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}$，$f\in C_q^1\left([0,T];\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^d\right)$，利用 (4.9) 和 (4.25) 可得

$$\begin{aligned} \left(1+\lambda_k\right)^{d/2}\left|\langle{}^cD_q^\alpha u(t),\psi_k\rangle_H\right| &\overset{(4.9)}{\lesssim} \left(1+\lambda_k\right)^{d/2}\left|u_k(t)\right|+\left|f_k(t)\right|\\ &\overset{(4.25)}{\leq} C_T\Big\{\left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2+1}\varphi,\psi_k\right\rangle_H\right|\\ &+ \left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2+1}\rho,\psi_k\right\rangle_H\right|\\ &+ \sup_{0<s\leq T}\left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2}f(t),\psi_k\right\rangle_H\right|\\ &+ \sup_{0<s\leq T}\left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2}D_qf(t),\psi_k\right\rangle_H\right|\Big\}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

and

$$\begin{aligned} \left(1+\lambda_k\right)^{d/2}\left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)u(t),\psi_k\right\rangle_H\right| &\overset{4.25)}{\leq} C_T\Big\{\left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2+1}\varphi,\psi_k\right\rangle_H\right|\\ &+ \left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2+1}\rho,\psi_k\right\rangle_H\right|\\ &+ \sup_{0<s\leq T}\left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2}f(t),\psi_k\right\rangle_H\right|\\ &+ \sup_{0<s\leq T}\left|\left\langle\left(I+\mathcal{L}\right)^{d/2}D_qf(t),\psi_k\right\rangle_H\right|\Big\}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

根据（4.26）和（4.27），我们得到（4.21）。

因此，上述估计表明

$$\|{}^cD_q^\alpha u(t)\|^2_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} + \|u(t)\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} \leq C_T \left[\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} + \|\rho\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} + \|f\|^2_{C^1_q([0,T];\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}})}\right],$$

这意味着 $u \in L_q^\infty\left([0,T];\ \mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}\right) \cap W_q^\alpha\left([0,T];\ \mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right)$。

唯一性。此部分可仿照定理 4.1 的证明进行证明，因此省略细节。证明完毕。□

5. Inverse problem

本小节讨论一个关于时间分数阶扩散方程的反问题。该问题是求满足下列方程的二元组 $(u(t)\ f)$:

$$ {}^cD^\alpha_{q,t}u(t) + \mathcal{L}u(t) + mu(t) = f \in H, \quad t > 0, \tag{5.1}$$

初始数据

$$u(0) \ = \ \varphi \in H, \tag{5.2}$$

以及终端条件:

$$u(T) \ = \ \rho \in H, \tag{5.3}$$

其中 $m > 0$。

定理 5.1. 设 $0 < \alpha < 1$ 和 $0 < T < \infty$。假设 $\varphi,\ \rho \in \mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}$。那么，(5.1)-(5.3) 的广义解存在且唯一，并且可以写成如下形式

$$u(t) \ = \ \varphi + \sum_{k\in I} \frac{[\varphi_k - \rho_k]\left[e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k + m\right)t^\alpha; q\right) - 1\right]\psi_k}{\left[1 - e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k + m\right)T^\alpha; q\right)\right]},$$

and

$$f \ = \ \mathcal{L}\varphi - \sum_{k\in I} \frac{\left(\lambda_k + m\right)[\varphi_k - \rho_k]\,\psi_k}{1 - e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k + m\right)T^\alpha; q\right)}.$$

此外,

$$u \in L_q^\infty\left([0,T]; \mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}\right) \cap W_q^\alpha\left([0,T]; \mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}\right); \quad f \in \mathcal{H}^d_{\mathcal{L}},$$

它们满足以下估计

$$\begin{aligned} \|{}^cD_q^\alpha u(t)\|^2_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} \ &+ \ \|u(t)\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} \lesssim \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} + \|\rho\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}}; \\ \|f\|^2_{\mathcal{H}^d_{\mathcal{L}}} \ &\lesssim \ \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}} + \|\rho\|^2_{\mathcal{H}^{d+2}_{\mathcal{L}}}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

证明。存在性。我们部分重复定理 4.1 证明中的论证。为此，将 (4.5) -(4.7) 代入 (5.1)，得到

$$ {}^cD^\alpha_{q,t}u_k(t) + \left(\lambda_k + m\right)u_k(t) = f_k, \tag{5.5}$$

带有初始数据

$$u_k(0) \ = \ \varphi_k, \tag{5.6}$$

以及终端条件

$$u_k(T) \ = \ \rho_k, \tag{5.7}$$

对所有 $k \in I$。

B利用 (4.11) 和 (4.13)，我们得到问题 (5.5)-(5.7) 的一般解：

$$\begin{aligned} u_k(t) &\overset{(4.11)}{=} \varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right) \\ &+ f_k\int_0^t t^{\alpha-1}\left(qs/t;q\right)_{\alpha-1}\varepsilon^{-q^{\alpha}s}e_{\alpha,\alpha}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)d_qs \\ &\overset{(4.13)}{=} \varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right) \\ &+ \frac{f_k}{\lambda_k+m}\int_0^t D_{q,s}\left[\varepsilon^{-s}e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)\right]d_qs \\ &= \varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)+\frac{f_k}{\lambda_k+m}\left[1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)\right], \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中常数 f_k 待定。

现在，利用条件 (5.6)、(5.7) 和 (5.8)，可得

$$\begin{aligned} u_k(T) \overset{(5.7)}{=} \rho_k &\overset{(5.6)(5.8)}{=} \varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right) \\ &+ \frac{f_k}{\lambda_k+m}\left[1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)\right], \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{\left(\lambda_k+m\right)\rho_k-\left(\lambda_k+m\right)\varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)}{1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)} \\ &= \left(\lambda_k+m\right)\varphi_k-\frac{\left(\lambda_k+m\right)\varphi_k-\left(\lambda_k+m\right)\rho_k}{1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

由 (5.8)–(5.9) 可知

$$\begin{aligned} u_k &\overset{(5.8)(5.9)}{=} \varphi_k e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)+\varphi_k\left[1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)\right] \\ &- \frac{\left[\left(\lambda_k+m\right)\varphi_k-\left(\lambda_k+m\right)\rho_k\right]\left[1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)\right]}{\left(\lambda_k+m\right)\left[1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)\right]} \\ &= \varphi_k+\frac{\left[\varphi_k-\rho_k\right]\left[e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)-1\right]}{\left[1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)\right]}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

因此，利用 (4.5)、(4.6)、(5.9) 和 (5.10)，可得

$$u(t) \overset{(4.5)\text{-}(5.10)}{=} \varphi+\sum_{k\in I}\frac{\left[\varphi_k-\rho_k\right]\left[e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)-1\right]\psi_k}{\left[1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)\right]},$$

and

$$f \overset{(4.6)\text{-}(5.9)}{=} \mathcal{L}\varphi-\sum_{k\in I}\frac{\left(\lambda_k+m\right)\left[\varphi_k-\rho_k\right]\psi_k}{1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right)}.$$

收敛性。对于 $0<t<T$，利用估计式 (3.1)，可得

$$\begin{aligned}1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha};q\right) &\overset{(3.1)}{\geq} 1-\frac{1}{1+\Gamma_q\left(\alpha+1\right)^{-1}\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha}}\\ &= \frac{\Gamma_q\left(\alpha+1\right)^{-1}\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha}}{1+\Gamma_q\left(\alpha+1\right)^{-1}\left(\lambda_k+m\right)T^{\alpha}}.\end{aligned}$$

因此

$$0\leq 1-e_{\alpha,1}\left(-\left(\lambda_k+m\right)t^{\alpha};q\right)<1,\quad 0<t\leq T. \tag{5.11}$$

由（5.9）、（5.10）和（5.11）可得

$$|u_k|\overset{(5.10)(5.11)}{\lesssim}|\varphi_k|+|\rho_k|;\quad |f_k|\overset{(5.9)(5.11)}{\lesssim}\left(\lambda_k+1\right)|\varphi_k|+\left(\lambda_k+1\right)|\rho_k|. \tag{5.12}$$

假设 φ、$\rho\in\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}$。然后利用（4.2）、（4.9）和（5.12），我们可推得

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}}^{2} &\overset{(4.2)}{=} \sum_{k\in I}\left|\left(1+\lambda_k\right)^{d/2}\left\langle f,\psi_k\right\rangle_H\right|^2\\ &\overset{(5.12)}{\lesssim} \sum_{k\in I}\left|\left(1+\lambda_k\right)^{d/2+1}\left\langle \varphi,\psi_k\right\rangle_H\right|^2+\sum_{k\in I}\left|\left(1+\lambda_k\right)^{d/2+1}\left\langle \rho,\psi_k\right\rangle_H\right|^2\\ &\overset{(4.2)}{=} \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^{2}+\|\rho\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^{2}<\infty,\end{aligned} \tag{5.13}$$

and

$$\begin{aligned}\|\left(I+\mathcal{L}\right)u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}}^{2} &\overset{(4.2)}{=} \sum_{k\in I}\left|\left(1+\lambda_k\right)^{d/2+1}\left\langle u(t),\psi_k\right\rangle_H\right|^2\\ &\overset{(5.12)}{\lesssim} \sum_{k\in I}\left[\left|\left(1+\lambda_k\right)^{d/2+1}\left\langle \varphi,\psi_k\right\rangle_H\right|^2+\left|\left(1+\lambda_k\right)^{d/2+1}\left\langle \rho,\psi_k\right\rangle_H\right|^2\right]\\ &\overset{(4.2)}{=} \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^{2}+\|\rho\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^{d+2}<\infty.\end{aligned} \tag{5.14}$$

利用 (4.9)、(5.13) 和 (5.14)，我们得到

$$\begin{aligned}\|{}^{c}D_{q,t}^{\alpha}u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}}^{2} &\overset{(4.9)}{\lesssim} \|\left(I+\mathcal{L}\right)u(t)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}}+\|f\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}}\\ &\overset{(5.13)(5.14)}{\lesssim} \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^{2}+\|\rho\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}}^{d+2}<\infty,\end{aligned}$$

这意味着 $u\in L_q^{\infty}\left([0,T];\ \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d+2}\right)\cap W_q^{\alpha}\left([0,T];\ \mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}\right)$ 和 $f\in\mathcal{H}_{\mathcal{L}}^{d}$，并且估计式 (5.4) 成立。

唯一性。所得解 (5.10)-(5.11) 满足方程 (5.1) 和条件 (5.2)-(5.3)。

记 $v(t):=u_1(t)-u_2(t)$，且 $f:=f_1-f_2$。则 $u(t)$ 和 f 满足 (5.1) 以及齐次条件 (5.2) 和 (5.3)。

在希尔伯特空间 H 上应用内积，并利用方程 (5.1)，可得

$$\begin{aligned}(1+\lambda_k)^c D^{\alpha}_{q,t}u_k(t) &= \langle {}^cD^{\alpha}_{q,t}\left[u(t)+\mathcal{L}u(t)\right],\psi_k\rangle_H\\ &= \langle -mu(t)+f,\psi_k\rangle_H\\ &= -mu_k(t)+f_k.\end{aligned}$$

考虑齐次条件 (5.2) 和 (5.3)，我们得到$u_k(0) = 0$ 和 $u_k(T) = 0$。因此，对 $k \in I$，$f_k \equiv 0$ 和 $u_k \equiv 0$ 。

此外，由于系统 $\{\psi_k\}_{k\in I}$ 在 H 中的完备性，我们得到

$$f(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0,$$

对于 $t > 0$。

因此，解 (5.10)-(5.11) 的唯一性得以证明。证明完毕。□

References

[1] R. P. Agarwal，关于 M. Pierre Humbert 的一则短札（法文）。巴黎科学院院刊 236，2031–2032（1953）。[2] N. Al-Salti、M. Kirane 和 B.T. Torebek，关于一类带有对合扰动的热方程反问题。哈杰特数学与统计学杂志，48（3）：669–681，2019。[3] M. H. Annaby 和 Z. S. Mansour，q-分数阶微积分与方程。施普林格，海德堡，2012。[4] L. Anyons，具有分数统计的粒子的量子力学。柏林，海德堡：Springer-Verlag Berlin Heidelberg：Springer电子书，1992。[5] R. J. Baxter，《统计力学中的精确可解模型》。纽约，Accademic，1982。[6] N. Bettaibi、K. Brahim 和 A. Fitouhi，量子微积分中的梅林变换。《构造性逼近》，23（2006），305-323。[7] L. Biedenharn，量子群 SU_q(2)与玻色子算符的 q-类比。1989，《物理学杂志 A：数学与一般》22-873。[8] D. Bonatsos 和 C. Daskaloyannis，量子群及其在核物理中的应用。《粒子与核物理进展》43（1999）537-618。[9] P. Cheung 和 V. Kac，《量子微积分》。Edwards Brothers, Inc.，美国密歇根州安娜堡，2000。[10] T. Ernst，一种新的 q-微积分方法。博士论文，乌普萨拉大学，2002。[11] T. Ernst，q-微积分的全面论述。Birkh¨auser/施普林格巴塞尔股份公司，巴塞尔，2012。[12] A. Fitouhi 和 A. Saoudi，关于 q^2-类比的 Sobolev 型空间。《数学》，70（2015），63-77。[13] G. Gasper 和 M. Rahman，《基本超几何级数》。剑桥，1990。[14]F. H. Jackson，关于 q-函数与某个差分算子。《爱丁堡皇家学会学报》46（1908），253-281。[15] H. J. Haubold 和 A. M. Mathai，《应用科学家的特殊函数》。施普林格，纽约，2008。[16] M. E. H. Ismail，《单变量经典与量子正交多项式》（剑桥大学出版社，剑桥，2005）[17] F. Jackson，关于一个 q-定积分。《纯粹与应用数学季刊》，41（1910），193-203。[18] E. G. Kalnins、W. Miller 和 S. Mukherjee，q-代数表示的模型：平面运动群。《工业与应用数学学会数学分析杂志》，25（1994），513-527。[19] A. A. Kilbas、H. M. Srivastava 和 J. J. Trujillo，《分数阶微分方程理论与应用》。爱思唯尔，北荷兰出版社，数学研究丛书，（2006）。

[20] B. Kanguzhin、M. Ruzhansky 和 N. Tokmagambetov，希尔伯特空间中的卷积。《泛函分析及其应用》，51（3）：221–224，2017。[21] T. H. Koornwinder 和 R. F. Swarttouw，关于汉克尔变换和傅里叶变换的 q-类比。《美国数学会汇刊》，333（1992），45-461。[22] A. Lavagno、A.M. Scarfone 和 P. Narayana Swamy，经典与量子 q-变形物理系统。《欧洲物理学杂志 C》（2006）47：253-261。[23] A. Lavagno，变形量子力学与 q-厄米算子。《物理学杂志 A：数学与理论》41（2008）244014（9页）。[24] Z. S. I. Mansour，分数阶线性序列 q-差分方程。《分数阶微积分与应用分析》，12（2）（2009），159-178。[25] A. Macfarlane，关于量子谐振子的 q-类比及量子群$SU_q(2)$。1989，《物理学杂志 A：数学与一般》22 4581。[26] L. Maligranda、L.-E. Persson 和 R. Oinarov，关于 Hardy q-不等式。《捷克斯洛伐克数学杂志》，64（2014），659-682。[27] S. D. Marinkovic、M. S. Stankovic 和 P. M. Rajkovic，关于 Caputo导数和 Mittag–Leffler函数的 q-类比。《分数阶微积分与应用分析》10（4），359–373，2007。[28] I. Podlubny，《分数阶微分方程》。学术出版社，圣迭戈（1999）。[29] R. L. Rubin，非齐次 q^2-类比波动方程的 Duhamel解。《美国数学会会刊》，135（2007），777-785。[30] R. L. Rubin，一个用于 q^2-类比傅里叶分析的 q^2-类比算子。《数学分析及其应用杂志》，212（1997），571-582。[31] M. Ruzhansky 和 N. Tokmagambetov，由 Riesz基生成的卷积、傅里叶分析与分布。《月刊数学》，187（1）：147-170，2018。[32] M. Ruzhansky 和 N. Tokmagambetov，边值问题的非调和分析。《国际数学研究通知》，2016（12）：3548–3615，2016。[33] M. Ruzhansky、N. Tokmagambetov 和 B. T. Torebek，正算子的反源问题。一：次椭圆扩散与亚扩散方程。《反问题与病态问题杂志》，27（6）：891–911，2019。[34] M. Ruzhansky、D. Serikbaev、N. Tokmagambetov 和 B. T. Torebek，时间分数阶伪抛物方程的正问题与反问题。《Quaesta Math》，7（45）：1071-1089，2022。[35] S. Shaimardan、N. S. Tokmagambetov 和 A. M. Temirkhanova，带 Caputo分数阶导数的q-差分方程的柯西问题。JMMCS，第1期（113），2022，第43-57页。[36]S. Shaimardan 和 N. S Tokmagambetov，带有 Riemann-Liouville 分数阶 q-导数的某些分数阶 q-微分方程的解。《卡拉干达大学通报》，104（2021），第4期，130-141。[37] S. Shaimardan 和 L. E. Persson，关于 Riemann-Liouville 分数阶 q-积分算子的若干新 Hardy型不等式。《不等式及其应用杂志》，296（2015），1-17。[38]S. Shaimardan， q-分析中的分数阶积分算子 Hardy型不等式。《欧亚数学杂志》7（2016），第1期，5-16。[39] T. Simon，比较 Frechet 分布与正稳定分布。《电子概率杂志》，19：1-25，2014。[40] V. E. Tarasov，《分数阶动力学：分数阶微积分在粒子动力学中的应用。场与介质》。施普林格，柏林，2010。[41] J-zu. Zhang，一种 q-变形量子力学。 q-变形薛定谔方程的谱。1998，《物理快报 B》，361-366。[42] J-zu. Zhang， q-变形动力学的微扰方面。《欧洲物理学杂志 C》20，393–396（2001）。[43] A. Wiman，关于函数论中的基本定理。《数学学报》，第29卷，第1期，1905年，第191-201页。[44] F. Wilczek，分数统计与任意子超导。新加坡：世界科学出版社，1990。

Michael Ruzhansky:Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics,Ghent University, Ghent,

Belgiumand School of Mathematical Sciences,
Queen Mary University of London, London,UK电子邮箱
michael.ruzhansky@ugent.be

Serikbol Shaimardan:L. N. Gumilyov Eurasian National University,
Astana,KazakhstanandDepartment of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Ghent,Belgium电子邮箱 shaimardan.serik@gmail.com

Niyaz Tokmagambetov:Centre de Recerca MatemáticaEdifici C,
Campus Bellaterra, 08193 Bellaterra (Barcelona), Spainand
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
125 Pushkin str., 050010 Almaty, Kazakhstan电子邮箱:
tokmagambetov@crm.cat; tokmagambetov@math.kz