分布参数系统的输入到状态稳定性Andrii Mironchenko教授资格论文

arXiv:2302.00535v1 [math.OC] 1 Feb 2023

教授资格论文修订版（ 2, 2023 年2月），于6月提交至 2022

帕绍大学计算机科学与数学学院

UNIVERSITÄT PASSAU

授职资格答辩日期：2022年12月13日

评审人：Jean-Michel Coron 教授、博士，皮埃尔-玛丽·居里大学，法国；
Marius Tucsnak 教授、博士，波尔多大学，法国；Fabian Wirth 教授、博士，
帕绍大学，德国；Hans Zwart 教授、博士，特温特大学，荷兰

目录

Ackn致谢
7缩略语 9术语表 11序言 15

1 引言 19
1.1 一般系统类.191.2 正向完备性与有界可达集.211.3 输入到状态稳定性.221.4 稠密性论证.251.5 ISS 李雅普诺夫函数.261.5.1 指数输入到状态稳定李雅普诺夫函数.291.5.2 耗散形式的李雅普诺夫函数.301.5.3 ISS 李雅普诺夫函数与一种输入空间.311.6

1.6.1 带边界输入的输运方程.321.6.2 带狄利克雷边界条件和分布式输入的黏性伯格斯方程.331.6.3 带分布式输入的 Kuramoto-Sivashinskiy方程 . . . . . 351.6.4 索伯列夫空间中的非线性反应-扩散方程 371.6.5 半线性抛物系统带边界输入的李雅普诺夫方法.391.7 总结.41

2 演化方程：适定性 43
2.1 线性系统.432.1.1 抽象线性控制系统.432.1.2 抽象控制系统的表示.472.1.3 有界输入算子的线性系统的输入到状态稳定性 . . . . . 482.1.4 具有无界输入算子的线性系统的输入到状态稳定性 . . . . . 492.2 具有无界输入算子的半线性演化方程 . . . . . 542.2.1 可容许输入算子与温和解 .542.2.2 局部存在唯一性 .552.2.3 适定性 .61
2.2.4 正向完备性与可达集有界性.63

2.2.5 流映射的正则性.642.2.6 平凡平衡点处的连续性.672.3 边界控制系统.
692.3.1 线性边界控制系统.692.3.2 半线性边界控制系统.702.4 半线性解析系统.
732.4.1 算子分数次幂回顾.732.4.2 半线性解析系统及其温和解.752.4.3 解析半群与
可容许性的预备知识 762.4.4 局部存在唯一性.802.4.5 整体存在性.842.4.6
例：具有分布式输入的 Burgers 方程的适定性.852.5 总结.88

3 ISS s 叠加定理 9 **1**

3.1 稳定性性质.913.1.1 无扰系统的稳定性概念.913.1.2 带输入系统的稳定性概念.
923.1.3 带输入系统的吸引性性质.943.2 ISS 叠加定理.963.3 ISS 的积分刻画.
1023.3.1 关于输入到状态实用稳定性的注.1063.4 强输入到状态稳定性.1063.5 反例.
1093.6 无输入系统.1153.7 总结.116

4 Lyapu NOV 标准1 **19**

4.1 非强制 ISS 李雅普诺夫函数.1194.2 ISS 李雅普诺夫函数的其他定义.1224.3 局部
输入到状态稳定性的刻画.1234.4 半线性系统的逆向 ISS 李雅普诺夫定理 . . . . . .
1314.4.1 闭环系统的基本性质.1324.4.2 主要结果.1354.5 有界输入算子的线性系统的
ISS 的李雅普诺夫刻画 .1394.6 线性系统的 ISS 李雅普诺夫函数 .1444.6.1 一般线性
系统的非强制逆李雅普诺夫定理1454.6.2 一个特例： $P = -A^{-1}$ .1504.6.3 输入到状
态稳定对角系统的 ISS 李雅普诺夫函数 . 1514.6.4 狄利克雷边界输入热方程的 ISS
李雅普诺夫函数.1524.7 利普希茨连续系统的 ISS 叠加定理 . . . . . 1534.8 总结.
154

5 积分输入到状态稳定性 157

5.1 iISS系统的基本性质.1575.2 双线性系统.1625.3 示例.1665.3.1 ISS 和 iISS.1665.3.2 一类非线性抛物型系统的 ISS 李雅普诺夫函数：Sobolev 状态空间.1685.3.3 一类非线性抛物型系统的 iISS： L^p 状态空间 . . . . . 1715.3.4 一类非线性抛物型系统的积分输入到状态稳定性：Sobolev 状态空间.1735.4 线性系统的积分输入到状态稳定性.1755.5 对角系统.1765.6 总结.178

6 无限互联系统：非李雅普诺夫方法 179

6.1 无限互联系统.1796.2 离散时间系统的稳定性.1846.3 小增益定理.1866.3.1 半最大值表述下的小增益定理 . . . . . 1866.3.2 求和形式下的小增益定理 . . . . . 1916.3.3 例：线性空间不变系统.1926.3.4 例：非线性空间不变系统.1936.4 小增益条件.1946.4.1 一致小增益条件与 MBI 性质 1956.4.2 非一致小增益条件.1976.4.3 有限维情形.1996.5 齐次次可加系统的指数输入到状态稳定性.2006.6 具有线性增益的系统.2036.7 由最大形式增益算子控制的系统.2046.8 总结.208

7 李雅　普诺夫基于的小增益定理 20　9

7.1 ISS系统的互联.2097.2 基于李雅普诺夫的小增益定理.2107.2.1 例：线性系统耦合.2167.2.2 例：非线性系统耦合.2187.3 积分ISS系统的互联.2197.3.1 例：ISS与iISS非线性反应扩散系统的耦合.2217.4 总结.224

结论　227

附录　229

A Com　有限维输入到状态稳定性理论概要 22　9

B 比较　函数 2 **33**
B.1 比较函数.233B.1.1 比较函数的初等性质.233B.1.2 Sontag $\mathcal{KL}$引理.235B.1.3 正定函数.235B.1.4 近似、上界和下界.236B.2 边缘函数.237B.3 Dini 导数.238B.4 比较原理.239B.5 总结.241

C 有序巴拿赫空间与正算子 243
C.1 有序巴拿赫空间.243C.2 锥的分类.244C.3 巴拿赫格.246C.4 到锥的距离.246C.5 正算子.246C.6 有序 Banach 空间的对偶性.247C.7 复化.247C.8 单调控制系统.247C.9 线性单调离散时间系统.248

D 索伯列夫空间与不等式 251
D.1 可积函数空间.251D.2 初等不等式.252D.2.1 实数集上的不等式 $\mathbb{R}^n$ .253D.2.2 基本积分不等式.254D.3 弱导数.255D.4 H¨尔德空间.257D.5 索伯列夫空间.258D.6 一维区域的积分不等式.262D.7 Kuramoto-Sivashinskiy方程的不等式.264D.8 总结.266

参考文献 **266**

致谢

作者感谢所有合著者分享了许多富有启发性的讨论和想法。特别是，本论文的部分内容已作为与以下学者合作完成的成果发表（按字母顺序排列）：Sergey Dashkovskiy、JochenGl¨uck、Hiroshi Ito、Birgit Jacob、Iasson Karafyllis、Christoph Kawan、Miroslav Krstic、Navid Noroozi、Jonathan Partington、Christophe Prieur、Fabian Wirth。

感谢我的任职资格导师 Thomas M¨uller-Gronbach、Fabian Wirth 和 Hans Zwart 在任职资格申请过程中给予我的指导。感谢评审 Jean- Michel Coron、Marius Tucsnak、Fabian Wirth 和 Hans Zwart 对本研究提交版本所做的细致评审。

感谢为本论文校对的 Alexander Kilian。

最后但同样重要的是，感谢我的女儿 Darina，她对研究周围自然的热情始终给予我灵感。

缩略语

0-GAS 零点全局渐近稳定性 定义 3.1.1 0-GATT 零点全局吸引性 定义 3.1.1 0-UAS 零点一致渐近稳定性 定义 3.1.1 0-UGAS 零点一致全局渐近稳定性 定义 3.1.1 AG 渐近增益性质 定义 3.1.7 BECS 有界能量收敛状态 定义 5.1.3 BIC 有界性蕴含延续 定义 1.2.4 BRS 可达集有界性/有界可达集 定义 1.2.2 bUAG 有界输入一致渐近增益性质 定义 3.1.7 bULIM 有界集上一致极限性质 定义 3.1.9 CEP 平衡点处的连续性 定义 2.2.26 eISS 指数输入到状态稳定性 定义 1.3.4 iISS 积分输入到状态稳定性 定义 5.1.1 ISpS 输入到状态实用稳定性 定义 3.3.7 ISS 输入到状态稳定性/输入到状态稳定 定义 1.3.1 LIM 极限性质 定义 3.1.9 LISS 局部输入到状态稳定性 定义 1.3.2 MAF 单调聚合函数 定义 7.2.1 MBI 单调有界可逆性 定义 6.2.2 MLIM 单调极限性质 定义 6.2.1 OBS 有序巴拿赫空间 定义 C.1.6 ODE, ODEs 常微分方程 PDE, PDEs 偏微分方程 RFC 鲁棒正向完备性 定义 4.4.4 sAG 强渐近增益性质 定义 3.1.7 sISS 强输入到状态稳定性 定义 3.4.1 sLIM 强极限性质 定义 3.1.9 UAG 一致渐近增益性质 定义 3.1.7 UGAS 一致全局渐近稳定性 定义 4.4.6 UGATT 一致全局吸引 定义 4.4.7 UGB 一致全局有界性 定义 3.1.3 UGS 一致全局稳定 定义 3.1.3 ULIM 一致极限性质 定义 3.1.9 ULS 一致局部稳定性 定义 3.1.3 WURS 弱一致鲁棒稳定性 定义 4.4.12

术语表

集合与数

$\mathbb{N}$ 自然数集：$\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}\mathbb{Z}$ 整数集$\mathbb{R}$ 实数集$\mathbb{Z}_+$ 非负整数集$\mathbb{R}_+$ 非负实数集$\mathbb{C}$ 复数集$U^{\mathbb{R}_+}$从 $\mathbb{R}_+$到 U的映射集合，其中 U是某个集合 $\mathrm{Re} z$ 复数 z的实部 $\mathrm{Im} z$ 复数 z 的虚部$S^n := S \times \ldots \times S_n$ 次$\mathbf{1}x^T$ 向量 $x \in \mathbb{R}^n$的转置$|\cdot|$ 空间 $\mathbb{R}^s$ 中的欧几里得范数，$s \in \mathbb{N}\|A\|$ 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，记 $\|A\| :=$ 上确界$_{x\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$

各种记法

$\mathrm{dist}\,(z, Z) :=$ 下确界$\{\|y - z\|_X : y \in Z\}$。$z \in X$与 $Z \subset X$之间的距离$B_r(Z)$ 半径为 r、以 $Z \subset X$ 为中心的开球，即 $\{x \in X : \mathrm{dist}\,(x, Z) < r\}B_r, u$赋范向量空间 $\mathcal{U}$ 中以 0 为中心、半径为 r 的开球，即 $\{u \in \mathcal{U} : \|u\|_\mathcal{U} < r\}B_r(x) := B_r(\{x\})B_r := B_r(0)$ $\mathrm{int}\, A$ （拓扑）集合的内部 A （在给定拓扑下）A 集合的闭包 A （在给定拓扑下）$V \subset\subset U$ V紧包含于 U，也就是说，$V \subset U\nabla f$ 函数 f 的梯度：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}f \circ g$ 映射 f 和 g的复合：$f \circ g(s) = f(g(s))$，其中 s 的定义域为 $g\partial G$ 区域 G 的边界μ $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度I 恒等算子（或单位矩阵）id 恒等算子 $\lim :=$ 上极限 $\lim :=$ 下极限

$t \to a-0$ t 从左侧趋于 $a\, t \to a+0$ t 从右侧趋于 a $t \to -0$ t 从左侧趋于 $0t \to +0$ t 从右侧趋于 $0x \vee y$ 向量 x， $y \in \mathbb{R}^n_+ u_t$ 对于函数 $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$，我们定义 u_t 为

$$u_t(s) := \begin{cases} u(s) & , \text{if } s \in [0,t], \\ 0 & , \text{if } s > t. \end{cases}$$

算子、半群

$L(X,U)$ 从 X 到 U 的有界线性算子空间 $L(X) := L(X,X) A^*$ 算子 A 的伴随算子： $D(A) \to X$, $D(A) \subset X$，定义在希尔伯特空间 $Xs(A)$ 闭算子 A 的谱界 $\sigma(A)$ 闭算子 A 的谱 $\rho(A)$ 闭算子 A 的预解集 $\omega_0(T)$ C_0-半群的增长界 $T\omega_1(T)$ C_0-半群在 $D(A)$ 上的增长界 T 由 A 生成

序列空间

(x_k) 序列 (x_k) 的简写记法 $_{k\in\mathbb{N}} e_k$ k， ℓ_p 的第 $p \in [1,+\infty$ 个标准基向量（对于某个 $p \in [1,+\infty)$ ℓ_p $x = x_k$ $\|x\|_{\ell_p} < \infty$ 由序列 $(\,)$ 构成的空间，使得：，对于 $)\|x\|_{\ell_\infty} := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| c_0 := \{x = (x_k) :$ $x_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N} \ \wedge \lim_{k\to\infty} x_k = 0\} c := \{x = (x_k) :\ \exists M > 0 :$ $x_k \in \mathbb{R} \ \wedge\ |x_k| \le M\ \forall k \in \mathbb{N}\} \ell_\infty(I)$ 对于非空集合 I，我们用 $\ell_\infty(I)$ 表示所有函数 $x :\ I \to \mathbb{R}$ 的巴拿赫空间，其中 $\|x\|_{\ell_\infty}(I) := \sup_{i\in I} |x(i)| < \infty. \ell^+_\infty(I) := \{x \in \ell_\infty(I) :$ $x(i)\ \ge 0,\ \forall i \in I\}$.

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \qquad p \in [1,+\infty$$

连续函数空间

$C(X,U)$ 从 X 到 U 的连续函数线性空间。我们将映射 $u \mapsto \|u\|_{C(X,U)} := \sup_{x\in X} \|u(x)\|_U$ 与该空间关联起来，该映射可能以 $+\infty$ 为值 $PC_b(\mathbb{R}_+, U)$ 从 $\mathbb{R}_+$ 到 U 的分段连续（右连续）函数空间，且范数有限 $\|u\|_{PC_b(\mathbb{R}_+,U)} = \|u\|_{C(\mathbb{R}_+,U)} < \infty AC(\mathbb{R}_+, U)$ 从 $\mathbb{R}_+$ 到 U 的绝对连续函数空间，其中 $\|u\|_{C(X,U)} < \infty C(X) := C(X,X) C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) :\ \forall \varepsilon > 0$ 存在一个紧集 $K_\varepsilon \subset \mathbb{R} :\ |f(s)| < \varepsilon\ \forall s \in^{\mathbb{R}\setminus K_\varepsilon}\}$

$C_c^k(U)$ $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 次连续可微函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$的空间，其支集在 U中为紧集

可测函数空间

这里， U 表示 $\mathbb{R}^n$的一个开子集。

$\|f\|_{L^p(U,\mathbb{R}^m)} := \left(\int_U |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, for $p \in [1, +\infty)\|f\|_{L^\infty(U,\mathbb{R}^m)} :=$本质上确界$_{x\in U} |f(x)|$ $=$下确界$_{D\subset U,\ \mu(D)=0}$上确界$_{x\in U\setminus D} |f(x)\|f\|_\infty := \|f\|_{L^\infty(U,\mathbb{R}^m)}L^p(U, \mathbb{R}^m)$ 从 U到 $\mathbb{R}^m$ 的勒贝格可测映射集合，其中$\|f\|_{L^p(U,\mathbb{R}^m)} < \infty$, for $p \in [1, +\infty]L^p\,\mathrm{loc}(U, \mathbb{R}^m) := \{u\colon U \to \mathbb{R}^m\colon u \in L^p(V, \mathbb{R}^m)\ \forall V \subset\subset U\}$, for $p \in [1, +\infty]$。从 U 到 $\mathbb{R}^m$ 的勒贝格可测且局部本质有界函数集合$L^p(U) := L^p(U, \mathbb{R})$，其中 $p \in [1, +\infty]L^p(a, b) := L^p([a, b]) = L^p([a, b], \mathbb{R})$，其中 $p \in [1, +\infty]\|u\|_{W^k,p}(U) := \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha u(x)|^p\, dx\right)^p$，其中 $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty)\|u\|_{W^k,\infty\ U} = \sum_{|\alpha|\le k}\ _{x\in U} |D^\alpha u\ x|$ $k \in \mathbb{N}$) : 本质上确界 ( ) ，其中 , ( ) 对 $W^{k\,p}\ U$ $k \in \mathbb{N}$ 于 $p \in [1, +\infty]$，它是由函数 $u \in L^p(U)$构成的索伯列夫空间，使得对于每个序为 $\le k$ 的多重指标 α ，弱导数 $D^\alpha u$ 存在且属于 $L^p(U)$。 $W^{k,p}(U)$赋予范数$\|u\|_{W^k,p}(U)$ $_{W^{k,}{}_0{}^p}(U)$ $C_c^\infty(U)$ 在 $W^{k,p}(U)$ 范数下的闭包，$k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]H^k(U) := W^{k,2}(U), k \in \mathbb{N}H_0^k(U) := W^{k,2}{}_0(U), k \in \mathbb{N}H^k(a, b) := H^k([a, b]) = H^k([a, b], \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}H_0^k(a, b) := H_0^k([a, b]) = H_0^k([a, b], \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$

向量值函数空间

设 X 是一个巴拿赫空间，且 I 是 $\mathbb{R}$ 的一个闭子集。我们定义以下向量值函数空间

$$
\begin{aligned}
M(I,X) &:= \{f : I \to X : f \text{ is strongly measurable}\}\\
L^p(I,X) &:= \left\{f \in M(I,X) : \|f\|_{L^p(I,X)} := \left(\int_I \|f(s)\|_X^p ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}\\
L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,X) &:= \{f \in L^p([0,t],X) \quad \forall t > 0\}\\
L^\infty(I,X) &:= \{f \in M(I,X) : \|f\|_{L^\infty(I,X)} := \operatorname{ess\,sup}_{s\in I} \|f(s)\|_X < \infty\}\\
L^\infty_{\mathrm{loc}}(I,X) &:= \{f \in L^\infty([0,t],X) \quad \forall t > 0\}
\end{aligned}
$$

比较函数

$\mathcal{P} := \{\gamma \in C(\mathbb{R}_+)\colon \gamma(0) = 0$ 且 $\gamma(r) > 0$ 对于 $r > 0\}\mathcal{K} :$ $= \{\gamma \in \mathcal{P}\colon \gamma$ 严格递增$\}\mathcal{K}_\infty := \{\gamma \in \mathcal{K}\colon \gamma$ 无界$\}\mathcal{L} := \{\gamma \in C(\mathbb{R}_+)\colon \gamma$ 严格递减，且 $\lim_{t\to\infty}{}^\gamma(t) = 0\}\mathcal{KL} := \{\beta \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)\colon \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K},$ $\forall t \ge 0,\ \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L},\ \forall r > 0\}$

序言

具有分布式输入和边界输入的非线性分布参数系统，可用于对广泛的现象建模，包括化学反应器、流体与气体动力学、交通网络、多体系统（如机械臂、柔性元件）、自适应光学、流固耦合（如飞机机翼的动力学）等。对于这类系统中的许多类别，已知执行器和观测误差、隐藏动态以及外部扰动引起的小扰动，可能会大幅降低系统性能、改变稳定性，甚至使控制系统失稳。应对这些挑战，需要开发用于非线性分布参数系统的鲁棒控制器和观测器设计方法，以确保闭环系统的可靠性和效率。尽管通常必须使用数量有限（且往往很少）的执行器和传感器来控制无限维系统，并且这些执行器和传感器可能只能在某些离散时刻访问，而且往往只能布置在空间域的边界处，仍须实现这一目标。

针对有限维非线性系统中这些问题的对应问题，一套系统化的框架是在输入到状态稳定性（ISS）的概念基础上发展起来的。输入到状态稳定性由 E. Sontag 于 20 世纪 90 年代初提出，结合了两种不同类型的稳定性行为：李雅普诺夫意义下的稳定性和输入输出稳定性。对外部稳定性和内部稳定性的统一处理，使输入到状态稳定性成为鲁棒稳定性分析中的核心工具。输入到状态稳定性在非线性控制的许多领域中发挥着重要作用，包括非线性系统的鲁棒镇定、通过带饱和的控制器实现稳定化、鲁棒非线性观测器的设计、非线性可检测性、输入到状态稳定性反馈再设计、非线性网络化控制系统的稳定性、监督自适应控制等。

在本研究中，我们为一大类无限维系统发展输入到状态稳定性理论，该类系统涵盖偏微分方程（PDE）、时滞系统、常微分方程（ODE）、系综，以及由任意数量的有限维和无限维分量构成的异构系统互联系统，其中包括区域内耦合和边界耦合。一方面，这为处理上述无限维系统鲁棒控制与观测中的相关问题提供了坚实基础。另一方面，发展这样一种一般理论，旨在创建一个统摄性框架，从统一视角审视适用于各类系统的输入到状态稳定性理论。

为了涵盖如此广泛的一类分布参数系统，我们从第1章开始，将控制系统定义为由初始条件和外部输入参数化的一组轨迹。除了具有一般性之外，这种方法的一个优点是，通过默认解的存在唯一性，我们可以专注于稳定性问题，并证明非常一般的结果，例如用其他稳定性性质和李雅普诺夫

定理来刻画输入到状态稳定性。接下来，我们在第1 章介绍输入到状态稳定性这一核心概念，并展示如何利用李雅普诺夫函数验证若干具有分布输入和边界输入的线性与非线性双曲型及抛物型系统的输入到状态稳定性。

在第 2章中，我们针对具有分布式输入和边界输入的巴拿赫空间中的线性与非线性演化方程，建立适定性理论。首先，基于半群理论和容许性理论的方法，我们刻画具有有界输入算子和可容许输入算子的一般线性系统的适定性与输入到状态稳定性。接着，我们对具有利普希茨连续非线性项和无界输入算子的巴拿赫空间中的非线性演化方程，进行全面的适定性分析。这是一类重要的控制系统，包括具有分布式控制和边界控制的半线性演化偏微分方程、常微分方程、系综（无限常微分方程网络）、时滞系统的重要子类，以及具有有限或无限个模态的切换系统。我们详细分析局部解和全局解的存在性与唯一性，以及流映射的正则性。

我们说明如何将这些结果应用于半线性边界控制系统的 ISS 分析。最后，我们分析由解析半群支配的半线性演化方程，并在此情形下推导出更精确的适定性判据。第2章中的结果为随后对这一类系统进行稳定性分析奠定了基础。

在第3章中，我们证明了一类广泛的无限维系统的输入到状态稳定性的一般 ISS 叠加定理。这些定理以较弱的稳定性性质为依据，给出了 ISS 的判据，显著增进了我们对输入到状态稳定性的理解。此外，这些定理有助于推导若干重要结果，例如基于轨迹的小增益定理、非强制直接输入到状态稳定性李雅普诺夫定理，以及输入到状态稳定性性质的积分刻画。此外，本章还引入了强输入到状态稳定性的概念。在有限维系统中，它等价于 ISS；而在无限维情形下，它弱于 ISS。我们通过反例解释有限维与无限维输入到状态稳定性理论之间的差异。

在第4章中，我们针对具有利普希茨连续非线性项的演化方程，建立了其 ISS 李雅普诺夫理论；这些方程的适定性已在第2章中分析。我们引入了非强制 ISS 李雅普诺夫函数的概念。我们证明，只要系统的流满足某种额外的正则性，存在这样的函数就意味着 ISS。为此，我们主要运用了第3章中推导出的 ISS 叠加定理。接下来，我们证明，只要非线性项满足某种温和的正则性要求，一般非线性系统的局部 ISS 就等价于无扰动系统的一致局部渐近稳定性。所建立的李雅普诺夫工具对 ISS 分析至关重要，因为通常而言，构造 ISS 李雅普诺夫函数是证明 ISS 唯一切实可行的方法。然而，在开始寻找合适的 ISS 李雅普诺夫函数之前，了解这样的函数是否存在十分重要。本章表明，只要非线性项关于两个变量在有界集上局部 Lipschitz 连续，这样的函数总是存在。

第3、4 章所展示的结果为含有分布式扰动的半线性偏微分方程的 ISS 分析提供了有力工具。这些结果自然地扩展了有限维系统的经典输入到状态稳定性理论。然而，有一些重要的系统类别并未涵盖在第4章所考虑的系统之中。线性边界控制系统就是其中一类，常见于鲁棒控制以及

针对受到执行器和/或测量扰动影响的边界控制线性偏微分方程进行观测器设计的问题。

尽管输入到状态稳定性框架具有诸多优点，但对于某些实际系统而言，输入到状态稳定性的限制过于严格。输入到状态稳定性不适用于这样一类系统：只要施加的输入幅值和初始状态的大小低于某个特定阈值，系统状态就保持有界；但当输入幅值或初始状态的大小超过该阈值时，系统状态便变得无界。这种行为通常由饱和以及驱动和处理速率方面的限制所导致。在第5章中，我们引入积分输入到状态稳定性的概念，以刻画此类非线性特性。我们讨论线性系统和双线性系统的积分输入到状态稳定性理论中的已有结果，并介绍用于分析非线性抛物型偏微分方程积分输入到状态稳定性的李雅普诺夫工具。

非线性系统的稳定性分析与控制是一项复杂任务；对于大规模系统而言，考虑到其子系统的非线性、复杂的拓扑结构以及网络本身的庞大规模，这项任务更具挑战性。研究此类网络的一种有效方法是用无限网络对其进行过近似，并将其作为最坏情况进行分析。在第 6章中，我们介绍一种强有力的方法，用于分析此类复杂网络；前提是网络中的组件均满足输入到状态稳定性，且已知描述各子系统相互影响的渐近增益。我们提出一个用于分析抽象控制系统网络的通用框架，并为具有异质组件的无限维系统无限网络的稳定性分析推导出非常一般的小增益定理。针对网络的稳定性判据基于由所谓的增益算子所诱导的单调非线性离散时间系统的性质。

在大多数情况下，非线性系统的输入到状态稳定性是通过构造适当的ISS 李雅普诺夫函数来验证的。在小增益定理的表述中，使用有关子系统的ISS李雅普诺夫函数的信息，而不是使用子系统的ISS 估计，这听起来很自然。在第 7 章中，我们将说明这是可行的。我们将利用针对输入到状态稳定系统和积分ISS系统耦合的小增益李雅普诺夫定理，分析非线性无限维系统有限网络的稳定性。我们将把理论成果应用于耦合抛物型系统的分析。

读者无需预先了解输入到状态稳定性理论。附录 A、B 中汇总了比较函数和常微分方程输入到状态稳定性理论的基本知识。关于有限维ISS理论的详细论述，请参阅 [160]。不过，我们假设读者具备常微分方程与偏微分方程、线性泛函分析以及半群理论的基础知识。附录 C、D 中概述了有序巴拿赫空间理论和偏微分方程理论的一些基本定义与结果。

如有任何更正和/或意见，无论多么细微，请发送至以下邮箱：
andersmir@gmail.com

Andrii Mironchenko 德国帕绍

第1章

引言

本章定义输入到状态稳定性（ISS）的概念。此外，我们介绍 ISS 李雅普诺夫函数，它们是进行 ISS 分析的主要工具，至少在非线性系统的背景下是如此。我们证明，ISS 李雅普诺夫函数的存在意味着系统具有 ISS。随后，我们展示如何利用李雅普诺夫方法验证若干基本偏微分方程（PDE）的 ISS，例如输运方程、具有分布控制和边界控制的反应扩散方程、Burgers方程等。在本引言章节中，我们主要使用二次ISS李雅普诺夫函数，并利用索伯列夫空间中的积分不等式验证这些函数的耗散不等式。后续章节将介绍用于 ISS 分析的更深入方法。

1.1 系统的一般类别

我们从控制系统的一般定义开始。

定义 1.1.1. 考虑由以下部分组成的三元组 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi$

(i) 一个赋范向量空间 $(X, \|\cdot\|_X)$，称为状态空间，其范数为$\|\cdot\|_X$。

(ii) 一个赋范输入空间 $\mathcal{U} \subset \{u\colon\ \mathbb{R}_+ \to U\}$，其范数为 $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$，其中 U 是一个赋范输入值空间。我们假设以下两个公理成立：

平移不变性公理：对于所有 $u \in \mathcal{U}$ 以及所有 $\tau \geq 0$，时间移位 $u(\cdot + \tau)$属于 $\mathcal{U}$，且 $\|u\|_{\mathcal{U}} \geq \|u(\cdot + \tau)\|_{\mathcal{U}}$。
拼接公理：对于所有 u_1、$u_2 \in \mathcal{U}$ 以及所有 $t > 0$，u_1 和 u_2 在时间 t处的拼接定义为

$$u_1 \underset{t}{\diamondsuit} u_2(\tau) := \begin{cases} u_1(\tau), & \text{if } \tau \in [0, t], \\ u_2(\tau - t), & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{1.1}$$

属于 $\mathcal{U}$。

(iii) 一个映射 $\phi\colon\ D_\phi \to X$, $D_\phi \subseteq \mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U}$（称为转移映射），使得对于所有的 $(x, u) \in X \times \mathcal{U}$，都有 $D_\phi \cap \big(\mathbb{R}_+ \times \{\ (x, u)\ \}\big) = [0, t_m)\ \times \{\ (x, u)\ \} \subset D_\phi$，其中某个 $t_m = t_m\ (x, u)\ \in\ (0, +\infty]$。

相应的区间 $[0, t_m)$ 称为$t \mapsto \phi(t, x, u)$ 的最大定义域。

若满足以下性质，则三元组 Σ 称为（控制）系统：

(Σ1) 恒等性质：对于每个 $(x, u) \in X \times \mathcal{U}$，均有 $\phi(0, x, u) = x$。

(Σ2) 因果性：对于每个 $(t, x, u) \in D_\phi$，对于每个 $\tilde{u} \in \mathcal{U}$，若对所有$s \in [0, t]$ 均有 $u(s) = \tilde{u}(s)$，则有 $[0, t] \times \{(x, \tilde{u})\} \subset D_\phi$，且 $\phi(t, x, u) = \phi(t, x, \tilde{u})$。

(Σ3) 连续性：对于每个 $(x, u) \in X \times \mathcal{U}$，映射 $t \mapsto \phi(t, x, u)$ 在其最大定义域上连续。

(Σ4) 余循环性质：对于所有 $x \in X$、 $u \in \mathcal{U}$，以及满足 $[0, t+h] \times \{(x, u)\} \subset D_\phi$ 的所有 t, $h \geq 0$，有

$$\phi\big(h, \phi(t, x, u), u(t + \cdot)\big) = \phi(t + h, x, u).$$

◁

为了将该定义与文献中的其他相关概念联系起来，考虑以下概念：

定义 1.1.2。设 $T(t) : X \to X, t \geq 0$ 是一族非线性映射。若以下条件成立，则称族 $T := \{T(t) : t \geq 0\}$ 为<style id='11'>强连续非线性半群：

(i) 对所有 $x \in X$，均有 $T(0)(x) = x$。

(ii) 对所有 t_1, $t_2 \geq 0$ 以及所有 $x \in X$，均有 $T(t_1)\big(T(t_2)(x)\big) = T(t_1 + t_2)(x)$。

(iii) 对每个 $x \in X$，映射 $t \mapsto T(t)(x)$ 是连续的。

◁

取定义 1.1.2 中的族 $(T(t))_{t \geq 0}$ 。令 $\mathcal{U} := \{0\}$，并定义 $\phi(t, x, 0) := T(t)(x)$，可以看出 $\Sigma := (X, \{0\}, \phi)$ 是根据定义 1.1.1 的控制系统。事实上，定义 1.1.1 的公理 (i)-(iii) 以及因果性均显然成立。恒等性质、 ϕ 关于时间的连续性以及余循环性质，分别直接对应于定义 1.1.2 的公理 (i)-(iii)。

第 2.1.1 节中讨论的抽象线性控制系统，也是我们在此考虑的控制系统的一种特殊情况。从某种意义上说，定义1.1.1是对强连续非线性半群和抽象线性控制系统这两个概念的直接推广与统一。

该系统类涵盖由常微分方程（ODE）生成的控制系统、切换系统、时滞系统、演化偏微分方程、巴拿赫空间中的抽象微分方程以及许多其他系统 [113, 第 1]章。

1.2 正向完备性与可达集的有界性

定义 1.2.1。我们称一个控制系统（如定义 1.1.1中所述）为正向完备（*FC*），如果 $D_\phi = \mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U}$，也就是说，对于每个（$x$，$u$）$\in X \times \mathcal{U}$以及所有$t \geq 0$，值 ϕ（t，x，u）$\in X$都有定义。$\lhd$

一般而言，正向完备性本身并不意味着：对于受一致有界输入作用、且初始状态位于有界球内的轨迹，存在任何一致界（参见例 3.5.2）。具有此类界的系统值得拥有一个专门的名称。

定义 1.2.2。如果对任意 $C > 0$ 和任意 $\tau > 0$，均有如下性质，则称 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 具有有界可达集（*BRS*）：

$$\sup \left\{ \|\phi(t,x,u)\|_X : \|x\|_X \leq C,\ \|u\|_{\mathcal{U}} \leq C,\ t \in [0,\tau] \right\} < \infty.$$

$\lhd$

用类似比较函数的方式，对 BRS 性质作定量重述是很有用的。

若 $(r_1, r_2, r_3) \leq (R_1, R_2, R_3)$ 蕴含 $h(r_1, r_2, r_3) \leq h(R_1, R_2, R_3)$，其中对 $\mathbb{R}^3_+$ 使用分量偏序，则称函数 $h : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$ 递增。若 $(r_1, r_2, r_3) \leq (R_1, R_2, R_3)$ 且 $(r_1, r_2, r_3) \neq (R_1, R_2, R_3)$ 蕴含 $h(r_1, r_2, r_3) < h(R_1, R_2, R_3)$，则称 h 严格递增。

引理 1.2.3. 考虑一个正向完备系统 Σ。以下命题等价：

(i) Σ具有有界可达集。

(ii) 存在一个连续、递增函数 $\mu : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对于所有$x \in X$、$u \in \mathcal{U}$ 以及所有 $t \geq 0$，都有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \mu(\|x\|_X, \|u\|_{\mathcal{U}}, t). \tag{1.2}$$

(iii) 存在一个连续函数 $\mu : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对于所有 $x \in X$、$u \in \mathcal{U}$ 以及所有 $t \geq 0$，不等式 (1.2) 成立。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)。定义 $\tilde{\mu} : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$ 为

$$\tilde{\mu}(C_1, C_2, \tau) := \sup_{\|x\|_X \leq C_1,\ \|u\|_{\mathcal{U}} \leq C_2,\ t \in [0,\tau]} \|\phi(t,x,u)\|_X, \tag{1.3}$$

根据条件 (i)，该定义是良定义的。显然，按照定义，$\tilde{\mu}$ 是递增的。特别地，它是局部可积的。

定义 $\hat{\mu} : (0, +\infty)^3 \to \mathbb{R}_+$，令 $C_1, C_2, \tau > 0$

$$\hat{\mu}(C_1, C_2, \tau) := \frac{1}{C_1 C_2 \tau} \int_{C_1}^{2C_1} \int_{C_2}^{2C_2} \int_{\tau}^{2\tau} \tilde{\mu}(r_1, r_2, s) dr_1 dr_2 ds + C_1 C_2 \tau.$$

根据构造，$\hat{\mu}$ 在 $(0,+\infty)^3$ 上严格递增且连续。

利用单调性，我们可以将 $\hat{\mu}$ 的定义域扩展到整个 $\mathbb{R}^3_+$。为此，我们定义：对于 C_2, $\tau > 0$, $\hat{\mu}(0, C_2, \tau) := \lim_{C_1 \to +0} \hat{\mu}(C_1, C_2, \tau)$；对于 $C_1 \geq 0$, $\tau > 0$, $\hat{\mu}(C_1, 0, \tau) := \lim_{C_2 \to +0} \hat{\mu}(C_1, C_2, \tau)$；对于 $C_1, C_2 \geq 0$，我们定义 $\hat{\mu}(C_1, C_2, 0) := \lim_{\tau \to +0} \hat{\mu}(C_1, C_2, \tau)$。由于 $\hat{\mu}$ 在 $(0,+\infty)^3$, 上递增，所有这些极限都有定义，因此得到的函数在 $\mathbb{R}^3_+$ 上递增。注意，这种构造并不能保证 $\hat{\mu}$ 连续。为得到连续性，选取一个连续且严格递增的函数 $\nu\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，使得

$$\nu(r) > \max\{\hat{\mu}(0,0,r), \hat{\mu}(0,r,0), \hat{\mu}(r,0,0)\}, \quad r \geq 0,$$

并定义对于 $(C_1, C_2, \tau) \geq (0,0,0)$

$$\mu(C_1, C_2, \tau) := \max\left\{\nu\big(\max\{C_1, C_2, \tau\}\big), \hat{\mu}(C_1, C_2, \tau)\right\} + C_1 C_2 \tau.$$

函数 μ 连续，因为

$$\mu(C_1, C_2, \tau) = \nu\big(\max\{C_1, C_2, \tau\}\big) + C_1 C_2 \tau$$

只要 C_1、C_2 或 τ 足够小即可。同时，对于 $C_1 > 0$、$C_2 > 0$ 和 $\tau > 0$，我们有

$$\begin{aligned}\mu(C_1, C_2, \tau) &\geq \hat{\mu}(C_1, C_2, \tau) \\ &\geq \frac{1}{C_1 C_2 \tau} \int_{C_1}^{2C_1} \int_{C_2}^{2C_2} \int_{\tau}^{2\tau} 1 dr_1 dr_2 ds \; \tilde{\mu}(C_1, C_2, \tau) + C_1 C_2 \tau \\ &\geq \tilde{\mu}(C_1, C_2, \tau).\end{aligned}$$

这意味着 (ii) 对于这个 μ 成立。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 显然成立。(iii) $\Rightarrow$ (i) 由 μ 的连续性可得。 □

对于一大类控制系统，解的有界性意味着可以将其延拓到更大的区间，参见 [113, 第 1]章。接下来，我们将这一性质表述为抽象系统的性质：

定义 1.2.4. 我们称系统 Σ满足有界性蕴含延拓（*BIC*）性质，如果对于每个 $(x,u) \in X \times \mathcal{U}$，只要最大存在时间 $t_m(x,u)$ 有限，且对于所有 $M > 0$，都存在 $t \in [0, t_m(x,u))$，使得 $\|\phi(t,x,u)\|_X > M$。 ◁

1.3 输入到状态稳定性

在表述稳定性性质时，我们使用标准的比较函数类，相关内容参见附录 B。我们从本文的核心概念开始：

定义 1.3.1。 如果系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是正向完备的，且存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}$，使得对所有 $x \in X$、$u \in \mathcal{U}$ 和 $t \geq 0$，均有*(一致)*输入到状态稳定（*ISS*）

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{1.4}$$

◁

用 $B_{r,\,Z}$ 表示赋范向量空间 Z中以 0 为中心、半径为 r 的开球，即 $\{u \in Z:$ $\|u\|_{\mathcal{U}} < r\}$，并简记为 $B_r := B_{r,\,X}$。

ISS 性质的局部对应概念是

定义 1.3.2。系统 $\Sigma = (X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 称为（一致）局部输入到状态稳定（*LISS*），如果存在 $\beta \in \mathcal{KL}$，$\gamma \in \mathcal{K}$ 和 $r > 0$ 使得对所有 $x \in B_r$，$u \in B_{r,\ \mathcal{U}}$都有 $t_m(x,\ u) = \infty$，且不等式（1.4）对所有 $t \geq 0$均成立。◁

ISS 显然蕴含以下性质，该性质在无扰动系统的稳定性分析中发挥着关键作用。

定义 1.3.3。系统 $\Sigma = (X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 称为零点一致全局渐近稳定（零输入一致全局渐近稳定），如果存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 使得对所有 $x \in X$ 都有 $t_m(x,\ 0) = +\infty$，并且

$$\|\phi(t, x, 0)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t), \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

◁

最后，我们关注一种强于 ISS 的性质——指数输入到状态稳定性：

定义 1.3.4。系统 $\Sigma = (X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 称为指数输入到状态稳定（*eISS*），如果它是正向完备的，并且存在 $M,\ a > 0$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}$，使得对所有$x \in X$、$u \in \mathcal{U}$ 和 $t \geq 0$，均有

$$\|\phi(t, x, u)\|_X \leq Me^{-at}\|x\|_X + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{1.6}$$

此外，如果还可以将 γ 选为线性函数，则称 Σ 具有线性增益的指数 *ISS*。◁

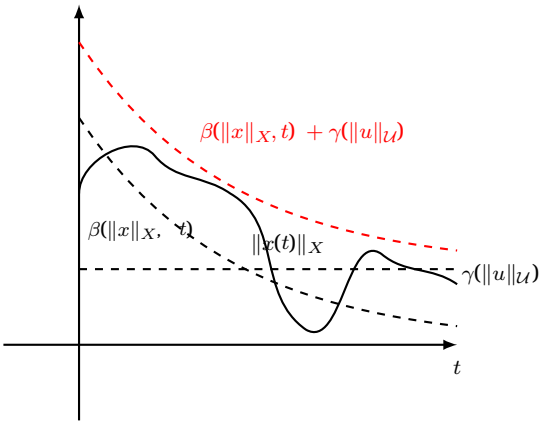

图 1.1：输入到状态稳定系统轨迹范数的典型图形。

最常见的选择之一是 $\mathcal{U}$空间 $\mathcal{U}:\ = PC_b(\mathbb{R}_+,\ U)$，其中 U是某个赋范向量空间，范数为 $\|u\|_{\mathcal{U}}:\ = \sup\ \|u(s)\|_U$。在这种情况下，可以采用$0 \leq s \leq \infty$（L）ISS性质的另一种定义，这种定义在文献中经常使用（例如参见 [114], [85]）：

命题 1.3.5。令 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$，其中 U 是某个赋范向量空间。系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是局部输入到状态稳定性，当且仅当存在 $\beta \in \mathcal{KL}$、$\gamma \in \mathcal{K}$ 和 $r > 0$，使得对于所有 $x \in B_r$、$u \in B_r$、u 均有 $t_m(x, u) = \infty$，并且以下条件对所有 $t \geq 0$ 均成立：

$$\|\phi(t, x, u)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t) + \gamma(\sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_U). \tag{1.7}$$

证明。充分性显然，因为 $\sup_{0 \leq s \leq \infty} \|u(s)\|_U = \|u\|_{\mathcal{U}}$。

现在设 Σ 为局部输入到状态稳定性。由于系统 Σ 的因果性，系统 Σ 的状态 $\phi(\tau, x, u)$ $\tau \in [0, t]$ 不依赖于 $u(s)$ $s > t$ 的取值。对于任意 $t \geq 0$ 和 $u \in \mathcal{U}$，考虑另一个输入 $\tilde{u} \in \mathcal{U}$，定义如下：

$$\tilde{u}(\tau) := \begin{cases} u(\tau), & \text{if } \tau \in [0, t], \\ u(t), & \tau > t. \end{cases}$$

不等式（1.4）对所有可容许输入均成立，因此对 $\tilde{u}$ 也成立。将 $\tilde{u}$ 代入（1.4），并利用 $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{U}} = \sup_{0 \leq s \leq t} \|u(s)\|_U$，得到（1.7）。 □

容易为（全局）输入到状态稳定性性质表述一个与命题 1.3.5 相对应的结果。对于连续输入函数（$\mathcal{U} := C(\mathbb{R}_+, U)$）、强可测且本质有界输入类 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$（用 ess sup $\|u(s)\|_U$ 代替 sup $\|u(s)\|_U$，以及许多其他输入函数类，也有类似结果。

我们在本节最后证明，对于趋于零的输入，ISS系统的轨迹会趋于零。

定义 1.3.6。我们称正向完备系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 具有收敛输入一致收敛状态（*CIUCS*）性质，若对于每个 $u \in \mathcal{U}$ 满足 $\lim_{t \to \infty} \|u(t + \cdot)\|_{\mathcal{U}} = 0$ 的情形，以及任意 $r > 0$，都有

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{\|x\|_X \leq r} \|\phi(t, x, u)\|_X = 0.$$

◁

命题 1.3.7。每个输入到状态稳定控制系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 都具有 *CIUCS* 性质。

证明。设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个输入到状态稳定控制系统，并且不失一般性地假设相应的增益 γ 是一个 $\mathcal{K}_\infty$-函数。任取 $r > 0$、任意满足 $\lim_{t \to \infty} \|u(\cdot + t)\|_{\mathcal{U}} = 0$ 的 $u \in \mathcal{U}$，以及任意 $\varepsilon > 0$。为证明该命题的结论，我们需要证明存在一个时间 $t_\varepsilon = t_\varepsilon(r, u) > 0$，使得

$$\|x\|_X \leq r, \quad t \geq t_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t, x, u)\|_X \leq \varepsilon.$$

选择 t_1，使得 $\|u(\cdot + t_1)\|_{\mathcal{U}} \leq \gamma^{-1}(\varepsilon)$。由于 Σ 的余循环性质和输入到状态稳定性，对于任意 $x \in B_r$，我们有

$$\begin{aligned} \|\phi(t + t_1, x, u)\|_X &= \big\|\phi\big(t, \phi(t_1, x, u), u(\cdot + t_1)\big)\big\|_X \\ &\leq \beta\big(\|\phi(t_1, x, u)\|_X, t\big) + \gamma\big(\|u(\cdot + t_1)\|_{\mathcal{U}}\big) \\ &\leq \beta\big(\|\phi(t_1, x, u)\|_X, t\big) + \varepsilon \\ &\leq \beta\big(\beta(\|x\|_X, t_1) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}), t\big) + \varepsilon \\ &\leq \beta\big(\beta(r, 0) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}), t\big) + \varepsilon. \end{aligned}$$

任取 t_2，使得 $\beta\big(\beta(r,\ 0)\ +\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})\ t_2\big)\ \leq\ \varepsilon$。这确保了 $\|\phi(t_2\ +t_1,\ \ x,\ \ u)\|_X \leq 2\varepsilon.$ 再次利用余循环性质，我们得到对所有 $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}&\|\phi(t+t_2+t_1,x,u)\|_X\\&\qquad\leq \beta\big(\|\phi(t_2+t_1,x,u)\|_X,t\big)+\gamma\big(\|u(\cdot+t_1+t_2)\|_{\mathcal{U}}\big).\end{aligned}$$

由平移不变性公理可得 $\|u(\cdot+t_2+t_1)\|_{\mathcal{U}} \leq \|u(\cdot+t_1)\|_{\mathcal{U}} \leq \gamma^{-1}(\varepsilon)$。$\Sigma$ 的输入到状态稳定性结合余循环性质，保证对所有 $t>0$，

$$\begin{aligned}\|\phi(t+t_2+t_1,x,u)\|_X\ &\leq\ \beta\big(\|\phi(t_2+t_1,x,u)\|_X,t\big)+\varepsilon\\&\leq\ \beta\big(2\varepsilon,0\big)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 可以任意小，且当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\beta\big(2\varepsilon,0\big)+\varepsilon\to 0$，命题的结论由此得证。

□

1.4 稠密性论证

通常，先在状态空间和输入空间的某些稠密子空间上验证分布参数系统的输入到状态稳定性会更容易。例如，李雅普诺夫泛函在整个状态空间上可能不可微，但在某些稠密子空间上可微。本节将证明，在自然的附加假设下，系统在稠密状态空间和输入空间上的输入到状态稳定性意味着其在整个状态空间和输入空间上的输入到状态稳定性。

定义 1.4.1。设 $\Sigma=(X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 是一个正向完备控制系统。如果对所有 $x\in X$、$u\in\mathcal{U}$、$T>0$，以及所有 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得 $\forall x'\in X:\ \|x-x'\|_X<\delta$ 且 $\forall u'\in\mathcal{U}:\ \|u-u'\|_{\mathcal{U}}<\delta$ 满足

$$\|\phi(t,x,u)-\phi(t,x',u')\|_X<\varepsilon,\quad \forall t\in[0,T].$$

◁

现在我们有如下结果

引理 1.4.2。考虑一个正向完备控制系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$，并设 ϕ 关于输入和初始状态连续依赖。

ˆ ˆ设 X、$\mathcal{U}$ 是 X 和 $\mathcal{U}$ 的稠密赋范向量子空间，分别赋予ˆ ˆˆ从 X 和 $\mathcal{U}$ 继承的范数，并设 $\Sigma:=(X,\mathcal{U},\phi)$ 是由 Σ 的转移映射 ϕ 生成、ˆ但将状态空间限制为 X、输入空间限制为可容许输入 $\mathcal{U}$ 的系统。

ˆ设 Σ是输入到状态稳定性。则 Σ也具有输入到状态稳定性，且估计式 β 和 γ 中的(1.4) .

ˆ ˆ ˆ证明。由于 Σ 具有输入到状态稳定性，存在 $\beta\in\mathcal{KL}$ 和 $\gamma\in\mathcal{K}_\infty$，使得 $\forall$ˆ $x\in X,\ \ \forall$ˆ$u\in\mathcal{U}$ 并且$\forall t\geq 0$ 满足

$$\|\phi(t,\hat{x},\hat{u})\|_X\leq\beta(\|\hat{x}\|_X,t)+\gamma(\|\hat{u}\|_{\mathcal{U}}).\tag{1.8}$$

设 Σ 对于相同的 β、γ不是输入到状态稳定性（ISS）。那么存在 $T>0$、$x\in X$、$u\in\mathcal{U}$，使得对于某个 $r=r(T,\ \ x,\ \ u)>0$，有

$$\|\phi(T,x,u)\|_X=\beta(\|x\|_X,T)+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})+r.\tag{1.9}$$

由（1.8）和（1.9），可得

$$\begin{aligned}\|\phi(T,x,u)\|_X - \|\phi(T,\hat{x},\hat{u})\|_X \geq (\beta(\|x\|_X,T) - \beta(\|\hat{x}\|_X,T)) \\ + (\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) - \gamma(\|\hat{u}\|_{\mathcal{U}})) + r.\end{aligned} \tag{1.10}$$

ˆˆˆ由于 X 和 $\mathcal{U}$ 分别在 X 和 $\mathcal{U}$中稠密，因此我们可以找到序列 $(\hat{x}_i) \subset X$: $\|x - \hat{x}_i\|_X \to 0$ 和 $(\hat{u}_i) \subset \mathcal{U}$: $\|u - \hat{u}_i\|_{\mathcal{U}} \to 0$ 使得 $i \to \infty$。由 (1.10)，对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 $\hat{x}_i$和 $\hat{u}_i$:

$$\|\phi(T,x,u) - \phi(T,\hat{x}_i,\hat{u}_i)\|_X \geq \big|\|\phi(T,x,u)\|_X - \|\phi(T,\hat{x}_i,\hat{u}_i)\|_X\big| \geq r - 2\varepsilon. \tag{1.11}$$

这与关于 ϕ 对初始状态和输入连续依赖的假设相矛盾。因此， Σ 具有输入到状态稳定性。

□

1.5 ISS李雅普诺夫函数

对于连续函数 $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，右上 Dini 导数和右下 Dini 导数分别定义为 $D^+y(t) := \lim_{h\to+0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$ 和 $D^-y(t) := \lim_{h\to+0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$。此外，我们采用以下记号: $\dot{y}(t) := D^+y(t)$。在 B.3 节中，我们简要概述 Dini 导数的已知结果。

设 $x \in X$ 和 V 是在 x的某个邻域内定义的实值函数。沿着 Σ的轨迹，对应于输入 u 的 x 处的 V 的李导数 定义为

$$\dot{V}_u(x) = \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\big(V(\phi(t,x,u)) - V(x)\big). \tag{1.12}$$

换句话说， $\dot{V}_u(x) = D^+V(\phi(t,\ x,\ u))\Big|_{t=0}$。

李雅普诺夫函数是研究输入到状态稳定性和局部输入到状态稳定性的有力工具。

定义 1.5.1。设 $\Sigma = (X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 是一个时不变控制系统。若存在 $\rho_1,\ \rho_2 > 0$, $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\chi \in \mathcal{K}$以及正定函数 α，使得 $B_{\rho_1} \subset D$，并且连续函数 $V\colon\ D \to \mathbb{R}_+$, $D \subset X$, $0 \in \text{int}(D)$ $= D\backslash\partial D$ 称为 Σ的蕴含形式的局部输入到状态稳定李雅普诺夫函数（*LISS LF*），且

$$\psi_1(\|x\|_X) \leq V(x) \leq \psi_2(\|x\|_X), \quad \forall x \in B_{\rho_1}, \tag{1.13}$$

且 $\forall x \in X\colon\ \|x\|_X \leq \rho_1, \quad \forall u \in \mathcal{U}\colon\ \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \rho_2$ 成立:

$$\|x\|_X \geq \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) \ \Rightarrow\ \dot{V}_u(x) \leq -\alpha(V(x)). \tag{1.14}$$

函数 χ 称为 Σ的 输入到状态稳定李雅普诺夫增益。

（i）如果进一步有 $\alpha\ (r) = ar, \quad a > 0$，那么 V 称为一个蕴含形式的局部指数输入到状态稳定性（*eISS*）李雅普诺夫函数。

(ii) 如果在前一个定义中 $D = X$、 $\rho_1 = \infty$ 和 $\rho_2 = \infty$，则函数 V 被称为<样式 id='5'>蕴含形式的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数</样式>。

◁

注 1.5.2。我们对输入到状态稳定性李雅普诺夫函数的定义非常一般。然而，计算 $\dot{V}_u(x)$，根据（1.12）中给出的定义，需要知道未来时间的解，至少需要知道一个足够小的时间区间内的解。

然而，李雅普诺夫理论的一项主要优势在于，无需知道解即可检验系统的稳定性。为了保留这一特点，对于许多重要类别的系统，可以推导出有用的公式来计算 $\dot{V}_u(x)$，而无需了解未来的动力学。例如，对于具有利普希茨连续 V 的常微分方程系统（A.1），对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及所有连续的 $u \in \mathcal{U}$，都有 $\dot{V}_u(x) = \nabla V(x) \cdot f(x, u(0))$，其中 ∇V 是 V 的梯度，$\cdot$ 是在 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积。对于时滞系统，可以使用所谓的 Driver 导数计算 $\dot{V}_u(x)$。对于许多偏微分方程系统，可以为状态空间 X 中属于某个稠密子集的 x 给出计算 $\dot{V}_u(x)$ 的简单公式。要使输入到状态稳定性性质对所有状态和输入都成立，可以使用第 1.4 节中介绍的稠密性论证。$\lhd$

如果根据上下文可以明确计算李导数 $\dot{V}_u(x)$ 时所采用的输入，我们就简写为 $\dot{V}(x)$。

定义 1.5.3。考虑系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$。如果对于所有 $t \geq 0$，均有 $\phi(t, 0, 0) = 0$，则称 $0 \in X$ 为（无扰动系统的）平衡点。$\lhd$

现在我们利用广义比较原理（命题 B.4.1）来证明直接李雅普诺夫定理。

定理 1.5.4（直接李雅普诺夫定理）。设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个满足 *BIC* 性质的时不变控制系统。

如果 Σ 存在一个 *(L)ISS* 李雅普诺夫函数，则它具有 *(L)ISS* 性质。

证明。设控制系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 存在一个 LISS李雅普诺夫函数，并且 $\psi_1, \psi_2, \chi, \alpha, \rho_1, \rho_2$ 如定义 1.5.1中所述。

定义 $R_1 := \min\{\psi_2^{-1} \circ \psi_1(\rho_1), \psi_1(\rho_1)\}$ 以及 $R_2 := \min\{\rho_2, \chi^{-1} \circ \psi_2^{-1}(R_1)\}$。现在任取一个控制 $u \in \mathcal{U}$，使得 $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq R_2$，并定义

$$I_u := \{x \in D : V(x) \leq \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}})\}.$$

注意，由于 $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq R_2$，对于任意 $x \in I_u$，有

$$\psi_1(\|x\|_X) \leq V(x) \leq \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) \leq \psi_2 \circ \chi(R_2) \leq R_1,$$

因此 $\|x\|_X \leq \psi_1^{-1}(R_1) \leq \rho_1$。这表明 $I_u \subset B_{\rho_1} \subset D$。

St步骤 1： 我们将证明，I_u 在以下意义下是正向不变的：

$$x \in I_u \quad \wedge \quad v \in \mathcal{U} \quad \wedge \quad \|v\|_{\mathcal{U}} \leq \|u\|_{\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \quad \phi(t, x, v) \in I_u \quad \forall t \geq 0. \tag{1.15}$$

假设对于满足 $\|v\|_{\mathcal{U}} \leq \|u\|_{\mathcal{U}}$ 的某些 $x \in I_u$ 和 $v \in \mathcal{U}$，该蕴含不成立。存在两种可能。

首先，可能会出现这样的情况：对应于初始条件 x 和输入 v 的流映射 $\phi(\cdot, x, v)$，仅在有限时间区间 $[0, t_m(x, v))$ 上存在，并且 $\phi(t, x, v) \in I_u$ 对于 $t \in [0, t_m(x, v))$ 成立。然而，鉴于 Σ 的 BIC 性质，这种情况不可能发生。

第二种情况是存在 $t_1 \in (0, t_m(x, u))$ 以及 $\varepsilon > 0$ 使得 $V(\phi(t_1, x, v)) > \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) + \varepsilon$。定义

$$t^* := \inf\{t \in [0, t_m(x, u)) : V(\phi(t, x, v)) > \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) + \varepsilon\}.$$

由于 $x \in I_u$，且 $\phi(\cdot,\ x,\ v)$ 是连续的，

$$\psi_2(\|\phi(t^*,x,v)\|_X) \geq V\left(\phi(t^*,x,v)\right) = \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) + \varepsilon \geq \psi_2 \circ \chi(\|v\|_{\mathcal{U}}).$$

由于（1.14），可得

$$D^+V\left(\phi(t^*,x,v)\right) \leq -\alpha\big(V(\phi(t^*,x,v))\big).$$

记 $y(\cdot) := V(\phi(\cdot,\ x,\ v))$。假设存在 $(t_k) \subset (t^*,\ +\infty)$，使得 $t_k \to t^*$、$k \to \infty$ 和 $y(t_k) \geq y(t^*)$。那么

$$0 \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{y(t_k)-y(t^*)}{t_k - t^*} \leq D^+y(t^*) \leq -\alpha(y(t^*)) < 0,$$

矛盾。因此，存在某个 $\delta > 0$ 使得 $y(t) < y(t^*) = \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) + \varepsilon$ 对所有 $t \in [t^*, t^*+\delta$ 均成立。这与 t^*的定义矛盾。（1.15）得证。

总之，对于任意 $x \in I_u$，我们有

$$\psi_1\left(\|\phi(t,x,u)\|_X\right) \leq V(\phi(t,x,u)) \leq \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) \quad \forall t \geq 0,$$

这意味着对所有 $t \geq 0$,

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \psi_1^{-1} \circ \psi_2 \circ \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{1.16}$$

步骤 2： 现在任取 x: $\|x\|_X \leq R_1$ 使得存在 $\tau > 0$ 满足 $\phi(t,\ x,\ u) \notin I_u$对所有 $t \in [0,\tau]$均成立。根据平移不变性公理（定义1.1.1的第 (ii) 项），并利用夹逼界（1.13），可得

$$\psi_2(\|\phi(t,x,u)\|_X) \geq V(\|\phi(t,x,u)\|_X) \geq \psi_2 \circ \chi(\|u(\cdot)\|_{\mathcal{U}}) \geq \psi_2 \circ \chi(\|u(\cdot+t)\|_{\mathcal{U}}),$$

并利用 $\psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$，我们得到 $\|\phi(t,\ x,\ u)\|_X \geq \chi(\|u(\cdot+t)\|_{\mathcal{U}})$，其中 $t \in [0,\tau]$。

只要 $\|\phi(t,\ x,\ u)\|_X \leq \rho_1$，利用余循环性质，我们便得到以下微分不等式：

$$D^+V(\phi(t,x,u)) = \dot{V}_{u(t+\cdot)}(\phi(t,x,u)) \leq -\alpha(V(\phi(t,x,u))). \tag{1.17}$$

因此，对于所有这样的 t，都有 $V(\phi(t,\ x,\ u)) \leq V(x)$，这意味着

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \psi_1^{-1} \circ \psi_2(\|x\|_X) \leq \psi_1^{-1} \circ \psi_2(R_1) \leq \rho_1.$$

因此，(1.17) 对所有 $t \in [0,\tau]$ 均成立。

注意，映射 $t \mapsto V(\phi(t,\ x,\ u))$ 是连续的，因此我们可以使用广义比较原理（命题 B.4.1）推知 $\exists\, \beta \in \mathcal{KL}$： $V(\phi(t,\ x,\ u)) \leq \beta(V(x_0)\ t)$，因此：

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t), \quad t \in [0,\tau], \tag{1.18}$$

其中 $\beta(r,t) = \psi_1^{-1} \circ \tilde{\beta}(\psi_2^{-1}(r)\ t)$，$\forall r,t \geq 0$。

估计（1.18）与 BIC 性质共同确保该解可以延拓到比 $[0,\tau]$更大的区间；如果在此区间上，轨迹仍处于 I_u之外，那么估计（1.18）在这个更大的区间上仍然成立。这表明，该解至少存在到与 I_u相交的时刻。

根据 $\mathcal{KL}$函数的性质可知， $\exists t_1$:

$$t_1 := \inf\{t \geq 0 : \phi(t, x, u) \in I_u\}.$$

根据上述推理，(1.18) 在 $[0, t_1]$ 上成立。

对于 $t \geq t_1$，根据余循环性质，我们有

$$\phi(t, x, u) = \phi\big(t - t_1, \phi(t_1, x, u), u(t_1 + \cdot)\big).$$

由于 $\|u(t_1+\cdot)\|_{\mathcal{U}} \leq \|u\|_{\mathcal{U}}$，且 $\phi(t_1, x, u) \in I_u$，性质 (1.15) 保证 $\phi(t, x, u) \in I_u$对所有 $t \geq t_1$均成立，因此对 $t \geq t_1$ ，估计 (1.16) 有效。由 (1.16) 和 (1.18) 可得

$$\|\phi(t, x, u)\|_X \leq \beta\left(\|x\|_X, t\right) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \quad \forall t \geq 0.$$

我们的估计对任意控制 u 均成立： $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq R_2$。因此，结合 (1.18) 和 (1.16)，我们得到 Σ 在 $(t, x, u) \in \mathbb{R}_+ \times B_{R_1} \times B_{R_2, \mathcal{U}}$ 中的 LISS估计。

要证明 ISS 李雅普诺夫函数的存在性确保 Σ 的输入到状态稳定性，论证过程与上述类似，但需使用 $\rho_1 = \rho_2 = \infty$。 □

1.5.1 指数 ISS 李雅普诺夫函数

在定义1.3.4中，我们引入了指数输入到状态稳定性的概念。它比输入到状态稳定性更强，因为它假设系统具有指数收敛速率。为了保证这种强类型的收敛，需要具有特殊性质的 eISS Lyapunov函数。

蕴含关系（1.14）结合 $\alpha(r) = ar, \quad r > 0$表明，只要状态相对于输入足够大，eISS 李雅普诺夫函数沿轨迹呈指数衰减。然而，由于（ ψ_1， ψ_2 ）中的函数1.13是一般的非线性函数，轨迹本身不一定具有指数收敛速率。尽管如此，我们有以下结果:

定理 1.5.5。 设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 为一个控制系统，且 V是一个指数 *ISS Lyapunov* 函数，其具有 $\psi_1(r) = k_1 r^p$ 和 $\psi_2(r) = k_2 r^p$ ，其中 $k_1, k_2, p > 0$为某些常数。则 Σ是指数输入到状态稳定的。

证明。 由于 V是一个指数 ISS Lyapunov 函数，运用与定理 1.5.4证明中类似的论证，可以得出 V 对于某个 $\chi \in \mathcal{K}_\infty$ 和$a > 0$ 满足以下估计:

$$V(\phi(t, x, u)) \leq e^{-at} V(x) + \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}), \quad x \in X, \ u \in \mathcal{U}, \ t \geq 0.$$

根据定理的假设， V对于某个 $p \in \mathbb{N}$ 满足以下估计

$$k_1 \|x\|_X^p \leq V(x) \leq k_2 \|x\|_X^p, \quad x \in X,$$

因此

$$k_1 \|\phi(t, x, u)\|_X^p \leq e^{-at} k_2 \|x\|_X^p + \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}), \quad x \in X, \ u \in \mathcal{U}, \ t \geq 0.$$

因此，对于所有 $x \in X$， $u \in \mathcal{U}$， $t \geq 0$ ，我们有

$$\begin{aligned} \|\phi(t, x, u)\|_X &\leq \left(e^{-at} \frac{k_2}{k_1} \|x\|_X^p + \chi(\|u\|_{\mathcal{U}})\right)^{1/p} \\ &\leq \left(2e^{-at} \frac{k_2}{k_1}\right)^{1/p} \|x\|_X + \left(2\chi(\|u\|_{\mathcal{U}})\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

这表明（1.6），从而意味着 Σ 具有指数 ISS。 □

我们将指数输入到状态稳定系统的稠密性论证表述为引理 1.4.2 的一个推论。

引理 1.5.6。 考虑一个控制系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$，并设 ϕ 对输入和初始状态连续依赖。

^^ ^设 $X, \mathcal{U}$ 分别是 X 和 $\mathcal{U}$ 的稠密赋范向量子空间，并设 $\Sigma :=^{\wedge} {}^{\wedge}(X, \mathcal{U}, \phi)$ 是由 Σ 的转移映射 ϕ 生成的系统，但限制在状态^ ^空间 X 和可容许输入空间 $\mathcal{U}$ 上。

Let^{Σ} 具有指数输入到状态稳定性（*eISS*）。那么 Σ 也具有指数输入到状态稳定性，且估计 M, a 和 γ 与估计式 (1.6)相同。

证明。 结论由引理 1.4.2 得出，因为该引理指出，来自^ ISS 估计的函数 β, γ 会传递到 Σ。 □

1.5.2 耗散形式的李雅普诺夫函数

耗散形式的 ISS 李雅普诺夫函数是蕴含形式的 ISS 李雅普诺夫函数的一种替代形式。

定义 1.5.7。 设 $D \subset X$ 是一个满足 $0 \in D$的开集。连续函数 $V\colon D \to \mathbb{R}_+$称为系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$的耗散形式的 *LISS* 李雅普诺夫函数，如果存在 $r > 0$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\sigma \in \mathcal{K}$，使得 $B_r \subset D$，且对所有 $x \in B_r$

$$\psi_1(\|x\|_X) \leq V(x) \leq \psi_2(\|x\|_X), \tag{1.19}$$

沿着 Σ 的轨迹， V 的 Dini导数满足

$$\dot{V}_u(x) \leq -\alpha(\|x\|_X) + \sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \tag{1.20}$$

对所有 $x \in \overline{B_r}$ 和 $u \in \overline{B_{r,\mathcal{U}}}$。

函数 $V\colon X \to \mathbb{R}_+$ 称为耗散形式的 *ISS* 李雅普诺夫函数，如果（1.19）和（1.20）对所有 $x \in X, u \in \mathcal{U}$均成立。 ◁

我们有一个简单的结果。

命题 1.5.8。 设 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个满足 *BIC* 性质的控制系统。如果 V 是一个耗散形式的 *(L)ISS* 李雅普诺夫函数，那么 V 就是一个蕴含形式的 *(L)ISS* 李雅普诺夫函数。特别地， Σ具有 *(L)ISS*。

证明。 定义 $\chi(r) := \alpha^{-1}(2\sigma(r))$, $r > 0$。于是 $\|x\|_X \geq \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) \Leftrightarrow \sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \leq \frac{1}{2}\alpha(\|x\|_X)$，并且有

$$\|x\|_X \geq \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) \Rightarrow \dot{V}_u(x) \leq -\frac{1}{2}\alpha(\|x\|_X),$$

因此 V 是一个采用蕴含形式的 ISS 李雅普诺夫函数。应用定理1.5.4 可知 Σ 具有输入到状态稳定性。 □

注 1.5.9。 一个困难得多的问题是，蕴含形式的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数的存在，是否意味着耗散形式的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数也存在。对于常微分方程系统这一特殊情形，在对 V 及 [209, 注 2。4]中的右端施加合理的正则性假设后，已证明了这一结果。在无限维情形下， [162, 定理 3。4]在相当技术性的假设下证明了这一结果。对于无限维系统，目前仍缺少完全令人满意的结果。◁

注 1.5.10。 蕴含形式的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数在表述小增益定理时尤其有用。与此同时，耗散型输入到状态稳定性李雅普诺夫函数特别适用于研究所谓的积分输入到状态稳定性；参见第 5章。李雅普诺夫函数的耗散形式类似于耗散系统理论中的储能函数 [229], [230]。 ◁

1.5.3 ISS李雅普诺夫函数与一种输入空间 ce

对于任意 $u \in \mathcal{U}$ 和任意 $\tau \geq 0$，定义

$$u_\tau(s) := u \underset{\tau}{\diamondsuit} 0(s) = \begin{cases} u(s) & , \text{ if } s \in [0, \tau], \\ 0 & , \text{ if } s > \tau. \end{cases}$$

下面重新表述 ISS 李雅普诺夫函数的概念。

引理 1.5.11. 设 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个控制系统。假设对任意 $u \in \mathcal{U}$，均有 下确界 $_{\tau>0} \|u_\tau\|_\mathcal{U} \leq \|u\|_\mathcal{U}$。

那么，连续函数 $V\colon X \to \mathbb{R}_+$ 是系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$的耗散形式ISS 李雅普诺夫函数，当且仅当存在 $\psi_1, \psi_2, \alpha \in \mathcal{K}_\infty$和 $\sigma \in \mathcal{K}$，使得 (1.19) 对所有 $x \in X$ 均成立，并且 V 沿着 Σ 的轨迹，对所有 $x \in X$ 及 $u \in \mathcal{U}$ 均满足 *Dini* 导数条件

$$\dot{V}_u(x) \leq -\alpha(\|x\|_X) + \sigma(\inf_{\tau>0} \|u_\tau\|_\mathcal{U}). \tag{1.21}$$

Proof. “⇐”。这由以下假设可得：对所有 $u \in \mathcal{U}$，$\inf_{\tau>0} \|u_\tau\|_\mathcal{U} \leq \|u\|_\mathcal{U}$.

“⇒”。设连续函数 $V\colon X \to \mathbb{R}_+$ 是一个非强制 ISS 李雅普诺夫函数。任取 $x \in X$ 和任意 $u \in \mathcal{U}$。由于 $\mathcal{U}$ 是一个线性空间，$0 \in \mathcal{U}$，且拼接公理意味着，对于任意 $\tau > 0$，都有 $u_\tau \in \mathcal{U}$。根据 V_u的定义，对于任意 $\tau > 0$，都有 $V_u(x) = V_{u_\tau}(x)$，因此

$$\dot{V}_u(x) = \dot{V}_{u_\tau}(x) \leq -\alpha(\|x\|_X) + \sigma(\|u_\tau\|_\mathcal{U}).$$

对 $\tau > 0$取下确界，得到（1.21）。 □

我们对 ISS 李雅普诺夫函数的定义适用于任意赋范向量空间 $\mathcal{U}$，这使得我们能够针对非常广泛的一类系统发展输入到状态稳定性李雅普诺夫理论。然而，对于某些输入空间，该定义限制过于严格；对于其他系统，采用更简单的表述来阐释 ISS 李雅普诺夫函数的概念可能更为有用。接下来，我们将考察最重要的输入空间。

注 1.5.12。 [具有 L^p-输入的系统的李雅普诺夫函数] 对于空间$\mathcal{U} = L^p(\mathbb{R}_+, U)$，对于巴拿赫空间 U 以及某个 $p \in [1, +\infty)$，定义 1.5.7 限制过于严格。事实上，对于任意 $u \in \mathcal{U} = L^p(\mathbb{R}_+, U)$ 都有 $\inf_{\tau\geq 0} \|u_\tau\|_\mathcal{U} = 0$，因此不等式（1.21）可化简为

$$\dot{V}_u(x) \leq -\alpha(\|x\|_X), \tag{1.22}$$

这不仅保证了输入到状态稳定性，也保证了具有零增益的输入到状态稳定性（其中 $\gamma \equiv 0$），后者也称为一致全局渐近稳定性（关于这一概念的更多内容，见 [173]）。针对具有 $\mathcal{U} = L^p(\mathbb{R}_+, U)$, $p \in [1, +\infty)$ 的系统，强制型和非强制型输入到状态稳定性李雅普诺夫理论已在 [156]中得到发展。 ◁

注 1.5.13。 [分段连续输入函数] 如果 $\mathcal{U} = PC_b(\mathbb{R}_+, U)$，对于巴拿赫空间 U，则耗散不等式（1.21）可简化为

$$\dot{V}_u(x) \leq -\alpha(\|x\|_X) + \sigma(\|u(0)\|_U), \tag{1.23}$$

这与常微分方程系统的输入到状态稳定性理论中使用的经典耗散不等式相似。对于采用蕴含形式的 ISS 李雅普诺夫函数，也会出现类似的简化。◁

1.6 示例

本节将分析若干具有分布输入和边界输入的基本偏微分方程的输入到状态稳定性性质。为专注于输入到状态稳定性的研究，我们默认所考虑的所有系统在选定的状态空间和输入空间上，就温和解而言均为适定的。在每种情况下，我们都会为系统构造一个 ISS 李雅普诺夫函数。

1.6.1 带边界输入的输运方程

考虑如下输运方程

$$x_t(z,t) + x_z(z,t) = 0, \quad (z,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \tag{1.24}$$

满足边界条件

$$x(0,t) = u(t), \quad t > 0, \tag{1.25}$$

以及初始条件

$$x(z,0) = x_0(z), \quad z \in (0,1). \tag{1.26}$$

命题 1.6.1. 设 $X := L^2(0,1)$ 且 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$。则系统 (1.24)、(1.25)、(1.26)是指数 *ISS*。

证明。 任取 $\mu > 0$。选择如下 ISS 李雅普诺夫函数候选：

$$V(x) := \int_0^1 e^{-\mu z} x^2(z) dz.$$

显然， V 是强制的，因为

$$e^{-\mu}\|x\|_X^2 \leq V(x) \leq \|x\|_X^2, \quad x \in X. \tag{1.27}$$

我们来计算 V 沿着1.24的李导数，其中边界条件为1.25。我们首先对经典解证明这一点，因为这样可以大大简化 V 的李导数计算。

假设 $x \in C^1(0,1)$ 且 $u \in C^1(\mathbb{R}$。对于这些初始条件和边界输入，相应的 (1.24)、(1.25) 的经典解存在，并且有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u(x) &= -\int_0^1 e^{-\mu z} 2x(z)x_z(z)dz \\
&= -e^{-\mu z}x^2(z)\Big|_{z=0}^{z=1} - \mu\int_0^1 e^{-\mu z}x^2(z)dz \\
&= -e^{-\mu}x^2(1) + x^2(0) - \mu\int_0^1 e^{-\mu z}x^2(z)dz \\
&\le x^2(0) - \mu\int_0^1 e^{-\mu z}x^2(z)dz \\
&\le \|u\|_{\mathcal{U}}^2 - \mu V(x).
\end{aligned}$$

这表明 V 是系统 (1.24) 在空间 $C^1(0,1)$ 上针对边界输入 (1.25) 的 ISS 李雅普诺夫函数，上述计算对该空间均成立。

由于 $C^1(0,1)$ 在 $L^2(0,1)$ 中稠密，我们可以使用稠密性论证（引理 1.5.6）证明系统 (1.24), (1.25) 在整个状态空间 $L^2(0,1)$ 上具有 ISS。

现在，定理 1.5.5 推出 (1.24), (1.25), (1.26) 具有指数 ISS 性质。 □

注 1.6.2。通过李雅普诺夫方法研究定义在一维空间域上的一大类更一般的双曲一阶系统的输入到状态稳定性，见 [216]。 ◁

1.6.2 具有狄利克雷边界条件和分布式输入的黏性伯格斯方程

考虑带有分布式输入 u 的黏性伯格斯方程：

$$x_t(z,t) = x_{zz}(z,t) - ax(z,t)x_z(z,t) + bx(z,t) + u(z,t), \quad z \in (0,1),\ t > 0, \tag{1.28}$$

其中 a, $b \in \mathbb{R}$，并满足狄利克雷边界条件：

$$x(0,t) = x(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{1.29}$$

当 $a = 0$ 时，Burgers方程（1.28）化为满足狄利克雷边界条件的线性热方程。

首先，Burgers方程被视为 Navier–Stokes 方程的一种简化形式。然而，它在空气动力学中也有重要应用 [40]。此外，无黏伯格斯方程是发生激波现象的最简单守恒律系统 [66]。在随机偏微分方程理论中，加入随机强迫的 Burgers方程发挥着重要作用，并被称为 Kardar–Parisi–Zhang 方程 [124]。关于 Burgers方程及其推广的详细论述，可参见 [195]。

命题 1.6.3。设 $X := L^2(0,1)$ 且 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, X)$。则系统 (1.28), (1.29) 在满足 $b < \pi^2$ 的条件下是指数 *ISS*。

证明。我们将证明（1.28）在这些 X 和 $\mathcal{U}$.

考虑以下候选输入到状态稳定性李雅普诺夫函数：

$$V(x) := \int_0^1 x^2(z)dz = \|x\|_X^2, \tag{1.30}$$

显然这是强制的。

我们取 $x \in C^1(0,\ 1)$ 和 $u \in \mathcal{U}$ 满足 $v : = u(\cdot,\ 0) \in C(0,\ 1)$。那么，经典解 $\phi(\cdot,\ x,\ u)$ 满足 (1.28)、(1.29)，且存在，我们可以如下对 V 求导：

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(x) &= 2\int_0^1 x(z)\big(x_{zz}(z) - ax(z)x_z(z) + bx(z) + v(z)\big)dz \\ &= 2\int_0^1 x(z)x_{zz}(z)dz - 2a\int_0^1 x^2(z)x_z(z)dz \qquad (1.31a) \\ &\quad +2b\int_0^1 x^2(z)dz + 2\int_0^1 x(z)v(z)dz. \qquad (1.31b) \end{aligned}$$

对 (1.31a) 的第一项进行分部积分，并结合狄利克雷边界条件 (1.29)，得到

$$2\int_0^1 x(z)x_{zz}(z)dz = 2x(z)x_z(z)\big|_{z=0}^{z=1} - 2\int_0^1 x_z^2(z)dz = -2\int_0^1 x_z^2(z)dz. \tag{1.32}$$

迄今为止，我们唯一使用的技巧是分部积分。现在，我们论证中的关键在于用李雅普诺夫函数 $V(x)$ 来估计 (1.32) 的最后一项的上界。利用弗里德里希不等式 (D.29) 即可做到：

$$2\int_0^1 x(z)x_{zz}(z)dz \ \leq\ -2\pi^2\int_0^1 x^2(z)dz.$$

(1.31a) 的第二项因狄利克雷边界条件而消失：

$$\int_0^1 x^2(z)x_z(z)dz = \frac{1}{3}x^3(z)\big|_{z=0}^{z=1} = 0.$$

最后，由 (1.31)，我们得到

$$\dot{V}_u(x) \ \leq\ -2\pi^2 V(x) + 2bV(x) + 2\int_0^1 x(z)v(z)dz.$$

利用杨氏不等式（D.2.4），对于任意 $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(x) &\leq -2\pi^2 V(x) + 2bV(x) + \varepsilon V(x) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 v^2(z)dz \\ &= (2b + \varepsilon - 2\pi^2)V(x) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 v^2(z)dz. \end{aligned}$$

最后一个不等式表明，V 在 1.28）所示的黏性伯格斯方程的 L^2 范数下是一个 ISS 李雅普诺夫函数，前提是

$$b < \pi^2. \tag{1.33}$$

定理 1.5.5 现在表明，式（1.28）、（1.29）具有指数输入到状态稳定性，其中 $x \in C^1(0,1)$ 且 $v \in C(0,1)$.

稠密性论证（引理 1.5.6）表明，(1.28)、(1.29) 在整个状态空间 X 上对所有来自 $\mathcal{U}$ 的输入均具有输入到状态稳定性。 □

注 1.6.4。 我们的 ISS 分析之所以成功，关键在于将弗里德里希不等式应用于项 (1.32)。利用这一不等式，我们不仅证明了 (1.28)、(1.29) 对某些参数值 b具有输入到状态稳定性，还得到了针对 b 取值的紧确估计 (1.33)。事实上，对于非线性抛物型初边值问题 (1.28)、(1.29)，弗里德里希不等式最为适用，因为 (1.28) 中最高阶算子与边界条件 (1.29) 一起构成狄利克雷拉普拉斯算子，而弗里德里希不等式可以通过对狄利克雷拉普拉斯算子进行细致的谱分析得到。

这表明，对特定偏微分方程进行精确的输入到状态稳定性分析，很大程度上依赖于针对这类方程专门设计的积分不等式。正如我们将在 Kuramoto-Sivashinskiy方程的输入到状态稳定性分析中看到的，事实确实如此。微分算子的谱分析之所以重要，凸显了线性泛函分析在半线性偏微分方程稳定性分析中的作用。 ◁

注 1.6.5. 我们在这个例子中进行输入到状态稳定性分析所采用的策略，将为研究更复杂的方程提供一个范例：

(i) 选择一个 ISS Lyapunov 函数候选，例如 V。(ii) 利用合适的积分不等式，证明 V 在状态空间和输入空间的一个稠密子集上是 ISS 李雅普诺夫函数。(iii) 利用直接李雅普诺夫定理，证明在 X 和 $\mathcal{U}$ 的这些子空间上具有输入到状态稳定性。(iv) 利用稠密性论证，证明在整个状态空间和输入空间上具有输入到状态稳定性。

◁

1.6.3 具有分布式输入的 Kuramoto-Sivashinskiy方程

考虑如下含分布式输入的 *Kuramoto-Sivashinsky*（*KS*）方程：

$$x_t(z,t) = -x_{zzzz}(z,t) - \lambda x_{zz}(z,t) - bx(z,t)x_z(z,t) + u(z,t), \tag{1.34}$$

其中，$\lambda \in \mathbb{R}$ 是反扩散参数，$b \in \mathbb{R}$ 且 u 是分布式外部输入。考虑具有齐次狄利克雷边界条件的（1.34）：

$$x(0,t) = x_z(0,t) = x(1,t) = x_z(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{1.35}$$

方程（1.34）由 Kuramoto 和 Tsuzuki [135, 134]分别独立提出，用作反应扩散系统中相位湍流的模型；Sivashinsky [204]则将其作为平面火焰传播的模型，用以描述气体扩散和热传导对平面火焰前沿稳定性的共同影响。此外，KS 方程还可用于模拟胞状不稳定性 [180]。

命题1.6.6. 系统 (1.34)，(1.35) 是指数 *ISS*，且 $X := L^2(0,1)$且 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, X)$，$u \in \mathcal{U}$前提是

$$\lambda < 4\pi^2. \tag{1.36}$$

证明。 我们采用注 1.6.5中描述的策略。考虑如下候选 ISS Lyapunov 函数

$$V(x) := \int_0^1 x^2(z)dz. \tag{1.37}$$

对于光滑的 x 和 $u \in \mathcal{U}$，且 $u(\cdot, 0) = v \in C(0, 1)$，我们得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(x) &= \int_0^1 2x(z)\Big(- x_{zzzz}(z) - \lambda x_{zz}(z) - bx(z)x_z(z) + v(z)\Big)dz \\ &= -2\int_0^1 x(z)x_{zzzz}(z)dz - 2\lambda \int_0^1 x(z)x_{zz}(z)dz \qquad (1.38a) \\ &\qquad -2b\int_0^1 x^2(z)x_z(z)dz + 2\int_0^1 x(z)v(z)dz. \qquad (1.38b) \end{aligned}$$

对（1.38a）的第一项进行分部积分，并结合狄利克雷边界条件，可得

$$\begin{aligned} -2\int_0^1 x(z)x_{zzzz}(z)dz &= -2x(z)x_{zzz}(z)\big|_{z=0}^{z=1} + 2\int_0^1 x_z(z)x_{zzz}(z)dz \\ &= -2x(z)x_{zzz}(z)\big|_{z=0}^{z=1} + 2x_z(z)x_{zz}(z)\big|_{z=0}^{z=1} - 2\int_0^1 x_{zz}^2(z)dz \\ \big[\text{due to (1.35)}\big] &= -2\int_0^1 x_{zz}^2(z)dz. \end{aligned} \tag{1.39}$$

对（1.38a）的第二项进行分部积分，并结合狄利克雷边界条件，可得

$$-2\lambda\int_0^1 x(z)x_{zz}(z)dz = 2\lambda\int_0^1 x_z^2(z)dz. \tag{1.40}$$

根据狄利克雷边界条件，（1.38b）的第一项为零:

$$\int_0^1 x^2(z)x_z(z)dz = \frac{1}{3}x^3(z)\big|_{z=0}^{z=1} = 0. \tag{1.41}$$

结合（1.39）、（1.40）、（1.41），由（1.38）可得

$$\dot{V}_u(x) \le -2\Big(\int_0^1 x_{zz}^2(z)dz - \lambda\int_0^1 x_z^2(z)dz\Big) + 2\int_0^1 x(z)v(z)dz.$$

现在，我们将专为 KS 方程的狄利克雷问题推导的不等式（D.35）应用于上述不等式右端的第一项。同时，将柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式应用于第二项。对于每个 $\varepsilon > 0$，均有

$$\begin{aligned} \dot{V}_u(x) &\le -2\sigma(\lambda)\int_0^1 x^2(z)dz + \varepsilon\int_0^1 x^2(z)dz + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 v^2(z)dz \\ &= (\varepsilon - 2\sigma(\lambda))V(x) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 v^2(z)dz. \end{aligned} \tag{1.42}$$

这里 σ 由（D.34）定义。设 $\lambda < 4\pi^2$。根据引理 D.7.1， σ（λ） > 0 并选取足够小的 ε ，可得对于（1.42）， V 是一个耗散形式的指数 ISS 李雅普诺夫函数。

定理 1.5.5 推出（1.34）、（1.35）对光滑 $x \in L^2(0,1)$ 和连续的 u满足输入到状态稳定性。稠密性论证完成了命题的证明。 □

可以证明， $\lambda = 4\pi^2$ 是方程 (1.34)、(1.35) 的输入到状态稳定性的精确界。对于 $\lambda > 4\pi^2$方程 (1.34)、(1.35的无扰动线性化是不稳定的，更多细节请参见 [148] 。

1.6.4 索伯列夫空间中的非线性反应-扩散方程

考虑以下反应扩散系统：

$$x_t(z,t) = x_{zz}(z,t) - f(x(z,t)) + u(z,t), \quad z \in (0,\pi),\ t > 0, \tag{1.43a}$$

$$x(0,t) = x(\pi,t) = 0. \tag{1.43b}$$

我们假设 f ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在有界集上是利普希茨连续的，单调递增至无穷大， $f(-r) = -f(r)$ 对所有 $r \in \mathbb{R}$均成立（特别地， $f(0) = 0$）。

在前面的示例中，我们对状态空间的典型选择是 L^2-空间。对于（1.43），这种选择也很合理。然而，如果我们感兴趣的初始状态具有更高的正则性，例如属于索伯列夫空间 $H_0^1(0,\pi)$ ，那么分析解相对于 $H_0^1(0,\pi)$ 范数的输入到状态稳定性是合理的。本节将展示， （1.43）相对于状态空间 $X := H_0^1(0,\pi)$ 和输入空间 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, L^2(0,\pi))$ 的输入到状态稳定性，也可以通过李雅普诺夫方法进行分析。接下来，我们将 $H_0^1(0,\pi)$ 中的范数定义为

$$\|x\|_{H_0^1(0,\pi)} := \Big(\int_0^\pi x_z^2(z)dz \Big)^{\frac{1}{2}},$$

w由于弗里德里希不等式，这等价于“原生”的 $H^1(0, \pi)$-范数。

命题 1.6.7。 系统 (1.43) 是指数 *ISS*，且 $X := H_0^1(0, \pi)$ 以及$\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, L^2(0, 1))$。

证明。 考虑以下 ISS 李雅普诺夫函数候选：

$$V(x) := \int_0^\pi \Big(\frac{1}{2} x_z^2(z) + \int_0^{x(z)} f(y)dy \Big) dz, \quad x \in X. \tag{1.44}$$

根据 Sobolev 空间嵌入定理（见定理 D.5.14），每个$x \in X = H_0^1(0, \pi)$ 实际上属于 $C^{0,\frac{1}{2}}(0, \pi)$（H¨older 空间，H¨older 指数为 $\frac{1}{2}$，定义见第 D.4节）。此外，存在一个常数 c，其与 $x \in H_0^1(0, \pi)$ 无关，使得

$$\|x\|_{C^{0,\frac{1}{2}}(0,\pi)} \le c\|x\|_{H_0^1(0,\pi)}, \quad x \in H_0^1(0,\pi). \tag{1.45}$$

特别是，这说明如果我们将任意 $x \in X$ 视为其连续版本，那么表达式（1.44）是有意义的（因为 $x(z)$ 是良定义的）。

我们将证明 V 是一个输入到状态稳定性（ISS）李雅普诺夫函数。为验证函数 1.13 的估计式（ V，注意到 $\int_0^r f(y)dy \ge 0$ 对每个 $r \in \mathbb{R}$ 都成立，因此

$$V(x) \ge \int_0^\pi \frac{1}{2} x_z^2(z)dz = \frac{1}{2}\|x\|_{H_0^1(0,\pi)}^2, \quad x \in X.$$

我们来求一个上界估计。我们有

$$V(x) = \int_0^\pi \frac{1}{2}x_z^2(z)\ dz + \int_0^\pi \int_0^{x(z)} f(y)dy\ dz, \quad x \in X.$$

定义 $\psi:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 如下

$$\psi(r) := \frac{1}{2}r^2 + \sup_{x:\ \|x\|_{H_0^1(0,\pi)} \le r} \int_0^\pi \int_0^{x(z)} f(y)dydz, \quad r \ge 0.$$

不等式（1.45）以及对所有 $x \in C^{0,\frac{1}{2}}(0,\pi)$, $\|x\|_{C(0,\pi)} \le \|x\|_{C^{0,12}(0,\pi)}$这一事实蕴含

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \frac{1}{2}r^2 + \sup_{x:\ c\|x\|_{H_0^1(0,\pi)} \le cr} \int_0^\pi \int_0^{x(z)} f(y)dydz \\ &\le \frac{1}{2}r^2 + \sup_{x:\ \|x\|_{C(0,\pi)} \le cr} \int_0^\pi \int_0^{x(z)} f(y)dydz \le \psi_2(r),\end{aligned}$$

其中 $\psi_2(r) := \frac{1}{2}r^2 + \pi\int_0^{cr} f(y)dy$, $r \ge 0$。由于 f 限定在自变量的正值范围内时属于 $\mathcal{K}_\infty$, ψ_2 也属于 $\mathcal{K}_\infty$。

最后，对所有 $x \in H_0^1(0,\pi)$，我们有：

$$\frac{1}{2}\|x\|^2_{H_0^1(0,\pi)} \le V(x) \le \psi_2(\|x\|_{H_0^1(0,\pi)}), \tag{1.46}$$

且性质（1.13）得以验证。

我们来计算光滑 x 的李导数，以及对于满足 $v := u(\cdot,0) \in C(0,\pi)$ 的 $u \in \mathcal{U}$ 的李导数：

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &= \int_0^\pi x_z(z)x_{zt}(z) + f\big(x(z)\big)x_t(z)dz \\ &= [x_z x_t]_{z=0}^{z=\pi} + \int_0^\pi -x_{zz}(z)x_t(z) + f\big(x(z)\big)x_t(z)dz.\end{aligned}$$

由边界条件可得 $[x_z x_t]_{z=0}^{z=\pi} = 0$。由于 x 满足（1.43a），我们得到

$$\dot{V}_u(x) = -\int_0^\pi \Big(x_{zz}(z) - f\big(x(z)\big)\Big)^2 dz + \int_0^\pi \Big(x_{zz}(z) - f\big(x(z)\big)\Big)(-v(z))dz.$$

定义

$$I(x) := \int_0^\pi \Big(x_{zz}(z) - f\big(x(z)\big)\Big)^2 dz.$$

对第二项应用柯西-施瓦茨不等式，得：

$$\dot{V}_u(x) \le -I(x) + \sqrt{I(x)}\ \|v\|_{L^2(0,\pi)}. \tag{1.47}$$

我们来考虑 $I(x)$：

$$\begin{aligned}I(x) &= \int_0^\pi x_{zz}^2(z)dz - 2\int_0^\pi x_{zz}(z)f(x(z))dz + \int_0^\pi f^2(x(z))dz \\ &= \int_0^\pi x_{zz}^2(z)dz + 2\int_0^\pi x_z^2(z)\frac{\partial f}{\partial x}(x(z))dz + \int_0^\pi f^2(x(z))dz \\ &\ge \int_0^\pi x_{zz}^2(z)dz.\end{aligned}$$

对于 $x \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$，弗里德里希不等式的一个版本 [84, p. 85] 意味着

$$\int_0^\pi x_{zz}^2(z)dz \geq \int_0^\pi x_z^2(z)dz.$$

综上，我们得到：

$$I(x) \geq \|x\|^2_{H_0^1(0,\pi)}. \tag{1.48}$$

取李雅普诺夫增益为

$$\chi(r) = ar,\ a > 1.$$

若 $\chi(\|v\|_{L^2(0,\pi)}) \leq \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) \leq \|x\|_{H_0^1(0,\pi)}$，由式 (1.47)，利用式 (1.48)，可得：

$$\dot{V}_u(x) \leq -I(x) + \frac{1}{a}\sqrt{I(x)}\|x\|_{H_0^1(0,\pi)} \leq \Big(\frac{1}{a} - 1\Big)I(x) \leq \Big(\frac{1}{a} - 1\Big)\|x\|^2_{H_0^1(0,\pi)}. \tag{1.49}$$

这表 明光滑状态和输入满足输入到状态稳定性。稠密性论证完成了证明 . □

1.6.5 具有边界输入的半线性抛物系统的李雅普诺夫方法

本节展示如何运用李雅普诺夫方法分析具有*Neumann* 型边界输入的半线性抛物系统。考虑 Ginzburg-Landau 方程：

$$x_t(z,t) = \mu x_{zz}(z,t) + ax(z,t) - x^3(z,t), \quad t > 0,\ z \in (0,1), \tag{1.50}$$

其中 $\mu > 0$ 是扩散系数。我们研究满足以下条件的方程（1.50）：在 $z = 0$ 处施加 Neumann 边界输入，并在 $z = 1$处施加 Dirichlet 边界条件：

$$x_z(0,t) = u(t), \quad t > 0, \tag{1.51a}$$
$$x(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{1.51b}$$

为与原论文保持一致，我们假设 $u \in \mathcal{U} := C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$，并将解理解为经典意义下的解，但状态空间中的范数选为 $L^2(0,1)$ 范数，输入空间 $\mathcal{U}$ 中的范数选为 $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ 范数。由于采用经典解，输入到状态稳定性概念需要作相应调整，因此，对于输入到状态稳定性性质，我们要求估计式（1.4）仅对足够光滑的 x成立。偏微分方程模型（1.50）、（1.51）的解的概念、状态空间以及适定性证明的精确定义可见 [234]。

为推导式（1.50）、（1.51的输入到状态稳定性条件，我们采用李雅普诺夫函数候选e

$$V(x) := \|x\|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 x^2(z)dz. \tag{1.52}$$

首先，我们来计算 V 关于 x 和 u 的李导数，假设它们足够光滑：

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &= 2\int_0^1 x(z)\Big(\mu x_{zz}(z) + ax(z) - x^3(z)\Big)dz \\ &= 2\mu\Big(x_z(z)x(z)\Big)\Big|_{z=0}^{z=1} - 2\mu\int_0^1 \big(x_z(z)\big)^2 dz \\ &\quad +2aV(x) - 2\int_0^1 \big(x^2(z)\big)^2 dz.\end{aligned} \tag{1.53}$$

利用（1.51），并对最后一项应用詹森不等式（D.12），我们得到

$$\dot{V}_u(x) \leq 2\mu|u(0)||x(0)| - 2\mu\int_0^1 \big(x_z(z)\big)^2 dz + 2aV(x) - 2V^2(x).$$

利用柯西不等式（D.4），随后利用满足边界条件（1.51b）的 Agmon不等式（D.31），对于任意 $\varepsilon > 0$，我们得到：

$$2\mu|u(0)||x(0)| \leq \varepsilon|x(0)|^2 + \frac{\mu^2}{\varepsilon}|u(0)|^2 \leq \varepsilon\Big(\|x\|^2_{L^2(0,1)} + \|x_z\|^2_{L^2(0,1)}\Big) + \frac{\mu^2}{\varepsilon}|u(0)|^2.$$

将该估计代入（1.53）并重新整理各项，可得

$$\dot{V}_u(x) \leq (\varepsilon - 2\mu)\int_0^1 x_z^2(z)dz + (\varepsilon + 2a)V(x) - 2V^2(x) + \frac{\mu^2}{\varepsilon}|u(0)|^2.$$

假设 $\varepsilon < 2\mu$，我们可以对第一项使用庞加莱不等式（D.30），从而得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &\leq (\varepsilon - 2\mu)\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 x^2(z)dz + (\varepsilon + 2a)V(x) - 2V^2(x) + \frac{\mu^2}{\varepsilon}|u(0)|^2 \\ &= \Big((\varepsilon - 2\mu)\frac{\pi^2}{4} + \varepsilon + 2a\Big)V(x) - 2V^2(x) + \frac{\mu^2}{\varepsilon}|u(0)|^2. \end{aligned} \tag{1.54}$$

为确保耗散不等式成立，我们必须假设 $(\varepsilon - 2\mu)\frac{\pi^2}{4} + \varepsilon + 2a \leq 0$。由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我们得到系统（1.50）、（1.51）具有输入到状态稳定性的以下充分条件：

$$a < \frac{\mu\pi^2}{4}. \tag{1.55}$$

（$-2V^2$）x在（1.54）中的项表明，在平衡点邻域之外，系统（1.50）、（1.51）的收敛速率快于指数速率。

所得估计的紧致性

对系统（1.50）、（1.51）在 $u \equiv 0$附近的平衡点处进行线性化，可知对于 a 和 μ 如（1.55）所示，线性化系统是指数稳定的；而对于 a 和 μ满足

$$a > \frac{\mu\pi^2}{4} \tag{1.56}$$

系统（1.50）、（1.51）是不稳定的（即使在平衡点附近的局部范围内也是如此）。例如，可以通过分析相应拉普拉斯算子的谱性质来完成这一点，方法与 [84,第 1 节3]类似。

我们将得到的结果总结为以下命题：

命题 1.6.8。考虑系统（1.50），（1.51），其中 $X := L^2(0, 1)$ 且 $\mathcal{U} := C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$（带上确界范数）。

如果条件（1.55）成立，则（1.50），（1.51）具有输入到状态稳定性。

若条件 (1.56) 成立，则 (1.50)-(1.51) 对于 $u \equiv 0$ 并非一致局部渐近稳定（定义 *3.1.1(vii)* 中的意义）。

因此，我们的分析（受 [234] 启发）为系统（1.50）、（1.51）的输入到状态稳定性提供了相当精确的结果。这表明，李雅普诺夫方法结合 L^p 空间不等式的尖锐形式（如庞加莱不等式、阿格蒙不等式等），是分析具有边界输入的半线性系统的输入到状态稳定性，以及计算系统解的精确一致衰减率的有效方法。

1.7 总结

控制系统。 定义 1.1.1 至少自20世纪60年代以来，控制系统的定义就在系统理论界广泛使用 [109, 229]。并非所有重要系统都涵盖在这一定义之中。特别是，输入空间 $C(\mathbb{R}_+, U)$ 中由连续函数构成的 U 值函数不满足拼接公理。这不应构成太大的限制，因为早已在控制理论中比连续输入更常用的分段连续输入和 L^p 输入都满足拼接公理。

本着类似的精神，还可以考虑更一般的系统类别，其中包含输出映射、时变动力学、解在某些时刻发生跳变的可能性、不满足余循环性质的系统等，参见 [112, 114, 113]。

输入到状态稳定性。 输入到状态稳定性和 ISS 李雅普诺夫函数的概念最初是在常微分方程的背景下，于开创性论文 [205]中提出的。ISS 很快成为非线性控制理论的支柱之一，应用领域包括鲁棒镇定、非线性观测器设计以及大规模网络分析，参见 [132, 10, 207]。李雅普诺夫函数的耗散形式类似于耗散系统理论中的储能函数 [229], [230]。

ISS 概念对非线性控制理论的重要性，促使人们发展出相关概念，从某种意义上细化和/或推广 ISS：积分输入到状态稳定性[206, 8], 输入到输出稳定性（IOS） [106, 123], 局部输入到状态稳定性 [59], 输入输出到状态稳定性（IOSS） [211, 131], 输入到状态动力学稳定性（ISDS） [74], 增量输入到状态稳定性 [91, 4], 仅举几例。另一方面，研究人员投入了大量精力，将 ISS 理论延拓到更多类别的系统，例如离散时间[3], [208], [146], [107, 136], 脉冲 [85], [50], [38], [145], [231], [52] 切换 [227], 和混杂 [31, 32], [30], [49], [142], [174] 系统。关于不同系统类别中 ISS 研究成果的概述，请参见 [160, 第 7] 章。

关于有限维系统的输入到状态稳定性理论的全面论述，请参阅近期专著 [160] 以及综述 [207, 58]。

无限维输入到状态稳定理论的发展取得了巨大进展，为分布参数系统的鲁棒稳定性分析带来了许多强有力的技术，包括针对非线性系统的李雅普诺夫方法 [51, 234], 、输入到状态稳定的刻画 [170]、泛函分析工具 [98, 100, 201], 、基于谱的方法 [116, 120], ， 以及针对线性系统的基于单调性的工具 [163, 235] 。本书将研究其中的大多数工具。有关详细的文献综述，请参阅近期综述 [166] 。

命题1.3.7 是众所周知的。定义1.5.1 和定理1.5.4归功于 [51]。

示例。 第1.6.2节中关于带分布式输入的 Burgers方程的 ISS 分析从未发表过，尽管它采用了一种标准技巧。带有狄利克雷型或诺伊曼型边界控制的 Burgers方程要难得多，目前尚无对这类系统的 ISS 完全令人满意的分析，不过可参见 [233] 以了解局部分析

使用 De Giorgi技巧对带边界输入的 Burgers方程进行 ISS 分析。

命题 1.6.6 是 [148, 定理2.1(i)]的输入到状态稳定性对应结果。Kuramoto-Sivashinskiy方程的稳定性与边界控制（1.34）、（1.35）已在多篇论文中得到研究，例如参见 [148]。关于Kuramoto-Sivashinskiy方程的边界控制和（有限维）域内控制，近年的几篇论文包括 [41, 110]。

第1.6.4节中的例子出自 [51]。

第1.6.5 节中的例子采用了 [234]所报道的非线性反应扩散方程分析方法。 [234] 中的结果已由 [201]推广到若干类抽象半线性边界控制系统。我们通过一个有代表性的例子来介绍 [234] 中的方法，以展示该技术的本质。

第2章

演化方程：适定性与流的性质

在第1章中，我们介绍了一大类控制系统，并探讨了利用李雅普诺夫函数分析这类一般系统的输入到状态稳定性的方法。在分析中，我们默认控制系统是适定的。然而，适定性通常并非预先给定。自然系统和工程系统的模型以运动方程的形式给出，而分析这类系统的关键步骤之一就是证明其适定性。本章将考虑巴拿赫空间中的一大类相当一般的半线性演化方程。这一类方程足够广泛，涵盖了若干重要的线性和非线性演化方程类别，其中包括具有非线性内部动力学以及分布式输入和边界输入的方程。对于这类系统，我们将推导适定性的充分条件，并给出流映射的基本性质。

我们首先分析具有无界输入算子的线性演化方程的适定性。这使我们能够将线性系统的输入到状态稳定性刻画为适定性与指数稳定性的结合。此类系统的输入到状态稳定性分析十分重要，尤其有助于分析偏微分方程系统关于边界扰动的鲁棒性，以及借助边界控制器实现鲁棒镇定。

接下来，我们分析具有无界输入算子和利普希茨连续非线性项的半线性演化方程。半线性演化方程的结构使我们能够将“线性”的容许性理论方法与不动点定理、李雅普诺夫方法等“非线性”方法结合起来。我们讨论一般 C_0-半群的情形，以及解析半群这一特殊情形；对于后者，可以得到更强的结果。我们以具有狄利克雷和诺伊曼边界输入的半线性抛物系统为例，介绍这些进展。

2.1 线性系统

2.1.1 抽象线性控制系统

我们首先介绍抽象线性控制系统的框架，采用的方法与 [228]（另见 [222]）非常相近。

假设 U 和 X 是巴拿赫空间，$p \in [1, \infty]$ 和 $\mathcal{U} := L^p(\mathbb{R}_+, U)$，其中后者是强可测函数 $u : \mathbb{R}_+ \to U$ 构成的空间，并且 $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+, U)} :=$

$\left(\int_{\mathbb{R}_+} \|u(s)\|_U^p ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$

定义 2.1.1。 在 X 和 $\mathcal{U}$ 上的抽象线性控制系统 是一个二元组 $(T,\ \Phi)$，其中$T:=(T(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ 是强连续半群，且 $\Phi:=(\Phi(t))_{t\geq 0} \subset L(\mathcal{U},\ X)$ 满足：对于所有 $u,\ v \in \mathcal{U}$ 以及所有 $t,\ \tau \geq 0$，复合性质 成立：

$$\Phi(t+\tau)(u \underset{\tau}{\diamondsuit} v) = T(t)\Phi(\tau)u + \Phi(t)v, \quad u \underset{\tau}{\diamondsuit} v(s) := \begin{cases} u(s), & \text{if } s \in [0,\tau], \\ v(s-\tau), & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

◁

我们立即验证族 $\Phi =(\Phi(t))_{t\geq 0}$ 的一些简单性质：

命题 2.1.2. 设(T, Φ) 是一个抽象线性控制系统。则：

(i) $\Phi(0) = 0$。

(ii) 满足因果性性质：

$$\Phi(\tau)u = \Phi(\tau)(u \underset{\tau}{\diamondsuit} 0) = \Phi(\tau)P(\tau)u,$$

其中，我们将投影算子定义为 $P(\tau)u := u \diamondsuit 0,\ u \in \mathcal{U}.\tau$

(iii) 映射 $t \mapsto \|\Phi(t)\|$ 是非递减的。

证明。 (i). 令 $u = v$ 和 $t = \tau = 0$，可得 $\Phi(0)u = 2\Phi(0)u$ 对所有 u均成立。
(ii). 只需取 $v = 0$ 和 $t = 0$。
(iii). 在 (2.1) $u = 0$ 并对所有满足 v 的 $\|v\|_U = 1$取上确界，我们对任意 $t,\ \tau \geq 0$ 得到

$$\|\Phi(t)\| \leq \|\Phi(t+\tau)\|.$$

□

下一个结果说明，对于 $p < \infty$，算子族 $\Phi = (\Phi(t))_{t\geq 0}$ 的强连续性。

命题 2.1.3. 设 X 和 $\mathcal{U}$ 如定义 *2.1.1* 中所述，其中 $p < \infty$ 并设 $\Sigma = (T, \Phi)$是定义在 X 上的抽象线性控制系统，且 $\mathcal{U}$。那么函数

$$q(t, u) = \Phi(t)u$$

在乘积 $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ 上连续。特别地， $\Phi =(\Phi(t))_{t\geq 0}$ 是一个强连续算子族。

证明。 下面证明 q 关于 t 的连续性。任取 $u \in \mathcal{U}$，并考虑映射

$$f_u(t) := \Phi(t)u, \quad t \geq 0.$$

由于 $t \mapsto \|\Phi(t)\|$ 非递减，因果性意味着对于 $t \in [0, 1]$，有

$$\|f_u(t)\|_X = \|\Phi(t)P(t)u\|_X \leq \|\Phi(1)\| \cdot \|P(t)u\|_{\mathcal{U}}.$$

根据控制收敛定理（这里我们利用 $p<\infty$），可知当 $t\to+0$ 时，$\|P(t)u\|_{\mathcal{U}}\to 0$，因此

$$\lim_{t\to+0} f_u(t)=0.$$

复合性质（2.1）以及 T 的强连续性，现可推出 f_u 的右连续性。为证明 f_u 在 $\tau>0$ 处的左连续性，考虑一个序列 $(\varepsilon_n)\subset[0,\tau]$ 满足 $\varepsilon_n\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时趋于该点，并定义 $u_n(t)=u(\varepsilon_n+t)$。再次对 $p<\infty$ 应用控制收敛定理，可知 $u_n\to u$ 当 $n\to\infty$ 时成立。

显然，

$$u=u\underset{\varepsilon_n}{\diamondsuit}u_n,$$

利用复合性质，可得

$$\Phi(\varepsilon_n+(\tau-\varepsilon_n))u=T(\tau-\varepsilon_n)\Phi(\varepsilon_n)u+\Phi(\tau-\varepsilon_n)u_n.$$

这表明

$$\Phi(\tau)u-\Phi(\tau-\varepsilon_n)u=T(\tau-\varepsilon_n)\Phi(\varepsilon_n)u+\Phi(\tau-\varepsilon_n)(u_n-u),$$

由此得到

$$\|\Phi(\tau)u-\Phi(\tau-\varepsilon_n)u\|_X\le M\cdot\|f_u(\varepsilon_n)\|_X+\|\Phi(\tau)\|\cdot\|u_n-u\|_{\mathcal{U}},$$

其中 M 是 $\|T(t)\|$ 在 $[0,\tau]$ 上的一个界。因此，也证明了 f_u 在任意 $\tau>0$ 中的左连续性。

因此，q 在两个变量上都是连续的，而由分解可知，q 具有联合连续性

$$\Phi(t)v-\Phi(\tau)u=\Phi(t)(v-u)+(\Phi(t)-\Phi(\tau))u.$$

□

下一个命题表明，抽象线性控制系统是“一般控制系统”的一个子类：

命题 2.1.4. 设 X，$\mathcal{U}$，T 和 Φ 如定义 *2.1.1*所述。定义流映射

$$\phi(t,x,u):=T(t)x+\Phi(t)u,\quad t\ge 0,\ x\in X,\ u\in\mathcal{U}. \tag{2.2}$$

设 $p<\infty$ 或 $p=\infty$ 和 ϕ 关于时间连续。
Th则三元组 $\Sigma:=(X,\mathcal{U},\phi)$ 是定义 *1.1.1*意义下的一个控制系统 .

证明。显然，定义 1.1.1 的性质 (i)–(iv) 对于 Σ均成立。根据命题 2.1.2，$\Phi(0)=0$，这意味着 Σ 满足恒等公理。

令 $t=0$代入（2.1），可得 $\Phi(\tau)(u\diamondsuit v)=\Phi(\tau)u$，对于任意 $u,\ v\in\mathcal{U}$，因此τ 对于所有 $\tau\ge 0,\ x\in X$和 $u,\ v\in\mathcal{U}$，均成立

$$\phi(\tau,x,u\underset{\tau}{\diamondsuit}v)=T(\tau)x+\Phi(\tau)(u\underset{\tau}{\diamondsuit}v)=T(\tau)x+\Phi(\tau)u=\phi(\tau,x,u).$$

这表明 Σ具有因果性。

对于 $p=\infty$，根据假设，我们取 ϕ 关于时间的连续性；对于 $p<\infty$，由命题 2.1.3 以及 T 的强连续性可得连续性公理。

最后， Σ 的余循环性质可由以下计算得出，该计算对所有t， $\tau\geq 0$、 $x\in X$以及所有 u, $v\in\mathcal{U}$均成立。

$$\begin{aligned}\phi(t,\phi(\tau,x,u),v) &= T(t)\phi(\tau,x,u)+\Phi(t)v\\ &= T(t)(T(\tau)x+\Phi(\tau)u)+\Phi(t)v\\ &= T(t+\tau)x+T(t)\Phi(\tau)u+\Phi(t)v\\ &= T(t+\tau)x+\Phi(t+\tau)(u\underset{\tau}{\diamondsuit}v)\\ &= \phi(t+\tau,x,u\underset{\tau}{\diamondsuit}v).\end{aligned}$$

□

已知抽象线性控制系统 $(T,\ \Phi)$ 的半群 T 的增长率，也可以求出 Φ的增长率。

命题 2.1.5。 设 X 和 $\mathcal{U}$ 如定义 2.1.1所述，并设 $(T,\ \Phi)$ 是定义在 X 上的抽象线性控制系统，且 $\mathcal{U}$。取 $M\geq 1$ 和 $\omega\in\mathbb{R}$ 使得

$$\|T(t)\|\leq Me^{\omega t},\qquad t\geq 0.$$

若 $\omega>0$，则存在某个 $L\geq 0$ 使得

$$\|\Phi(t)\|\leq Le^{\omega t},\qquad t\geq 0.$$

若 $\omega<0$，则存在 $G>0$，使得 $\|\Phi(t)\|\leq G$ 对所有 $t\geq 0$ 均成立。

证明。 根据复合性质，通过归纳法可得，对任意 $(u_k)_{k=1}^n\subset\mathcal{U}$，有

$$\Phi(n)\left(\dots\left(u_1\underset{1}{\diamondsuit}u_2\right)\underset{2}{\diamondsuit}\dots\underset{n-1}{\diamondsuit}u_n\right)=T(n-1)\Phi(1)u_1+T(n-2)\Phi(1)u_2+\dots+\Phi(1)u_n,\tag{2.3}$$

又由于 $t\mapsto\|\Phi(t)\|$ 非递减，因此对于 $t\in(n-1,\ n]$:

$$\|\Phi(t)\|\leq\|\Phi(n)\|\leq\Big(\|T(n-1)\|+\|T(n-2)\|+\dots+\|I\|\Big)\cdot\|\Phi(1)\|\leq M\frac{e^{\omega n}-1}{e^{\omega}-1}\|\Phi(1)\|,$$

因此我们可以取

$$L=M\frac{e^{\omega}}{e^{\omega}-1}\|\Phi(1)\|.$$

若 $\omega<0$，则 $(\Phi(t))_{t\geq 0}$ 的一致有界性可由 (2.3) 轻易推出。 □

下面的命题将良定抽象线性控制系统的 eISS 问题归结为半群 T 的指数稳定性。

命题 2.1.6。 在命题 2.1.4的假设下，以下陈述等价：

(i) Σ具有线性增益的指数输入到状态稳定性。

(ii) T 是指数稳定的。

证明。 (i) ⇒ (ii)。显然。
(ii) ⇒(i)。由于 T是指数稳定的，存在 $M \geq 1$， $\lambda > 0$使得 $\|T(t)\| \leq Me^{-\lambda t}$对所有 $t \geq 0$均成立。根据命题 2.1.5，有 $\|\Phi(t)\| \leq G$ 对某个 $G > 0$以及所有 $t \geq 0$均成立。因此，对所有 $t \geq 0$， $x \in X$， $u \in \mathcal{U}$，有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \|T(t)x\|_X + \|\Phi(t)\|\|u\|_{\mathcal{U}} \leq Me^{-\lambda t}\|x\|_X + G\|u\|_{\mathcal{U}},$$

这表明 Σ具有增益为 G的指数输入到状态稳定性。 □

2.1.2 抽象控制系统的表示

假设 X 是一个巴拿赫空间，且 A： $D(A) \to X$, $D(A) \subset X$ 是 X 上强连续半群的无穷小生成元（这已经蕴含 $\rho(A) \neq \emptyset$）。定义外推空间 X_{-1} 为 X 关于范数$\|x\|_{X_{-1}} := \|(aI - A)^{-1}x\|_X$ 的完备化，其中 a 属于 A的预解集 $\rho(A) \subset \mathbb{C}$。

引理 2.1.7。 空间 X_{-1} 不依赖于 $a \in \rho(A)$ 的选择，而不同的 $a \in \rho(A)$ 选择会在 X_{-1} 上生成等价范数。

证明。 这是一个简单的练习。 □

将状态空间 X 提升到更大的空间 X_{-1} 会带来好消息：半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ 可唯一延拓为强连续半群 $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$，定义在 X_{-1} 上，其生成元 A_{-1}： $X_{-1} \to X_{-1}$ 是 A 的延拓，且 $D(A_{-1})$， $= X$例如，参见 [65, 第二节。5]。

实际上，系统通常通过微分方程来定义。下面的结果表明，每个具有 $p \neq \infty$ 的抽象线性控制系统都可以表示为某个线性微分方程的流映射。

定理 2.1.8。 设 U, X 是巴拿赫空间， $p \in [0, +\infty)$且设 $\mathcal{U}:= L^p(\mathbb{R}_+, U)$。假设 (T, Φ) 是定义在 X 和 $\mathcal{U}$ 上的抽象线性控制系统。那么存在唯一的算子 $B \in L(U, X_{-1})$，使得对任意 $u \in \mathcal{U}$ 和任意 $t \geq 0$，都有

$$\Phi(t)u = \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds. \tag{2.4}$$

此外，对于任意 $x_0 \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$，由下式定义的函数 ϕ： $\mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U} \to X$

$$\phi(t, x_0, u) = T(t)x_0 + \Phi(t)u$$

是下列方程的（连续）温和解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

其中 $x(0) = x_0$。

根据定理 2.1.8，每个抽象线性控制系统都可以表示为一个线性方程的温和解。然而，并非每一对（A，B），其中 A 是强连续半群的生成元，且 $B \in L(U, X_{-1})$，都能导出一个抽象线性控制系统。定理 2.1.8告诉我们（至少对于 $p < \infty$），条件 $B \in L(U, X_{-1})$ 是一个必要条件（但非充分条件）。接下来，我们将考察能够生成线性控制系统的输入算子类。我们将看到，理解这类系统不仅对适定性理论十分重要，对线性控制系统的 ISS 分析也同样重要。有界算子 B 构成了这类算子中最简单的一类。下一节将讨论它们。之后，我们将把注意力转向所谓的可容许算子类，它们为我们提供了更一般、适用范围更广的理论。

2.1.3 有界输入算子的线性系统的输入到状态稳定性

设 X, U 为巴拿赫空间。考虑一个线性控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{2.5}$$

其中，A 是强连续半群 $T := (T(t))_{t\geq 0}$ 在 X 上的生成元，且$B \in L(U, X)$。

如 [102, 引理 10.1.6], 所述，与某个初始条件 $x_0 \in X$ 和外部输入 u对应的（连续）温和解 (2.5) 为

$$\phi(t, x_0, u) := T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

积分在 Bochner 意义下有定义，Bochner 积分理论见 [11, 第 1] 章。

对于 $p \in [1, +\infty]$，考虑空间 $L^p{}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, W)$，即局部 *Bochner* 可积函数组成的空间，其中函数 $f : \mathbb{R}_+ \to W$ 满足：映射 f 在任意紧区间 $I \subset \mathbb{R}_+$ 上的限制 f_I 属于 $L^p(I, W)$。

注 2.1.9。注意，空间 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$ 并非赋范向量空间，因为其中一些元素具有“无限” L^1-范数（也就是说，无法为这些空间定义 L^1-范数），因此根据定义 1.1.1，$L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$ 不允许作为控制系统的输入空间。不过，由于控制系统具有因果性，控制系统相对于 $L^1(\mathbb{R}_+, U)$ 中输入的输入到状态稳定性，意味着该系统相对于 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$ 的输入到状态稳定性；这与命题1.3.5类似。因此，我们稍微变通地使用定义 1.1.1，并允许输入空间为 $L^p{}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$。 ◁

合理的做法是考虑（2.5）相对于不同输入空间选择的输入到状态稳定性，定义如下：

定义 2.1.10。设 $\mathcal{U}$ 是一个容许输入的赋范向量空间。若（2.5）相对于 $\mathcal{U}$是输入到状态稳定的，则称（X、$\mathcal{U}$、ϕ）中 ϕ如（2.6）所示的系统是适定的输入到状态稳定控制系统。

如果（2.5）相对于 $\mathcal{U} = L^p(\mathbb{R}_+, U)$ 具有输入到状态稳定性（ISS），则称（2.5）为 L^p-输入到状态稳定。 ◁

以下引理表明，（2.5）是一个适定控制系统，适用于任意 $\mathcal{U} := L^p_{\text{局部}}(\mathbb{R}_+, U)$，$p \in [1, +\infty]$。

引理 2.1.11. 考虑系统 (2.5)，其中 $B \in L(U, X)$。设 $\mathcal{U} := L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, U), p \in [1, +\infty]$，并令 Φ 定义为

$$\Phi(t)u = \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds, \quad t \geq 0, \quad u \in \mathcal{U}.$$

那么 (T, Φ) 是定义 *2.1.1.*意义下的线性控制系统。

特别地，(T, Φ) 是指数输入到状态稳定的，当且仅当 T 指数稳定。

证明。 由于 B 是有界算子，因此对所有 $t \geq 0$， $\Phi(t)$ 都有界。此外，有

$$\begin{aligned}
\Phi(t+\tau)(u \underset{\tau}{\diamondsuit} v) &= \int_0^{t+\tau} T(t+\tau-s)B(u \underset{\tau}{\diamondsuit} v)(s)ds \\
&= \int_0^{\tau} T(t+\tau-s)Bu(s)ds + \int_{\tau}^{t+\tau} T(t+\tau-s)Bv(s-\tau)ds \\
&= T(t)\int_0^{\tau} T(\tau-s)Bu(s)ds + \int_0^t T(t-s)Bv(s)ds \\
&= T(t)\Phi(\tau)u + \Phi(t)v,
\end{aligned}$$

这表明复合性质 (2.1) 成立，由此得到引理的结论。

应用命题 2.1.6 即可完成引理的证明。 □

2.1.4 无界输入算子的线性系统的输入到状态稳定性

假设 X 和 U 是巴拿赫空间， $q \in [1, \infty]$，且 $\mathcal{U} := L^q(\mathbb{R}_+, U)$。再设 $A : D(A) \subset X \to X$ 是 X 上强连续半群 $T := (T(t))_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元，且其预解集 $\rho(A)$ 非空。再次考虑方程 (2.5)，但现在假设 B 是从 U 到 X 的无界线性算子。无界输入算子自然出现在边界控制或线性系统的点控制中，参见例如 [102]。

为处理这种情形，我们再次考虑一个外推空间 X_{-1}。根据表示定理 2.1.8，输入算子 B 必须满足条件 $B \in L(U, X_{-1})$，才能导出一个定义良好的控制系统（至少对于 $q < \infty$）。我们假设该条件对所有 $q \in [1, \infty]$ 均成立。

因此，我们可以考虑巴拿赫空间 X_{-1}上的方程（2.5）：

$$\dot{x}(t) = A_{-1}x(t) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{2.7}$$

该外推系统的温和解由常数变易公式给出（2.6），对于任意 $x \in X$， $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$ 以及任意 $t \geq 0$，其形式为

$$\begin{aligned}
\phi(t, x, u) &:= T_{-1}(t)x + \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds \\
&= T(t)x + \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

最后一次转移是因为对所有 $x \in X$ 和 $t \geq 0$, $T_{-1}(t)x = T(t)x$。

然而，提升是有代价的：此时解 $\phi(t, x, u)$ 的取值属于X_{-1}。公式 (2.8) 定义的 X 值函数，只有当 (2.8) 中积分的值属于状态空间 X时才成立，尽管被积函数取值于 X_{-1}。这引出了以下定义：

定义 2.1.12。 算子 $B \in L(U, X_{-1})$ 称为 $(T(t))_{t\geq 0}$ 的 q-可容许控制算子，其中 $1 \leq q \leq \infty$, 若存在一个 $t > 0$ 使得

$$u \in L^q(\mathbb{R}_+, U) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds \in X. \tag{2.9}$$

◁

定义算子 $\Phi(t) : \mathcal{U} \to X$ 如下：

$$\Phi(t)u := \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds.$$

另记 $\Phi := \{\Phi(t) : t \geq 0\}$。

对于任意 $B \in L(U, X_{-1})$, 算子 $\Phi(t)$ 均良定义为从 $\mathcal{U}$ 到 X_{-1} 的映射，对所有 t 均成立。下一个结果表明，由 q-可容许性可推出 B 的像 $\Phi(t)$ 对所有 $t \geq 0$ 均属于 X；并且对于 $\mathcal{U} := L^q(\mathbb{R}_+, U)$, 有 $\Phi(t) \in L(\mathcal{U}, X)$, 对所有 $t > 0$ 均成立。

命题 2.1.13。 设 X, U 为巴拿赫空间，且给定 $q \in [1, \infty]$。那么，$B \in L(U, X_{-1})$ 对 T 是 q-可容许的，当且仅当对所有 $t > 0$，存在 $h_t > 0$，使得对所有 $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}_+, U)$，都有 $\Phi(t)u \in X$，并且

$$\left\| \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)\, ds \right\|_X \leq h_t \|u\|_{L^q([0,t],U)}. \tag{2.10}$$

此外 ，(T, Φ) 在 X 上定义了一个抽象线性控制系统，且 $\mathcal{U} := L^q(\mathbb{R}_+, U$).

证明。 由于 q-可容许性，任取 t_0 使得（2.9）对 t 成立：$= t_0$。

任取 $\tau \in (0, t_0)$, 以及任意 $v \in L^q([0, t_0 - \tau], U)$。定义 $u := 0 \diamondsuit_\tau v \in L^q([0, t_0], U)$。那么 $\Phi(t_0)u \in X$，同时

$$\Phi(t_0)u = \int_\tau^{t_0} T_{-1}(t_0 - s)Bv(s-\tau)ds = \int_0^{t_0-\tau} T_{-1}(t_0 - \tau - s)Bv(s)ds = \Phi(t_0 - \tau)v.$$

由于 $\tau \in (0, t_0)$ 和 $v \in L^q([0, t_0 - \tau], U)$ 是任意的，我们看到（2.9）对所有$t \in [0, t_0]$均成立。

如引理 2.1.11 的证明中所示，可以证明，对所有 $u_1, u_2 \in \mathcal{U} = L^q(\mathbb{R}_+, U)$ 以及所有 $t, \tau \geq 0$, 均有

$$\Phi(\tau + t)(u_1 \diamondsuit_\tau u_2) = T_{-1}(t)\Phi(\tau)u_1 + \Phi(t)u_2, \tag{2.11}$$

其中等式是在空间 X_{-1}中考虑的。现在任取 $t \in [0, t_0]$, 并在（2.11）中设 $\tau := t$。我们有

$$\Phi(2t)(u_1 \diamondsuit_t u_2) = T_{-1}(t)\Phi(t)u_1 + \Phi(t)u_2.$$

我们已证明 $\Phi(t)u_1 \in X$。由于 T_{-1} 在 X 上与 T 重合，因此 $T_{-1}(t)\Phi(t)u_1 = T(t)\Phi(t)u_1 \in X$，从而 $\Phi(2t)(u_1 \diamond u_2) \in X$。由于 u_1、$u_2 \in \mathcal{U}$ 任意，我们由此得到 (2.9) 对于 $t \in [0, 2t_0]$ 成立。迭代地可知，(2.9) 对所有 $t \geq 0$ 均成立。

证明对于所有 $t > 0$，$\Phi(t) \in L(\mathcal{U}, X)$。

由于 $B \in B(U, X_{-1})$，因此对于 $\mu \in \rho(A)$，有 $(\mu I - A)^{-1}B \in L(U, X)$。

于是，由于 A 与半群 T可交换，并且利用闭算子与博赫纳积分“可交换”这一事实（见 [11, 命题 1.1。7]），可得

$$\Phi(t)u = \int_0^t T_{-1}(t-s)(\mu I - A)(\mu I - A)^{-1}Bu(s)ds = (\mu I - A)\int_0^t T_{-1}(t-s)(\mu I - A)^{-1}Bu(s)ds.$$

由于 $(\mu I - A)^{-1}B$ 映射到 X，且 T_{-1} 在 X 上与 T 重合，因此有

$$\Phi(t)u = (\mu I - A)\int_0^t T(t-s)(\mu I - A)^{-1}Bu(s)ds.$$

Now

$$u \mapsto \int_0^t T(t-s)(\mu I - A)^{-1}Bu(s)ds$$

是一个从 $\mathcal{U}$ 到 X的有界算子，因此，$\Phi(t)$ 作为一个闭算子与一个有界算子的乘积，是闭算子。

由于 $\Phi(t)$ 在整个 $\mathcal{U}$ 上有定义，闭图定理保证 $\Phi(t) \in L(\mathcal{U}, X)$。由于 T和 T_{-1}在 X 上重合，在 (2.11) 中有 $T_{-1}(t)\Phi(\tau)u_1 = T(t)\Phi(\tau)u_1$，对所有 t、$\tau \geq 0$ 以及所有 $u_1 \in \mathcal{U}$ 均成立。结合 (2.11)，这表明 (T, Φ) 定义了一个在 X 和 $\mathcal{U}$ 上的抽象线性控制系统。 □

若 $B \in L(U, X_{-1})$ 是一个 q-可容许算子，则由（ϕ （2.8）给出的算子在$\mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U}$上定义良好，且 $\mathcal{U} := L^q(\mathbb{R}_+, U)$ 成立。接下来自然的问题是，$\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是否是定义 1.1.1意义下的控制系统。对于 $q < \infty$，答案是肯定的：

命题 2.1.14。假设 $B \in L(U, X_{-1})$ 是一个 q-可容许输入算子，且$q < \infty$。则 $(X, \mathcal{U}, \phi)$ 其中 $\mathcal{U} := L^q(\mathbb{R}_+, U)$ 且 ϕ 由 (2.8) 给出的系统，是定义 *1.1.1* 意义下的正向完备控制系统，并满足 *CEP* 和 *BRS* 性质。

证明。由命题 2.1.13可知，(T, Φ) 是一个抽象线性控制系统。根据命题 2.1.4，$(X, \mathcal{U}, \phi)$ 是定义 1.1.1意义下的控制系统。CEP 和 BRS 性质源于 T 是强连续半群这一事实，以及估计式（2.10）。 □

对于 ∞-可容许控制算子，我们有如下结果：

命题 2.1.15。假设 $B \in L(U, X_{-1})$ 是一个 ∞-可容许输入算子，并且 ϕ关于时间在 X 的范数下连续。那么 $(X, \mathcal{U}, \phi)$ 在 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$ 且 ϕ 由 (2.8) 给出的系统，是定义 *1.1.1*意义下的正向完备控制系统，且满足 *CEP* 和 *BRS* 性质。

证明。证明与命题 2.1.14的证明类似。 □

注 2.1.16. 用一般控制系统的语言来说，q-可容许性恰好意味着：对于来自 $L^q(\mathbb{R}_+, U)$ 的所有输入，控制系统都是前向完备的。根据命题2.1.13，这等价于 BRS 性质。◁

尽管 ϕ 由（2.8）给出的解关于时间在 X_{-1} 的范数下是连续的（作为温和解），但这并不意味着 ϕ 在 X-范数下连续。关于∞-可容许性是否能推出 $B \in L(U, X_{-1})$ 的解映射关于时间在 ϕ 的 X-范数下连续，这个问题已经悬而未决 30 年（[228, 问题 2.4]）。最近，这一问题针对希尔伯特空间上一类重要的解析系统得到了肯定的回答：[100]

定理 2.1.17。 设 A 在希尔伯特空间 X 上生成一个指数稳定解析半群，且该半群与某个压缩半群相似。进一步假设 $\dim(U) < \infty$。

那么，任意 $B \in L(U, X_{-1})$ 都是一个 ∞-可容许算子，并且相应的映射 ϕ 在 X 的范数下连续，对任意 $u \in \mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。因此，$\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$是定义 *1.1.1* 意义下的控制系统。

证明。 该结论由 [100, 定理 1] 得出。 □

注 2.1.18。 引理 2.1.13 和 H¨older 不等式表明，q-可容许性 $B \in L(U, X_{-1})$ 蕴含 p-可容许性 B，对任意 $p > q$。事实上，由 (2.10)，我们对任意 $p \in (q, \infty)$ 得到：

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t T(s)Bu(s)\,ds \right\|_X &\leq h_t \Big(\int_0^t 1 \cdot |u(s)|^q ds \Big)^{1/q} \\ &\leq h_t \Big(\int_0^t 1^{\frac{p}{p-q}} ds \Big)^{\frac{p-q}{p}} \Big(\int_0^t |u(s)|^p ds \Big)^{1/p} \\ &\leq h_t t^{\frac{p-q}{p}} \Big(\int_0^t |u(s)|^p ds \Big)^{1/p},\end{aligned}$$

这正是 B 的 p-可容许性。 $p = \infty$ 的情形类似。

与此同时，一般而言，q-可容许性并不意味着 B 对于任意 p的 -可容许性 $p < q$。特别是在 [98, 例 5。2], 中，给出了一个 ∞-可容许算子的例子，但它对于任意 p都不是 - 可容许的 $p < \infty$。因此，可容许性衡量了无界输入算子的行为可能有多差，而 ∞- 可容许算子是仍能保证线性控制系统适定（2.5）的“最差”算子类型，同时也使得系统有可能相对于输入的上确界范数满足 ISS；这是最经典的一类 ISS 估计。有界算子总是 1-可容许的；如果 X 是自反的，那么 1-可容许性B 等价于 $B \in L(U, X)$ 是适定的这一事实，见 [228, 定理 4。8]。◁

We 继续进行具有可容许输入算子的线性系统的稳定性分析 rs.

定义 2.1.19. 一个 q-可容许算子 B 称为无穷时间 q-可容许算子 B，如果引理 $h := h_t$ 中的常数 2.1.13 不依赖于 t。◁

引理 2.1.20. 设 T 是一个指数稳定半群，且设 $q \in [1, \infty]$。那么， B是 q-可容许控制算子，当且仅当它是无穷时间 q-可容许控制算子。

证明. 设 $q < \infty$ （对于 $q = \infty$，论证类似）。我们仿照 [73,引理 1.1]中的证明。

显然，无限时间 q-可容许性意味着 q-可容许性。假设 B 是 q-可容许的，并任取 $\tau > 0$ 和 $u \in \mathcal{U}$。考虑任意一个 $t = k\tau + t'$，其中某个$k \in \mathbb{N}$ 和 $t' < \tau$。

$$\left\| \int_0^t T(s)Bu(s)\,ds \right\|_X$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \int_{k\tau}^{k\tau+t'} T(s)Bu(s)\,ds + \sum_{i=0}^{k-1} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} T(s)Bu(s)\,ds \right\|_X \\
&\le \left\| \int_0^{t'} T(s+k\tau)Bu(s+k\tau)\,ds \right\|_X + \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{\tau} T(s+i\tau)Bu(s+i\tau)\,ds \right\|_X \\
&\le \|T(k\tau)\| \left\| \int_0^{t'} T(s)Bu(s+k\tau)\,ds \right\|_X + \sum_{i=0}^{k-1} \|T(i\tau)\| \left\| \int_0^{\tau} T(s)Bu(s+i\tau)\,ds \right\|_X .
\end{aligned}
$$

利用命题 2.1.13 并不失一般性地假设 $t \mapsto h_t$ 是非递减的，我们有：

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t T(s)Bu(s)\,ds \right\|_X \\
&\quad \le Me^{-\lambda k\tau} h_{t'} \Big(\int_0^{t'} \|u(s+k\tau)\|_U^q ds \Big)^{1/q} + \sum_{i=0}^{k-1} Me^{-\lambda i\tau} h_\tau \Big(\int_0^{\tau} \|u(s+i\tau)\|_U^q ds \Big)^{1/q} \\
&\quad \le Me^{-\lambda k\tau} h_\tau \Big(\int_0^{t} \|u(s)\|_U^q ds \Big)^{1/q} + \sum_{i=0}^{k-1} Me^{-\lambda i\tau} h_\tau \Big(\int_0^{t} \|u(s)\|_U^q ds \Big)^{1/q} \\
&\quad \le \sum_{i=0}^{k} Me^{-\lambda i\tau} h_\tau \Big(\int_0^{t} \|u(s)\|_U^q ds \Big)^{1/q} \\
&\quad \le \sum_{i=0}^{\infty} Me^{-\lambda i\tau} h_\tau \Big(\int_0^{t} \|u(s)\|_U^q ds \Big)^{1/q} .
\end{aligned}
$$

取 $h := Mh_\tau \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda i\tau}$，即可得到结果。 □

现在我们可以刻画（2.5）的输入到状态稳定性：

定理 2.1.21（无界输入算子的线性系统的 ISS 刻画）。设 X 和 U 为巴拿赫空间，且 $q \in [1,\infty]$。考虑系统（2.5），其中 ϕ 由（2.8）定义。以下陈述等价。

(i) （2.5）是 L^q-指数输入到状态稳定性，且具有线性增益。

(ii) （2.5）是 L^q-输入到状态稳定的。

(iii) T 指数稳定 $\wedge$ B 是 q-可容许的 $\wedge$（若 $q=\infty$）ϕ 关于时间在 X 的范数下连续。

(iv) T 是指数稳定的， $\wedge$ B 是无限时间 q可容许的 $\wedge$（若 $q=\infty$）ϕ关于时间在 X的范数下连续。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)。 显然。

(iii) $\Rightarrow$ (iv)。由引理2.1.20得证。

(iv) $\Rightarrow$ (i)。由命题 2.1.13 以及半群 $h \equiv const$ 的指数稳定性 T得证。

□

与定理 4.5.1的思路类似，定理2.1.21将线性系统的 ISS 分析归结为半群的稳定性分析以及输入算子的可容许性分析，这些都是经典的泛函分析问题，有许多强大的工具可用于求解，参见 [99, 222]。

2.2 含无界输入算子的半线性演化方程

考虑如下形式的无限维演化方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 f(x(t), u(t)) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{2.12a}$$
$$x(0) = x_0, \tag{2.12b}$$

其中 $A: D(A) \subset X \to X$ 生成巴拿赫空间 X上的有界线性算子强连续半群 $T = (T(t))_{t\geq 0}$； U 是输入值的赋范向量空间， $x_0 \in X$ 是给定的初始条件。我们取 $\mathcal{U}$ 作为输入空间：$= L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。

映射 $f: X \times U \to V$定义在整个 $X \times U$ 上，并映射到巴拿赫空间 V。此外， $B: U \to X$、 $B_2: V \to X$ 是可能无界的算子，但分别属于 $L(U, X_{-1})$ 和 $L(V, X_{-1})$，其中 V是巴拿赫空间。这里，外推空间 X_{-1} 是在范数 $x \mapsto \|(aI - A)^{-1}x\|_X$，$x \in X$ 下 X 的闭包，其中 $a \in \rho(A)$（ $a \in \rho(A)$ 的不同选择会在 X 上诱导等价范数）。

2.2.1 容许输入算子与温和解

基于我们对线性理论的分析，我们提出

假设 2.2.1。 算子 $B \in L(U, X_{-1})$ 是 ∞-可容许的，并且映射 $(t, u) \mapsto \Phi(t)u$ 在 $\mathbb{R}_+ \times L^q(\mathbb{R}_+, U)$上是连续的。

特别地，当 B 是一个 q-可容许算子且 $q < \infty$时，该假设成立，见[228,命题 2.3]。

为了定义温和解的概念，我们还需要以下内容：

假设 2.2.2。 设假设 2.2.1 成立。我们假设，对于所有 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$以及任意 $x \in C(\mathbb{R}_+, X)$ 映射 $s \mapsto f\big(x(s)\ u(s)\big)$ 属于 $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, V)$，且 B_2 是零类∞-可容许的，并且映射

$$t \mapsto \int_0^t T(t-s)B_2 f\big(x(s), u(s)\big)ds$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上定义良好且连续。

注 2.2.3。 假设 2.2.2 尤其是在以下情况下成立： $B_2 \in L(V, X)$，并且

(i) $f(x, u) = g(x) + Ru, x \in X, u \in U$，其中 $R \in L(U, V)$，且 g 在 X 上连续。事实上，对于连续的 x，映射 $s \mapsto g\big(x(s)\big)$ 也是连续的，因此是黎曼可积的。对于任意 $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$，映射 $s \mapsto T(t-s)B_2 Ru(s)$ 均为 Bochner 可积，依据 [11, 命题 1.3.4], [102, 引理 10.1.6]。这保证了假设 2.2.2 成立。

(ii) 如果 f在 $X \times U$上连续，且 u 分段右连续，那么映射 $s \mapsto f\big(x(s)\ u(s)\big)$ 也分段右连续，因此它是黎曼可积的。

(iii)（常微分方程系统）。设 $X = \mathbb{R}^n$， $U = \mathbb{R}^m$， $A = 0$ （从而 $T(t) =$ 对所有 t均为恒等映射），$B_2 =$， $B = 0$且 f 在 $X \times U$上连续。在这些假设下，方程（2.12）可写成如下形式

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{2.13}$$

因此，对每个 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$ 以及每个 $x \in C(\mathbb{R}_+, X)$，映射 $s \mapsto f(x(s)\ u(s))$ 均为勒贝格可积，因此假设2.2.2成立。

事实上，由于 x 是 (2.13) 在 $[0, \tau)$ 上的一个解， x 在 $[0, \tau)$ 上连续。根据假设，u 在 $[0, \tau)$ 上可测。类似于 [191, 命题 7]（其中证明了定义在可测集 E 上的连续函数与可测函数的复合在 E 上可测），可知映射 $q\colon [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$, $q(s) := f(x(s)\ u(s))$ 是可测映射。由于 u 本质有界，且 x 和 f 将有界集映为有界集， q 在 $[0, \tau)$ 上本质有界。因此， $q \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$，从而 q 在 $[0, \tau)$ 上可积。

◁

接下来，我们定义方程（2.12）的温和解。

定义 2.2.4。 [温和解] 设假设 2.2.1、2.2.2 成立。另设 $\tau > 0$ 已给定。若函数 $x \in C([0, \tau], X)$ 是方程 (2.12) 在 $[0, \tau]$ 上的温和解，对应于某些 $x_0 \in X$ 和 $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$，且 x 满足积分方程

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B_2 f\big(x(s), u(s)\big)ds + \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds. \tag{2.14}$$

这里的积分是 X值映射的博赫纳积分，而 T_{-1} 是半群 T 到空间 X_{-1}的延拓，参见 [65, 第126] 页。

我们称 $x : \mathbb{R}_+ \to X$ 是方程 (2.12) 在 $\mathbb{R}_+$ 上的温和解，对应于某些$x_0 \in X$和 $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$，当且仅当它对所有 2.12（其中 x_0, u）都是在 $[0, \tau]$ 上的温和解$\tau > 0$。◁

2.2.2 局部存在性与唯一性

假设 2.2.1, 2.2.2 保证了 (2.14) 中的积分项定义良好。为了确保温和解的存在唯一性，我们对f施加进一步限制。

定义 2.2.5. 我们称 $f\colon X \times U \to V$

(i) 在 X 的有界子集上关于第一自变量利普希茨连续，若对任意 $C > 0$，存在 $L(C) > 0$，使得 $\forall x, y \in B_C, \forall v \in B_{C,U}$ 满足

$$\|f(y, v) - f(x, v)\|_V \le L(C)\|y - x\|_X. \tag{2.15}$$

(ii) 在 X上关于另一自变量一致，若对任意 $C > 0$ ，存在 $L(C) > 0$，使得2.15式对所有 x、 y： $\|x\|_X \le C$、 $\|y\|_X \le C$以及所有 $v \in U$均成立。

(iii) 关于第一自变量一致全局 *Lipschitz* 连续，若(2.15) 对所有 x、 $y \in X$以及所有 $u \in \mathcal{U}$ 均成立，且 $L = const$ 不依赖于 x、 y、 u。

◁

凡上下文已清楚表明是“关于第一自变量”时，我们均省略这一说明。

在进行适定性分析时，我们依赖于以下关于非线性项的假设 f （2.12）。

假设 2.2.6。 非线性项 f 满足以下性质：

(i) f： $X \times U \to V$ 在 X 的有界子集上是利普希茨连续的。

(ii) 对所有 $x \in X$， f（x， $\cdot$）均连续。

(iii) 存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $c > 0$，使得对所有 $u \in U$，以下结论成立 ：

$$\|f(0,u)\|_V \le \sigma(\|u\|_U) + c. \tag{2.16}$$

设 S 是一个赋范向量空间。从 $z \in S$ 到集合 $Z \subset S$ 的距离 定义为

$$\operatorname{dist}(z,Z) := \inf\{\|y-z\|_S : y \in Z\}.$$

此外，将以 $Z \subset S$ 为中心、半径为 r 的开球记为

$$B_{r,S}(Z) := \{y \in X : \operatorname{dist}(y,Z) < r\}.$$

我们还令 $B_{r,S}(x) := B_{r,S}(\{x\})$，其中 $x \in X$；并令 $B_{r,S} := B_{r,S}(0)$。若 $S = X$，为简便起见，记 $B_r(Z) := B_{r,X}(Z)$、 $B_r(x) := B_{r,X}(x)$，等等。

最后，对于集合 $\mathcal{S} \subset U$，将本质值属于 $\mathcal{S}$的输入集合记为 $\mathcal{U}_\mathcal{S}$：

$$\mathcal{U}_\mathcal{S} := \{u \in \mathcal{U} : u(t) \in \mathcal{S}, \text{ for a.e. } t \in \mathbb{R}_+\}. \tag{2.17}$$

我们先给出一个充分条件，以保证输入属于 $\mathcal{U}$ 的系统（2.12）的解的存在唯一性$= L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$.

定理 2.2.7 (皮卡-林德勒¨定理). 设假设 *2.2.1*, *2.2.2*, *2.2.6* 成立。定义 $h_0 := \lim_{t\to+0} h_t$, 其中 h_t 按 (2.10) 中的定义给出。

假设$(T(t))_{t\ge0}$ 是一个强连续半群，由 A 生成，并且对于某些 $M \ge 1$、 $\lambda > 0$ 满足以下估计

$$\|T(t)\| \le Me^{\lambda t}, \quad t \ge 0. \tag{2.18}$$

对于任意紧集 $Q \subset X$、任意 $r > 0$、任意有界集 $\mathcal{S} \subset U$ 和任意 $\delta > 0$，存在时间 $t_1 = t_1(Q, r, \mathcal{S}, \delta) > 0$，使得对于任意 $x_0 \in W$：对于某个$w \in Q$，$= B_r(w)$；并且对于任意 $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$，方程 *(2.12)* 在 $[0, t_1]$ 上存在唯一的温和解，且$\phi([0,t_1], x_0, u) \subset B_{Mr+h_0\|u\|_{L^\infty([0,t_1],U)}+\delta}(w)$。

证明。首先，我们证明当 Q 是 X 中的单点时，即对于某个 $\omega \in X$，$Q = \{w\}$，结论成立。任取满足 $W := B_r(w) \subset B_C$ 的 $C > 0$，并且 $\mathcal{U}_{\mathcal{S}} \subset B_{C,\, U}$。任取 $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$。再任取 $\delta > 0$，并考虑以下集合（它们依赖于参数 $t > 0$）：

$$Y_t := \big\{x \in C([0,t], X) : \sup_{s\in[0,t]} \|x(s) - w\|_X \le Mr + h_0\|u\|_{L^\infty([0,t],U)} + \delta\big\}, \quad (2.19)$$

赋予度量 $\rho_t(x,\ y) := \sup_{s\in[0,t]} \|x(s) - y(s)\|_X$。由于对于所有 $t > 0$，集合 Y_t 都是巴拿赫空间 $C([0,t],\ X)$ 的闭子集，因此空间 Y_t 是完备度量空间。

任取 $x_0 \in W$。我们将证明，当 t 足够小时，空间 Y_t 在算子 Φ_u 下不变。该算子对任意 $x \in Y_t$ 及所有 $\tau \in [0,t]$ 定义如下：

$$\Phi_u(x)(\tau) = T(\tau)x_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)B_2 f\big(x(s), u(s)\big)ds + \int_0^\tau T_{-1}(\tau - s)Bu(s)ds. \quad (2.20)$$

根据假设 2.2.1、2.2.2，函数 $\Phi_u(x)$ 对任意 $x \in Y_t$ 均连续 .

任取 $t > 0$，再任取 $x \in Y_t$。由于 $x_0 \in W = B_r(w)$，存在 $a \in B_r$ 使得 $x_0 = w + a$。

那么，对于任意 $\tau < t$，都有

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_u(x)(\tau) - w\|_X \\
&\quad \le \Big\|T(\tau)x_0 - w\Big\|_X + \Big\|\int_0^\tau T_{-1}(\tau - s)Bu(s)ds\Big\|_X \\
&\qquad\qquad + \Big\|\int_0^\tau T_{-1}(\tau - s)B_2 f(x(s), u(s))ds\Big\|_X \\
&\quad \le \|T(\tau)(w + a) - w\|_X + h_\tau\|u\|_{L^\infty([0,\tau],U)} \\
&\qquad\qquad + c_\tau\|f(x(\cdot), u(\cdot))\|_{L^\infty([0,\tau],V)} \\
&\quad \le \|T(\tau)w - w\|_X + \|T(\tau)a\|_X + h_\tau\|u\|_{L^\infty([0,\tau],U)} \\
&\qquad + c_\tau\|f(x(\cdot), u(\cdot)) - f(0, u(\cdot))\|_{L^\infty([0,\tau],V)} + c_\tau\|f(0, u(\cdot))\|_{L^\infty([0,\tau],V)}.
\end{aligned}$$

现在，对于所有 $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned}
\|x(s)\|_X &\le \|w\|_X + Mr + h_0\|u\|_{L^\infty([0,t],U)} + \delta \\
&\le M(\|w\|_X + r) + h_0 C + \delta \le (M + h_0)C + \delta =: K.
\end{aligned}$$

鉴于假设 2.2.6(iii)，有

$$\|f(0, u(s))\|_V \le \sigma(\|u(s)\|_U) + c, \qquad \text{for a.e. } s \in [0,t].$$

由于 $M \ge 1$，成立 $K > C$；而 f 在有界球上的利普希茨连续性保证存在 $L(K) > 0$，使得对所有 $\tau \in [0,t]$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_u(x)(\tau) - w\|_X &\le \|T(\tau)w - w\|_X + Me^{\lambda t}r + h_t\|u\|_{L^\infty([0,t],U)} \\
&\qquad + c_\tau\big(L(K)\|x\|_{L^\infty([0,t],X)} + \sigma(\|u\|_{L^\infty([0,t],U)}) + c\big) \\
&\le \|T(\tau)w - w\|_X + Me^{\lambda t}r + h_t\|u\|_{L^\infty([0,t],U)} \\
&\qquad + c_t\big(L(K)K + \sigma(C) + c\big).
\end{aligned}$$

由于 T 是强连续半群，且当 $t \to +0$ 时 $h_t \to h_0$，当 $t \to +0$ 时 $c_t \to 0$，由此估计可知，存在 t_1，使得

$$\|\Phi_u(x)(t) - w\|_X \le Mr + h_0\|u\|_{L^\infty([0,t_1],U)} + \delta, \quad \text{for all } t \in [0,t_1].$$

这意味着，对于所有 $t \in (0, t_1]$，Y_t 关于 Φ_u 不变，且 t_1 不依赖于 $x_0 \in W$ 的选取。

现在任取 $t > 0$、$\tau \in [0,t]$，以及任意的 x，$y \in Y_t$。那么有

$$\begin{aligned}\|\Phi_u(x)(\tau) - \Phi_u(y)(\tau)\|_X &\le \Big\| \int_0^\tau T(\tau - s)B_2\big(f(x(s),u(s)) - f(y(s),u(s))\big)ds\Big\|_X \\ &\le c_\tau \|f(x(\cdot),u(\cdot)) - f(y(\cdot),u(\cdot))\|_{L^\infty([0,\tau],V)} \\ &\le c_t L(K)\rho_t(x,y) \\ &\le \frac{1}{2}\rho_t(x,y),\end{aligned}$$

对于 $t \le t_2$，其中 $t_2 > 0$ 是一个足够小的实数，且不依赖于 $x_0 \in W$ 的选取。

根据 Banach不动点定理，在 $x(t) = \Phi_u(x)(t)$ 上存在唯一解，定义于 $[0,\min\{t_1,t_2\}]$，它是方程 (2.12) 的温和解。

一般紧 Q。到目前为止，我们已经证明，对于任意 $w \in Q$、任意 $r > 0$、任意有界集 $\mathcal{S} \subset U$以及任意 $\delta > 0$，存在一个时间 $t_1 = t_1(w, r, \mathcal{S}, \delta) > 0$ (我们总是取可能的极大值)，使得对于任意 $x_0 \in W := B_r(w)$，且对于任意 $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$，方程 (2.12) 在 $[0,t_1]$ 上存在唯一解，并且该解位于球 $B_{Mr+h_0\|u\|_{L^\infty([0,t_1],U)}+\delta}(w)$ 内。

只需证明 t_1 可以一致地选取而与 $w \in Q$无关，也就是说，$\inf_{w\in Q} t_1(w,r,\mathcal{S},\delta) > 0$。假设这不成立，即 $\inf_{w\in Q} t_1(w,r,\mathcal{S},\delta) = 0$。那么存在一个序列 $(w_k) \subset Q$，使得相应的时间 $\big(t_1(w_k, r,\mathcal{S},\delta)\big)_{k\in\mathbb{N}}$单调递减至零。由于 Q 是紧的，(w_k) 存在一个收敛子序列，并收敛到某个 $w^* \in Q$。然而，$t_1(w^*,r,\mathcal{S},\delta) > 0$，这很容易导出矛盾。 □

推论 2.2.8 (Picard-Lindel¨零类可容许情形下的定理 B 与拟压缩半群)。设假设 2.2.1、2.2.2、2.2.6 成立。另设 B 为零类可容许，且 T 为拟压缩强连续半群。也就是说，存在$\lambda > 0$ 使得

$$\|T(t)\| \le e^{\lambda t}, \quad t \ge 0.$$

对于任意有界球 $W = B_r(w) \subset X$、任意有界集 $\mathcal{S} \subset U$以及任意 $\delta > 0$，存在一个时间 $t_1 = t_1(W, \mathcal{S}, \delta) > 0$，使得对任意 $x_0 \in W$和任意 $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$，方程 (2.12) 在 $[0,t_1]$上存在唯一解，且该解位于球 $B_{r+\delta}(w)$中。

证明。该结论直接由定理2.2.7得出。 □

注 2.2.9. 若不假设拟压缩性，则推论 2.2.8 不成立。考虑特殊情形 $f \equiv 0$ 和 $B \equiv 0$。于是系统（2.12）是线性的，对于给定的 $x_0 \in X$，（2.12）的解全局存在，并且等于 $t \mapsto T(t)x_0$。现在取$w := 0$ 并任取 $r > 0$ 和 $t_1 > 0$。则

$$\sup_{\tau\in[0,t_1]} \sup_{\|x\|_X \le r} \|T(\tau)x\|_X = r \sup_{\tau\in[0,t_1]} \|T(\tau)\|.$$

由于 T 仅是强连续的，映射 $t \mapsto \|T(t)\|$ 在 $t = 0$处不一定连续，并且可能出现 $\lim_{t_1 \to 0} \sup_{\tau \in [0,t_1]} \|T(\tau)\| > 1$。

因此，一般而言，无法证明从任意$x_0 \in B_r(w)$出发的解会在足够小且关于 $x_0 \in B_r$ ({v6）一致的时间内始终留在 $B_{r+\delta}(w)$中。$\triangleleft$

下面的例子表明，定理2.2.7 一般而言并不成立，即使 W 是一个有界集（而不仅仅是在紧集上的有界球），即使对于由希尔伯特空间上的压缩半群控制的线性系统也是如此。

例 *2.2.10*。设 $X = \ell_2$，并考虑一个对角半群，其定义为 $T(t)x := (e^{-kt}x_k)_k$，对所有 $x = (x_k)_k \in X$ 以及所有 $t \geq 0$成立。该半群是强连续且压缩的。考虑一个有界闭集 $W := \{x \in \ell_2 : \|x\|_X = 1\}$。然而$\|T(t)e_k\|_X = e^{-kt}$，因此对于每个 $\delta > 0$ 以及每个时间 $t_1 > 0$，我们都可以找到 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\|T(t_1)e_k\|_X < 1 - \delta$，这意味着 $T(t_1)e_k \notin B_\delta(W)$。

同时，对于一致连续半群，也可以证明一个更强的 Picard-Lindel¨of-typ定理（这尤其涵盖了无限维常微分方程系统的情形，这类系统也称为“系综”），它完全推广了相应的常微分方程系统结果，见 [160, 章 1]。

定理 *2.2.11*（一致连续半群的 *Picard-Lindel¨of* 定理）。设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 成立，且 B 是零类 ∞-可容许的。进一步设 T是一致连续半群（不一定是拟压缩的）。对于任意有界集 $W \subset X$、任意有界集 $\mathcal{S} \subset U$以及任意 $\delta > 0$，存在一个时间 $\tau = \tau(W, \mathcal{S}, \delta) > 0$，使得对于任意 $x_0 \in W$和 $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$，方程 *(2.12)* 在 $[0, \tau]$上有唯一解，且该解属于 $B_\delta(W)$。

证明。任取 $C > 0$使得 $W \subset B_C$，并且 $\mathcal{U}_\mathcal{S} \subset B_{C,\,U}$。

Take 也任取 $\delta > 0$，并考虑以下集合（它们依赖于参数 $t > 0$ ）:

$$Y_t := \big\{x \in C([0,t], X) : \operatorname{dist}(x(t), W) \leq \delta \quad \forall t \in [0,t]\big\}, \tag{2.21}$$

赋予度量 $\rho_t(x,\ y) := \sup_{s \in [0,t]} \|x(s) - y(s)\|_X$。由于集合 Y_t是巴拿赫空间 $C([0,t],\ X)$ 的闭子集，因此对于所有 $t > 0$，Y_t 都是完备度量空间。

任取 $x_0 \in W$ 以及任意 $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$。我们将证明，当 t足够小时，空间 Y_t 在算子 Φ_u下保持不变；该算子对任意 $x \in Y_t$ 及所有 $\tau \in [0,t]$ 由（2.20）定义，下面再次回顾其定义：

$$\Phi_u(x)(\tau) = T(\tau)x_0 + \int_0^\tau T(\tau - s)B_2 f\big(x(s), u(s)\big)ds + \int_0^\tau T_{-1}(\tau - s)Bu(s)ds.$$

根据假设 2.2.1、2.2.2，函数 $\Phi_u(x)$ 连续。

任取 $t>0$，并选取任意 $x\in Y_t$。那么对于任意 $\tau<t$，有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\Phi_u(x)(\tau),W)&\le\|\Phi_u(x)(\tau)-x_0\|_X\\&\le\Big\|T(\tau)x_0-x_0\Big\|_X+\Big\|\int_0^\tau T_{-1}(\tau-s)Bu(s)ds\Big\|_X\\&\qquad+\Big\|\int_0^\tau T_{-1}(\tau-s)B_2f(x(s),u(s))ds\Big\|_X\\&\le\|T(\tau)-I\|_X\|x_0\|_X+h_\tau\|u\|_{L^\infty([0,\tau],U)}\\&\qquad+c_\tau\|f(x(\cdot),u(\cdot))\|_{L^\infty([0,\tau],V)}\\&\le C\|T(\tau)-I\|_X+h_\tau\|u\|_{L^\infty([0,\tau],U)}\\&\quad+c_\tau\|f(x(\cdot),u(\cdot))-f(0,u(\cdot))\|_{L^\infty([0,\tau],V)}+c_\tau\|f(0,u(\cdot))\|_{L^\infty([0,\tau],V)}.\end{aligned}$$

现在对所有 $s\in[0,t]$

$$\|x(s)\|_X\le C+\delta=:K.$$

根据假设2.2.6 (iii)，有

$$\|f(0,u(s))\|_V\le\sigma(\|u(s)\|_U)+c,\qquad\text{for a.e. } s\in[0,t].$$

现在，f 在有界球上的利普希茨连续性保证存在 $L(K)>0$，使得对所有 $\tau\in[0,t]$

$$\begin{aligned}\|\Phi_t(x)(\tau)-w\|_X&\le C\|T(\tau)-I\|_X+h_t\|u\|_{L^\infty([0,t],U)}\\&\quad+c_\tau\big(L(K)\|x\|_{L^\infty([0,t],X)}+\sigma(\|u\|_{L^\infty([0,t],U)})+c\big)\\&\le C\|T(\tau)-I\|_X+h_t\|u\|_{L^\infty([0,t],U)}\\&\quad+c_t\big(L(K)K+\sigma(C)+c\big).\end{aligned}$$

由于 T 是一致连续半群，当 $t\to+0$时 $h_t\to0$，且当 $t\to+0$时 $c_t\to0$，由此估计可知，存在仅取决于 C 和 δ的 $t_1>0$，使得

$$\operatorname{dist}(\Phi_u(x)(t),W)\le\delta,\qquad\text{for all } t\in[0,t_1].$$

这意味着，Y_t 对于所有 Φ_u，相对于 $t\in(0,t_1]$，并且 t_1 不依赖于 $x_0\in W$的选择。证明的其余部分与定理 2.2.7的证明类似。

□

注 2.2.12。在上述定理中，解的存在时间相对于范数有界于 C的初值和输入是一致的。一般而言，如果不限制输入的范数，就不能将解的存在时间选为一致的。例如，考虑系统

$$\dot x(t)=u(t)x^2(t).$$

满足 $x(0)=1$ 且 $u(t)\equiv k$ 的解的最大存在时间随着$k\to\infty$趋于零。◁

2.2.3 适定性

接下来，我们将研究解的延拓及其渐近性质。

定义 2.2.13。 设 $x_1(\cdot)$ 和 $x_2(\cdot)$ 是方程 (2.12的温和解，分别定义在区间$[0, t_1)$ 和 $[0, t_2)$ 上， t_1, $t_2 > 0$。如果 x_2 是 的 x_1，且 $t_2 > t_1$，并且$x_2(t) = x_1(t)$ 对所有 $t \in [0, t_1)$ 均成立，则称◁

引理 2.2.14。 设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 成立。任取 $x_0 \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$。方程 (2.12)的任意两个解在其共同存在域上重合。

证明。 设 ϕ_1, ϕ_2 是方程 (2.12) 对应于 $x_0 \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$的两个温和解，分别定义在 $[0, t_1)$ 和 $[0, t_2)$ 上。假设 $t_1 \leq t_2$ (另一种情况的证明类似)。

由局部存在唯一性定理，存在某个正的 $t_3 \leq t_1$ （我们取 t_3 为此类时间中的极大值），使得 ϕ_1 和 ϕ_2 在 $[0, t_3)$ 上重合。若 $t_3 = t_1$，则结论得证。若 $t_3 < t_1$，则由连续性， ϕ_1（t_3）$= \phi_2$（t_3）。现在， ψ_1： $t \mapsto \phi_1$（$t_3 + t$）和 ψ_2： $t \mapsto \phi_2$（$t_3 + t$）是该问题的两个温和解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 f(x(t), u(t + t_3)) + Bu(t_3 + \cdot), \quad x(0) = \phi_1(t_3),$$

由局部存在唯一性， ϕ_1 和 ϕ_2 在某个 $\varepsilon > 0$ 的 $[0, t_3 + \varepsilon)$ 上重合，这与 t_3 的极大性矛盾。因此， ϕ_1 和 ϕ_2 在 $[0, t_1)$ 上重合。 □

定义 2.2.15. 解 $x(\cdot)$ of (2.12) 称为

(i) 极大的 若不存在能够延拓 $x(\cdot)$ 的解，满足 (2.12)，

(ii) 若 $x(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上有定义，则称其为全局的 。

◁

系统 (2.12) 的一个核心性质是

定义 2.2.16。 如果对于每个初值$x_0 \in X$ 以及每个外部输入 $u \in \mathcal{U}$，都存在唯一的极大解，我们记为 $\phi(\cdot, x_0, u) : [0, t_m(x_0, u)) \to X$，其中 $0 < t_m(x_0, u) \leq \infty$，则称系统 (2.12) 是适定的 。

我们将 $t_m(x_0, u)$ 称为与 (x_0, u) 对应的解的最大存在时间 。 ◁

映射 ϕ，定义于定义 2.2.16中，用于描述系统 (2.12) 的演化，称为 流映射，或简称为流。流的定义域 ϕ 为

$$D_\phi := \cup_{x_0 \in X,\ u \in \mathcal{U}} [0, t_m(x_0, u)) \times \{(x_0, u)\}.$$

我们始终讨论极大解。

我们继续进行：

定理 2.2.17 (适定性)。设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 成立。那么(2.12)是适定的。

证明。 任取 $x_0 \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$。设 $\mathcal{S}$ 为所有解的集合 ξ，它们是 2.12）在相应定义域上定义的 $I_\xi = [0, t_\xi)$ 。

定义 $I := \cup_{\xi\in\mathcal{S}} I_\xi = [0, t^*)$ 对某个 $t^* > 0$，其可以是有限的，也可以是无限的。对于任意 $t \in I$，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得 $t \in I_\xi$。定义 $\xi_{\max}(t) := \xi(t)$。由引理2.2.14可知，映射 $\xi_{\max}$ 不依赖于上述 ξ 的选取，因此在 I上定义良好。

此外，对于每个 $t \in (0, t^*)$，存在 $\xi \in \mathcal{S}$，使得 $\xi_{\max} = \xi$ 在 $[0, t + \varepsilon)$ 上 $\subset I$，对于某个 $\varepsilon > 0$，因此 $\phi(\cdot,\ x_0,\ u) := \xi_{\max}$ 是方程 (2.12) 的一个解，对应于x_0，u。最后，根据构造可知，这是一个极大解。 □

现在我们证明，适定系统 (2.12) 是一般控制系统的一个特例，一般控制系统在定义 1.1.1中引入。

定理 2.2.18。 设 (2.12) 是适定的。那么三元组 $(X, \mathcal{U}, \phi)$，其中 ϕ 是 (2.12)的流映射，构成了定义 *1.1.1*意义下的控制系统。

证明。 根据构造，控制系统定义中的所有公理均已满足。特别地，根据温和解的定义，连续性成立。我们只需验证余循环性质。

任取初始条件 $x \in X$、输入 $u \in \mathcal{U}$，以及任意满足$[0, t + \tau] \times \{(x, u)\} \subset D_\phi$的 $t, \tau \geq 0$。定义输入 v为：$v(r) = u(r + \tau)$，$r \geq 0$。

由（2.14），我们有：

$$\phi(t+\tau, x, u) = T(t+\tau)x + \int_0^{t+\tau} T_{-1}(t+\tau-s)B_2 f(\phi(s,x,u), u(s))ds + \int_0^{t+\tau} T_{-1}(t+\tau-s)Bu(s)ds.$$

由于 $T_{-1}(t)$ 是一个有界算子，因此可以将其移出博赫纳积分：

$$\begin{aligned}\phi(t+\tau, x, u) &= T(t)T(\tau)x + T_{-1}(t)\int_0^{\tau} T_{-1}(\tau-s)B_2 f(\phi(s,x,u), u(s))ds \\ &+ T_{-1}(t)\int_0^{\tau} T_{-1}(\tau-s)Bu(s)ds \\ &+ \int_{\tau}^{t+\tau} T_{-1}(t+\tau-s)B_2 f(\phi(s,x,u), u(s))ds + \int_{\tau}^{t+\tau} T_{-1}(t+\tau-s)Bu(s)ds.\end{aligned}$$

由于 B 是可容许的，我们有 $\int_0^\tau T_{-1}(\tau - s)Bu(s)ds \in X$。由于 $T_{-1}(\cdot)$ 与$T(\cdot)$ 在 X 上一致，我们可推得

$$T_{-1}(t)\int_0^{\tau} T_{-1}(\tau-s)Bu(s)ds = T(t)\int_0^{\tau} T_{-1}(\tau-s)Bu(s)ds.$$

类似的论证也适用于上述求和的第二项。最后，

$$\begin{aligned}\phi(t+\tau, x, u) &= T(t)\phi(\tau, x, u) + \int_0^t T_{-1}(t-s)B_2 f(\phi(s+\tau, x, v), v(s))ds \\ &\quad + \int_0^t T_{-1}(t-s)Bv(s)ds \\ &= \phi(t, \phi(\tau, x, u), v),\end{aligned}$$

且满足余循环性质。 □

下面讨论该流的一般渐近性质。

命题 2.2.19。 设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 成立。任取 $x \in X$ 以及$u \in \mathcal{U}$。若 $t_m(x,u)$ 有限，则 $\|\phi(t,x,u)\|_X \to \infty$ 当 $t \to t_m(x,u) - 0$。

证明。任取 $x \in X$ 以及 $u \in \mathcal{U}$，并考虑相应的极大解$\phi(\cdot,x,u)$，其定义于 $[0,t_m(x,u))$. 假设 $t_m(x,u) < +\infty$，但同时 $\lim_{t\to t_m(x,u)-0}\|\phi(t,x,u)\|_X < \infty$。那么存在一个序列 (t_k)，使得 $t_k \to t_m(x,u)$ 当 $k \to \infty$ 时，并且 $\lim_{k\to\infty}\|\phi(t_k,x,u)\|_X < \infty$。那么还有 $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|\phi(t_k,x,u)\|_X =: C < \infty$。

令 $\tau(C) > 0$ 为从球 B_C出发、输入幅值不超过 $\|u\|$ 的解的一致存在时间。根据定理 2.2.7，该时间存在且为正。于是，根据定理 2.2.7，从 $\phi(t_k,x,u)$ 出发、对应于输入 $u(\cdot + t_k)$ 的方程 (2.12) 的解在 $[0,\tau(C)]$ 上存在且唯一；由余循环性质可知， $\phi(\cdot,x,u)$ 可延拓至 $[0,t_k+\tau(C))$。由于 $t_k \to t_m(x,u)$ as $k \to \infty$，这与对应于 (x,u) 的解的极大性矛盾。

因此 $\lim_{t\to t_m(x,u)-0}\|\phi(t,x,u)\|_X = \infty$，这就证明了所述结论。 □

作为命题 2.2.19的推论，我们得到，方程 (2.12) 的任意一致有界极大解都是全局解。

推论 2.2.20 (BIC 性质)。 假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 成立。系统(2.12)满足 *BIC* 性质。

2.2.4 正向完备性与可达集有界性

局部利普希茨连续性保证局部解的存在。为确保解的整体存在性，需要对非线性项施加更强的要求。

命题 2.2.21。 假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 成立。进一步设 f 为一致全局利普希茨。则 (2.12) 正向完备，且具有 *BRS* 性质。

证明。 根据定理 2.2.7，对于任意 $x_0 \in X$ 以及任意 $u \in \mathcal{U}$，方程 (2.12) 存在一个温和解，其最大存在时间为 $t_m(x_0,u)$，该时间可以是有限的，也可以是无限的。设$t_m(x_0,u)$ 有限。

令 $L > 0$为 f的一致全局利普希茨常数。由于 $\|T(t)\| \le Me^{\lambda t}$对于某个$M \ge 1$, $\lambda \ge 0$ 以及所有 $t \ge 0$，对于任意 $t < t_m(x_0,u)$，根据公式（2.14）可得以下估计

$$
\begin{aligned}
\|\phi(t,x_0,u)\|_X &\le \|T(t)\|\|x_0\|_X + \Big\|\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\Big\|_X \\
&\quad + \Big\|\int_0^t T(t-s)B_2 f(\phi(s,x_0,u),u(s))ds\Big\|_X \\
&\le Me^{\lambda t}\|x_0\|_X + h_t\|u\|_{\mathcal{U}} + c_t\|f(\phi(\cdot,x_0,u),u(\cdot))\|_{L^\infty([0,t],V)} \\
&\le Me^{\lambda t}\|x_0\|_X + h_t\|u\|_{\mathcal{U}} + c_t\|f(\phi(\cdot,x_0,u),u(\cdot)) - f(0,u(\cdot))\|_{L^\infty([0,t],V)} \\
&\quad + c_t\|f(0,u(\cdot))\|_{L^\infty([0,t],V)} \\
&\le Me^{\lambda t}\|x_0\|_X + h_t\|u\|_{\mathcal{U}} + c_tL\|\phi(\cdot,x_0,u)\|_{L^\infty([0,t],X)} + c_t(\sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}) + c).
\end{aligned}
$$

当 $c_t \to 0$ 趋于 $t \to +0$ 时，存在某个 $t_1 \in (0, t_m(x_0, u))$ 使得 $c_{t_1} L \le \frac{1}{2}$。于是有

$$\sup_{t\in[0,t_1]} \|\phi(t,x_0,u)\|_X \le 2\Big(Me^{\lambda t_1}\|x_0\|_X + h_{t_1}\|u\|_{\mathcal{U}} + c_{t_1}(\sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}) + c)\Big). \tag{2.22}$$

注意， t_1 不依赖于 x_0 和 u。因此，利用余循环性质，并用$\phi(t_1, x_0, u)$代替 x_0，我们可得 $\phi(\cdot, x_0, u)$在 $2t_1, 3t_1$上有一致界，依此类推。因此， $\phi(\cdot, x_0, u)$在 $[0, t_m(x_0, u))$上是一致有界的，故可根据 BIC 性质延拓到更大的区间，这与 $t_m(x_0, u)$的定义矛盾。因此， Σ 是正向完备的，并且将估计 (2.22) 如上所述迭代到更大的区间，可得 BRS 性质。

□

2.2.5 流映射的正则性

我们先从 一个基本结果开始，它描述了两条轨道之间的指数偏差 s.

定理 *2.2.22*。设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6*成立。取 $M \ge 1$, $\lambda \ge 0$ ，使得对所有 $t \ge 0$, $\|T(t)\| \le Me^{\lambda t}$成立。任取 $x_1, x_2 \in X$和 $u \in \mathcal{U}$，并设 $\phi(\cdot, x_1, u)$与$\phi(\cdot, x_2, u)$定义在某个公共区间 $[0, \tau]$上。

那么存在 $R = R(x_1, x_2, \tau, u) > 0$，使得

$$\|\phi(t,x_1,u) - \phi(t,x_2,u)\|_X \le 2M\|x_1 - x_2\|_X e^{Rt}, \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.23}$$

证明。 任取 $x_1, x_2 \in X$，任取 $u \in \mathcal{U}$，并令 $\phi_i(t) := \phi(t, x_i, u)$, $i = 1, 2$ 为方程 (2.12) 的相应（唯一）极大解（由定理 2.2.17保证），定义在 $[0, \tau]$上，其中 $\tau > 0$。

Set

$$K := \max\Big\{ \sup_{0\le t\le\tau} \|\phi_1(t)\|_X, \sup_{0\le t\le\tau} \|\phi_2(t)\|_X, \|u\|_{\mathcal{U}}\Big\} < \infty,$$

其中 K 是有限的，这是由轨迹的连续性所致。

由于 （2.14），并利用 f 的利普希茨连续性（见（2.15））， 对于任意 $t \in [0, \tau\ ]$:

$$\begin{aligned}
\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X &\le \|T(t)\|\|x_1 - x_2\|_X \\
&\quad + \Big\| \int_0^t T(t-s)B_2\Big(f(\phi_1(s),u(s)) - f(\phi_2(s),u(s))\Big)ds\Big\|_X \\
&\le Me^{\lambda t}\|x_1 - x_2\|_X + c_t\|f(\phi_1(\cdot),u) - f(\phi_2(\cdot),u)\|_{L^\infty([0,t],X)} \\
&\le Me^{\lambda t}\|x_1 - x_2\|_X + c_t L(K)\|\phi_1(\cdot) - \phi_2(\cdot)\|_{L^\infty([0,t],X)}.
\end{aligned}$$

当 $c_t \to 0$趋近于 $t \to +0$时，存在某个 $t_1 \in (0, \tau)$，使得 $c_{t_1} L(K) \le \frac{1}{2}$。注意， t_1 仅取决于 τ （正如 K 一样）。

然后，对 $[0, t]$ 取前一个表达式的上确界，其中 $t < t_1$，我们得到

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X \le 2Me^{\lambda t}\|x_1 - x_2\|_X, \quad t \in [0, t_1].$$

取 $k \in \mathbb{N}$，使得 $kt_1 < \tau$ 且 $(k+1)t_1 > \tau$。然后，利用余循环性质，对于任意 $l \in \mathbb{N}$、$l \le k$ 以及所有满足 $lt_1 + t < \tau$ 的 $t \in [0, t_1]$，我们有

$$\begin{aligned}\|\phi_1(lt_1+t) - \phi_2(lt_1+t)\|_X &\le (2Me^{\lambda t_1})^l 2Me^{\lambda t}\|x_1 - x_2\|_X \\ &= 2Me^{l\ln(2M)+\lambda l t_1+\lambda t}\|x_1 - x_2\|_X \\ &= 2Me^{lRt_1+\lambda t}\|x_1 - x_2\|_X \\ &= 2Me^{R(lt_1+t)}\|x_1 - x_2\|_X,\end{aligned}$$

其中 $R > \lambda$。最后，

$$\|\phi_1(s) - \phi_2(s)\|_X \le 2Me^{Rs}\|x_1 - x_2\|_X, \quad s \in [0, \tau).$$

□

定义 2.2.23。 正向完备控制系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$的流（对于一致有界输入）在紧区间上称为利普希茨连续，如果对于任意 $\tau > 0$和任意 $C > 0$，存在 $L > 0$，使得对于任意 $x_1, x_2 \in B_C$，以及所有 $u \in B_{C,\mathcal{U}}$，都有

$$\|\phi(t, x_1, u) - \phi(t, x_2, u)\|_X \le L\|x_1 - x_2\|_X, \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.24}$$

◁

定理 2.2.22 估计了两条轨迹之间的偏差。为了得到更强的结果，即证明流映射 ϕ 的利普希茨连续性，我们还假设（2.12）具有 BRS 性质。

定理 2.2.24。 设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6*成立。进一步设 (2.12)具有 *BRS* 性质。那么 (2.12) 具有流，且该流对于一致有界输入在紧区间上是利普希茨连续的。

证明。 任取 $C > 0$并任取 $x_1, x_2 \in B_C$，以及任意 $u \in \mathcal{U}$满足 $\|u\|_{\mathcal{U}} \le C$。令 $\phi_i(\cdot) := \phi(\cdot, x_i, u)$， $i = 1,2$ 为方程 (2.12) 的相应极大解。由于假设 (2.12) 是前向完备的，这些解都是全局的。

由于 (2.12) 是有界可达集，对任意 $\tau > 0$，以下量均有限：

$$K := \sup_{t\in[0,\tau],\ x\in B_C,\ u\in B_{C,\mathcal{U}}} \|\phi(t, x, u)\|_X < \infty.$$

按照 (2.2.22) 的证明思路，我们即可得到该结论。 □

为了获得流映射关于状态和输入的连续性（见定义 1.4.1），这对应用稠密性论证至关重要，我们对非线性项 f施加额外条件。

定理 2.2.25。 设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 成立。进一步，设存在$q \in \mathcal{K}_\infty$，使得对于所有 $C > 0$，均存在 $L(C) > 0$：对于所有 x_1、$x_2 \in B_C$ 以及所有 v_1、$v_2 \in B_{C,\,U}$均有

$$\|f(x_1, v_1) - f(x_2, v_2)\|_V \le L(C)\big(\|x_1 - x_2\|_X + q(\|v_1 - v_2\|_U)\big). \tag{2.25}$$

此外，设 (2.12) 具有有界可达集性质，且 B_2 是一个有界算子。那么 (2.12)关于初始状态和输入连续依赖。

证明。 任取 $C > 0$ 并选取任意 $x_1,\ x_2 \in B_C$ 以及任意 $u_1,\ u_2 \in B_{C,\ U},\ i = \overline{1,\ 2}$。令 $\phi_i(\cdot) = \phi(\cdot,\ x_i,\ u_i),\ i = 1,\ 2$ 为相应的全局解。

由于（2.14），我们有：

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X \le \|T(t)\|\|x_1 - x_2\|_X + h_t\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \|B_2\| \int_0^t \|T(t-r)\|\big\|f(\phi_1(r), u_1(r)) - f(\phi_2(r), u_2(r))\big\|_V dr.$$

I鉴于系统（2.12）的可达集有界性，我们有

$$K := \sup_{\|z\|_X \le C,\ \|u\|_{\mathcal{U}} \le C,\ t\in[0,\tau]} \|\phi(t, z, u)\|_X < \infty.$$

由于 $\|T(t)\| \le Me^{\lambda t}$ 对于某个 $M,\ \lambda \ge 0$ 以及所有 $t \ge 0$，并且由性质（2.25）及 $L := L(K)$（注意 $K \ge C$），我们可以继续上述估计，得到

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X \le Me^{\lambda t}\|x_1 - x_2\|_X + h_t\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \|B_2\| \int_0^t Me^{\lambda(t-r)}L(K)\Big(\|\phi_1(r) - \phi_2(r)\|_X + q\big(\|u_1(r) - u_2(r)\|_U\big)\Big)dr.$$

现在定义 $z_i(r) := e^{-\lambda r}\phi_i(r),\ i = 1,\ 2,\ r \ge 0$。于是

$$\begin{aligned}
\|z_1(t) - z_2(t)\|_X &\le M\|x_1 - x_2\|_X + h_t\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \|B_2\|ML(K)\int_0^t \|z_1(r) - z_2(r)\|_X dr \\
&\quad + \|B_2\|ML(K)\int_0^t e^{-\lambda r}q\big(\|u_1(r) - u_2(r)\|_U\big)dr \\
&\le M\|x_1 - x_2\|_X + h_t\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \|B_2\|ML(K)\int_0^t \|z_1(r) - z_2(r)\|_X dr \\
&\quad + \|B_2\|ML(K)\int_0^t e^{-\lambda r}dr\, q\big(\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}}\big) \\
&\le M\|x_1 - x_2\|_X + h_t\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \|B_2\|ML(K)\int_0^t \|z_1(r) - z_2(r)\|_X dr \\
&\quad + \frac{\|B_2\|ML(K)}{\lambda}q\big(\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}}\big).
\end{aligned}$$

根据格朗沃尔不等式，我们得到

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_X \le \Big(M\|x_1 - x_2\|_X + h_t\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \frac{\|B_2\|ML(K)}{\lambda}q\big(\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}}\big)\Big)e^{\|B_2\|ML(K)t}$$

或者用原变量表示

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_X \le \Big(M\|x_1 - x_2\|_X + h_t\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \frac{\|B_2\|ML(K)}{\lambda}q\big(\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}}\big)\Big)e^{(\|B_2\|ML(K)+\lambda)t}.$$

这意味着 (2.12) 关于输入和初始状态连续。 □

2.2.6 平凡平衡点处的连续性

不失一般性，我们将分析限制在形式为 $(0,0) \in X \times \mathcal{U}$ 的不动点上。

为了描述平衡点附近解的行为，以下概念十分重要：

定义 2.2.26。考虑一个系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$，其平衡点为 $0 \in X$。如果对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及任意 $h > 0$，都存在一个 $\delta = \delta(\varepsilon, h) > 0$，使得 $[0,h] \times B_\delta \times B_{\delta,\mathcal{U}} \subset D_\phi$，并且

$$t \in [0,h],\ \|x\|_X \le \delta,\ \|u\|_{\mathcal{U}} \le \delta \ \Rightarrow\ \|\phi(t,x,u)\|_X \le \varepsilon. \tag{2.26}$$

在这种情况下，我们还称 Σ 具有*CEP* 性质。 ◁

CEP 性质是李雅普诺夫稳定性的“局部版本”，尤其对于 ISS 叠加定理 [170] 以及非强制ISS李雅普诺夫理论的应用 [97]而言十分重要。

引理 2.2.27（（2.12）的平衡点处连续性）。设假设 *2.2.1*、*2.2.2*、*2.2.6* 均成立，并设 $f(0,0) = 0$。那么 ϕ 在平衡点处连续。

证明。考虑以下辅助系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2\tilde{f}(x(t),u(t)) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{2.27a}$$
$$x(0) = x_0, \tag{2.27b}$$

其中

$$\tilde{f}(x,u) := f\big(\mathrm{sat}(x), \mathrm{sat}_2(u)\big), \quad x \in X,\ u \in U,$$

并且饱和函数分别针对 z 中的向量和 U 中的向量定义为

$$\mathrm{sat}(z) := \begin{cases} z, & \|z\|_X \le 1, \\ \frac{z}{\|z\|_X}, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \mathrm{sat}_2(z) := \begin{cases} z, & \|z\|_U \le 1, \\ \frac{z}{\|z\|_U}, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

~由于 f 满足假设 2.2.6，可以证明 f 是一致全局利普希茨连续的。因此，根据命题2.27，系统正向完备且具有有界可达集性质2.2.21。

~ ~ ~将系统（2.27）的流记为 $\phi = \phi(t,x,u)$。由于 $f(x,u) = f(x,u)$ 对 $\|x\|_X \le 1$以及 $\|u\|_U \le 1$成立，也有

$$\phi(t,x,u) = \tilde{\phi}(t,x,u),$$

前提是 $\|u\|_{\mathcal{U}} \le 1$, $\phi(\cdot,x,u)$ 在 $[0,t]$ 上存在，且对所有 $s \in [0,t]$，$\|\phi(s,x,u)\|_X \le 1$。

任取 $\varepsilon \in (0,1)$、$\tau \ge 0$、$\delta \in (0,\varepsilon)$，并任取 $x \in B_\delta$ 以及任意 $u \in B_{\delta,\mathcal{U}}$。则有

$$\|\tilde{\phi}(t,x,u)\|_X \le \|\tilde{\phi}(t,x,u) - \tilde{\phi}(t,0,u)\|_X + \|\tilde{\phi}(t,0,u)\|_X.$$

由于（2.27）具有有界可达集性质，根据定理2.2.24，（2.27）的流在紧时间区间上是利普希茨连续的。因此，存在一个 $L(\tau,\delta) > 0$ 使得对于 $t \in [0,\tau]$

$$\|\tilde{\phi}(t,x,u) - \tilde{\phi}(t,0,u)\|_X \le L(\tau,\delta)\|x\|_X \le L(\tau,\delta)\delta. \tag{2.28}$$

~我们来估计 $\|\tilde{\phi}(t,0,u)\|_X$。我们有：

$$\begin{aligned}\|\tilde{\phi}(t,0,u)\|_X &\le \Big\|\int_0^t T(t-s)B_2\tilde{f}\big(\tilde{\phi}(s,0,u),u(s)\big)ds\Big\|_X + \Big\|\int_0^t T(t-s)Bu(s)ds\Big\|_X\\ &\le c_t \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,t]}\big\|\tilde{f}\big(\tilde{\phi}(s,0,u),u(s)\big)\big\|_X + h_t\|u\|_{L^\infty([0,t],U)}\\ &\le c_t \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,t]}\big\|\tilde{f}\big(\tilde{\phi}(s,0,u),u(s)\big)-\tilde{f}\big(0,u(s)\big)\big\|_X + c_t \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,t]}\big\|\tilde{f}\big(0,u(s)\big)\big\|_X\\ &\qquad + h_t\|u\|_{L^\infty([0,t],U)}.\end{aligned}$$

~由于 $f(0,\cdot)$ 连续，对于任意 $\varepsilon_2>0$，存在 $\delta_2<\delta$，使得 $u(s)\in B_{\delta_2}$ 蕴含 ~ ~ ~ $\|f(0,u(s))-f(0,0)\|_X\le\varepsilon_2$。由于 $f(0,0)=0$，对于上述 u，我们有 $\|f(0,u(s))\|_X\le\varepsilon_2$。

A$\tilde{f}$是一致全局利普希茨的，因此存在 $L>0$，使得对于满足$\|u\|_{\mathcal{U}}\le\delta_2$ 的输入，我们有

$$\|\tilde{\phi}(t,0,u)\|_X \le c_t L \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,t]}\big\|\tilde{\phi}(s,0,u)\big\|_X + c_t\varepsilon_2 + h_t\delta_2.$$

由于 $c_t\to 0$ 对于 $t\to+0$，存在 $t_1>0$，使得 $c_{t_1}L\le\frac{1}{2}$。

于是我们有

$$\|\tilde{\phi}(t,0,u)\|_X \le 2c_{t_1}\varepsilon_2 + 2h_{t_1}\delta_2,\quad t\le t_1. \tag{2.29}$$

结合（2.28）与（2.29），可知只要 $\|x\|_X\le\delta_2$ 且 $\|u\|_{\mathcal{U}}\le\delta_2$，就有

$$\|\tilde{\phi}(t,x,u)\|_X \le L(\tau,\delta_2)\delta_2 + 2c_{t_1}\varepsilon_2 + 2h_{t_1}\delta_2,\quad t\le t_1.$$

现在，对于任意的 $\varepsilon<1$，我们都可以找到 $\delta_2<\varepsilon$，使得

$$\|\tilde{\phi}(t,x,u)\|_X\le\varepsilon,\quad t\le t_1,\quad \|x\|_X\le\delta_2,\quad \|u\|_{\mathcal{U}}\le\delta_2.$$

~由于 $\phi(t,x,u)=\phi(t,x,u)$，只要 $\|\phi(t,x,u)\|_X<1$，我们便得到

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon,\quad t\le t_1,\quad \|x\|_X\le\delta_2,\quad \|u\|_{\mathcal{U}}\le\delta_2.$$

注意，t_1 仅取决于 L，而不取决于 δ_2。因此，可以找到 $\delta_3<\delta_2$，使得

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le\delta_2,\quad t\le t_1,\ \|x\|_X\le\delta_3,\ \|u\|_{\mathcal{U}}\le\delta_3.$$

根据余循环性质，我们得到

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon,\quad t\le 2t_1,\ \|x\|_X\le\delta_3,\ \|u\|_{\mathcal{U}}\le\delta_3.$$

重复这一过程，我们得到存在某个 $\omega>0$，使得

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon,\quad t\in[0,\tau],\ \|x\|_X\le\omega,\ \|u\|_{\mathcal{U}}\le\omega.$$

这表明 CEP 性质成立。 □

2.3 边界控制系统

由偏微分方程控制的控制系统，其定义由描述空间域内部动力学的偏微分方程以及描述系统在区域边界处动力学的边界条件给出。乍看之下，这类系统与第2.2节所研究的巴拿赫空间中的演化方程截然不同。这促使人们发展出抽象边界控制系统理论，使得能够以半群理论的语言更直接地解释偏微分方程。

2.3.1 线性边界控制系统

设 X 和 U 为巴拿赫空间。考虑如下系统

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.30a}$$

$$\hat{R}x(t) = u(t), \tag{2.30b}$$

˄˄ 其中，形式系统算子 $A\colon D(A) \subset X \to X$ 是一个线性算子，控制 ˄˄ 函数 u 的取值属于 U，且边界算子 $R\colon D(R) \subset X \to U$ 是线性的 ˄˄ 并满足 $D(A) \subset D(R)$。

方程（2.30）与此前研究的经典线性无限维系统看起来不同：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \tag{2.31}$$

其中，A 是强连续半群的生成元，而 B 则是有界输入算子或可容许输入算子。

为了将我们为线性系统（2.30）建立的理论应用于系统（2.31），我们将把（2.30）变换为（2.31）的形式。这只有在满足一些附加假设的条件下才能实现。

定义 2.3.1. 如果满足以下条件，则称系统（2.30）为线性边界控制系统（线性边界控制系统）：

˄˄ (i) 算子 $A\colon D(A) \to X$，其中 $D(A) = D(A) \cap \mathrm{Ker}\,(R)$，定义为

$$Ax = \hat{A}x \qquad \text{for} \quad x \in D(A) \tag{2.32}$$

是 X 上 C_0-半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ 的无穷小生成元。

˄ (ii) 存在一个算子 $R \in \mathcal{L}(U, X)$，使得对于所有 $u \in U$，都有 $Ru \in D(A)$，˄ $AR \in \mathcal{L}(U, X)$，且

$$\hat{R}Ru = u, \qquad u \in U. \tag{2.33}$$

本定义中的算子 R 有时称为提升算子。请注意，R 并非由第 (ii) 项中的性质唯一确定。
◁

定义 2.3.1 的第 (i) 项表明，对于 $u \equiv 0$，方程 (2.30) 是适定的。特别地，由于 A 是某个强连续半群 $T(\cdot)$ 的生成元，对于任意 $x \in D(A)$，均有 $T(t)x \in D(A)$，因此 $T(t)x \in \mathrm{Ker}\,(R)$，对所有 $t \geq 0$均成立，这意味着 (2.30b) 得以满足。

˄ 定义的第 (ii) 项特别意味着算子 R 的值域U，因此输入的取值不受限制。

2.3.2 半线性边界控制系统

^ ^ ^ 设 (A, R) 为一个线性边界控制系统。我们将 $D(A) \subset X$ 视为配备图范数的线性空间

$$\|\cdot\|_{D(\hat{A})} := \|\cdot\|_X + \left\|\hat{A}\cdot\right\|_X.$$

受.....启发 [201], ，我们考虑以下这类半线性边界控制系统。

^ ^**定义 2.3.2**。考虑一个线性边界控制系统 (A, R)。考虑以下系统

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + f(x(t), w(t)),\ t > 0, \tag{2.34a}$$
$$\hat{R}x(t) = u(t),\ t > 0, \tag{2.34b}$$
$$x(0) = x_0, \tag{2.34c}$$

其中非线性项为 $f\colon X \times W \to X$， W 是一个巴拿赫空间。

我们将系统（2.34）称为半线性边界控制系统（半线性边界控制系统）。 ◁

按照 [201], ，我们定义半线性边界控制系统（2.34）的经典解。

^**定义 2.3.3**。设 $x_0 \in D(A)$、 $\tau > 0$ 和 $u \in C([0, \tau],\ U)$。一个函数

$$x \in C([0, \tau], D(\hat{A})) \cap C^1([0, \tau], X)$$

称为经典解，它是半线性边界控制系统（2.34）在 $[0, \tau]$ 上的解，当且仅当 $x\ (t) \in X$ 对所有 $t > 0$都成立，并且方程（2.34）在 $t \in (0,\ \tau]$上逐点满足。

函数 $x\colon [0, \infty) \to X$ 称为（全局）经典解，它是半线性边界控制系统（2.34）的解，当 $x|_{[0,\tau]}$ 在 $[0, \tau]$ 上对每个 $\tau > 0$都是经典解。

若 $x \in C\ ([0, \tau],\ D(\hat{A}) \cap C^1((0,\ \tau],\ X)$ 且 $x\ (t) \in X$对所有 $t > 0$都成立，并且方程（2.34）在 $t \in (0,\ \tau]$上逐点满足，那么我们称 x 是在以下区间上的经典解：$(0,\ \tau]$。◁

回顾以下结果（见 [102, 推论 10.1。4]）：

命题 2.3.4。设 T 是巴拿赫空间 X 上的强连续半群，其无穷小生成元为 A。再设 $f \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$。那么，对所有 $t \geq 0$，均有 $\int_0^t T(t-r)f(r)dr \in D(A)$，并且满足以下条件：

$$A\int_0^t T(t-r)f(r)dr = \int_0^t T(t-r)\dot{f}(r)dr + T(t)f(0) - f(t). \tag{2.35}$$

下一个定理给出了输入足够光滑时（2.34） 的（唯一）解的表示。

定理 2.3.5. 考虑满足 $f \in C(X \times W, X)$ 的边界控制系统 (2.30)。设 $u \in C^2([0, \tau], U)$、 $w \in C([0, \tau], W)$ 对某个 $\tau > 0$ 成立，并设 $x_0 \in X$ 使得 $x_0 - Ru(0) \in D(A)$。假设半线性边界控制系统 $\phi(\cdot, x_0, u)$ 的经典解

在 $[0,\tau]$ 上存在。那么它可以表示为

$$\begin{aligned}\phi(t,x_0,u) &= T(t)\big(x_0 - Ru(0)\big)\\ &\quad + \int_0^t T(t-r)\Big(f(x(r),w(r)) + \hat{A}Ru(r) - R\dot{u}(r)\Big)dr + Ru(t) \qquad (2.36a)\\ &= T(t)x_0 + \int_0^t T(t-r)\Big(f(x(r),w(r)) + \hat{A}Ru(r)\Big)dr\\ &\quad - A\int_0^t T(t-r)Ru(r)dr \qquad (2.36b)\\ &= T(t)x_0 + \int_0^t T_{-1}(t-r)\Big(f\big(x(r),w(r)\big) + (\hat{A}R - A_{-1}R)u(r)\Big)dr, \qquad (2.36c)\end{aligned}$$

其中，A_{-1} 和 T_{-1} 分别是无穷小生成元 A 及半群 T 在外推空间 X_{-1}上的延拓。此外，$A_{-1}R \in L(U,X_{-1})$ （因此 $AR - A_{-1}R \in L(U,X_{-1})$）。

证明与线性情形的证明类似（参见 [166, 定理 4。4], [201, 第 93–94]页）。不过，为了使论述自成一体，我们仍给出详细证明。

证明。(a). 任取 $\tau \geq 0$, $u \in C^2([0,\tau],U)$，并任取满足 $x_0 - Ru(0) \in D(A)$的 $x_0 \in X$。令 $x(\cdot) := \phi(\cdot,x_0,u)$为半线性边界控制系统的一个经典解。定义

$$v(t) := x(t) - Ru(t).$$

我们将 要证明该函数是下列方程的一个经典解

$$\dot{v} = Av(t) + f\big(v(t) + Ru(t), w(t)\big) - R\dot{u}(t) + \hat{A}Ru(t) \qquad (2.37)$$

在 $[0,\tau)$ 的意义下，$v \in C([0,\tau)\ X)$，$v \in C^1((0,\tau)\ X)$，$v(t) \in D(A)$ 对于 $t \in (0,\tau)$，且（2.37）以此 v成立。

首先，它对所有 $t \geq 0$ 均成立，即

$$\hat{R}v(t) = \hat{R}\phi(t,x_0,u) - u = 0.$$

$\hat{}$ 由于 $\mathrm{Im}(R)$ 是 $\subset D(A)$，且 x 是半线性边界控制系统的经典解，因此 $v(t) \in D(A) \cap \hat{}\mathrm{Ker}\,(R) = D(A)$。

此外，

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= \hat{A}x(t) + f(x(t),w(t)) - R\dot{u}(t)\\ &= \hat{A}(v(t) + Ru(t)) + f\big(v(t) + Ru(t), w(t)\big) - R\dot{u}(t)\\ &= \hat{A}v(t) + f\big(v(t) + Ru(t), w(t)\big) - R\dot{u}(t) + \hat{A}Ru(t).\end{aligned}$$

由于 $v(t) \in D(A)$，$A = \hat{}A$ 在 $D(A)$ 上，且 $v \in C^1([0,\tau],\ X)$，v 是（2.37）的经典解。

由于（2.37）是一个经典的半线性演化方程，v 可以表示为（参见 [186,第 183] 页的方程（1.2））

$$\begin{aligned}v(t) &= T(t)v(0)\\ &\quad + \int_0^t T(t-r)\big(f\big(v(r) + Ru(r), w(r)\big) + \hat{A}Ru(r) - R\dot{u}(r)\big)dr,\end{aligned}$$

并回到 x变量，我们得到（2.36a）。

(b). 根据命题 2.3.4，有

$$\int_0^t T(t-r)R\dot{u}(r)dr - Ru(t) = A\int_0^t T(t-r)Ru(r)dr - T(t)Ru(0). \tag{2.38}$$

将其代入（2.36a），得到（2.36b）。

(c). 设 A_{-1} 是 A 到外推空间 X_{-1}的延拓，且 T_{-1} 是由 A_{-1}生成的外推半群。注意，$R \in L(U,X)$，且 $D(A_{-1}) = X$。因此，算子 $A_{-1}R$ 是从巴拿赫空间 U 到巴拿赫空间 X_{-1} 的良定义线性算子，且 $D(A_{-1}R) = U$。由于 A_{-1} 是强连续半群的生成元，因此它是闭的。因此，根据 [90, 命题 A.9], ，算子 $A_{-1}R$ 是闭算子与有界算子的乘积，故为闭算子。根据闭图定理（参见例如 [44,定理 A.3.52]），$A_{-1}R \in L(U,X_{-1})$。

映射 $r \mapsto T(t-r)Ru(r)$ 在空间 X 中是 Bochner 可积的，因此在 X_{-1} 中也可积（即使对于任意 $u \in L^1_{\text{loc}}([0,\tau],U)$ 也是如此，参见 [11,命题 1.3.4]）。此外，对于所有 $r \in [0,t]$，$T(t-r)Ru(r) \in X = D(A_{-1})$。

回顾一下，对于 $D(A_{-1})$ 上的所有 $s \in \mathbb{R}_+$，都有 $A_{-1}T_{-1}(s) = T_{-1}(s)A_{-1}$，例如参见 [102, 定理 5.2.2]。考虑映射

$$w : r \mapsto A_{-1}T_{-1}(t-r)Ru(r) = T_{-1}(t-r)A_{-1}Ru(r).$$

由于 $A_{-1}R \in L(U,X_{-1})$，且 T_{-1} 是 X_{-1} 上的强连续半群，函数 w 在 X_{-1} 上 Bochner 可积，根据 [11, 命题 1.3.4]。因此，由希勒引理（例如参见 [87,定理 3.7.12], [11,命题 1.1.7]），对于所有 $u \in C^2([0,\tau],U)$，我们得到

$$\begin{aligned} A\int_0^t T(t-r)Ru(r)dr &= A_{-1}\int_0^t T_{-1}(t-r)Ru(r)dr \\ &= \int_0^t A_{-1}T_{-1}(t-r)Ru(r)dr = \int_0^t T_{-1}(t-r)A_{-1}Ru(r)dr. \end{aligned}$$

由此可得公式（2.36c）。 □

表示公式（2.36a）的优点在于表达式中涉及的算子 R 和 AR 是有界的。其缺点是用到了u 的导数。尽管如此，公式（2.36a）右端的表达式对任意$x \in X$以及任意 $u \in H^1$（$[0,\tau]$, U）都有意义，并可称为边界控制系统（BCS）（2.30）的温和解，例如见 [102, 第 146]页。

公式（2.36c）不涉及输入的任何导数，并且同样是通过有界算子 $AR - A_{-1}R \in L$（U, X_{-1}）给出的。此外，若在外推空间 X_{-1}中考虑公式（2.36c）右端的表达式，则它对所有 $x \in X$和所有 $u \in L^1_{\text{loc}}$（$\mathbb{R}_+$, U）都有意义，并构成一个温和解

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t),w(t)) + Bu(t), \tag{2.39}$$

with

$$B := \hat{A}R - A_{-1}R. \tag{2.40}$$

这促使我们通过公式（2.36c）来定义半线性边界控制系统的温和解，正如 [201] 中所提出的那样。

注 2.3.6。 算子 B 由边界控制系统唯一确定，与所选择的提升算子 R 无关，见 [201, 命题 2。8]◁

ˆˆ定义 2.3.7. 设 (A, R, f) 是一个半线性边界控制系统，其对应的 A, R。设 $x_0 \in X$，$\tau > 0$, $w \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\tau], W)$，且 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\tau], U)$。连续函数 $x\colon [0,\tau] \to X$ 称为半线性边界控制系统 (2.34) 在 $[0,\tau]$ 上的温和解，如果 $x(t) \in X$ 对所有 $t > 0$ 都成立，且 x 满足

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)\big(f(x(s), w(s)) + Bu(s)\big)ds,$$

ˆ对所有 $t \in [0,\tau]$ 都成立，且其中 $B = AB_0 - A_{-1}B_0$。函数 $x\colon \mathbb{R}_+ \to X$ 称为全局温和解，如果 $x|_{[0,\tau]}$ 对所有 $\tau > 0$ 都是 $[0,\tau]$ 上的温和解。◁

换言之，x 是半线性边界控制系统（2.3.2）的温和解，当且仅当 x 是（2.39）的温和解ˆ，且 $B = AR - A_{-1}R$。

因此，半线性边界控制系统是第 2.2 节所研究的半线性演化方程的一种特殊情形，我们可以利用关于半线性演化方程的适定性与稳定性理论来分析半线性边界控制系统。

特别地，我们给出线性边界控制系统输入到状态稳定性的一个判据:

推论 *2.3.8.* 考虑边界控制系统 *(2.30)*，并假设由 *(2.40)* 定义的相应输入算子 B 对某个 $q \in [1, +\infty)$ 是 q- 可容许的。假设 A 生成一个指数稳定半群。那么对于任意 $p \in [q, +\infty]$，系统$\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$，其中 $\mathcal{U} := L^p(\mathbb{R}_+, U)$，是一个输入到状态稳定控制系统（相对于$\mathcal{U}$中的范数）。

证明。由于由 (2.40) 定义的 B 对某个 $q \in [1, +\infty)$ 是 q-可容许的，因此它对任意 $p \in [q, +\infty]$ 都是 p-可容许的，并且映射 ϕ 关于时间连续。根据命题 2.1.14，对于所有 $p \in [q, +\infty]$，系统 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$，其中 $\mathcal{U} := L^p([0,\infty)\ U)$，按照定义 1.1.1 的意义是正向完备控制系统。根据定理 2.1.21，系统 Σ 具有输入到状态稳定性。 □

注 2.3.9。 在本章中，我们讨论边界控制系统的温和解。在一些论文中，会使用弱解和强解的概念。关于所有这些解的概念之间关系的详细讨论，请参阅[201,命题 2.9、2.11、注 2。10]。 ◁

注 2.3.10。 使用公式（ B 2.40）计算输入算子 B 在实践中可能并不方便。还可以使用其他方法计算[222, , 参见第 10 节。1], [63] 以及 [201, 命题 2。9]此外，在某些情况下，无需计算算子 B，即可得到B的可容许性以及（2.30）的输入到状态稳定性（ISS）。◁

2.4 半线性解析系统

2.4.1 回顾算子的分数幂

本节简要回顾扇形算子的分数幂，这是我们在第 2.4 节中需要用到的内容。关于其性质的更详细介绍

可参见扇形算子的分数幂相关内容，例如 [84, 第 1 节。4]如需详细介绍，请参阅 [75]。

定义 2.4.1。 对于 $z \in \mathbb{C}$，当 $\mathrm{Re} z > 0$ 时，伽马函数 定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{2.41}$$

◁

定义 2.4.2。 设 A 是巴拿赫空间 X 上指数稳定解析半群的生成元。对于 $\alpha > 0$，定义

$$(-A)^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt. \tag{2.42}$$

◁

由于半群 T是解析的，映射 $t \to T(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微（例如参见 [65, 第 4.6 定理，第 101]页），因此在此区间上连续。由于 T 也具有指数稳定性，(2.42) 中的积分在一致算子拓扑下收敛。以下熟知的性质成立：

命题 2.4.3。 设 A 是巴拿赫空间 X 上指数稳定解析半群的生成元。对于任意 $\alpha > 0$，算子 $(-A)^{-\alpha}$ 属于 $L(X)$，是单射，并满足

$$(-A)^{-\alpha}(-A)^{-\beta} = (-A)^{-(\alpha+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{2.43}$$

定义 2.4.4。设 A 是巴拿赫空间 X 上指数稳定解析半群的生成元。对于 $\alpha > 0$，定义 $(-A)^\alpha$ 为 $(-A)^{-\alpha}$ 的逆算子，其中 $D((-A)^\alpha) = \mathrm{Im}((-A)^{-\alpha})$。

根据定义，我们令 $A^0 := I$。 ◁

我们来汇总分数幂的若干基本性质；前三条见 [186, 定理 6.8，第 72] 页，最后一条见 [84, 习题，第 26] 页。

命题 2.4.5。 设 A 是巴拿赫空间 X 上一个指数稳定的解析半群的生成元。

(i) 对于 $\alpha > 0$，算子 $(-A)^\alpha$ 是闭且稠密定义的。

(ii) 每当 $\alpha > \beta > 0$，我们有 $D((-A)^\alpha) \subset D((-A)^\beta)$。

(iii) 对所有 α，$\beta \in \mathbb{R}$ 均有

$$(-A)^{\alpha+\beta} x = (-A)^\alpha (-A)^\beta x, \tag{2.44}$$

对每个 $x \in D((-A)^\gamma)$，其中 $\gamma =$ 最大值$\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$。

(iv) $(-A)^\alpha T(t) = T(t)(-A)^\alpha$ *on* $D((-A)^\alpha)$, $t \geq 0$.

利用算子的分数次幂，我们可以定义一些空间，这些空间对于处理由解析半群支配的非线性方程至关重要。

定义 2.4.6. 设 A 是巴拿赫空间 X 上解析半群的生成元。设 $\alpha \geq 0$。任取 $\omega > \omega_0(T)$，并定义空间 X_α 及其范数如下

$$X_\alpha := D((\omega I - A)^\alpha), \quad \|x\|_{X_\alpha} := \|(\omega I - A)^\alpha x\|_X, \quad x \in X_\alpha. \tag{2.45}$$

◁

特别地，根据定义 $X_0 = X$，以及 $X_1 = D(A)$（范数如（2.45）中所示）。

注 2.4.7。选择不同的 $\omega > \omega_0(T)$ 会诱导出同一个线性空间 X_α，并赋予其等价范数。◁

空间 X_α 具有良好的结构：

命题 2.4.8。设 A 是巴拿赫空间 X 上指数稳定解析半群的生成元。对于任意 $\alpha \geq 0$，空间 X_α 是巴拿赫空间。此外，对于所有 $\alpha \geq \beta \geq 0$，空间 X_α 是 X_β 的稠密子空间，并且连续嵌入其中。

类似于空间 X_{-1}，我们引入

定义 2.4.9。对于上述的 $\alpha > 0$ 和 A，将空间 $X_{-\alpha}$ 定义为 X 关于范数 $x \mapsto \|(\omega I - A)^{-\alpha} x\|_X$ 的完备化。于是，对于任意 $0 < \beta < \alpha < 1$，有如下连续嵌入链：

$$X_{-1} \supset X_{-\alpha} \supset X_{-\beta} \supset X = X_0 \supset X_\beta \supset X_\alpha \supset X_1.$$

◁

以下性质成立：

命题 2.4.10. 设 T 是巴拿赫空间 X 上的解析半群，增长界为 $\omega_0(T)$，其生成元为 A。那么，对于每个 ω、$\kappa > \omega_0(T)$ 以及每个 $\alpha \in [0, 1)$，都有 $\mathrm{Im}(T(t)) \subset X_\alpha$，且存在 $C_\alpha > 0$ 使得

$$\|(\omega I - A)^\alpha T(t)\| \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha} e^{\kappa t}, \quad t > 0. \tag{2.46}$$

此外，映射 $t \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t)$ 在一致算子拓扑下于 $(0, +\infty)$ 上连续。

2.4.2 半线性解析系统及其温和解

再次考虑系统 (2.12)，其中 $B_2 = \mathrm{id}$，现重述如下：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{2.47a}$$
$$x(0) = x_0, \tag{2.47b}$$

在第 2.2 节中，我们假设 f 是从 $X \times U$ 到 X 的良定义映射。尽管这听起来很自然，但事实上，这是一个相当严格的假设，因为连多项式映射这类基本非线性项都不满足该假设。事实上，若 $f(x) = x^2$，其中 $x \in X := L^2(0, 1)$，则 f 将 X 映射到空间 $L^1(0, 1)$。然而，由于 A 生成一个解析半群，对 f 的要求可以大幅放宽。具体而言，本节假设：

存在 $\alpha \in [0,1]$ 使得 f 是从 $X_\alpha \times U$ 到 X的良定义映射，其中空间X_α 定义见定义 2.45。

接下来，我们定义（2.47）的温和解。注意，非线性项 f 定义在$X_\alpha \times U$上，因此我们必须要求温和解在所有正时间内都属于 X_α 。对于一般的半群，我们无法期待这种良好的性质；但得益于解析半群的平滑效应，在解析情形下，我们可以期待这样的性质。

定义 2.4.11。 设 $\tau > 0$ 已给定。若函数 $x \in C([0,\tau], X)$ 称为（2.47）的温和解，在 $[0,\tau]$ 上对应于某个 $x_0 \in X$和 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$，如果$x(s) \in X_\alpha$对 $s \in (0,\tau]$成立，并且 x 满足积分方程

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s) f\big(x(s), u(s)\big) ds + \int_0^t T_{-1}(t-s) B u(s) ds. \tag{2.48}$$

我们称 $x:\ \mathbb{R}_+ \to X$ 是（(2.47) 在 $\mathbb{R}_+$ 上对应于某些$x_0 \in X$和 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$的温和解，当且仅当它是（2.47）（其中 x_0, u）在 $[0,\tau]$ 对所有$\tau > 0$的温和解。 $\lhd$

注 2.4.12。 注意，如果 $\alpha = 0$，那么 $X_\alpha = X_0 = X$，为一般半群和解析半群引入的温和解概念是一致的。$\lhd$

假设 2.4.13。 假设以下条件成立：

(i) $\alpha \in$ （0,1）。

(ii) $B \in L(U,\ X_{-1+\alpha+\varepsilon})$ 对充分小的 $\varepsilon > 0$ 成立。

(iii) $f \in C(X_\alpha \times U,\ X)$，并且 f 关于第一自变量是利普希茨连续的，具体来说：对于每个 $r > 0$，存在 $L = L(r) > 0$，使得对于每个 x_1、 $x_2 \in B_{r,\ X_\alpha}$ 以及所有 $u \in B_{r,\ U}$，均有

$$\|f(x_1,u) - f(x_2,u)\|_X \le L\|x_1 - x_2\|_{X_\alpha}. \tag{2.49}$$

(iv) 对所有 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+,\ U)$ 以及任意满足 $x((0,\ +\infty)) \subset X_\alpha$ 的 $x \in C(\mathbb{R}_+,\ X)$，映射 $s \mapsto f\big(x(s)\ u(s)\big)$ 属于 $L^w_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,\ X)$，且满足$w > \frac{1}{1-\alpha}$。

(v) 存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\|f(0,u)\|_X \le \sigma(\|u\|_U) + c, \quad u \in U.$$

2.4.3 解析半群与可容许性的预备知识

我们用 $\omega_0(T)$ 表示半群 T 的增长界。我们先给出 [11,命题 1.3。4] 的以下“解析”版本：

命题 2.4.14。 设 T是一个解析半群，$\alpha \in [0,1)$，且 $g \in L^w_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$满足 $w > \frac{1}{1-\alpha}$。任取 $\omega > \overline{\omega_0}(T)$。则该映射

$$\xi : t \mapsto \int_0^t (\omega I - A)^\alpha T(t-s) g(s) ds \tag{2.50}$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上是良定义且连续的。

此外，对于任意 $\kappa > \omega_0(T)$，存在 $R = R(\kappa, \alpha)$，使得对于任意 $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$，下式成立：

$$\int_0^t \big\|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)\big\|_X ds \le R t^{1-\alpha} e^{\kappa t} \|g\|_{L^\infty([0,t],X)}. \tag{2.51}$$

证明。我们将证明分为四个部分。

(i). 定义良好性。由于 T 是解析半群，$T(t)$ 将 X 映射到 $D(A)$，对任意 $t > 0$ 均成立。由于对所有 $\alpha \in [0,1]$，$X_\alpha \subset D(A)$，因此 (2.50) 中的被积函数几乎处处属于 X。下面证明 X 值映射 $s \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)$ 在 $[0,t]$ 上博赫纳可积。

由于 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$，根据博赫纳可积性的判据，$g$ 强可测，且对于任意有界区间 $I \subset \mathbb{R}_+$，$\int_I \|g(s)\|_X ds < \infty$。

记 χ_Ω 为集合 Ω 的示性函数 $\subset \mathbb{R}_+$。回顾映射$t \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t)$ 根据命题 $t = 0$ 在 2.4.10之外连续。

若 $g(s) = \chi_\Omega(s)x$ 对某个可测的 $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ 和 $x \in X$成立，则函数 n

$$s \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s) = (\omega I - A)^\alpha T(t-s)\chi_\Omega(s)x$$

它是可测标量函数与连续（因而可测）向量值函数的乘积，因此可测。根据线性性，$s \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)$ 在 g 为简单函数时强可测（定义见 [11,第 11] 节）。

由于 g 强可测，存在一个简单函数序列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$，几乎处处逐点收敛到 g。考虑序列

$$\big(s \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g_n(s)\big)_{n\in\mathbb{N}} \tag{2.52}$$

并任取一个 $s \in [0,t)$，使得当 $n \to \infty$ 时，$g_n(s) \to g(s)$。我们有

$$\begin{aligned}&\big\|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)g_n(s) - (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)\big\|_X \\ &\qquad \le \|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)\| \|g_n(s) - g(s)\|_X \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

因此，强可测函数序列（2.52）几乎处处收敛于 $s \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)$, 因而 $s \mapsto (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)$ 根据 [11,推论 1.1。2]。

此外，对于任意 $t > 0$，利用命题 2.4.10，我们有：对于任意 $\kappa > \omega_0(T)$，存在 $M > 0$ 使得

$$\begin{aligned}\int_0^t \big\|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)\big\|_X ds &\le \int_0^t \|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)\| \|g(s)\|_X ds \\ &\le M \int_0^t \frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha} e^{\kappa(t-s)} \|g(s)\|_X ds \\ &\le M C_\alpha e^{\kappa t} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \|g(s)\|_X ds. \end{aligned}\tag{2.53}$$

利用 H¨older 不等式以及命题假设中的 $w > \frac{1}{1-\alpha}$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^t \|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)\|_X ds &\le M C_\alpha e^{\kappa t} \Big(\int_0^t \Big(\frac{1}{(t-s)^\alpha} \Big)^p ds \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^t \|g(s)\|_X^w ds \Big)^{\frac{1}{w}} \\ &\le \frac{M C_\alpha}{(1-\alpha p)^{1/p}} e^{\kappa t} t^{\frac{1-\alpha p}{p}} \Big(\int_0^t \|g(s)\|_X^w ds \Big)^{\frac{1}{w}}, \end{aligned}\tag{2.54}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{w}=1$，因此 p 满足 $p<\frac{1}{\alpha}$。 –

最后，根据 [11, 定理 1.1。4], 映射 $s\mapsto(\omega I-A)^{\alpha}T(t-s)g(s)$ 在每个 $[0,t]\subset\mathbb{R}_+$上都是 Bochner 可积的。

(ii). 右连续性。 我们希望证明，由 ξ 定义的（2.50），在 $\mathbb{R}_+$上右连续。为此，对于 $h>0$ 和 $t\geq 0$，我们考虑以下表达式

$$\begin{aligned}\xi(t+h)-\xi(t)&=\int_0^{t+h}(\omega I-A)^{\alpha}T(t+h-s)g(s)ds-\int_0^{t}(\omega I-A)^{\alpha}T(t-s)g(s)ds\\&=\int_0^{t}(\omega I-A)^{\alpha}\Big(T(t+h-s)-T(t-s)\Big)g(s)ds\\&\qquad+\int_t^{t+h}(\omega I-A)^{\alpha}T(t+h-s)g(s)ds\\&=(T(h)-I)\int_0^{t}(\omega I-A)^{\alpha}T(t-s)g(s)ds\\&\qquad+\int_t^{t+h}(\omega I-A)^{\alpha}T(t+h-s)g(s)ds.\end{aligned}$$

如证明的第一部分所示，积分 $\int_0^t(\omega I-A)^{\alpha}T(t-s)g(s)ds$ 在 X中收敛。由于 T 是强连续的，我们有

$$(T(h)-I)\int_0^{t}(\omega I-A)^{\alpha}T(t-s)g(s)ds\to 0,\qquad\text{whenever } h\to+0.$$

此外，我们对某个不依赖于 h的 K 进行估计：

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_t^{t+h}(\omega I-A)^{\alpha}T(t+h-s)g(s)ds\Big\|_X\\&\qquad\leq\int_t^{t+h}\big\|(\omega I-A)^{\alpha}T(t+h-s)\big\|\|g(s)\|_X ds\\&\qquad\leq K\int_t^{t+h}\frac{1}{(t+h-s)^{\alpha}}\|g(s)\|_X ds\end{aligned}$$

并以类似于（2.54）的方式进行论证，并利用 $g\in L^w_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,X)$ 与 $w>\frac{1}{1-\alpha}$，最后一项在 $h\to+0$ 时收敛于 0。因此，$\xi(t+h)-\xi(t)\to 0$，当 $h\to+0$。

(iii). 左连续性。 现在令 $t>0$ 且 $h>0$。考虑

$$\begin{aligned}\xi(t)-\xi(t-h)&=\int_0^{t}(\omega I-A)^{\alpha}T(t-s)g(s)ds-\int_0^{t-h}(\omega I-A)^{\alpha}T(t-h-s)g(s)ds\\&=\int_0^{t-h}(\omega I-A)^{\alpha}\big(T(t-s)-T(t-h-s)\big)g(s)ds\\&\qquad+\int_{t-h}^{t}(\omega I-A)^{\alpha}T(t-s)g(s)ds.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\|\xi(t)-\xi(t-h)\|_X &\le \Big\| \int_0^{t-h} (\omega I - A)^\alpha \big(T(t-s)-T(t-h-s)\big)g(s)ds\Big\|_X \\ &\qquad + \Big\| \int_{t-h}^{t} (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)ds\Big\|_X \\ &\le \int_0^t \big\|(\omega I - A)^\alpha \big(T(t-s)-T(t-h-s)\big)g(s)\big\|_X \chi_{[0,t-h]}(s)ds \\ &\qquad + \Big\| \int_{t-h}^{t} (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)ds\Big\|_X .\end{aligned}$$

对所有 $s\in[0,t-h)$，都有

$$\begin{aligned}&\big\|(\omega I - A)^\alpha \big(T(t-s)-T(t-h-s)\big)g(s)\big\|_X \chi_{[0,t-h]}(s) \\ &\qquad \le \big(\big\|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)\big\| + \big\|(\omega I - A)^\alpha T(t-h-s)\big\|\big)\|g(s)\|_X \\ &\qquad \le K\Big(\frac{1}{(t-s)^\alpha}+\frac{1}{(t-h-s)^\alpha}\Big)\|g(s)\|_X,\end{aligned}$$

其中 K 依赖于 t，但不依赖于 s，h。与上述论证一样，右端的函数是可积的，并且根据（标量）勒贝格控制收敛定理，有

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to+0}\int_0^{t-h} \big\|(\omega I - A)^\alpha \big(T(t-s)-T(t-h-s)\big)g(s)\big\|_X ds \\ &\qquad = \int_0^t \lim_{h\to+0} \big\|(\omega I - A)^\alpha \big(T(t-s)-T(t-h-s)\big)g(s)\big\|_X ds = 0.\end{aligned}$$

最后，

$$\Big\| \int_{t-h}^{t} (\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)ds\Big\|_X \to 0, \qquad \text{as } h\to+0,$$

与右连续性的证明类似。这表明，当 $h\to+0$ 时，$\|x(t+h)-x(t)\|_X\to 0$，因此 $x\in C([0,\tau],X)$。

(iv). 估计 (2.51). 对于最后一个结论，取 $g\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,\ X)$，并按如下方式继续推导 (2.53) 中的估计：

$$\int_0^t \big\|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)g(s)\big\|_X ds \le MC_\alpha e^{\kappa t}\int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha}ds\|g\|_{L^\infty([0,t],X)},$$

从而得到 (2.51)，其中 $R=\frac{MC_\alpha}{1-\alpha}$。 □

接下来，我们给出解析系统中输入算子具有零类可容许性的一个充分条件。下面命题的 (i) 部分包含在 [201,命题 2.13] 中。不过，为了证明 (ii)，我们仍给出证明。

命题 2.4.15. 假设 A 生成解析半群 T，且对于某个 $\alpha\in(0,\ 1)$，$B\in L(U,\ X_{-1+\alpha})$。那么：

(i) B 对于 $q\in(\frac{1}{\alpha},+\infty]$ 是零类 q-可容许的。

(ii) 对于任意 $\omega > \omega_0(T)$、任意 $d \in [0, \alpha)$，以及任意 $\kappa > \omega_0(T)$，存在 $R > 0$，使得对于任意 $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, X)$，映射

$$t \mapsto \int_0^t (\omega I - A)^d T(t-s) B g(s) ds \tag{2.55}$$

关于 X-范数是连续的，并且满足以下条件：

$$\int_0^t \left\| (\omega I - A)^d T(t-s) B g(s) \right\|_X ds \le R t^{\alpha - d} e^{\kappa t} \|g\|_{L^\infty([0,t],X)}. \tag{2.56}$$

证明。 **(i).** 任取 $\omega > \omega_0(T)$，并考虑 $X_{-1+\alpha}$ 上的相应范数，如定义2.4.9所示。我们有

$$\begin{aligned} \|B\|_{L(U,X_{-1+\alpha})} &= \sup_{u \in U : \|u\|_U = 1} \|Bu\|_{X_{-1+\alpha}} \\ &= \sup_{u \in U : \|u\|_U = 1} \|(\omega I - A)^{-1+\alpha} B u\|_X = \|(\omega I - A)^{-1+\alpha} B\|_{L(U,X)}. \end{aligned}$$

因此，条件 $B \in L(U, X_{-1+\alpha})$ 等价于 $(\omega I - A)^{-1+\alpha} B \in L(U, X)$。据此，我们有

$$T_{-1}(t) B = T_{-1}(t)(\omega I - A)^{1-\alpha} (\omega I - A)^{-1+\alpha} B. \tag{2.57}$$

由于 [186, 定理 2.6.13，第 74], 在 $X_{1-\alpha} = D((\omega I - A)^{1-\alpha})$ 上成立

$$T_{-1}(t)(\omega I - A)^{1-\alpha} = (\omega I - A)^{1-\alpha} T_{-1}(t).$$

现在任取 $f \in L^q{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$，其中 $q > \frac{1}{\alpha}$。表示为

$$\int_0^t T_{-1}(t-s) B f(s) ds = \int_0^t (\omega I - A)^{1-\alpha} T_{-1}(t-s) (\omega I - A)^{\alpha - 1} B f(s) ds$$

并应用命题 2.4.14，特别是取 2.54 中的估计，其中 $1-\alpha$ 代替 α，$w := q$，并取 $g := (\omega I - A)^{-1+\alpha} B f$，我们可知 B 是零类 q-可容许的，适用于$q \in (\frac{1}{\alpha}, +\infty)$。

(ii). 类似地，对于 $d < \alpha$ 和 $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$，考虑映射

$$s \mapsto (\omega I - A)^d T_{-1}(t-s) B g(s) = (\omega I - A)^{1-\alpha+d} T_{-1}(t-s)(\omega I - A)^{-1+\alpha} B g(s).$$

由命题 2.4.14可知，该映射是 Bochner 可积的。结合 (2.51)，以 $1-\alpha+d$代替 α，并将 $(\omega I - A)^{-1+\alpha} B g$ 中的 g代替 2.55，可知映射 (2.56) 是连续的，且 ($d := 0$) 成立。在 (2.56) 中令 ∞，还可得到零类 B-可容许性。 □

2.4.4 局部存在性与唯一性

根据命题 2.4.15，条件 $B \in L(U, X_{-1+\alpha+\varepsilon})$ with $\alpha, \varepsilon > 0$ 意味着，对于任意 $q \in (\frac{1}{\alpha+\varepsilon}, +\infty]$，$B$ 都是零类 q-可容许的。进而，对于这样的 q，根据命题 2.3]，映射 $t \mapsto \int_0^t T_{-1}(t-s) B u(s) ds$ 对任意 $u \in L^q(\mathbb{R}_+, U)$ 都是连续的。

根据假设 2.4.13(iv)，并利用命题 2.4.14，我们可以看出，对于任意 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$ 映射

$$t \mapsto \int_0^t T(t-s) f\big(x(s), u(s)\big) ds$$

定义良好且连续。

因此，若 $x \in C(\mathbb{R}_+, X)$ 满足 $x((0,+\infty)) \subset X_\alpha$，则对任意 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，右端 (2.48) 是时间的连续函数。

接下来给出解析系统的局部存在唯一性定理，其中初始状态属于 X_α，输入属于 $\mathcal{U} := L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$。回忆 ($\mathcal{U}_\mathcal{S}$ 2.17) 中的记号。

定理 2.4.16 (解析系统的 Picard-Lindel¨of 定理)。 假设 *2.4.13*成立。假设 T 是一个解析半群，并且对某些 $M \geq 1$, $\lambda > 0$ 满足以下估计

$$\|T(t)\| \leq M e^{\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

对任意紧集 $Q \subset X_\alpha$、任意 $r > 0$、任意有界集 $\mathcal{S} \subset U$ 以及任意 $\delta > 0$，存在一个时间 $t_1 = t_1(Q, r, \mathcal{S}, \delta) > 0$，使得对任意 $x_0 \in W := B_{r,X_\alpha}(w)$ 对某个 $w \in Q$ 成立，并且对任意 $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$，方程 (2.12) 在 $[0, t_1]$ 上存在唯一的温和解，且该解属于球 $B_{Mr+\delta, X_\alpha}(w)$。

证明。 首先，我们证明当 $Q = \{w\}$ 是 X_α中的单个点时，该结论成立。

(i). 任取 $\omega > \omega_0(T)$，并考虑相应的空间 X_α。任取满足 $W := B_{r,X_\alpha}(w) \subset B_{C,X_\alpha}$，且 $\mathcal{U}_\mathcal{S} \subset B_{C,\mathcal{U}}$ 的 $C > 0$。任取 $u \in \mathcal{U}_\mathcal{S}$。再任取 $\delta > 0$，并考虑以下集合（它们依赖于参数 $t > 0$）：

$$Y_t := \big\{ y \in C([0,t], X) : \|y(s) - (\omega I - A)^\alpha w\|_X \leq Mr + \delta \ \ \forall s \in [0,t] \big\},$$

赋予度量 $\rho_t(y_1, y_2) := \sup_{s\in[0,t]} \|y_1(s) - y_2(s)\|_X$。由于集合 Y_t 是巴拿赫空间 $C([0,t], X)$ 的闭子集，因此对所有 $t > 0$，Y_t 都是完备度量空间。

(ii). 任取 $x_0 \in W$。我们将证明，当 t足够小时，空间 Y_t在算子 Φ_u下不变；该算子对任意 $y \in Y_t$ 及所有 $\tau \in [0,t]$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\Phi_u(y)(\tau) = (\omega I - A)^\alpha T(\tau) x_0 &+ \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T_{-1}(\tau - s) B u(s) ds \\ &+ \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T(\tau - s) f\big((\omega I - A)^{-\alpha} y(s), u(s)\big) ds. \qquad (2.58)\end{aligned}$$

由于 $y \in C([0,t], X)$，映射 $s \mapsto (\omega I - A)^{-\alpha} y(s)$ 属于 $C([0,t], X_\alpha)$，因为对任意s_1, $s_2 \in [0,\tau]$，我们都有

$$\big\|(\omega I - A)^{-\alpha} y(s_1) - (\omega I - A)^{-\alpha} y(s_2)\big\|_{X_\alpha} = \|y(s_1) - y(s_2)\|_X.$$

根据假设2.4.13，映射 $s \mapsto f\big((\omega I - A)^{-\alpha} y(s)\ u(s)\big)$ 属于 $L^w_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,\ X)$，其中 $w > \frac{1}{1-\alpha}$。命题2.4.14保证映射

$$\tau \mapsto \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T(\tau - s) f\big((\omega I - A)^{-\alpha} y(s), u(s)\big) ds$$

是连续的。

由于 $B \in L(U, X_{-1+\alpha+\varepsilon})$，命题 2.4.15(ii) 表明

$$\tau \mapsto \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T_{-1}(\tau - s) B u(s) ds$$

属于 $C([0,\tau], X)$。

总之，函数 $\Phi_u(y)$ 是连续的，因此 Φ_u 将 $C([0,t], X)$ 映射到 $C([0,t], X)$。

(iii). 任取 $t > 0$，并任取 $y \in Y_t$。由于 $x_0 \in W = B_{r,X_\alpha}(w)$，存在 $a \in X_\alpha$: $\|a\|_{X_\alpha} < r$，使得 $x_0 = w + a$。

于是，对任意 $\tau < t$，可得

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_t(y)(\tau) - (\omega I - A)^\alpha w\|_X \\
&\quad \le \left\|(\omega I - A)^\alpha T(\tau) x_0 - (\omega I - A)^\alpha w\right\|_X + \left\| \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T_{-1}(\tau - s) B u(s) ds \right\|_X \\
&\qquad\qquad + \int_0^\tau \left\|(\omega I - A)^\alpha T(\tau - s)\right\| \left\| f((\omega I - A)^{-\alpha} y(s), u(s)) \right\|_X ds.
\end{aligned}$$

我们将 $x_0 := w + a$ 代入上述不等式右端的第一项。利用（2.46）估计最后一项。为估计第二项，我们利用 $(\omega I - A)^\alpha B \in L(U, X_{-1+\varepsilon})$。因此，根据命题 2.4.15，$(\omega I - A)^\alpha B$是零类 ∞-可容许的，因此存在一个递增连续函数 $t \mapsto h_t$，满足 $h_0 = 0$，使得:

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi_t(y)(\tau) - (\omega I - A)^\alpha w\right\|_X &\le \left\|(\omega I - A)^\alpha T(\tau) w - (\omega I - A)^\alpha w\right\|_X \\
&\quad + \|(\omega I - A)^\alpha T(\tau) a\|_X + h_\tau \|u\|_{L^\infty([0,\tau], U)} \\
&\quad + \int_0^\tau \frac{C_\alpha e^{\lambda(\tau - s)}}{(\tau - s)^\alpha} \big(\|f(0, u(s))\|_X \\
&\qquad\qquad + \left\| f((\omega I - A)^{-\alpha} y(s), u(s)) - f(0, u(s)) \right\|_X \big) ds.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

为了估计后一个表达式，注意到

- $\|(\omega I - A)^\alpha a\|_X = \|a\|_{X_\alpha} < r.$
- 对于所有 $s \in [0,t]$，我们有

$$\begin{aligned}
\|(\omega I - A)^{-\alpha} y(s) - 0\|_{X_\alpha} = \|y(s)\|_X &\le \|(\omega I - A)^\alpha w\|_X + Mr + \delta \\
&\le M(\|w\|_{X_\alpha} + r) + \delta \le MC + \delta := K.
\end{aligned}$$

- 根据假设2.4.13，可得

$$\|f(0, u(s))\|_X \le \sigma(\|u(s)\|_U) + c, \quad \text{for a.e. } s \in [0,t].$$

- h 是一个单调递增的连续函数。

当 $M \geq 1$ 时，有 $K > C$，并且 f 在有界球上的利普希茨连续性保证存在 $L(K) > 0$，使得对于所有 $\tau \in [0,t]$

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_t(y)(\tau) - (\omega I - A)^\alpha w\|_X \\
&\leq \|(\omega I - A)^\alpha T(\tau)w - (\omega I - A)^\alpha w\|_X + \|T(\tau)(\omega I - A)^\alpha a\|_X + h_\tau \|u\|_{L^\infty([0,\tau],U)} \\
&\quad + \int_0^\tau \frac{C_\alpha}{(\tau - s)^\alpha} e^{\lambda(\tau - s)} \big(\sigma(\|u(s)\|_U) + c + L(K)\|(\omega I - A)^{-\alpha} y(s)\|_{X_\alpha}\big) ds \\
&\leq \sup_{\tau \in [0,t]} \|T(\tau)(\omega I - A)^\alpha w - (\omega I - A)^\alpha w\|_X + M e^{\lambda t} r + h_t \|u\|_{L^\infty([0,t],U)} \\
&\quad + C_\alpha e^{\lambda t} \big(\sigma(C) + c + L(K)K\big) \int_0^t \frac{1}{s^\alpha} ds.
\end{aligned}$$

由于 T 是强连续半群，且 $h_t \to 0$ 作为 $t \to +0$，由此估计可知，存在 t_1，使得

$$\|\Phi_u(y)(t) - w\|_X \leq Mr + \delta, \quad \text{for all } t \in [0, t_1].$$

这意味着，对于所有 $t \in$ （0，t_1]），Y_t 关于 Φ_u 不变，并且 t_1 不依赖于 $x_0 \in W$ 的选取。

(iv). 现在任取 $t > 0$、$\tau \in [0,t]$ 以及任意 y_1，$y_2 \in Y_t$。则有

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_u(y_1)(\tau) - \Phi_u(y_2)(\tau)\|_X \\
&\qquad \leq \int_0^\tau \|(\omega I - A)^\alpha T(\tau - s)\| \\
&\qquad\qquad \cdot \big\|f((\omega I - A)^{-\alpha} y_1(s), u(s)) - f((\omega I - A)^{-\alpha} y_2(s), u(s))\big\|_X ds \\
&\qquad \leq \int_0^t L(K) \frac{C_\alpha}{(\tau - s)^\alpha} e^{\lambda(\tau - s)} \|y_1(s) - y_2(s)\|_X ds \\
&\qquad \leq L(K) C_\alpha e^{\lambda t} \int_0^t s^{-\alpha} ds \rho_t(y_1, y_2) \\
&\qquad \leq L(K) C_\alpha e^{\lambda t} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \rho_t(y_1, y_2) \\
&\qquad \leq \frac{1}{2} \rho_t(y_1, y_2),
\end{aligned}$$

对于 $t \leq t_2$，其中 $t_2 > 0$ 是一个足够小的实数，且不依赖于 $x_0 \in W$ 的选取。

根据 Banach不动点定理，存在唯一的 $y \in Y_t$，它是 Φ_u 的不动点，即

$$\begin{aligned}
y(\tau) = (\omega I - A)^\alpha T(\tau) x_0 &+ \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T_{-1}(\tau - s) B u(s) ds \\
&+ \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T(\tau - s) f\big((\omega I - A)^{-\alpha} y(s), u(s)\big) ds. \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

在 $[0, \min\{t_1, t_2\}]$ 上。

由于（$\omega I - A$）$^\alpha$ 是可逆的，且具有有界逆，y 是（2.60）的解，当且仅当 y 是解

$$\begin{aligned}
(\omega I - A)^{-\alpha} y(\tau) = T(\tau) x_0 &+ \int_0^\tau T_{-1}(\tau - s) B u(s) ds \\
&+ \int_0^\tau T(\tau - s) f\big((\omega I - A)^{-\alpha} y(s), u(s)\big) ds. \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

由于 $y \in C([0, \text{最小}\{t_1, t_2\}], X)$，映射 $x := (\omega I - A)^{-\alpha} y$ 属于 $C([0, \text{最小}\{t_1, t_2\}], X_\alpha)$，并且是（2.47）的唯一温和解。

(v). 一般紧 Q。 与定理相应部分的证明类似 2.2.7。

□

注 2.4.17。 我们已经证明了初始条件属于 X_α 时的局部存在性结果。为确保 X_α 之外的初始状态也具有局部存在唯一性，必须对 f 施加更强的要求，见 [149, 定理 7.1.5、7.1。6]。 ◁

引入极大解和适定性的概念，并按照第 2.2.2、2.2.3 节中的类似论证，我们得到以下适定性定理。

定理 2.4.18。 设 A 生成一个解析半群，假设 *2.4.13* 成立，并设 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。则：

(i) 对每个 $x \in X_\alpha$ 以及每个 $u \in \mathcal{U}$，方程 (2.47) 都存在唯一极大解，其定义在某个极大区间 $[0, t_m(x, u))$ 上。我们将此解记为 $\phi(\cdot, x, u)$。

(ii) 三元组 $\Sigma := (X_\alpha, \mathcal{U}, \phi)$ 是定义 *1.1.1* 意义下定义良好的控制系统。

(iii) Σ 满足 *BIC* 性质，也就是说，如果对于某个 $x \in X_\alpha$ 和 $u \in \mathcal{U}$，我们有 $t_m(x, u) < \infty$，那么 $\|\phi(t, x, u)\|_{X_\alpha} \to \infty$ 当 $t \to t_m(x, u) - 0$ 时。

2.4.5 整体存在性

现在我们将推导正向完备性和有界可达集性质的充分条件。我们需要以下“解析 Gronwall-Bellman 引理”：

命题 2.4.19。 对于任意 $a, b \geq 0$，任意 $\alpha, \beta \in [0, 1)$，以及任意 $T \in (0, +\infty)$，存在 $M = M(b, \alpha, \beta, T) > 0$，使得对于任意可积函数 $u : [0, T] \to \mathbb{R}$，若其对几乎所有 $t \in [0, T]$ 满足不等式

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b \int_0^t (t - s)^{-\beta} u(s) ds$$

几乎处处满足 $t \in [0, T]$

$$0 \leq u(t) \leq aMt^{-\alpha}.$$

证明。 见 [84, 第 6]页。 □

受 [186, 第 6.3 节、定理 3.3], 的启发，我们得到以下结果，该结果保证半线性解析系统的正向完备性和 BRS 性质。

定理 2.4.20。 设 A 生成一个解析半群，假设 *2.4.13* 成立，并设 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。进一步假设存在 $L, c > 0$ 和 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$\|f(x, u)\|_X \leq L\|x\|_{X_\alpha} + \sigma(\|u\|_U) + c, \quad x \in X_\alpha, \quad u \in U. \tag{2.62}$$

那么 $\Sigma := (X_\alpha, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个正向完备控制系统。

证明。 任取正的 $\omega > \omega_0(T)$，并按式（2.45）定义 X_α。

我们用反证法。设 Σ 不是正向完备的。那么存在 $(x_0, u) \in X_\alpha \times \mathcal{U}$ 使得 $t_m(x_0, u) < \infty$。根据定理 2.4.18，我们有 $\|\phi(t, x_0, u)\|_{X_\alpha} \to \infty$当 $t \to t_m(x_0, u) - 0$。

对于 $t < t_m(x_0, u)$，记 $x(t) := \phi(t, x_0, u)$。由于 $x(\cdot) \subset X_\alpha$，我们可以沿轨迹 $x(\cdot)$ 应用 $(\omega I - A)^\alpha$，得到

$$(\omega I - A)^\alpha x(t) = (\omega I - A)^\alpha T(t)x_0 + \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T_{-1}(\tau - s)Bu(s)ds + \int_0^t (\omega I - A)^\alpha T(t-s)f(x(s), u(s))ds.$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_\alpha &= \|(\omega I - A)^\alpha x(t)\|_X \\ &\le \|(\omega I - A)^\alpha T(t)x_0\|_X + \Big\| \int_0^\tau (\omega I - A)^\alpha T_{-1}(\tau - s)Bu(s)ds \Big\|_X \\ &\quad + \int_0^t \big\|(\omega I - A)^\alpha T(t-s)\big\| \big\|f(x(s), u(s))\big\|_X ds.\end{aligned}$$

现在，我们按照 (2.59) 估计第二项，其中 h 是一个连续递增函数，且满足 $h_0 = 0$。我们利用 (2.46) 估计最后一项。综上：

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_\alpha &\le Me^{\omega t}\|(\omega I - A)^\alpha x_0\|_X + h_\tau \|u\|_{L^\infty([0,t],U)} \\ &\quad + \int_0^t \frac{C_\alpha}{(t-s)^\alpha} e^{\omega(t-s)} \Big(L\|x(s)\|_{X_\alpha} + \sigma(\|u(s)\|_U) + c \Big) ds.\end{aligned}$$

定义 $z(t) := x(t)e^{-\omega t}$，由前面的估计可得

$$\begin{aligned}\|z(t)\|_\alpha &\le M\|(\omega I - A)^\alpha x_0\|_X + \int_0^t \frac{C_\alpha}{s^\alpha} ds \Big(\sigma(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,U)}) + c \Big) + h_\tau \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,U)} \\ &\quad + \int_0^t \frac{LC_\alpha}{(t-s)^\alpha} \|z(s)\|_{X_\alpha} ds.\end{aligned}$$

命题 2.4.19 表明 z，因此 x在 $[0, t_m(x_0, u))$ 上一致有界，而 BIC 性质（定理 2.4.18(iii)）表明 $t_m(x_0, u)$ 并非有限的最大存在时间。矛盾。

□

2.4.6 例：具有分布式输入的 Burgers 方程的适定性

受 [84, 第 57], 页的启发，我们考虑区域 $[0, \pi]$上的下列伯格斯型半线性反应扩散方程，其中分布式输入为 u，边界输入为 d，作用于 $z = 0$处，并在 π处满足齐次狄利克雷边界条件。

$$x_t = x_{zz} - xx_z + f(z, x(z,t)) + u(z,t), \quad z \in (0,\pi), \quad t > 0, \tag{2.63a}$$
$$x(0,\ t) = d(t),\ t > 0, \tag{2.63b}$$
$$x(\pi,\ t) = 0. \tag{2.63c}$$

其中 $f\colon\ [0,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 z 上可测，在 x 上局部 Lipschitz 连续，且关于 z 一致，并且

$$|f(z,y)|\le h(z)g(|y|),\quad \text{for a.e. } z\in[0,\pi],\ \text{and all } y\in\mathbb{R}, \tag{2.64}$$

其中 $h\in L^2(0,\pi)$，且 g 是连续、递增的，并且 h 和 g 均为正。

记 $X:=L^2(0,\pi)$。算子 $A:=\frac{d^2}{dz^2}$ 的区域为 $D(A)=H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi)$，它在 X 上生成一个解析半群。

我们假设分布式输入 u 属于空间 $\mathcal{U}=L^\infty(\mathbb{R}_+,U)$，其中 $U:=L^2(0,\pi)$，且边界输入 d 属于 $\mathcal{D}:=L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$。

系统（2.63）可以改写为一个半线性演化方程

$$x_t=Ax+F(x)+u+Bd, \tag{2.65}$$

其中，我们稍微滥用了记号，将 x 用作演化方程的一个自变量。假设2.4.13 中用于刻画边界输入算子 B 的可容许性的条件（ii），[201, 例 216]。

与算子 A 对应的空间 $X_{\frac12}$ 定义为（参见 [222, 命题 3.6.1]）

$$X_{\frac12}=H_0^1(0,\pi),$$

它是一个巴拿赫空间，其范数为

$$\|x\|_{\frac12}:=\Big|\int_0^\pi|x'(z)|^2dz\Big|^{\frac12},\quad x\in X_{\frac12}.$$

非线性项 $F\colon\ X_{\frac12}\to X$ 在（2.65）中定义为

$$F(x)(z)=-x(z)x'(z)+f(z,x(z)).$$

命题 *2.4.21.* *对每个 $x_0\in X_{\frac12}$、每个 $u\in\mathcal{U}=L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,U)$ 以及每个边界输入 $d\in\mathcal{D}=L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$，系统 (2.63) 存在唯一最大温和解 $\phi(\cdot,x_0,(u,d))$。系统 $\Sigma=(X_{\frac12},\mathcal{U}\times\mathcal{D},\phi)$ 是一个满足 BIC 性质的控制系统。*

证明。 我们分三步进行：

步骤1： **F 将有界集映射为 $X_{\frac12}$ 的有界集 X。** 由于 $X_{\frac12}=H_0^1(0,\pi)$ 中的元素是绝对连续函数，利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到对于任意 $x\in X_{\frac12}$ 均成立

$$\begin{aligned}\sup_{z\in(0,\pi)}|x(z)| &= \sup_{z\in(0,\pi)}\Big|\int_0^z x'(z)dz\Big|\\ &\le \sup_{z\in(0,\pi)}\int_0^z|x'(z)|dz\\ &= \int_0^\pi|x'(z)|dz\\ &\le \Big|\int_0^\pi 1dz\Big|^{\frac12}\Big|\int_0^\pi|x'(z)|^2dz\Big|^{\frac12}\\ &= \sqrt{\pi}\|x\|_{\frac12}.\end{aligned} \tag{2.66}$$

对于任意 $x \in X_{\frac{1}{2}}$，考虑

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_X^2 &= \int_0^\pi |F(x)(z)|^2 dz \\ &= \int_0^\pi |x(z)x'(z) + f(z, x(z))|^2 dz \\ &\le \int_0^\pi 2|x(z)x'(z)|^2 + 2|f(z, x(z))|^2 dz.\end{aligned}$$

利用（2.66）和（2.64），我们继续进行如下估计：

$$\begin{aligned}\|F(x)\|_X^2 &\le \int_0^\pi 2|x'(z)|^2 \pi \|x\|_{\frac{1}{2}}^2 + 2|h(z)|^2 |g(|x(z)|)|^2 dz \\ &\le 2\pi\|x\|_{\frac{1}{2}}^4 + 2\int_0^\pi |h(z)|^2 |g(\sqrt{\pi}\|x\|_{\frac{1}{2}})|^2 dz \\ &= 2\pi\|x\|_{\frac{1}{2}}^4 + 2\|h\|_X^2 |g(\sqrt{\pi}\|x\|_{\frac{1}{2}})|^2.\end{aligned}$$

开平方并利用 $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$，对所有 $a,\ b \ge 0$，最终得到

$$\|F(x)\|_X \le \sqrt{2\pi}\|x\|_{\frac{1}{2}}^2 + \sqrt{2}\|h\|_X |g(\sqrt{\pi}\|x\|_{\frac{1}{2}})|. \tag{2.67}$$

这表明，F作为从 $X_{\frac{1}{2}}$到 X的映射是良定义的，并且 F将 X_1中的有界集映射到 X中的有界集。

步骤 2： F**关于 是利普希茨连续的**。对于 $x_0 \in X_{\frac{1}{2}}$，存在紧集 $\{(z,\ x_0(z)) \text{ 的一个邻域 } V: z \in [0,\pi]\}$ 属于 $[0,\pi] \times \mathbb{R}$，且存在正常数 $L,\ \theta$，使得对于 $(z,\ x_1) \in V$、$(z,\ x_2) \in V$，有

$$|f(z, x_1) - f(z, x_2)| \le L|x_1 - x_2|.$$

因此，存在 $X_{\frac{1}{2}}$ 中 x_0 的一个邻域 U，使得 $x \in U$蕴含：对于几乎处处的 $z \in [0,\pi]$ 以及 $x_1,\ x_2 \in U$，有 $(z,\ x(z)) \in V$

$$\begin{aligned}\big\|f(\cdot, x_1(\cdot)) - f(\cdot, x_2(\cdot))\big\|_X^2 &= \int_0^\pi \big|f(z, x_1(z)) - f(z, x_2(z))\big|^2 dz \\ &\le L^2 \int_0^\pi |x_1(z) - x_2(z)|^2 dz,\end{aligned}$$

并利用（2.66），可得

$$\big\|f(\cdot, x_1(\cdot)) - f(\cdot, x_2(\cdot))\big\|_X^2 \le L^2\pi^2\|x_1 - x_2\|_{\frac{1}{2}}^2.$$

开平方根可得

$$\big\|f(\cdot, x_1(\cdot)) - f(\cdot, x_2(\cdot))\big\|_X \le \pi L\|x_1 - x_2\|_{\frac{1}{2}}. \tag{2.68}$$

最后，对于任意 $x_1,\ x_2 \in X_{\frac{1}{2}}$，都有

$$\|x_1x_1' - x_2x_2'\|_X \le \|x_1(x_1' - x_2')\|_X + \|(x_1 - x_2)x_2'\|_X,$$

再次利用（2.66），可得

$$\begin{aligned}\|x_1x_1' - x_2x_2'\|_X &\leq \sqrt{\pi}\|x_1\|_{\frac{1}{2}}\|x_1 - x_2\|_{\frac{1}{2}} + \sqrt{\pi}\|x_1 - x_2\|_{\frac{1}{2}}\|x_2\|_{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\pi}(\|x_1\|_{\frac{1}{2}} + \|x_2\|_{\frac{1}{2}})\|x_1 - x_2\|_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

将（2.68）与（2.69）结合起来，我们便得到函数F所需的利普希茨性质。

步骤 3：应用一般适定性定理。最后，定理 2.4.16 表明，系统（2.63）对每个 $x_0 \in X_{\frac{1}{2}}$、每个 $u \in \mathcal{U} = L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$ 以及每个边界输入 $d \in \mathcal{D} = L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 都存在唯一的温和解。定理 2.4.18表明 Σ 是一个满足 BIC 性质的控制系统。 □

2.5 总结

第 2.1.1、2.1.2 节讨论的抽象线性控制系统框架，以及这些章节中的大部分结果，均归功于 [228]。

线性系统的 ISS。在阐述第 2.1.4 节时，我们遵循 [166]。我们采用 [228] 中输入算子的可容许性概念。关于输入算子和观测算子的可容许性概念的详细阐述，请参阅 [222]，[99]。命题2.1.13源自 [228, 命题 4。2]；另见 [222, 命题 4.2。2]。定理2.1.21源自 [98, 命题 2。10]。定理2.1.17源自 [100]。引理2.1.20 是对 [73, 引理 1。1]。

基于谱的方法及相关技术。我们对线性分布参数系统的输入到状态稳定性理论的探讨主要沿用 [98, 100, 97, 166] 中的方法。不过，也存在其他途径。

在 [116, 117, 118]，中，针对一维空间域上具有斯图姆-刘维尔算子的线性抛物型偏微分方程，采用两种不同的方法进行了 ISS 分析：(i) 对解进行谱分解；(ii) 通过有限差分格式近似解。我们推荐参阅专著 [120]，其中系统地阐述了这一方法。[166, 第 4.2] 节简要介绍了该方法。

论文 [139], [140] 中采用谱方法研究 Riesz谱边界控制系统的 ISS；该方法是对 [116, 117, 118] 中谱方法的改进。该方法的核心是依据黎斯基 $\{\phi_k$ 对 X 进行分解：$k \in \mathbb{N}\}$。

半线性演化方程：一般性。在本章中，我们分析了以下形式的半线性演化方程的适定性以及其流的性质

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 f(x(t), u(t)) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{2.70a}$$
$$x(0) = x_0. \tag{2.70b}$$

这里 A 在巴拿赫空间 X上生成一个强连续半群B，算子 B_2 和 f 是可容许的，并且 f 是关于第一变量利普希茨连续的映射。在第2.2、2.3、2.4节的论述中，我们相当密切地遵循 [159]，大部分结果均来自该参考文献。

系统类（2.70）相当一般：

- 若 B 和 B_2 是有界算子，则（2.70）对应于经典的半线性演化方程，涵盖了广泛的、具有分布式输入的半线性偏微分方程系统类。若 A 是有界算子，则 [46]（针对无输入时变系统的）此类理论已在文献中得到发展。对于无界生成元 A，请参阅 [186],[84], [44, 第 11], [33], 等。

- 如果 $B_2 = 0$，且 B 是可容许算子，则式（2.70）可化为一般线性控制系统类，该类完全涵盖线性边界控制系统（概述见[44, 102], [222, 223], [63] ）。特别是，该类包括具有边界输入的线性演化偏微分方程。

- 考虑一个线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.71}$$

其具有可容许的 B。令我们施加反馈控制器 $u(x) = f(x, d_1) + d_2$，该控制器受到加性执行器扰动 d_2 以及额外扰动输入 d_1的影响。将此控制器代入式（2.71），得到系统（2.70），其中 $B_2 = B$。因此，系统（2.70）有时称为线性系统的利普希茨扰动。

- 在 [89], 中，研究表明，系统类（2.70）包括二维纳维–斯托克斯方程（满足某些边界条件）以及域内输入和扰动。此外，在 [89], 中，作者设计了一种误差反馈控制器，可针对一类参考输出保证近似局部速度输出跟踪。具有非线性局部项和狄利克雷或诺伊曼型边界输入的黏性伯格斯方程也属于类（2.70）。

- 在 [201], 中，作者证明，具有线性边界算子的半线性边界控制系统可视为系统（2.70）的一种特殊情况。在此情形下，只需将 B_2 视为恒等算子即可。此外，[201], 采用算子理论的方法，分析了一类具有非线性动力学和线性边界算子的解析边界控制系统的适定性与输入到状态稳定性。

一些高度非线性系统（甚至不含输入），例如多孔介质方程 [226], 和非线性 KdV 方程 [17]，并不属于（2.70）所涵盖的范围，因此应采用非线性半群理论的方法进行建模；该理论与极大单调算子理论密切相关 [21]。

半线性演化方程：研究现状。在假设2.70满足关于 f的假设，并选定容许输入空间后，文献[178] 在假设其线性化是 [222, 223, 212]意义下的指数稳定正则线性系统的条件下，研究了这些系统。 [178] 在假设非线性项满足利普希茨连续性并利用线性化的正则性的基础上，证明了正则非线性系统的局部适定性。据此，作者在 [178]中证明，为正则非线性系统的线性化设计的鲁棒输出调节误差反馈控制器，能够实现正则非线性系统的近似局部输出调节。

系统控制（2.70）近期已在多篇论文中得到研究。特别是，在 [179], 中，研究者使用

往返迭代研究了正则非线性系统类的精确能控性。相关系统类的鲁棒可观测性问题则在 [104]中进行了研究。

通过非线性边界控制器实现线性端口哈密顿系统的稳定化已在 [14, 189] 中研究。带饱和的有界控制（对输入信号的先验限制）已用于 [188, 215, 167] 中的偏微分方程控制。近期，已有多篇论文在输入到状态稳定性框架下研究非线性边界控制系统。 [200] 中采用非线性边界反馈，实现了线性端口哈密顿系统的输入到状态稳定化。

此外，人们还研究了若干种不同于（2.70）的无限维系统。时变无限维半线性系统就是其中一类。据作者所知，此类系统最初是在无扰动系统的情形下于 [96]中研究的。近期， [199], 中针对散射无源半线性系统得到了适定性和一致全局稳定性的充分条件（见 [199, 定理 3。8]）。

带输出的半线性系统是（2.70）的另一种重要延拓。文献 [223, 第 7], 节分析了具有全局利普希茨非线性的此类系统，并证明，只要利普希茨常数足够小，这些系统就是适定且正向完备的。文献 [82] 通过反例说明，带非线性输出边界反馈的半线性系统可能不适定。文献 [203] 通过将表示系统及其输入和输出的拉克斯–菲利普斯非线性半群应用于非线性压缩半群生成的克兰德尔–帕齐定理 [42] ，分析了带输出的增量散射无源非线性系统的适定性。

边界控制系统。对于许多自然系统和工程系统，系统与其环境之间的相互作用（通过控制、输入和输出）发生在系统的边界处。这类行为的例子包括扩散方程[26], 、结构振动 [45], 、输运现象等，广泛应用于机器人学 [64], 、航空航天工程 [25, 184], 和增材制造 [61, 83]。大类端口哈密顿系统也可以表述为边界控制系统，参见 [102, 224]。

一般边界控制系统理论的研究始于开创性工作 [68] ，并由 [197]进一步推进；综述请参见 [223]。文献中定义边界控制系统的方法有多种；例如参见 [68], [45, 102], [197, 222]和 [63]。 [138]讨论了各种方法之间的差异。在对线性边界控制系统的描述中，我们采用 [102], 提出的策略，并从 [63]获得了一些启发。

与此同时，带边界控制的非线性系统是一门较新的研究领域。有关近期文献，请参见 [223, 82, 201]。在介绍半线性边界控制系统时，我们遵循 [159], ，其理论受 [201]启发。

第3章

ISS叠加定理

ISS叠加定理在有限维ISS理论中发挥着重要作用。它们将ISS刻画为某种稳定性与吸引性相结合的性质，这些性质针对带输入系统作了适当定义。本章将证明无限维系统的ISS叠加定理，并指出其与有限维理论的差异。我们将利用这些结果推导所谓的ISS积分刻画。ISS叠加定理还有更多应用：在第4.1章中，它们用于论证使用非强制ISS李雅普诺夫函数的合理性；在第6 章中，它们则用于推导ISS系统有限与无限网络的小增益定理。

假设3.0.1。 除非另有说明，本章所讨论的控制系统始终是正向完备的。

3.1 稳定性性质

3.1.1 无扰动系统的稳定性概念

我们从无输入系统开始。

定义 3.1.1。 系统 $\Sigma = (X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 称为

(i) 零点一致稳定（*0-ULS*），如果存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $r > 0$ 使得 t

$$\|\phi(t,x,0)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) \quad \forall x \in \overline{B_r} \quad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

(ii) 零点一致全局稳定（*0-UGS*），如果存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\|\phi(t,x,0)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) \quad \forall x \in X \quad \forall t \geq 0. \tag{3.2}$$

(iii) 零点全局吸引（*0-GATT*），如果

$$\lim_{t\to\infty} \|\phi(t,x,0)\|_X = 0 \quad \forall x \in X. \tag{3.3}$$

(iv) 具有零点极限性质（*0-LIM*）的系统，如果

$$\inf_{t\geq 0}\|\phi(t,x,0)\|_X = 0 \quad \forall x \in X.$$

(v) 零点一致全局吸引（*0-UGATT*），若对所有 $\varepsilon,\delta > 0$，存在 $\tau = \tau(\varepsilon,\delta) < \infty$ 使得

$$t \geq \tau, \quad x \in \overline{B_\delta} \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,0)\|_X \leq \varepsilon. \tag{3.4}$$

(vi) 零点全局渐近稳定（0-GAS），若 Σ是 0-ULS 且 0-GATT .

(vii) 零点一致渐近稳定 (0-UAS)，若存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $r > 0$，使得对所有 $x \in B_r$

$$\|\phi(t,x,0)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t) \quad \forall t \geq 0. \tag{3.5}$$

◁

我们强调一致概念 0-UGATT 和 0-UGAS 与非一致概念 0-GATT 和 0-GAS 之间的区别。对于 0-GATT 系统，所有轨迹都收敛到原点，但与 0-UGATT 系统不同，初值范数相同的轨迹，其收敛速度可能存在巨大差异。0-ULS 和 0-UGS 的概念是一致的，因为存在一个轨迹范数上界，该上界对于初始状态范数相同的情况是相同的。

注3.1.2。对于常微分方程系统，0-GAS 等价于 0-UGAS；但在无限维情形下，0-GAS 弱于 0-UGAS。对于线性系统 $\dot{x} = Ax$，其中 A 在巴拿赫空间 X 上生成强连续半群，巴拿赫-施泰因豪斯定理表明，0-GAS 等价于相应半群 T 的强稳定性，并且意味着具有 0-UGS 性质。◁

对于 0-LIM 系统，轨迹可以任意接近原点。显然，0-GATT 意味着 0-LIM。

3.1.2 带输入系统的稳定性概念

现在我们考虑带输入的控制系统。

定义 3.1.3。系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 称为

(i) 一致局部稳定 *(ULS)*，如果存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$、$\gamma \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$ 和 $r > 0$，使得对于所有 $x \in B_r$ 以及所有 $u \in \overline{B_{r,\mathcal{U}}}$，轨迹 $\phi(\cdot, x, u)$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上有定义，并且

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \quad \forall t \geq 0. \tag{3.6}$$

(ii) 一致全局稳定（*UGS*），如果 Σ 是正向完备的，并且存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$，$\gamma \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$ 使得对于所有 $x \in X$，$u \in \mathcal{U}$ 估计（3.6）成立。

(iii) 一致全局有界（*UGB*），如果 Σ是正向完备的，并且存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$、$\gamma \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$ 和 $c > 0$，使得对于所有 $x \in X$ 和所有 $u \in \mathcal{U}$，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U}) + c \quad \forall t \geq 0. \tag{3.7}$$

◁

我们首先给出关于稳定性的 ε-δ 形式的一种标准改写，改写为用 $\mathcal{K}$ 函数表示。

引理 3.1.4。 系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一致局部稳定，当且仅当对所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个$\delta > 0$，使得

$$\|x\|_X \leq \delta, \quad \|u\|_\mathcal{U} \leq \delta, \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon. \tag{3.8}$$

证明。 ”⇒” 设 Σ 是一致局部稳定的。设 $\sigma, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $r > 0$ 满足这些函数以及 r所指定的邻域上的条件 (3.6)。任取 $\varepsilon > 0$，并选取

$$\delta = \delta(\varepsilon) := \min\left\{\sigma^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), r\right\}.$$

根据这一选择，(3.8) 可由 (3.6) 得出。

”⇐” 若 (3.8) 成立，则对 $\varepsilon \geq 0$ 定义

$$\delta(\varepsilon) := \sup\{s \geq 0 : \|x\|_X \leq s \ \wedge \ \|u\|_\mathcal{U} \leq s \Rightarrow \sup_{t \geq 0} \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon\}.$$

ˆ 显然，(3.8) 意味着 $\delta(\cdot)$ 有定义，且关于 0 递增并连续。设 $\delta \in \mathcal{K}$ 是任意一个满足 ˆ $\delta \leq \delta$ 的函数，并令 $r := \sup_{s \geq 0} \hat{}\delta(s) \in \mathbb{R}_+ \cup \infty$。定义 $\gamma := \hat{}\delta^{-1} : [0, r) \to \mathbb{R}$。于是对于 $\|x\|_X < r$ 和 $\|u\|_\mathcal{U} < r$，我们有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \gamma(\max\{\|x\|_X, \|u\|_\mathcal{U}\}) \leq \gamma(\|x\|_X) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U}),$$

这表明系统是 ULS。 □

引理 3.1.4可作如下解读：系统 Σ是 ULS，当且仅当 ϕ 在平衡点 0 处连续，且定义 δ 2.2.26 中的函数不依赖于时间 h。

下一个结果表明，UGB 是 BRS 性质在时间上一致的强化。

命题 3.1.5。 系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是 *UGB*，当且仅当 Σ 是 *BRS*，且引理 *1.2.3* 中的一个连续递增 μ函数可以选取为 使得 μ 不依赖于 t。

证明。 若 Σ 是 UGB，则 Σ 是 BRS，且引理 1.2.3可取为

$$\mu(\|x\|_X, \|u\|_\mathcal{U}) := \sigma(\|x\|_X) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U}) + c.$$

反之，设引理 1.2.3对于某个连续递增函数 $\mu = \mu(\|x\|_X, \|u\|_\mathcal{U})$成立。则对于任意 $t \geq 0$, $x \in X$, $u \in \mathcal{U}$ 有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \max\left\{\mu(\|x\|_X, \|x\|_X), \mu(\|u\|_\mathcal{U}, \|u\|_\mathcal{U})\right\}.$$

那么 $\tilde{\sigma}: \ r \mapsto \mu(r,r)$ 是一个连续增函数。定义 $\sigma(r) := \tilde{\sigma}(r) - \tilde{\sigma}(0)$。那么 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$，并且对于任意 $t \geq 0$、 $x \in X$、 $u \in \mathcal{U}$，我们有：

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) + \sigma(\|u\|_\mathcal{U}) + \tilde{\sigma}(0),$$

这表明 Σ是一致全局有界的。 □

最后，我们可以刻画一致全局稳定性。

引理 3.1.6。考虑一个正向完备系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$。那么， Σ 是一致局部稳定且一致全局有界，当且仅当它是一致全局稳定。

证明。假设 Σ 是一致局部稳定且一致全局有界。这意味着，存在 $\sigma_1,\gamma_1,\sigma_2,\gamma_2\in\mathcal{K}_\infty$ 和 r, $c>0$，使得对所有 x： $\|x\|_X\le r$，以及所有 u： $\|u\|_{\mathcal{U}}\le r$，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le\sigma_1(\|x\|_X)+\gamma_1(\|u\|_{\mathcal{U}})$$

并且对所有 $x\in X$ 和所有 $u\in\mathcal{U}$，以下估计成立:

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le\sigma_2(\|x\|_X)+\gamma_2(\|u\|_{\mathcal{U}})+c.$$

不失一般性地假设，对所有 $s\ge 0$， $\sigma_2(s)\ge\sigma_1(s)$ 且 $\gamma_2(s)\ge\gamma_1(s)$.

选取 $k_1,k_2>0$，使得 $c=k_1\sigma_2(r)$ 且 $c=k_2\gamma_2(r)$。那么

$$c\le c+c\le k_1\sigma_2(\|x\|_X)+k_2\gamma_2(\|u\|_{\mathcal{U}})$$

对于任意 $x\in X$ 和任意 $u\in\mathcal{U}$，若 $\|x\|_X\ge r$ 或 $\|u\|_{\mathcal{U}}\ge r$，则.....因此，对所有 $x\in X$ 和所有 $u\in\mathcal{U}$，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le(1+k_1)\sigma_2(\|x\|_X)+(1+k_2)\gamma_2(\|u\|_{\mathcal{U}}).$$

这表明 Σ 具有一致全局稳定性。 □

3.1.3 带输入系统的吸引性性质

我们定义带输入系统的吸引性性质。

定义 3.1.7。正向完备系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 具有

(i) 渐近增益（*AG*）性质，如果存在一个 $\gamma\in\mathcal{K}_\infty\cup\{0\}$，使得对于所有 $\varepsilon>0$、所有 $x\in X$ 和所有 $u\in\mathcal{U}$，均存在一个 $\tau=\tau(\varepsilon,x,u)<\infty$，使得

$$t\ge\tau\quad\Rightarrow\quad\|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}).\tag{3.9}$$

(ii) 强渐近增益（*sAG*）性质，如果存在一个 $\gamma\in\mathcal{K}_\infty\cup\{0\}$，使得对于所有$x\in X$和所有 $\varepsilon>0$，均存在一个 $\tau=\tau(\varepsilon,x)<\infty$，使得

$$u\in\mathcal{U},\quad t\ge\tau\quad\Rightarrow\quad\|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}).\tag{3.10}$$

(iii) 一致渐近增益（*UAG*）性质，如果存在一个 $\gamma\in\mathcal{K}_\infty\cup\{0\}$，使得对于所有 ε, $r>0$都存在一个 $\tau=\tau(\varepsilon,\ r)$，使得对于所有 $u\in\mathcal{U}$和所有 $x\in B_r$

$$u\in\mathcal{U},\quad x\in B_r,\quad t\ge\tau\quad\Rightarrow\quad\|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}).\tag{3.11}$$

(iv) 有界输入一致渐近增益（*bUAG*）性质，如果存在 $\gamma\in\mathcal{K}_\infty\cup\{0\}$，使得对所有 ε, $r>0$都存在一个 $\tau=\tau(\varepsilon,\ r)<\infty$，使得

$$\|u\|_{\mathcal{U}}\le r,\quad x\in B_r,\quad t\ge\tau\quad\Rightarrow\quad\|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}).\tag{3.12}$$

◁

这三个性质 AG、sAG 和 UAG 都意味着，当 $t \to \infty$ 时，所有轨迹都收敛到原点周围半径为 $\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})$ 的球。AG、sAG 和 UAG 之间的区别在于 τ 对状态和输入的依赖类型。对于 UAG 系统，该时间除取决于 ε 外，只取决于状态的范数。对于 sAG 系统，它取决于状态 x （对于范数相同的不同状态，可能会有所不同），但不取决于 u。对于 AG 系统，τ 取决于 x 和 u。对于无输入系统，AG 和 sAG 性质简化为 0-GATT，而 UAG 性质则变为 0-UGATT。

显然，UAG 性质蕴含 bUAG 性质。若不附加进一步假设（例如 BRS 性质），逆命题是否成立并不完全清楚。然而，对于满足 bUAG 性质的系统，通常无法在不增大增益的情况下验证其具有 UAG 性质（甚至 sAG 性质），如下例所示。

例 3.1.8. 考虑系统

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{1+|u(t)|}x(t), \tag{3.13}$$

其中 $u \in \mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 是一个全局有界输入，而 $x(t) \in \mathbb{R}$ 是状态。

由 *[160, 例 2.46]*,中的分析可知，该系统是正向完备的，具有 *BRS* 性质和零增益的 *bUAG* 性质，具有任意小线性增益的 *UAG* 性质，并且具有任意小线性增益的输入到状态稳定性。然而，它不具有零增益的 *sAG* 性质。

接下来，我们定义与 AG、sAG 和 UAG 类似的性质，用以形式化描述 Σ 的轨迹到达球 $B_{\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})}$ 的 ε-邻域这一现象。

定义 3.1.9. 我们称 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 具有

(i) 极限性质 *(LIM)*，如果存在 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$，使得对所有 $x \in X$、$u \in \mathcal{U}$ 和 $\varepsilon > 0$，都存在一个 $t = t(x, u, \varepsilon)$:

$$\|\phi(t, x, u)\|_X \le \varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}).$$

(ii) 强极限性质 *(sLIM)*，如果存在 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$，使得对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $x \in X$，都存在 $\tau = \tau(\varepsilon, x)$，使得

$$u \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists t \le \tau : \ \|\phi(t, x, u)\|_X \le \varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{3.14}$$

(iii) 一致极限性质 *(ULIM)*，如果存在 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$，使得对每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $r > 0$，都存在一个 $\tau = \tau(\varepsilon, r)$，使得

$$\|x\|_X \le r \ \wedge \ u \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists t \le \tau : \ \|\phi(t, x, u)\|_X \le \varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{3.15}$$

(iv) 有界集上一致极限性质（*bULIM*），如果存在 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$ 和每个 $r > 0$，都存在一个 $\tau = \tau(\varepsilon, r)$，使得

$$\|x\|_X \le r \ \wedge \ \|u\|_{\mathcal{U}} \le r \quad \Rightarrow \quad \exists t \le \tau : \ \|\phi(t, x, u)\|_X \le \varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{3.16}$$

◁

注 3.1.10. 容易看出，AG 等价于存在一个 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$x \in X \ \wedge \ u \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \gamma(\|u\|_\mathcal{U}),$$

并且，LIM 等价于存在一个 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$x \in X \ \wedge \ u \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \inf_{t\geq 0} \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \gamma(\|u\|_\mathcal{U}).$$

特别地，AG 蕴含 LIM。另一方面，容易看出，LIM 与 UGS 一起蕴含 AG。◁

注 3.1.11。 对于无输入系统，sLIM 与 LIM 的概念一致；对于无限维系统，它们严格弱于 ULIM，即使对于由 C_0-半群生成的线性系统也是如此（在这种情况下，ULIM 等价于半群的指数稳定性，而 LIM 至少不强于半群的强稳定性），参见 [154, 命题 5。1]。◁

注 3.1.12。 对于常微分方程（在自然的正则性假设下），LIM、sLIM 与 ULIM 的概念一致；参见命题 A.0.3。◁

3.2 ISS 叠加定理

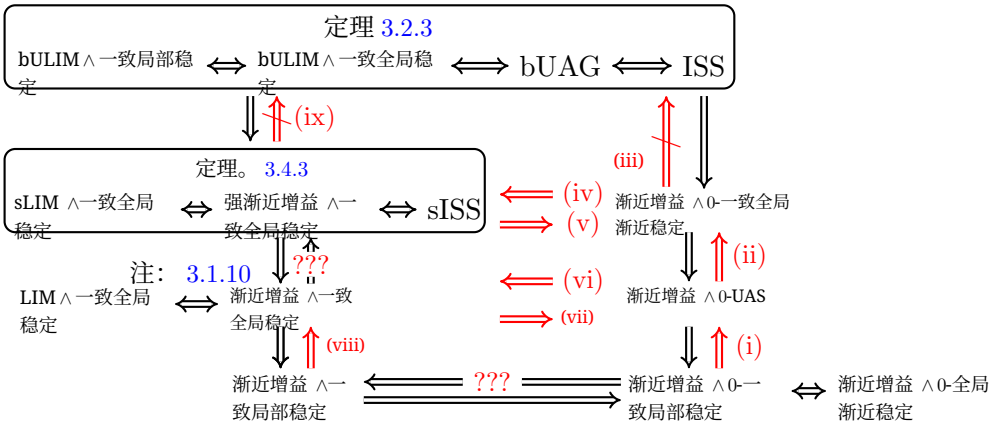

图 3.1: 具有有界.....的无限维系统稳定性性质之间的关系 d
可达性 集，且其流在平凡平衡点处连续：

- 黑色箭头表示在无限维的一般控制系统中成立的蕴含关系或等价关系。
- 带否定号的红色箭头 表示不成立的蕴含关系，且存在相应的反例，见注3.5.1。
- 带问号的黑色箭头表示目前尚不清楚（据作者所知）这些逆向蕴含是否成立。

本章的核心结果是以下定理：

定理 3.2.1 (ISS 叠加定理)。设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个正向完备系统，满足有界可达集和 *CEP* 性质。那么，图 *3.1*所示的关系成立。

黑色箭头表示对*1.1.1*定义的无限维系统类成立的蕴含关系或等价关系；红色箭头（带否定号）表示因本章给出的反例而不成立的蕴含关系；带问号的箭头表示我们尚不清楚这些蕴含关系是否成立。

证明。 结论由定理 3.2.3、3.4.3 得出。红色箭头对应的反例将在第 3.5 节讨论，参见注 3.5.1，其中概述了这些反例。

□

注 3.2.2。 对于右端足够光滑的常微分方程，图 3.1 中的所有组合均等价；对于常微分方程系统，渐近增益 $\wedge$ 0-全局渐近稳定等价于输入到状态稳定性，见命题 A.0.7。相比之下，对于无限维系统，这些概念分为若干组，彼此并不等价。◁

定理3.2.1 的证明将分几个步骤给出。

(i) 首先，在定理 3.2.3中，我们将（统一）输入到状态稳定性刻画为 ULIM、BRS 和 ULS 性质的组合。这意味着图 3.1上方层级中的等价关系。

(ii) 在第 3.4节中，我们引入强输入到状态稳定性（sISS）的概念。对于非线性常微分方程系统，这等价于输入到状态稳定性，见命题A.0.3；对于无输入的线性无限维系统，sISS 等价于相应半群的强稳定性 T （这也说明了这一概念中“强”一词的合理性）。我们在定理3.4.3 中证明

$$\text{sISS} \quad \Leftrightarrow \quad \text{sAG} \wedge \text{UGS} \quad \Leftrightarrow \quad \text{sLIM} \wedge \text{UGS}.$$

(iii) 另一方面，输入到状态稳定性意味着渐近增益 $\wedge$ 0-一致全局渐近稳定，这与 sISS 有很大不同：sISS 并不意味着无扰动系统存在一致收敛速率（因此也不意味着零输入一致全局渐近稳定）。与此同时，渐近增益 $\wedge$ 0-一致全局渐近稳定并不能确保有输入系统具有一致全局稳定性。

(iv) 低于 sISS 和渐近增益 $\wedge$ 0-一致全局渐近稳定的层级中，还存在具有更弱性质的其他层级。讨论无限维系统精细性质并给出图 3.1所需反例的相关内容，将在第 3.5 节详细讨论。

本节的主要结果是对一大类控制系统的输入到状态稳定性进行如下刻画。

定理 3.2.3 (ISS 叠加定理)。设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个正向完备控制系统。以下陈述等价：

(i) Σ是输入到状态稳定的。

(ii) Σ具有一致渐近增益和一致全局稳定性。

(iii) Σ是 *bUAG* 且一致全局稳定。

(iv) Σ是 *bUAG*、*CEP* 且有界可达集。

(v) Σ是 *bULIM*、一致局部稳定且有界可达集。

(vi) Σ是 *bULIM* 且一致全局稳定。

证明。 (i) ⇒ (ii)。估计 $\beta(\|x\|_X,\ t) \le \beta(\|x\|_X,\ 0)$ 对所有 $x \in X$ 以及所有 $t \ge 0$，可知输入到状态稳定性蕴含一致全局稳定。根据引理 3.2.4，可得 UAG 性质。

(ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) 清楚。

(iv) ⇒ (v)。bUAG ∧ CEP 由引理推出一致局部稳定性3.2.5。

(v) ⇒ (vi)。由命题 3.2.6，bULIM ∧ 有界可达集性质蕴含一致全局有界性质。一致全局有界 ∧ 一致局部稳定性由引理蕴含一致全局稳定性 3.1.6。

(vi) ⇒ (i)。bULIM ∧ 一致全局稳定性由引理推出 bUAG 3.2.7。bUAG ∧ 一致全局稳定性蕴含一致渐近增益由引理 3.2.8。一致渐近增益 ∧ 一致全局稳定性由引理蕴含输入到状态稳定性 3.2.9。 □

接下来，我们给出一系列辅助结果，这些结果将在定理 3.2.3 的证明中用到。

引理 3.2.4. 若系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 具有输入到状态稳定性，则它具有一致渐近增益。

证明。 设 Σ 具有输入到状态稳定性，且对应于 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$。任取 $\varepsilon, r > 0$。定义 $\tau = \tau(\varepsilon, r)$ 为方程 $\beta(r, \tau) = \varepsilon$ 的解（若解存在，则因 β 关于第二个自变量的单调性而唯一；若解不存在，则令 $\tau(\varepsilon, r) := 0$）。那么对所有 $t \ge \tau$、所有满足 $\|x\|_X \le r$ 的 $x \in X$ 以及所有 $u \in \mathcal{U}$，都有

$$\begin{aligned} \|\phi(t,x,u)\|_X &\le \beta(\|x\|_X, t) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \\ &\le \beta(\|x\|_X, \tau) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \\ &\le \varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}), \end{aligned}$$

并且蕴含关系 (3.11) 成立。 □

引理 3.2.5. 若系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 具有 *bUAG* 和 *CEP*，则它具有一致局部稳定性 .

证明。 我们将证明 (3.8) 成立，由此结论可由引理 3.1.4得出。设 τ和 γ为 bUAG 定义中的函数。设 $\varepsilon > 0$ 和 $\tau := \tau(\varepsilon/2, 1)$. 任取$\delta_1 \in (0, 1]$ 使得 $\gamma(\delta_1) < \varepsilon/2$。那么对所有 $x \in X$ 满足 $\|x\|_X \le 1$ 以及所有 $u \in \mathcal{U}$ 满足$\|u\|_{\mathcal{U}} \le \delta_1$，都有

$$\sup_{t \ge \tau} \|\phi(t,x,u)\|_X \le \frac{\varepsilon}{2} + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) < \varepsilon. \tag{3.17}$$

由于 Σ是 CEP，因此存在某个 $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon,\ \tau) > 0$，使得

$$\|\eta\|_X \le \delta_2 \ \wedge\ \|u\|_{\mathcal{U}} \le \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{t \in [0,\tau]} \|\phi(t,\eta,u)\|_X \le \varepsilon.$$

结合（3.17），即可证明（3.8），其中 $\delta :=$ 最小值$\{1, \delta_1, \delta_2\}$。 □

我们继续讨论

命题 3.2.6。假设系统 $\Sigma = (X、\mathcal{U}、\phi)$ 是有界可达集，并具有有界统一极限输入到状态稳定性质。那么 Σ是一致全局有界。

证明。任取 $r > 0$ 并令 $\varepsilon := \frac{r}{2}$。由于 Σ 具有有界统一极限输入到状态稳定性质，因此存在一个$\tau = \tau(r)$（更准确地说，根据有界统一极限输入到状态稳定性质，存在 $\tau = \tau(\frac{r}{2}, \max\{r, \gamma^{-1}(\frac{r}{4})\})$），使得

$$x \in \overline{B_r},\ \|u\|_{\mathcal{U}} \le \gamma^{-1}(\tfrac{r}{4}) \ \Rightarrow\ \exists t \le \tau :\ \|\phi(t,x,u)\|_X \le \frac{r}{2} + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \le \frac{3r}{4}. \tag{3.18}$$

不失一般性，我们可以假设 τ关于 r递增。特别地，它是局部可积的。定义 $\bar\tau(r) := \frac{1}{r}\int_r^{2r} \tau(s)ds$，其中 $r > 0$，我们可知 $\bar\tau(r) \ge \tau(r)$，且 $\bar\tau$是连续的。对于任意 $r_2 > r_1 > 0$，通过变量替换 $s = \frac{r_2}{r_1}w$，我们还有

$$\begin{aligned}\bar\tau(r_2) &= \frac{1}{r_2}\int_{r_2}^{2r_2}\tau(s)ds = \frac{1}{r_2}\int_{r_1}^{2r_1}\tau\Big(\frac{r_2}{r_1}w\Big)\frac{r_2}{r_1}dw \\ &> \frac{1}{r_1}\int_{r_1}^{2r_1}\tau(w)dw = \bar\tau(r_1),\end{aligned}$$

因此 $\bar\tau$是递增的。我们进一步定义 $\bar\tau(0) := \lim_{r\to+0}\bar\tau(r)$（该极限存在，因为 $\bar\tau$是递增的）。

由于 Σ 是有界可达集，引理 1.2.3 表明存在一个连续递增函数$\mu :\ \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$，使得对所有 $x \in X$，$u \in \mathcal{U}$ 以及所有 $t \ge 0$ 估计式（1.2）成立。这意味着

$$x \in \overline{B_r},\ \|u\|_{\mathcal{U}} \le \gamma^{-1}(\tfrac{r}{4}),\ t \le \bar\tau(r) \ \Rightarrow\ \|\phi(t,x,u)\|_X \le \tilde\sigma(r), \tag{3.19}$$

其中 $\tilde\sigma\colon\ r \mapsto \mu\big(r,\ \gamma^{-1}(\frac{r}{4})\ \bar\tau(r)\big)$，$r \ge 0$是连续递增的，因为 μ，γ，$\bar\tau$都是连续增函数。

利用恒等公理（Σ1），由（3.19）可知 $\tilde\sigma(r) \ge \|\phi(0,\ x,\ u)\|_X = \|x\|_X$当$x \in B_r$时成立，因此 $\tilde\sigma(r) \ge r > \frac{3r}{4}$ 对任意 $r > 0$均成立。

假设存在 $x \in B_r$、$u \in \mathcal{U}$，满足 $\|u\|_{\mathcal{U}} \le \gamma^{-1}(\frac{r}{4})$，并且存在 $t \ge 0$，使得$\|\phi(t,x,u)\|_X > \tilde\sigma(r)$。定义

$$t_m := \sup\{s \in [0,t] : \|\phi(s,x,u)\|_X \le r\} \ge 0.$$

量 t_m是良定义的，因为根据恒等性质（Σ1），$\|\phi(0,x,u)\|_X = \|x\|_X \le r$。

由余循环性质（Σ4）可知，

$$\phi(t,x,u) = \phi\big(t - t_m, \phi(t_m,x,u), u(\cdot + t_m)\big),$$

并且 $u(\cdot+t_m) \in \mathcal{U}$，因为 Σ满足平移不变性公理。假设 $t - t_m \le \tau(r)$。由于 $\|\phi(t_m,x,u)\|_X \le r$，(3.19) 蕴含对于所有 $t \in [t_m, t]$，$\|\phi(t,x,u)\|_X \le \tilde\sigma(r)$。否则，若 $t - t_m > \tau(r)$，则根据 (3.18)，存在 $t^* < \tau(r)$，使得

$$\big\|\phi\big(t^*, \phi(t_m,x,u), u(\cdot+t_m)\big)\big\|_X = \|\phi(t^*+t_m,x,u)\|_X \le \frac{3r}{4},$$

这与 t_m的定义矛盾，因为 $t_m + t^* < t$。因此

$$x \in \overline{B_r},\ \|u\|_{\mathcal{U}} \le \gamma^{-1}(\tfrac{r}{4}),\ t \ge 0 \ \Rightarrow\ \|\phi(t,x,u)\|_X \le \tilde\sigma(r). \tag{3.20}$$

记 $\sigma(r) := \tilde{\sigma}(r) - \tilde{\sigma}(0)$，其中 $r \geq 0$ 任意。显然， $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$。

对于每个 $x \in X$， $u \in \mathcal{U}$定义 r：=最大值$\{\|x\|_X, 4\gamma(\|u\|_\mathcal{U})\}$。于是，(3.20)立即表明，对于所有 $x \in X$， $u \in \mathcal{U}$， $t \geq 0$ 都有

$$\begin{aligned}\|\phi(t,x,u)\|_X &\leq \sigma\big(\max\{\|x\|_X, 4\gamma(\|u\|_\mathcal{U})\}\big) + \tilde{\sigma}(0)\\ &\leq \sigma(\|x\|_X) + \sigma\big(4\gamma(\|u\|_\mathcal{U})\big) + \tilde{\sigma}(0),\end{aligned}$$

这表明 Σ一致全局有界。 □

L引理 3.2.7。 若系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是 *bULIM* 且一致全局稳定，则 Σ 是 *bUAG* .

证明。 不失一般性，假设 ULIM 和一致全局稳定的定义中 γ 相同（否则取两者中的较大值）。

任取 $\varepsilon > 0$ 以及任意 $r > 0$。根据一致极限性质，存在 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$，其取值与 ε和 r无关，并且 $\tau = \tau(\varepsilon, r)$，使得 (3.16)成立。

由余循环性质，根据一致全局稳定性，对于上述x， u， t 以及任意 $s \geq 0$

$$\begin{aligned}\|\phi(s+t,x,u)\|_X &= \big\|\phi(s,\phi(t,x,u),u(s+\cdot))\big\|_X\\ &\leq \sigma\big(\|\phi(t,x,u)\|_X\big) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U})\\ &\leq \sigma\big(\varepsilon + \gamma(\|u\|_\mathcal{U})\big) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U}).\end{aligned}$$

现在令 $\tilde{\varepsilon} := \sigma(2\varepsilon) > 0$。利用显然的不等式 $\sigma(a+b) \leq \sigma(2a) + \sigma(2b)$，该不等式对任意 a, $b \geq 0$ 都成立，我们继续推导

$$\|\phi(s+t,x,u)\|_X \leq \tilde{\varepsilon} + \tilde{\gamma}(\|u\|_\mathcal{U}),$$

其中 $\tilde{\gamma}(r) = \sigma(2\gamma(r)) + \gamma(r)$。

总之 对任意 $\tilde{\varepsilon} > 0$ 以及任意 $r > 0$，都存在 $\tau = \tau(\varepsilon, r) = \tau(\frac{1}{2}\sigma^{-1}(\tilde{\varepsilon}) r)$，使得 t

$$\|x\|_X \leq r \ \wedge\ \|u\|_\mathcal{U} \leq r \ \wedge\ t \geq \tau \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \tilde{\varepsilon} + \tilde{\gamma}(\|u\|_\mathcal{U}),$$

这表明 Σ 具有 bUAG 性质。 □

下面的引理说明如何将 bUAG 性质“提升”为 UAG 性质。

引理 3.2.8。 若系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一致全局稳定且具有 *bUAG* 性质的控制系统，则 Σ 是一致渐近增益。

证明。 任取 $\varepsilon > 0$， $r > 0$，并令 τ 和 γ 如 bUAG 性质的表述中所述。令 $x \in B_r$ 并令 $u \in \mathcal{U}$ 任意取值。若 $\|u\|_\mathcal{U} \leq r$，则 (3.11) 即为所需的蕴含关系。

令 $\|u\|_\mathcal{U} > r$。因此有 $\|u\|_\mathcal{U} > \|x\|_X$。由于$\Sigma$一致全局稳定，对所有 t， x， u，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \sigma(\|x\|_X) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U}),$$

其中，我们假设 γ 与 bUAG 性质定义中的相同（否则取两者中的最大值）。对于 $\|u\|_\mathcal{U} > \|x\|_X$，我们得到

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \sigma(\|u\|_\mathcal{U}) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U}),$$

因此，对所有 $x \in X$、 $u \in \mathcal{U}$，都有

$$t \geq \tau \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) + \sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}),$$

这表明其具有渐近增益 $\gamma + \sigma$ 的 UAG性质。 □

本节最后一个技术引理是

引理 3.2.9. 若系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 具有 *UAG* 和 *UGS*，则 Σ 是输入到状态稳定性。

证明。 假设 Σ 具有 UAG 和 UGS，并且 γ 在 (3.6) 和 (3.11) 中相同（否则，取 γ 为二者的最大值）。任取 。我们将构造一个函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 使得 (1.4) 成立。

由全局稳定性可知，存在 $\gamma, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$，使得对所有 $t \geq 0$、所有 $x \in B_r$ 以及所有 $u \in \mathcal{U}$，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \sigma(r) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{3.21}$$

定义 $\varepsilon_n := 2^{-n}\sigma(r)$，其中 $n \in \mathbb{N}$。UAG性质意味着存在时间序列 $\tau_n := \tau(\varepsilon_n, r)$；不失一般性，我们可以假设它严格递增，使得对所有 $x \in B_r$ 以及所有 $u \in \mathcal{U}$

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon_n + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) \quad \forall t \geq \tau_n.$$

由（3.21），可知我们可以令 $\tau_0 := 0$。定义 $\omega(r, \tau_n) := \varepsilon_{n-1}$，对于 $n \in \mathbb{N}$ 和$\omega(r, 0) := 2\varepsilon_0 = 2\sigma(r)$。

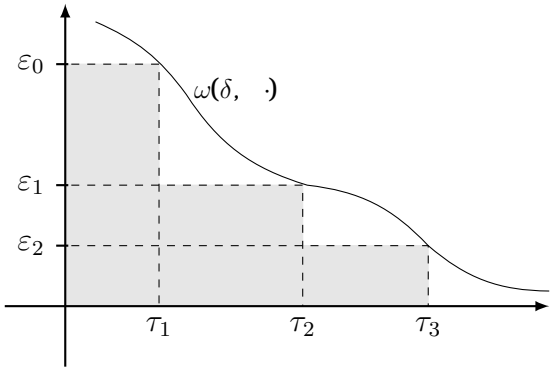

图3.2：函数 $\omega(\delta, \cdot)$ 的构造。

现在将 ω 的定义扩展为函数 $\omega(r, \cdot) \in \mathcal{L}$。对于 $t \in (\tau_n, \tau_{n+1}), n = 0, 1, \ldots$，我们得到

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon_n + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}) < \omega(r,t) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}), \quad x \in B_r, \quad u \in \mathcal{U}.$$

对所有 $r \in \mathbb{R}_+$ 都这样做，我们便得到函数 ω 的定义。

现在定义 $\beta(r,t) := \sup_{0 \leq s \leq r} \omega(s,t) \geq \omega(r,t)$ 对于 $(r,t) \in \mathbb{R}_+^2$。由此定义可^^推出，对于每个 $t \geq 0$, $\beta(\cdot, t)$ 关于 r 递增，而 $\beta(r, \cdot)$ 对于每个 ^$r > 0$ 关于 t 递减，因为每个 $\omega(r, \cdot) \in \mathcal{L}$。此外，对于每个固定的 $t \geq 0$, $\beta(r,t) \leq \sup_{0 \leq s \leq r} \omega(s, 0) =$^$2\sigma(r)$。这意味着对于任意固定的 $t \geq 0$, β 在 $r = 0$ 处关于第一自变量连续。

根据 [172, 命题 9]，β 可满足这样的上界所界定

□

3.3 输入到状态稳定性的积分刻画

本节将通过涉及轨迹积分的概念来刻画 ISS，这本身就很有意义。此外，这也将有助于我们在第4.1节建立非强制型 ISS 李雅普诺夫定理。

定义 3.3.1。 如果存在$\alpha, \psi, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$，使得对所有 $x \in X$、 $u \in \mathcal{U}$ 和 $t \geq 0$，均有：则称系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 具有范数到积分输入到状态稳定性

$$\int_0^t \alpha\big(\|\phi(s,x,u)\|_X\big)ds \leq \psi(\|x\|_X) + t\sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{3.22}$$

◁

对于 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$这一特殊情形，我们再引入一种稳定性概念。

定义 3.3.2。 考虑一个正向完备控制系统 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$，其输入空间为 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，其中 U 是任意赋范向量空间。

如果存在 $\alpha, \psi, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$，使得对所有 $x \in X$、$u \in \mathcal{U}$ 和 $t \geq 0$，均有：则称 Σ 积分到积分输入到状态稳定性

$$\int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds \leq \psi(\|x\|_X) + \int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds. \tag{3.23}$$

◁

我们从以下内容开始

命题 3.3.3. 如果一个正向完备控制系统具有输入到状态稳定性，那么它就是范数到积分输入到状态稳定的。

证明。设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个具有暂态函数 $\beta \in \mathcal{KL}$ 的正向完备输入到状态稳定控制系统。根据 Sontag 的 $\mathcal{KL}$-引理（推论 B.1.9），存在 $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{K}_\infty$，使得对于所有 $r, t \in \mathbb{R}_+$，都有 $\beta(r,t) \leq \xi_1^{-1}(e^{-t}\xi_2(r))$。现在，$\Sigma$ 的输入到状态稳定性意味着存在 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$，使得下式成立：

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \xi_1^{-1}(e^{-t}\xi_2(\|x\|_X)) + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}), \quad t \geq 0,\ x \in X,\ u \in \mathcal{U}.$$

定义 $\bar{\xi}(r) := \xi_1(\frac{1}{2}r)$，$r \in \mathbb{R}_+$。利用不等式 $\bar{\xi}(a+b) \leq \bar{\xi}(2a) + \bar{\xi}(2b)$，该不等式对所有 a 都成立，$b \in \mathbb{R}_+$，我们可得，对于所有 $x \in X$, $u \in \mathcal{U}$ 和 $t \geq 0$，都有

$$\bar{\xi}(\|\phi(t,x,u)\|_X) \leq e^{-t}\xi_2(\|x\|_X) + \xi_1(\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})). \tag{3.24}$$

对式（3.24）积分可得

$$\int_0^t \bar{\xi}(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds \leq \xi_2(\|x\|_X) + t\xi_1 \circ \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}), \quad t \geq 0,\ x \in X,\ u \in \mathcal{U}.$$

这表明 Σ 具有范数到积分 ISS。 □

接下来，我们将证明，对于一类满足 CEP 和有界可达集性质的正向完备控制系统，范数到积分 ISS 蕴含输入到状态稳定性。我们从以下内容开始：

命题 3.3.4。 设 $\Sigma = (X、\mathcal{U}、\phi)$ 是一个正向完备控制系统。如果 Σ 是范数到积分 *ISS*，则 Σ是 *ULIM*。

证明。由于 Σ 是范数到积分 ISS，估计 (3.22) 成立。现在定义 $\gamma(r) := \alpha^{-1}\big(2\sigma(r)\big)$，以及 $\tau(r,\varepsilon) := 2(\psi(r)+1)(\alpha(\varepsilon))^{-1}$，其中 r、$\varepsilon > 0$ 任意。

假设 Σ 对于这些 γ 和 τ 不是 ULIM。那么存在某些 $\varepsilon > 0$、$r > 0$、$x \in B_r$ 和 $u \in \mathcal{U}$，使得对于所有 $t \in [0, \tau(r,\varepsilon)]$，都有 $\|\phi(t,x,u)\|_X > \varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})$。

利用命题 B.1.5，对于这些 ε, x, u 以及所有 $t \in [0, \tau(r,\varepsilon)]$，我们有：

$$\begin{aligned}\int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds &\geq \int_0^t \alpha\big(\varepsilon + \gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})\big)ds \\ &\geq \int_0^t \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon) + \sigma(\|u\|_{\mathcal{U}})ds \\ &= \frac{t}{2}\alpha(\varepsilon) + t\sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}).\end{aligned}$$

特别地，对于 $t := \tau(r,\varepsilon)$，我们得到

$$\int_0^{\tau(r,\varepsilon)} \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds \geq \psi(r) + 1 + \tau(r,\varepsilon)\sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{3.25}$$

结合估计式（3.22）和（3.25），可知

$$\psi(r) + 1 \leq \psi(\|x\|_X) \leq \psi(r),$$

这就产生了矛盾。这表明 Σ是 ULIM。 □

接下来，我们给出一致局部稳定性的一项充分条件。

命题 3.3.5。 设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个满足 *CEP* 性质的正向完备控制系统。若 Σ是范数到积分 *ISS*，则 Σ 是一致局部稳定。

证明。 设 Σ是范数到积分 ISS，且具有定义 α、ψ、σ中相应的 3.3.1。根据引理 3.1.4，Σ 是一致局部稳定，当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\|x\|_X \leq \delta \ \wedge\ \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta \ \wedge\ t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon.$$

为导出矛盾，假设 Σ 不是一致局部稳定。于是存在 $\varepsilon > 0$，使得对于任意$\delta > 0$，都存在 $x \in B_\delta$, $u \in B_\delta$、u和 $t \geq 0$，满足 $\|\phi(t、x、u)\|_X = \varepsilon$。于是存在序列 (x_k) 属于 X、(u_k) 属于 $\mathcal{U}$，以及 $(t_k) \subset \mathbb{R}_+$，使得 $x_k \to 0$ 当 $k \to \infty$时，且 $u_k \to 0$ 当$k \to \infty$ 时，并且

$$\|\phi(t_k, x_k, u_k)\|_X = \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}.$$

由于 Σ 是 CEP，对于上述 ε，存在一个 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon,1)$，使得

$$\|x\|_X \leq \delta_1 \ \wedge\ \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta_1 \ \wedge\ t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X < \varepsilon. \tag{3.26}$$

为 $k \in \mathbb{N}$ 定义如下时间序列：

$$t_k^1 := \sup\{t \in [0, t_k] : \|\phi(t, x_k, u_k)\|_X \leq \delta_1\},$$

如果上确界是在非空集合上取的，则定义 $t_k^1 := 0$ 否则。

同样，由于 Σ 是 CEP，对于上述 δ_1，存在一个 $\delta_2 > 0$，使得

$$\|x\|_X \leq \delta_2 \ \wedge \ \|u\|_{\mathcal{U}} \leq \delta_2 \ \wedge \ t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X < \delta_1. \tag{3.27}$$

不失一般性，我们假设 δ_2 取得足够小，使得

$$\alpha(\delta_1) > \psi(\delta_2). \tag{3.28}$$

现在定义

$$t_k^2 := \sup\{t \in [0,t_k] : \|\phi(t,x_k,u_k)\|_X \leq \delta_2\},$$

若上确界是在非空集合上取的，则令其为该上确界；否则令 $t_k^2 := 0$。

由于 $u_k \to 0$ 和 $x_k \to 0$ 满足 $k \to \infty$，因此存在 $K > 0$，使得 $\|u_k\|_{\mathcal{U}} \leq \delta_2$ 且 $\|x_k\|_X \leq \delta_2$，对 $k \geq K$成立。

从现在起，我们总是假设 $k \geq K$。

利用（3.26）、（3.27）和余循环性质，不难证明，对于 $k \geq K$ 必有 $t_k \geq 2$，否则便会与 $\|\phi(t_k, x_k, u_k)\|_X = \varepsilon$矛盾。

假设 $t_k - t_k^1 < 1$。这意味着（由于 $t_k \geq 2$），$t_k^1 > 0$。根据余循环性质，我们有

$$\|\phi(t_k,x_k,u_k)\|_X = \|\phi(t_k - t_k^1, \phi(t_k^1,x_k,u_k), u_k(\cdot + t_k^1)\|_X.$$

平移不变性公理保证了这些不等式

$$\|u_k(\cdot + t_k^1)\|_{\mathcal{U}} \leq \|u_k\|_{\mathcal{U}} \leq \delta_2 \leq \delta_1.$$

由于 $\|\phi(t_k^1, x_k, u_k)\|_X = \delta_1$，且 $t_k - t_k^1 < 1$，根据（3.26）可得 $\|\phi(t_k, x_k, u_k)\|_X < \varepsilon$，这就产生了矛盾。因此，对于所有 $t_k - t_k^1 \geq 1$，$k \geq K$。

类似地，我们得到 $t_k^1 - t_k^2 \geq 1$ 和 $t_k - t_k^2 \geq 2$。

定义

$$x_k^2 := \phi(t_k^2, x_k, u_k), \quad u_k^2 := u_k(\cdot + t_k^2)$$

and

$$x_k^1 := \phi(t_k^1, x_k, u_k), \quad u_k^1 := u_k(\cdot + t_k^1).$$

由于平移不变性公理 $u_k^1, \ u_k^2 \in \mathcal{U}$ 和

$$\|u_k^1\|_{\mathcal{U}} \leq \|u_k^2\|_{\mathcal{U}} \leq \|u_k\|_{\mathcal{U}} \leq \delta_2.$$

此外，根据 t_k^2 的定义，我们有 $\|x_k^2\|_X = \delta_2$。

应用（3.22），对于 $t := t_k - t_k^2$ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^{t_k - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds &\leq \psi(\|x_k^2\|_X) + (t_k - t_k^2)\sigma(\|u_k^2\|_{\mathcal{U}}) \\ &\leq \psi(\delta_2) + (t_k - t_k^2)\sigma(\|u_k\|_{\mathcal{U}}).\end{aligned} \tag{3.29}$$

另一方面，通过改变积分变量并利用余循环性质，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{t_k - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds &= \int_0^{t_k^1 - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds + \int_{t_k^1 - t_k^2}^{t_k - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds \\ &= \int_0^{t_k^1 - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds + \int_0^{t_k - t_k^1} \alpha(\|\phi(s + t_k^1 - t_k^2, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds \\ &= \int_0^{t_k^1 - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds + \int_0^{t_k - t_k^1} \alpha(\|\phi(s, x_k^1, u_k^1)\|_X) ds.\end{aligned}$$

对于最后一步转移，我们用到了对每个 $s \in [0, t_k - t_k^1]$

$$\begin{aligned}\phi(s + t_k^1 - t_k^2, x_k^2, u_k^2) &= \phi\big(s + t_k^1 - t_k^2, \phi(t_k^2, x_k, u_k), u_k(\cdot + t_k^2)\big) \\ &= \phi\big(s, \phi(t_k^1 - t_k^2, \phi(t_k^2, x_k, u_k), u_k(\cdot + t_k^2)), u_k(\cdot + t_k^1)\big) \\ &= \phi\big(s, \phi(t_k^1, x_k, u_k), u_k(\cdot + t_k^1)\big) \\ &= \phi(s, x_k^1, u_k^1).\end{aligned}$$

根据 t_k^2 和 t_k^1的定义，我们有

$$\begin{aligned}\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X &= \big\|\phi\big(s, \phi(t_k^2, x_k, u_k), u_k(\cdot + t_k^2)\big)\big\|_X \\ &= \|\phi(s + t_k^2, x_k, u_k)\|_X \geq \delta_2, \qquad s \in [0, t_k - t_k^2],\end{aligned}$$

类似地，

$$\|\phi(s, x_k^1, u_k^1)\|_X \geq \delta_1, \quad s \in [0, t_k - t_k^1].$$

继续上述估计，并利用 $t_k - t_k^1 \geq 1$ 和 $\alpha(\delta_1) > \alpha(\delta_2)$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{t_k - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds &\geq (t_k^1 - t_k^2)\alpha(\delta_2) + (t_k - t_k^1)\alpha(\delta_1) \\ &\geq (t_k^1 - t_k^2)\alpha(\delta_2) + (t_k - t_k^1 - 1)\alpha(\delta_1) + \alpha(\delta_1) \\ &\geq (t_k - t_k^2 - 1)\alpha(\delta_2) + \alpha(\delta_1).\end{aligned}$$

由于 $t_k - t_k^2 \geq 2$ 并结合式（3.28），可得

$$\int_0^{t_k - t_k^2} \alpha(\|\phi(s, x_k^2, u_k^2)\|_X) ds > \frac{t_k - t_k^2}{2}\alpha(\delta_2) + \psi(\delta_2). \tag{3.30}$$

结合不等式（3.29）和（3.30），得到

$$\frac{t_k - t_k^2}{2}\alpha(\delta_2) < (t_k - t_k^2)\sigma(\|u_k\|_{\mathcal{U}}).$$

由此可得

$$\frac{1}{2}\alpha(\delta_2) < \sigma(\|u_k\|_{\mathcal{U}}), \quad k \geq K.$$

最后，由于 $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{\mathcal{U}} = 0$，令 $k \to \infty$，我们便得出矛盾。这表明 Σ 是一致局部稳定的。

□

最后，我们用范数到积分 ISS 来刻画输入到状态稳定性。

定理 3.3.6. 设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个正向完备控制系统。当且仅当 Σ 具有输入到状态稳定性时，Σ具有范数到积分 *ISS*，且具有 *CEP* 和有界可达集性质。

证明。“⇒”。显然，输入到状态稳定性蕴含 CEP 和有界可达集性质。根据命题3.3.3，输入到状态稳定性蕴含范数到积分 ISS。

“⇐”。命题3.3.4和3.3.5 意味着 Σ 具有 ULIM 和一致局部稳定性。由于 Σ是有界可达集，定理3.2.3 表明 Σ 具有输入到状态稳定性。

□

3.3.1 关于输入到状态实用稳定性的注

在某些情况下，构造能够产生输入到状态稳定闭环系统的反馈是不可能的（例如量化控制），或者代价过高。对于这些应用，定义如下对输入到状态稳定性的放宽：

定义 3.3.7。 若正向完备控制系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 满足：存在 $\beta\in\mathcal{KL}$、 $\gamma\in\mathcal{K}_\infty$ 和 $c>0$，使得对所有 $x\in X$、 $u\in\mathcal{U}$ 和 $t\geq 0$，以下条件成立：则称其为（一致）输入到状态实用稳定（*ISpS*）：

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\leq\beta(\|x\|_X,t)+\gamma(\|u\|_\mathcal{U})+c. \tag{3.31}$$

◁

在定理 3.3.6中，我们要求 CEP 性质成立。如果不具备 CEP 性质，仍然可以利用[155]中的主要结果，推得 Σ具有输入到状态实用稳定性。

定理 3.3.8。 设 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 是一个具有有界可达集（*BRS*）的正向完备控制系统。若 Σ 是范数到积分 *ISS*，则 Σ是 *ISpS*。

证明。 命题 3.3.4 表明 Σ 是 ULIM。由于 Σ 也具有有界可达集，[155, 定理 III。1] 表明 Σ 是 ISpS。 □

3.4 强输入到状态稳定性

本节介绍并研究一种强输入到状态稳定性的概念。它弱于输入到状态稳定性，并且等价于线性无扰动系统的强稳定性（这也解释了该术语的由来）。

定义 3.4.1. 若正向完备系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 存在 $\gamma\in\mathcal{K}$、 $\sigma\in\mathcal{K}_\infty$ 和 $\beta:X\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，使得

(i) 对所有 $x\in X$、 $x\neq 0$， $\beta(x,\cdot)\in\mathcal{L}$。

(ii) 对所有 $x\in X$ 以及所有 $t\geq 0$， $\beta(x,t)\leq\sigma(\|x\|_X)$。

(iii) 对所有 $x\in X$、所有 $u\in\mathcal{U}$ 以及所有 $t\geq 0$，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\leq\beta(x,t)+\gamma(\|u\|_\mathcal{U}). \tag{3.32}$$

◁

显然，ISS 蕴含 sISS，但对于无限维系统，反向蕴含一般不成立，以下例子对此进行了说明。对于无输入系统，有许多线性偏微分方程系统的例子，它们是强稳定的，但并非指数稳定，参见 [183, 16], 等。

例 3.4.2 （sISS 不蕴含 LISS，即使对于线性系统也是如此）。 考虑以下系统

$$\dot{x}_k = -\frac{1}{k}x_k + \frac{1}{k^3}u, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$

此处 $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$， $x_k(r) \in \mathbb{R}$ 以及 $X := \ell_1$。

该系统不是 *LISS*，因为对于 $u \equiv 0$，它并非指数稳定。

系统 k-*th* 子系统的解(3.33)为

$$\phi_k(t, x_k, u) = e^{-\frac{1}{k}t}x_k + \frac{1}{k^3}\int_0^t e^{-\frac{1}{k}(t-s)}u(s)ds.$$

因此

$$\begin{aligned} |\phi_k(t, x_k, u)| &\leq e^{-\frac{1}{k}t}|x_k| + \frac{1}{k^3}\|u\|_\infty \int_0^t e^{-\frac{1}{k}(t-s)}ds \\ &= e^{-\frac{1}{k}t}|x_k| + \frac{1}{k^3}k(1 - e^{-\frac{1}{k}t})\|u\|_\infty \\ &= e^{-\frac{1}{k}t}|x_k| + \frac{1}{k^2}\|u\|_\infty. \end{aligned}$$

令 $x = (x_k) \in \ell_1$。那么

$$\begin{aligned} \|\phi(t, x, u)\|_X &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{k}t}|x_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\|u\|_\infty \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{k}t}|x_k| + \frac{\pi^2}{6}\|u\|_\infty. \end{aligned}$$

定义 $\beta(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{k}t}|x_k|$。

于是 $\beta(x, \cdot) \in \mathcal{L}$ 对任意 $x \in X$ 以及 $\beta(x, t) \leq \sum_{k=1}^{\infty}|x_k| = \|x\|_X$ 对所有 t, x。因此，(3.33)是强输入到状态稳定的。

强输入到状态稳定性可由以下方式刻画。

定理3.4.3 (强输入到状态稳定叠加定理)。 设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个正向完备控制系统。以下陈述等价。

(i) Σ是 *sISS*。*(ii)* Σ 是强渐近增益且一致全局稳定。*(iii)* Σ是 *sLIM* 且一致全局稳定。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii)。设 Σ 是 sISS，且具有相应的 $\beta: X \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$、 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$和 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$。根据定义， Σ 是一致全局稳定的，其特征由 σ 和 γ给出。

任取 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$。定义 $\tau = \tau(\varepsilon, x)$ 为方程 $\beta(x, \tau) = \varepsilon$ 的解（若该解存在，则由 β 关于第二个变量的单调性可知它是唯一的

；若该解不存在，则令 $\tau(\varepsilon,\ x)\ =0$）。于是，对所有 $t\geq\tau$ 和所有 $u\in\mathcal{U}$

$$\begin{aligned}\|\phi(t,x,u)\|_X &\leq \beta(x,t)+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})\\ &\leq \beta(x,\tau)+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})\\ &\leq \varepsilon+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}),\end{aligned}$$

且估计式（3.10）成立。因此，sISS 蕴含 sAG。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)。显然。

(iii) $\Rightarrow$ (ii)。可参照引理 3.2.7 的思路证明。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。假设 Σ 是一致全局稳定且具有 sAG。我们将构造 $\beta:\ X\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$使其具有定义 3.4.1中的性质，从而使（3.32）成立。

Σ 的一致全局稳定性意味着存在 $\sigma,\ \gamma\in\mathcal{K}_\infty$ 使得对于所有 $t\geq 0$、所有 $u\in\mathcal{U}$以及所有 $x\in X$，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\leq\sigma(\|x\|_X)+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}}).$$

对每个 $x\in X, n\in\mathbb{N}$，定义 $\varepsilon_n(x):=2^{-n}\sigma(\|x\|_X)$。由于具有强渐近增益，存在时间序列 $\tau_n=\tau_n(x):=\tau(\varepsilon_n(x)\ x)$，不失一般性地假设其关于 n 严格递增，使得

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\leq\varepsilon_n+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})\quad\forall u\in\mathcal{U},\ \forall t\geq\tau_n.$$

对 $n\in\mathbb{N}$，定义 $\beta(x,\tau_n):=\varepsilon_{n-1}$。

现在将函数 $\beta(x,\cdot)$ 扩展到 $t\in\mathbb{R}_+\backslash\{\tau_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，使得对所有 $t\geq 0$，$\beta(x,\cdot)\in\mathcal{L}$ 且$\beta(x,t)\ \leq\ 2\sigma(\|x\|_X)$（通过为 $t\in[0,\tau_1$ 充分小地选取 $\beta(x,t)$ 的值即可实现）。

函数 β 满足估计 (3.32)，因为对所有 $t\in(\tau_n,\tau_{n+1})$ 都有$\|\phi(t,x,u)\|_X\leq\varepsilon_n+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})<\beta(x,t)+\gamma(\|u\|_{\mathcal{U}})$。对所有 $x\in X$执行此过程，即得到函数 β的定义。这表明 Σ 是 sISS。 □

对于 sISS 系统，我们有命题 1.3.7 的如下对应结论：

命题 3.4.4。设 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 为一个 *sISS*控制系统。若 $u\in\mathcal{U}$且 $\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot+t)\|_{\mathcal{U}}=0$，则对任意 $x\in X$，有 $\lim_{t\to\infty}\|\phi(t,x,u)\|_X=0$。

证明。设 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 是一个 sISS控制系统，并不失一般性地假设相应的增益 γ 是一个 $\mathcal{K}_\infty$-函数。任取 $x\in X$ 和任意满足 $\lim_{t\to\infty}\|u(\cdot+t)\|_{\mathcal{U}}=0$ 的 $u\in\mathcal{U}$。

任取 $\varepsilon>0$。我们将证明存在时间 $t_\varepsilon>0$，使得对所有 $t\geq t_\varepsilon$，$\|\phi(t,x,u)\|_X\leq\varepsilon$。

选择 t_1，使得 $\|u(\cdot+t_1)\|_{\mathcal{U}}\leq\gamma^{-1}(\varepsilon)$。由于 Σ 的余循环性质和 sISS，我们有

$$\begin{aligned}\|\phi(t+t_1,x,u)\|_X &= \big\|\phi\big(t,\phi(t_1,x,u),u(\cdot+t_1)\big)\big\|_X\\ &\leq \beta\big(\phi(t_1,x,u),t\big)+\gamma\big(\|u(\cdot+t_1)\|_{\mathcal{U}}\big)\\ &\leq \beta\big(\phi(t_1,x,u),t\big)+\varepsilon.\end{aligned}$$

现在任选 t_2，使得 $\beta\big(\phi(t_1,\ x,\ u)\ t_2\big) \le \varepsilon$。这确保 $\|\phi(t_2+t_1,\ x,\ u)\|_X \le 2\varepsilon$. 再次利用余循环性质，我们对所有 $t \ge 0$ 得到：

$$\begin{aligned}&\|\phi(t+t_2+t_1,x,u)\|_X\\ &\qquad\le \beta\big(\phi(t_2+t_1,x,u),t\big)+\gamma\big(\|u(\cdot+t_1+t_2)\|_{\mathcal{U}}\big).\end{aligned}$$

根据平移不变性公理，我们有 $\|u(\cdot+t_2+t_1)\|_{\mathcal{U}} \le \|u(\cdot+t_1)\|_{\mathcal{U}} \le \gamma^{-1}(\varepsilon)$。$\Sigma$ 的强输入到状态稳定性保证，对于所有 $t>0$，

$$\begin{aligned}\|\phi(t+t_2+t_1,x,u)\|_X &\le \sigma\big(\|\phi(t_2+t_1,x,u)\|_X\big)+\varepsilon\\ &\le \sigma(2\varepsilon)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 可以任意小地选取，且当 $\varepsilon\to 0$时，$\sigma(2\varepsilon)+\varepsilon\to 0$，因此该命题的结论成立。

□

3.5 反例

在本节中，我们构造：

- 两个无输入的非线性系统 $\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^3$，
- 两个有输入的非线性系统 $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}^4$，

给出反例，说明以下蕴含关系不成立（注意，公理 (Σ1)–(Σ4) 对所有 $\mathcal{S}^i$均成立）：

$\mathcal{S}^1$：前向完备 $\wedge$0-全局渐近稳定 $\wedge$0-一致渐近稳定 $\not\Rightarrow$ 有界可达集。$\mathcal{S}^2$：前向完备 $\wedge$0-一致全局渐近稳定 $\wedge$渐近增益 $\wedge$局部输入到状态稳定性 $\not\Rightarrow$ 有界可达集。$\mathcal{S}^3$：前向完备 $\wedge$有界可达集 $\wedge$0-全局渐近稳定 $\wedge$0-一致渐近稳定 $\not\Rightarrow$ 0-一致全局稳定。$\mathcal{S}^4$：前向完备 $\wedge$有界可达集 $\wedge$0-一致全局渐近稳定 $\wedge$渐近增益 $\wedge$局部输入到状态稳定性 $\not\Rightarrow$ 一致全局稳定。

系统 $\mathcal{S}^1$ 表明，即使对于无扰动系统，非一致全局吸引性也不能保证解映射 $\phi(t,\ \cdot)$ 将有界球映射到有界球中。即使它确实如此，也仍然无法保证全局稳定性，系统 $\mathcal{S}^3$ 清楚地说明了这一点。这表明，对于非线性无限维系统而言，非一致吸引性与稳定性之间的差异，远比常微分方程系统中的差异显著。

注 3.5.1。在继续进行系统的构造 $\mathcal{S}^i$之前，我们先说明它们如何证明图3.1中所示的否定蕴含关系。

（i）由例 3.4.2.（ii）由 $\mathcal{S}^3$ 的构造得出。（iii）由 $\mathcal{S}^4$ 的构造得出。（iv）由 $\mathcal{S}^4$ 的构造得出。（v）由例 3.4.2得出。

（vi）由构造 $\mathcal{S}^3$ 和/或 $\mathcal{S}^4$ 得出。

（vii）由例3.4.2可得。

（viii）由 $\mathcal{S}^4$的构造可得。

（ix）由例3.4.2可得。

此外，在例4.3.9中，我们通过一个例子表明，0-UGAS $\wedge$ 强渐近增益 $\wedge$ 零增益渐近增益 $\wedge$ 零增益一致全局稳定 $\wedge$ 零增益局部输入到状态稳定均不蕴含输入到状态稳定性（甚至不蕴含 ULIM）。因此，“第二”层级的性质（sISS 和 AG $\wedge$ 0-UGAS）不仅彼此不同（即它们不能相互推出），而且即使同时具备，也不能推出输入到状态稳定性。

最后，系统 $\mathcal{S}^1$ 和 $\mathcal{S}^2$ 表明，具有全局非一致吸引性性质的系统，即使在平衡点附近具有非常强的性质，也未必是有界可达集。$\triangleleft$

例3.5.2 （前向完备 $\wedge$ 0-全局渐近稳定 $\wedge$ 0-UAS $\not\Rightarrow$ 有界可达集）。 根据注*3.1.2*，对于线性无限维系统，*0-GAS* 蕴含 *0-UGS*。现在我们证明，对于非线性系统，*0-GAS* 甚至不能蕴含无扰动系统的有界可达性。考虑由下式定义的无限维系统 $\mathcal{S}^1$

$$\mathcal{S}^1 : \begin{cases} \mathcal{S}_k^1 : \begin{cases} \dot{x}_k = -x_k + x_k^2 y_k - \frac{1}{k^2} x_k^3, \\ \dot{y}_k = -y_k. \end{cases} \\ k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.34}$$

其状态空间

$$X := \ell_2 = \left\{ (z_k)_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty, \quad z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \tag{3.35}$$

我们证明， $\mathcal{S}^1$ 是正向完备的、*0-GAS* 且 *0-UAS*，但不具有有界可达集。此外，定义 $\mathcal{S}^1$ 的非线性项在状态 (x, y) 的有界球上是利普希茨连续的。

在详细证明这些事实之前，我们先非正式地解释一下这一现象。如果我们在形式上将定义 $\mathcal{S}_k^1$ 中的项 $-\frac{1}{k^2}x_k^3$ 替换为 0，那么只要 $y_k(0)$ 取值足够大， $\mathcal{S}_k^1$ 的状态（对每个 k）就会出现有限逃逸时间。项 $-\frac{1}{k^2}x_k^3$ 阻止 $\mathcal{S}_k^1$ 的解增长至无穷大：此时解看起来像一根长矛，被阻尼 $-\frac{1}{k^2}x_k^3$ 截停，并且由于 $y_k(t) \to 0$ 随 $t \to \infty$ 而趋于 *0*，解也收敛至 *0*。然而， k 越大，相应的长矛就越高，因此从有界球出发的 $\mathcal{S}^1$ 的解不存在一致的界。现在，我们给出严格证明。

步骤***1***：方程 (3.34)的右端在有界球上是利普希茨连续的。将方程 (3.34) 的右端 f 记为，任取 $R > 0$、任意一个 $(x, y) \in B_R$、任意一个$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B_R$，并考虑

$$\begin{aligned} \|f(x,y) - f(\tilde{x},\tilde{y})\|_X^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| -x_k + x_k^2 y_k - \frac{1}{k^2}x_k^3 - \left(-\tilde{x}_k + \tilde{x}_k^2 \tilde{y}_k - \frac{1}{k^2}\tilde{x}_k^3 \right) \right|^2 + |y_k - \tilde{y}_k|^2 \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \left| |x_k - \tilde{x}_k| + x_k^2 |y_k - \tilde{y}_k| + |x_k^2 - \tilde{x}_k^2||\tilde{y}_k| + \frac{1}{k^2}|x_k^3 - \tilde{x}_k^3| \right|^2 + |y_k - \tilde{y}_k|^2. \end{aligned}$$

由于 $|x_k| \le R$, $|\tilde{x}_k| \le R$, $|y_k| \le R$，我们看到，对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有

$$|x_k^3 - \tilde{x}_k^3| = |x_k - \tilde{x}_k||x_k^2 + x_k\tilde{x}_k + \tilde{x}_k^2| \le 3R^2|x_k - \tilde{x}_k|$$

and

$$|x_k^2 - \tilde{x}_k^2||\tilde{y}_k| \le 2R^2|x_k - \tilde{x}_k|.$$

因此，我们继续进行上述计算如下：

$$\begin{aligned}
&\|f(x,y)-f(\tilde{x},\tilde{y})\|_X^2 \\
&\quad\le \sum_{k=1}^{\infty} \Big| |x_k - \tilde{x}_k| + R^2|y_k - \tilde{y}_k| + 2R^2|x_k - \tilde{x}_k| + 3R^2|x_k - \tilde{x}_k| \Big|^2 + |y_k - \tilde{y}_k|^2 \\
&\quad\le C(R) \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - \tilde{x}_k|^2 + |y_k - \tilde{y}_k|^2 \\
&\quad\le C(R)\|(x,y) - (\tilde{x},\tilde{y})\|_X^2,
\end{aligned}$$

对于某个 $C = C(R)$。这表明 f 在有界球上利普希茨连续。

步骤 ***2***: $\mathcal{S}^1$ 是 ***0-UAS***。事实上，对于 $r < 1$，李雅普诺夫函数 $V(z) = \|z\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^2 + y_k^2)$ 对所有满足 $|x_k| \le r$ 和 $|y_k| \le r$, $k \in \mathbb{N}$ 的 z_k，均满足以下估计：

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z) &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \Big(-x_k^2 + x_k^3 y_k - \frac{1}{k^2}x_k^4 - y_k^2 \Big) \\
&\le 2\sum_{k=1}^{\infty} \Big(-x_k^2 + |x_k|^3|y_k| - \frac{1}{k^2}x_k^4 - y_k^2 \Big) \\
&\le 2\sum_{k=1}^{\infty} \Big((r^2-1)x_k^2 - y_k^2 \Big) \\
&\le 2(r^2-1)V(z).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

我们看到，V 是系统 (3.34) 的指数局部李雅普诺夫函数，(3.34) 因此是局部一致渐近稳定的。事实上，不难证明，其吸引域包含 $\{z \in \ell_2 : |x_k| < r, |y_k| < r, \forall k\}$。

步骤 ***3***: $\mathcal{S}^1$ 是正向完备且全局吸引的。首先指出，每个 $\mathcal{S}_k^1$ 都是 *0-GAS*（因此也是 *0-UGAS*，因为 $\mathcal{S}_k^1$ 是有限维的）。这是因为任意 $\mathcal{S}_k^1$ 都是一个 *ISS* x_k-系统（以 y_k 为输入）与一个全局渐近稳定的 y_k-系统的级联互连，见 *[205]*。

此外，对于任意 $z(0) \in \ell_2$，存在有限的 $N > 0$，使得 $|z_k(0)| \le \frac{1}{2}$ 对所有$k \ge N$均成立。将 $z(t)$ 的范数分解如下：

$$\|z(t)\|_{\ell_2} = \sum_{k=1}^{N-1} |z_k(t)|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |z_k(t)|^2.$$

根据前面的论证，$\sum_{k=1}^{N-1} |z_k(t)|^2 \to 0$，因为 $t \to 0$ 所有 $\mathcal{S}_k^1$ 对于 $k = 1, \dots, N-1$ 都是零输入一致全局渐近稳定。

由于 $|z_k(0)| \le \frac{1}{2}$对所有 $k \ge N$均成立，我们可以按照 (3.36) 中的计算进行推导，从而得到（对于 $r := \frac{1}{2}$）：

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{k=N}^{\infty} |z_k(t)|^2 \Big) \le -\frac{3}{2} \sum_{k=N}^{\infty} |z_k(t)|^2.$$

因此， $\sum_{k=N}^{\infty}|z_k(t)|^2$ 单调且指数衰减至0 ，当 $t\to\infty$时。总之，$\|z(t)\|_{\ell_2}\to 0$ 当 $t\to\infty$ 时，这表明 $\mathcal{S}^1$ 是正向完备的、*0-GAS* 且 *0-UAS*。

步骤 ***3***: $\mathcal{S}^1$ 不是有界可达集。要证明这一点，只需证明存在一个$r>0$和 $\tau>0$，使得对于任意 $M>0$，都存在 $z\in\ell_2$和 $t\in[0,\tau]$，使得 $\|z\|_{\ell_2}=r$和 $\|\phi(t,z,0)\|_{\ell_2}>M$。

考虑 $\mathcal{S}_k^1$。对于 $y_k\geq 1$和 $x_k\in[0,k]$，有

$$\dot{x}_k\geq -2x_k+x_k^2. \tag{3.37}$$

取一个初始状态 $x_k(0)=c>0$ （它与 k无关），使得$\dot{x}_k=-2x_k+x_k^2$的解在时间 $t^*=1$内发散至无穷大。现在，对所有 $k=1$，取 $y_k(0)=e$ （欧拉常数）2，.....。对于这个初始条件，我们得到 $y_k(t)=e^{1-t}\geq 1$，其中 $t\in[0,1]$。因此，对于 $z_k(0)=(c,e)^T$，存在一个时间 $\tau_k\in(0,1)$，使得对于 $\mathcal{S}_k^1$的解， $x_k(\tau_k)=k$。

现在考虑初始状态 $z(0)$，其中 $z_k(0)=(c,\ e)^T$，且 $z_j(0)=(0,0)^T$，其中$j\neq k$。对于此初始状态，有 $\|z(t)\|_{\ell_2}=|z_k(t)|$，并且

$$\sup_{t\geq 0}\|z(t)\|_{\ell_2}=\sup_{t\geq 0}|z_k(t)|\geq|x_k(\tau_k)|\geq k.$$

由于 $k\in\mathbb{N}$ 是任意的，系统 $\mathcal{S}^1$ 不是 *BRS*。 □

例3.5.3 (前向完备$\wedge$0-零输入一致全局渐近稳定 $\wedge$渐近增益 $\wedge$局部输入到状态稳定性$\not\Rightarrow$有界可达集)。本例对例 *3.5.2*作了修改，说明零输入一致全局渐近稳定 $\wedge$ 渐近增益 $\wedge$ 局部输入到状态稳定性并不意味着有界可达集。令 $\mathcal{S}^2$ 定义如下:

$$\mathcal{S}^2:\begin{cases}\mathcal{S}_k^2:\begin{cases}\dot{x}_k=-x_k+x_k^2y_k|u|-\frac{1}{k^2}x_k^3,\\ \dot{y}_k=-y_k.\end{cases}\\ k=1,2,\dots,\end{cases}$$

并令 $\mathcal{S}^2$ 的状态空间为 ℓ_2*(*见 (3.35)*)*，其输入空间为 $\mathcal{U}:=PC_b(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$。

显然，该系统是零输入一致全局渐近稳定的。此外，很明显， $\mathcal{S}^2$ 不是有界可达集，因为当 $u\equiv 1$ 时，我们得到的恰好是例*3.5.2*中的系统，而该系统不是有界可达集。证明该系统是正向完备、局部输入到状态稳定且具有零增益渐近增益的方法，与我们证明例*3.5.2*具有零输入一致全局渐近吸引性时所采用的论证类似。因此，我们略去证明。 □

例 3.5.4 (正向完备$\wedge$有界可达集 $\wedge$0-全局渐近稳定 $\wedge$0-一致渐近稳定 $\not\Rightarrow$ 0-一致全局稳定)。我们分 *3* 步构造一个反例。

步骤***1***。我们重新考察例 *3.5.2* ，并从上文中为子系统 $\mathcal{S}_k^1$ 的动力学找出有用的估计。

步骤*1.1*。首先注意，对于满足 $x_k^0y_k^0\leq 0$ 的初始条件 $z_k^0=(x_k^0,y_k^0)$，相应的解 $z_k(\cdot)$ 满足 $x_k(t)y_k(t)\leq 0$。事实上，如果 $y_k(0)<0$，那么对于轨迹有定义的所有 $t>0$ ，都有 $y_k(t)<0$ 。由于 $x_k(0)\geq 0$，从 $\mathcal{S}_k^1$ 的方程可知，只要 $x_k(t)>0$，就有 $\dot{x}_k(t)<0$ 。然而，若某个 $\tau>0$ 满足 $x_k(\tau)=0$ ，则根据解的唯一性，对于 $t\geq\tau$ 也有 $x_k(t)=0$ 。因此， x_k 不会越过零，从而在解存在的整个时间内， $x_k(t)y_k(t)\leq 0$ 。当 $y_k(0)\geq 0$ 时，情形也可类似处理。

现在定义

$$V_k(z_k):=x_k^2+y_k^2,\quad z_k=(x_k,y_k)\in\mathbb{R}^2. \tag{3.38}$$

对于任意的 $z_k \in \mathbb{R}^2$，我们都有

$$\dot{V}_k(z_k) = 2\Big(- x_k^2 + x_k^2 x_k y_k - \frac{1}{k^2} x_k^4 - y_k^2 \Big) \le 0.$$

这表明，对于所有 $t \ge 0$，$x_k^0 y_k^0 \le 0$ 蕴含 $|z_k(t)| \le |z_k^0|$。

步骤 ***1.2.*** 容易验证，对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 以及每个 $z_k(0) = (x_k(0)\ y_k(0)) \in \mathbb{R}^2$满足 $y_k(0)x_k(0) > 0$ 的系统 $\mathcal{S}_k^1$ 在初始条件 $z_k(0)$ 下的解（参见 (3.34)）的范数可估计为

$$|x_k(t)| \le |\hat{x}_k(t)| \tag{3.39}$$

其中，$\hat{}x_k(t)$ 是该系统解的第一分量

$$\hat{\mathcal{S}}_k^1 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_k(t) = \hat{x}_k^2(t) y_k(0), \\ \dot{y}_k = -y_k. \end{cases} \tag{3.40}$$

初始条件为 $\hat{}z_k(0) = (\hat{}x_k(0)\ y_k(0)) = (x_k(0)\ y_k(0))$。

事实上，将 V_k 定义为 ***(3.38)***，并沿着 S_k^1 和 $\hat{}\,S_k^1$ 的解对其求导，可见 $\dot{V}_k(z_k(t)) \le \dot{V}_k(\hat{}z_k(t))$。这意味着 $|z_k(t)| \le |\hat{}z_k(t)|$，而且由于两个系统中的 y_k-动力学相同，我们得到 ***(3.39)***。

步骤 ***1.3***。 以下 $\hat{}x_k$-子系统的解 (3.40)为

$$\hat{x}_k(t) = \frac{x_k(0)}{1 - t y_k(0) x_k(0)},$$

且该解对 $t \in [0, {}_{y_k\ 0}{}^{1}{}_{()x_k(0))}$ 存在。————

现在任取 $R > 0$，并假设 $z_k(0) = (x_k(0)\ y_k(0)) \in B_R$。由于

$$\frac{1}{y_k(0)x_k(0)} \ge \frac{2}{y_k^2(0) + x_k^2(0)} \ge \frac{2}{R^2},$$

(3.40) 的解对于任意初始条件 $z_k(0) \in B_R$ 至少在时间区间 $[0, 2R^{-2})$ 上存在。此外，对于每个这样的解，当 $t \in [0,(2y_k(0)x_k(0))^{-1})$（特别是对于 $t \in [0, R^{-2}]$）均有

$$|\hat{x}_k(t)| \le 2|x_k(0)|.$$

总之，对于每个 $R > 0$、所有 $k \in \mathbb{N}$、所有 $z_k(0) = (x_k(0)\ y_k(0)) \in B_R$ 以及所有 $t \in [0, R^{-2}]$，对应于初始条件 $z_k(0)$ 的 $\mathcal{S}_k^1$ 的解满足

$$|z_k(t)| = \sqrt{x_k^2(t) + y_k^2(t)} \le \sqrt{\hat{x}_k^2(t) + y_k^2(t)} \le 2|z_k(0)|. \tag{3.41}$$

步骤 ***2***。 现在我们将通过时间变换来修改系统 $\mathcal{S}^1$。定义 $\tilde{x}_k(t) := x_k(\frac{t}{k})$，$\tilde{y}_k(t) := y_k(\frac{t}{k})$，对于任意 $t \ge 0$ 和任意 $k \ge 1$。换句话说，我们将第 k 个模式的时间放慢到 $\mathcal{S}_k^1$ 时间的 k 倍。我们将这个新系统记为 $\tilde{\mathcal{S}}^1$。定义 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 的方程为

$$\tilde{\mathcal{S}}^1 : \begin{cases} \tilde{\mathcal{S}}_k^1 : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_k = \frac{1}{k}\big(- \tilde{x}_k + \tilde{x}_k^2 \tilde{y}_k - \frac{1}{k^2}\tilde{x}_k^3 \big), \\ \dot{\tilde{y}}_k = -\frac{1}{k}\tilde{y}_k. \end{cases} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.42}$$

的状态空间是 ℓ_2，参见 (3.35)。

我们已经看到，$\mathcal{S}^1$ 不满足 *BRS* 性质，因为随着 k 增大，子系统 $\mathcal{S}_k^1$ 在给定时间 t 的解会出现更大的尖峰。对 $\mathcal{S}^1$ 进行上述非一致的时钟变换，使这种行为不可能发生。同时，$\tilde{\mathcal{S}}^1$仍然不是 *0-UGS*。接下来，我们将详细证明这些事实。

根据 (3.36) 中的计算，很容易得到，对于 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 的动力学，有 $\dot{V}(z) \leq 0$ 若 $\|z\|_{\ell_2} \leq 1$。由此可知，对于所有满足 $z(0) \in \ell_2$ 且 $\|z(0)\|_{\ell_2} \leq 1$ 的情况，我们有

$$\|z(t)\|_X \leq \|z(0)\|_X,$$

因此，$\tilde{\mathcal{S}}^1$ 是一致局部稳定的。

的正向完备性和全局吸引性 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 可参照例 *3.5.2*的思路证明。这表明 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 是 *0-GAS*。

我们来证明 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 是有界可达集。任取 $R > 0$、任意时间 $\tau > 0$ 以及任意 $z \in \ell_2$: $\|z\|_{\ell_2} \leq R$。根据(3.41)，对于任意 $k \in \mathbb{N}$:

$$|\tilde{z}_k(t)| \leq 2|z_k(0)| \quad \forall\, t \in [0, kR^{-2}]. \tag{3.43}$$

因此，存在一个 $N = N(R,\ \tau)$使得估计(3.43)对所有 $z \in B_R$、所有$k \geq N$以及所有 $t \in [0, \tau]$都成立。因此，对于所有 $z \in B_R$和所有 $t \in [0, \tau]$，有

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_X^2 &= \sum_{k=1}^{N-1} |z_k(t)|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |z_k(t)|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} |z_k(t)|^2 + 4 \sum_{k=N}^{\infty} |z_k(0)|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{N-1} |z_k(t)|^2 + 4R^2.
\end{aligned}$$

由于 N 是有限的，且仅取决于 R 和 τ，又因为每个 z_k-子系统都是全局渐近稳定的，因此显然有

$$\sup\{\|z(t)\|_{\ell_2} \ :\ \|z(0)\|_{\ell_2} \leq R,\ t \in [0, \tau]\} < \infty,$$

因此 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 是有界可达集。

为了证明 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 不是*0-UGS*，回顾例*3.5.2*中的构造。

令 $c > 0$ 满足：从 $x_k(0) = c$出发的 $\dot{x}_k = -2x_k + x_k^2$ 的解会在时间 $t^* = 1$内发散至无穷大。考虑 $\tilde{\mathcal{S}}^1$的一个初始状态 $z(0)$，其中 $\tilde{z}_k(0) = (c, e)^T$ 且$\tilde{z}_j(0) = (0, 0)^T$，对于 $j \neq k$。对于这个初始状态，我们有 $\|\tilde{z}(t)\|_{\ell_2} = |\tilde{z}_k(t)| \geq |\tilde{x}_k(t)| = |x_k(\frac{t}{k})|$。因此

$$\sup_{t \geq 0} \|\tilde{z}(t)\|_{\ell_2} \geq |\tilde{x}_k(k\tau_k)| = |x_k(\tau_k)| \geq k.$$

由于 $k \in \mathbb{N}$ 是任意的，这表明 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 不是 *0-UGS*。

步骤 ***3***。令 c 如步骤 *2* 中所述。令 $a := \min\{c, \frac{1}{2}\}$，并选取一个光滑函数 $\xi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，满足

$$\xi(s) := \begin{cases} s & , \ if\ |s| \leq \frac{a}{4}, \\ 0 & , \ if\ |s| > \frac{a}{2}, \\ \in [-\frac{a}{2}, -\frac{a}{4}] \cup [\frac{a}{4}, -\frac{a}{2}] & , \ otherwise. \end{cases}$$

现在考虑对 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 的修改，记为 $\mathcal{S}^3$。

$$\mathcal{S}^3:\begin{cases}\mathcal{S}^3_k:\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_k=-\xi(\tilde{x}_k)+\frac{1}{k}\big(-\tilde{x}_k+\tilde{x}_k^2\tilde{y}_k-\frac{1}{k^2}\tilde{x}_k^3\big),\\ \dot{\tilde{y}}_k=-\xi(\tilde{y}_k)-\frac{1}{k}\tilde{y}_k.\end{cases}\\ k=1,2,\ldots\end{cases}\tag{3.44}$$

由 ξ 产生的额外动力学，相较于 $\mathcal{S}^3$，改善了$\tilde{\mathcal{S}}^1$的稳定性性质。特别是，由于 $\tilde{\mathcal{S}}^1$ 是正向完备、*0-GAS* 且具有 *BRS*，$\mathcal{S}^3$ 也具有这些性质。此外，在原点的某个邻域内，$\mathcal{S}^3_k$ 的动力学受$-\xi(\tilde{x}_k)=-\tilde{x}_k$ 和 $-\xi(\tilde{y}_k)=-\tilde{y}_k$项支配，因此 $\mathcal{S}^3$ *0-UAS*。这一点可以通过李雅普诺夫论证来证明，例如例*3.5.2*中所示。

现在，由于 $\xi(s)$ 的论证表明，$s\to\frac{s}{2}$ 再次不是 *0-UGS*。

$\mathcal{S}^1$，由于 $\xi(s)$ 的论证表明，$\mathcal{S}^3$ 再次不是 *0-UGS*。

□

例3.5.5 (前向完备 $\wedge$ 有界可达集 $\wedge$ 0-一致全局渐近稳定 $\wedge$ 渐近增益 $\wedge$ 局部输入到状态稳定性 $\not\Rightarrow$ 一致全局稳定)。考虑系统 $\mathcal{S}^4$，其状态空间为 ℓ_2(见(3.35))，输入空间为 $\mathcal{U}:=PC_b(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$。

$$\mathcal{S}^4:\begin{cases}\mathcal{S}^4_k:\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_k=-\xi(\tilde{x}_k)+\frac{1}{k}\big(-\tilde{x}_k+\tilde{x}_k^2\tilde{y}_k|u|-\frac{1}{k^2}\tilde{x}_k^3\big),\\ \dot{\tilde{y}}_k=-\xi(\tilde{y}_k)-\frac{1}{k}\tilde{y}_k.\end{cases}\\ k=1,2,\ldots\end{cases}\tag{3.45}$$

由于这个例子是前两个例子的组合，我们省略所有细节，只提及 $\mathcal{S}^4$ 是正向完备的，具有有界可达集、零输入一致全局渐近稳定、局部输入到状态稳定性以及零增益渐近增益，但与此同时，$\mathcal{S}^4$ 并不一致全局稳定。 □

3.6 无输入系统

本节对无输入的抽象系统 $\Sigma=(X,\ \{0\},\ \phi)$ 的稳定性概念进行分类。这种简化的图景有助于理解一般情形，同时本身也很有意义。

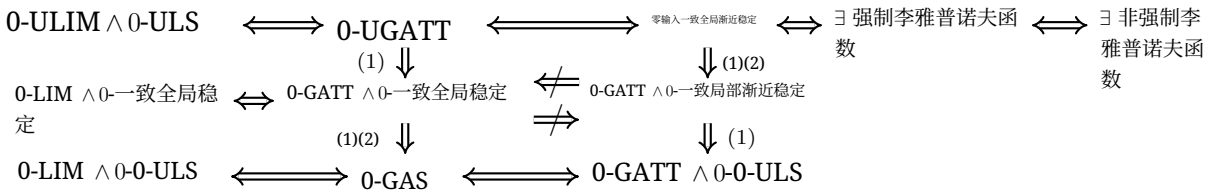

图 3.3：满足有界可达集和 CEP 性质的系统的零输入一致全局渐近稳定刻画。这里，“非强制李雅普诺夫函数”表示非强制李雅普诺夫函数。标记为 (1) 和 (2) 的蕴含关系分别在 (1) 常微分方程系统中变为等价关系，参见例如 [143, 命题 2.5] 以及 (2) 线性系统中变为等价关系（这是巴拿赫-施泰因豪斯定理的推论）。

引理 3.6.1. Σ 是 *0-LIM* 且 *0-ULS*，当且仅当 Σ是 *0-GAS*。

证明。显然，0-GAS 蕴含 0-LIM 和 0-ULS。因此，我们只需证明反向结论。

任取 $\varepsilon_1>0$。由于 Σ 是 0-ULS，因此存在一个 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)>0$，使得 $\|x\|_X\le\delta_1$ 蕴含 $\|\phi(t,\ x,\ 0)\|_X\le\varepsilon_1$，对所有 $t\ge 0$ 均成立。

任取 $x \in X$。由于 Σ 是 0-LIM，存在一个 $T_1 = T_1(x) > 0$，使得$\|\phi(T_1, x, 0)\|_X \leq \delta_1$。根据半群性质，$\phi(t+T_1, x, 0) = \phi(t, \phi(T_1, x, 0), 0)$，因此 $\|\phi(t+T_1, x, 0)\|_X \leq \varepsilon_1$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立。

取一个序列 (ε_i)，使得 $\varepsilon_i \to 0$ as $i \to \infty$。根据上述论证，存在一个时间序列 $T_i = T_i(x)$，使得 $\|\phi(t, x, 0)\|_X \leq \varepsilon_i$ 对所有 $t \geq T_i$ 均成立，因此 $\|\phi(t, x, 0)\|_X \to 0$ as $t \to \infty$。这表明 Σ 是 0-GATT；又由于我们假设 Σ 是 0-ULS，因此 Σ 也是 0-GAS。

□

现在我们可以陈述本节的主要结果。

命题 3.6.2。 对于无输入系统 Σ，图 *3.3* 所示的关系成立。

证明。 一致层面上的等价性直接由一致渐近增益（UAG）与输入到状态稳定性（ISS）的等价性，以及定理 4.1.4 得出。根据定义，0-GAS 等价于 0-GATT $\wedge$ 0-ULS；根据引理 $\wedge$ 0-ULS 等价于 0-LIM 3.6.1。

由于对线性系统而言，0-UAS $\Leftrightarrow$ 0-UGAS 且 0-ULS $\Leftrightarrow$ 0-UGS，因此可得蕴含关系 (2)。最后，(1) 是众所周知的。

0-UAS $\wedge$ 0-GATT 不由 0-GAS 推出，且 0-GAS 也不推出它$\wedge$ 0-UGS，这一点由例 3.5.2可知，因为强连续半群的强稳定性弱于指数稳定性。

□

3.7 总结

渐近增益、一致渐近增益和极限性质的概念源于[209, 210]。强渐近增益、强极限性质和一致极限性质的概念在 [170]中被引入。具有零增益的一致极限性质（一致弱吸引性）在 [173]中被引入，并在 [154, 172]中得到了深入研究。它的动机来自弱吸引性的概念，而后者在动力系统理论中是经典概念 [23], [24]。

定理3.2.1 首次在 [170]中得到证明。ISS 叠加定理（定理3.2.3）见于 [170, 定理 5]，其基于常微分方程系统输入到状态稳定性的经典刻画 [210]。bUAG 性质在 [158], 中被正式提出，但此前也曾使用过这种吸引性概念，例如 [218]。利用 bUAG 性质，[158], 中对 [170, 定理 5] 所给出的输入到状态稳定性刻画作了某种强化，见 [157, 定理 6。7]。我们将在定理3.2.3 中证明这一后续表述下的 ISS 叠加定理。

第3.3 节所示的 ISS 积分刻画归功于 [97]。对于常微分方程，相应结果已见于 [206]。强输入到状态稳定性性质的叠加定理（定理3.4.3）归功于 [170, 定理 12]。线性无限维系统的强输入到状态稳定性在 [177]中进行了分析。

反例主要取自 [153, 170]。我们给出的所有反例都针对“无限常微分方程”，也称为“系综”。因此，输入到状态稳定性（ISS）叠加定理 3.2.3有可能针对其他特定类别的无限维系统得到加强。对于时滞系统，[169], [122]中取得了一些进展。有关时滞系统的 ISS 综述，另请参阅 [37] 。

输入到状态稳定的刻画大大简化了其他重要结果的证明，例如常微分方程 [57] 和混杂系统 [30, 49], 的 Lyapunov-Razumikhin 小增益定理

时滞系统理论 [218], [50], 非强制型 ISS 李雅普诺夫定理 [170, 97],输入到状态稳定性与非线性 $L^2 \to L^2$ 稳定性 [206], 仅举几个例子。

输入到状态实用稳定性（ISpS）已在 [106, 105], 中提出，它扩展了动力系统实际渐近稳定性的早期概念 [137]。无限维系统的 ISpS 叠加定理（定理 3.3.8）已在[155]中证明。[155]中推导出的一些刻画此前已在常微分方程系统这一特殊情形下于 [210], 中证明，而另一些刻画即使在常微分方程情形下也是新的。ISpS 对随机控制系统的稳定化 [232], 、存在量化误差时的控制 [202, 103], 、采样数据控制 [181], 以及运用小增益定理研究非线性系统互联 [106, 105], 等方面都极为有用。

正如我们已经看到的，稳定性概念之间的关系取决于动力学类型（线性、非线性）、状态空间的维数（有限维或无限维）、状态空间的类型（巴拿赫空间、希尔伯特空间、赋范向量空间等），并最终取决于具体的系统类。

例如，仅状态空间是无限维这一事实就意味着闭有界球并非紧集，这使得许多为常微分方程的输入到状态稳定性理论所设计的证明无法成立。特别是，对于具有利普希茨右端的无限维空间，正向完备性与 BRS 性质之间的等价关系，以及 LIM 与 ULIM 性质之间的等价关系通常都不成立。与此同时，尽管状态空间是无限维的，巴拿赫空间上具有可容许算子的线性系统仍具有 BRS 性质，而且吸引性（零控制下半群的强稳定性）蕴含李雅普诺夫稳定性。然而，赋范向量空间（非巴拿赫空间）上的线性无限维系统已经不再具备其中一些优良性质 [101]。

第4章

李雅普诺夫判据

李雅普诺夫函数是非线性系统稳定性分析的重要工具。在第1.5节中，我们已经介绍了强制 ISS 李雅普诺夫函数的概念，说明了此类函数的存在意味着系统具有输入到状态稳定性，并利用这一概念验证了若干重要（非）线性偏微分方程系统的输入到状态稳定性。本章将深入分析李雅普诺夫方法。借助 ISS 叠加定理，我们将说明，在许多情况下可以不要求 ISS 李雅普诺夫函数具有强制性；只要存在非强制 ISS 李雅普诺夫函数，就足以保证非线性抽象控制系统具有输入到状态稳定性。我们还将说明，对于非线性在状态和输入方面均满足利普希茨条件的演化方程，输入到状态稳定性等价于存在 ISS 李雅普诺夫函数。最后，我们将明确构造具有有界输入算子的线性系统（以及在某些限制条件下具有无界输入算子的线性系统）的 ISS 李雅普诺夫函数。

4.1 非强制 ISS 李雅普诺夫函数

在定理 1.5.4中，我们已经看到，ISS 李雅普诺夫函数的存在意味着输入到状态稳定性。然而，为无限维系统，尤其是非线性系统，构造 ISS 李雅普诺夫函数是一项艰巨的任务。即使对于希尔伯特空间上的无扰动线性系统，通过求解李雅普诺夫方程构造的“自然”Lyapunov 函数候选也具有以下形式 $V(x) := \langle Px, x\rangle$，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 X上的标量积，且 P 是一个线性有界正算子，其谱可能包含 0。这样的 V 无法满足式 (1.13) 中的下界条件，只具有较弱的性质 $V(x) > 0$，其中 $x \neq 0$。本节将展示如何利用非强制 ISS 李雅普诺夫函数证明输入到状态稳定性。

定义 4.1.1. 考虑一个控制系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$。若存在 ψ_2，$\alpha \in \mathcal{K}_\infty$和 $\sigma \in \mathcal{K}$，使得连续函数 $V{:}X \to \mathbb{R}_+$ 是 Σ的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数，则称

$$0 < V(x) \leq \psi_2(\|x\|_X), \quad \forall x \in X \setminus \{0\}, \tag{4.1}$$

并且 Σ 的轨迹上 V 的 Dini导数对所有 $x \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$ 满足

$$\dot{V}_u(x) \leq -\alpha(\|x\|_X) + \sigma(\|u\|_\mathcal{U}). \tag{4.2}$$

此外，若（4.2）仅对 $u = 0$成立，则称 V 为无扰动系统 Σ的非强制李雅普诺夫函数◁

注意，V的连续性以及估计式（4.1）意味着 $V(0) = 0$。

下一个命题表明，范数到积分 ISS 性质自然地出现在 ISS 李雅普诺夫函数理论中：

命题 4.1.2。 设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个正向完备控制系统。假设存在一个关于 Σ 的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数。那么 Σ 是范数到积分 *ISS*。

证明。 假设 V是关于 Σ 的非强制 ISS 李雅普诺夫函数，其对应的 ψ_2、α、σ。任取 $u \in \mathcal{U}$ 和任意 $x \in X$。由于我们假设 Σ正向完备，轨迹 $\phi(\cdot, x, u)$ 对所有 $t \geq 0$ 都存在，并且由（4.2）可知，对任意 $t > 0$，有：

$$\dot{V}_{u(t+\cdot)}\big(\phi(t,x,u)\big) \leq -\alpha(\|\phi(t,x,u)\|_X) + \sigma(\|u(t+\cdot)\|_{\mathcal{U}}). \tag{4.3}$$

根据 V的定义，并利用 Σ的余循环性质，可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_{u(t+\cdot)}\big(\phi(t,x,u)\big) &= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(V\big(\phi(h,\phi(t,x,u),u(t+\cdot))\big) - V\big(\phi(t,x,u)\big)\Big) \\ &= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(V\big(\phi(t+h,x,u)\big) - V\big(\phi(t,x,u)\big)\Big).\end{aligned}$$

定义 $y(t) := V\big(\phi(t, x, u)\big)$，可得

$$\dot{V}_{u(t+\cdot)}\big(\phi(t,x,u)\big) = D^+ y(t), \tag{4.4}$$

并且由于系统 Σ 的恒等公理， $y(0) = V(x)$。

鉴于 Σ的连续性公理，对于固定的 x， u 映射 $\phi(\cdot, x, u)$ 是连续的，因此 $t \mapsto -\alpha(\|\phi(t, x, u)\|_X)$ 也是连续的。

对于 $t \geq 0$，定义 $G(t) := \int_0^t \alpha(\|\phi(s, x, u)\|_X)ds$ 以及 $b(t) := \sigma(\|u(t+\cdot)\|_{\mathcal{U}})$。注意，由平移不变性公理可知， b 是非递增的。由于 G 是连续可微的，我们可以将不等式（4.3）改写为

$$D^+ y(t) \leq -\frac{d}{dt}G(t) + b(t). \tag{4.5}$$

任取 $r > 0$ 并定义 $b(s) = b(0)$，其中 $s \in [-r, 0]$。由于 b 在$[-r, \infty)$ 上是非递增函数，因此对于任意 $t \geq 0$，都有 $b(t) \leq \lim_{h\to+0} b(t - r + h)$；再将引理B.3.4 中的最后一个不等式应用于 $b(\cdot - r)$，可得对所有 $t \geq 0$

$$b(t) \leq D_+ \int_0^t b(s-r)ds = -D^+\Big(-\int_0^t b(s-r)ds\Big).$$

因此，(4.5) 意味着

$$D^+ y(t) + \frac{d}{dt}G(t) + D^+\Big(-\int_0^t b(s-r)ds\Big) \leq 0. \tag{4.6}$$

由于

$$D^+(f_1(t) + f_2(t)) \leq D^+(f_1(t)) + D^+(f_2(t)),$$

对于实直线上的任意函数 f_1， f_2 这意味着

$$D^+\Big(y(t) + G(t) - \int_0^t b(s-r)ds\Big) \leq 0.$$

由命题 B.3.3 可知， $t \mapsto y(t) + G(t) - \int_0^t b(s-r)ds$ 是非递增的。由于 $G(0) = 0$, 因此对于所有 $r > 0$ 以及所有 $t \geq 0$

$$y(t) + G(t) - \int_0^t b(s-r)ds \leq y(0) = V(x).$$

由于 b 有界，我们可以取极限 $r \to 0$ ，得到

$$y(t) + G(t) - \int_0^t b(s)ds \leq y(0) = V(x).$$

现在，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$，都有 $y(t) \geq 0$ ，因此对于所有 $t \geq 0$、 $x \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned}\int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds &\leq \psi_2(\|x\|_X) + \int_0^t \sigma(\|u(s+\cdot)\|_{\mathcal{U}})ds \\ &\leq \psi_2(\|x\|_X) + t\sigma(\|u\|_{\mathcal{U}}).\end{aligned} \tag{4.7}$$

证明至此完成。 □

注 4.1.3。 与命题4.1.2类似，可以证明，对于正向完备系统 $\Sigma = (X, PC_b(\mathbb{R}_+, U)\ \phi)$, 非强制 ISS 李雅普诺夫函数的存在意味着积分到积分 ISS。 ◁

现在，我们可以陈述关于非强制ISS李雅普诺夫函数的主要结果。

定理 4.1.4。 设 $\Sigma = (X、\mathcal{U}、\phi)$ 是一个正向完备控制系统，其输入空间为 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+、U)$, 该系统具有 *CEP* 和有界可达集（*BRS*）。如果 Σ存在一个（非强制的）*ISS* 李雅普诺夫函数，那么 Σ具有输入到状态稳定性。

证明。 根据命题4.1.2， Σ是范数到积分 ISS。应用定理3.3.6即可完成证明。

□

注 4.1.5。 事实上，定理 4.1.4成立时并不要求输入空间是 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$（在一般情况下，证明过程保持不变）。然而，正如第 1.5.3 节所述，我们所采用的 ISS 李雅普诺夫函数概念对于具有 $\mathcal{U} := L^p(\mathbb{R}_+, U)$ 的系统过于严格， $p \in [1, +\infty)$。为强调这一点，我们在定理 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$ 的表述中增添了一个额外假设 4.1.4。

◁

对于满足假设4.10的演化方程（2.2.6，定理4.1.4可以加强为：

定理 4.1.6。 设 (4.10) 满足假设*2.2.6* 且具有有界可达集性质。若存在一个针对 (4.10)的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数，则 (4.10)具有输入到状态稳定性。

证明。 引理 2.2.27保证了 (4.10) 具有 CEP 性质。定理 4.1.4 证明了该结论。

□

4.2 ISS李雅普诺夫函数的替代定义

在本节中，令 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。在这种情况下，我们对 ISS 李雅普诺夫函数的定义似乎是最自然的。对于具有 f 且满足推论 A.0.8陈述中条件的前向完备有限维系统，存在非强制 ISS 李雅普诺夫函数不仅意味着范数到积分 ISS，也意味着积分到积分 ISS，这可由命题 4.1.2 和推论 A.0.8得出。然而，对于无限维系统，我们只能证明一个稍弱的性质（它仍强于范数到积分 ISS，但弱于积分到积分 ISS），见 (4.7)。因此，仍有一个问题尚待解决：按照定义 4.1.1所定义的 ISS 李雅普诺夫函数（强制或非强制）的存在，是否意味着正向完备系统具有积分到积分 ISS？尽管我们尚未解决这一问题，但在下面的命题中，我们将证明，如果 ISS 李雅普诺夫函数满足一个稍强的耗散估计，那么就可以验证积分到积分 ISS。

命题 *4.2.1.* 设 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个正向完备控制系统，其输入空间为 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。假设存在一个连续函数 $V\colon X \to \mathbb{R}_+$，$\psi_2, \alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 以及 $\sigma \in \mathcal{K}$，使得 *(4.1)* 成立，并且对于所有 $x \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$，V 沿着 Σ 的轨迹的 *Dini* 导数满足

$$\dot{V}_u(x) \le -\alpha(\|x\|_X) + \Big[D_{+,\tau}\Big(\int_0^\tau \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big)\Big]_{\tau=0}, \tag{4.8}$$

其中 $D_{+,\tau}$ 表示相对于变量 τ 取右下 *Dini* 导数。

则 Σ 是积分到积分 *ISS*。

在证明该命题之前，注意到估计式（4.8）蕴含（4.2），因为对于任意 $x \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$，都有

$$\Big[D_{+,\tau}\Big(\int_0^\tau \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big)\Big]_{\tau=0} \le \Big[D_{+,\tau}\Big(\int_0^\tau \sigma(\|u\|_\mathcal{U})ds\Big)\Big]_{\tau=0} = \sigma(\|u\|_\mathcal{U}).$$

因此，函数 V 如命题4.2.1中所述，是 Σ 的一个 ISS 李雅普诺夫函数，并具有一个（可能）更强的耗散估计。

证明。 假设 V 是 Σ 的非强制 ISS 李雅普诺夫函数，其对应的 ψ_2，α，σ。任取 $u \in \mathcal{U}$ 和 $x \in X$。由于我们假设 Σ正向完备，轨迹 $\phi(\cdot, x, u)$ 对所有 $t \ge 0$ 均存在，并且由（4.2）可知，对任意 $t > 0$，有：

$$\dot{V}_{u(t+\cdot)}\big(\phi(t, x, u)\big) \le -\alpha(\|\phi(t, x, u)\|_X) + \Big[D_{+,\tau}\Big(\int_0^\tau \sigma(\|u(t+s)\|_U)ds\Big)\Big]_{\tau=0}. \tag{4.9}$$

最后一项可以改写成更简单的形式：

$$\begin{aligned}\Big[D_{+,\tau}\Big(\int_0^\tau \sigma(\|u(t+s)\|_U)ds\Big)\Big]_{\tau=0} &= \Big[D_{+,\tau}\Big(\int_t^{t+\tau} \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big)\Big]_{\tau=0} \\ &= \Big[D_{+,\tau}\Big(\int_0^{t+\tau} \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big)\Big]_{\tau=0} = D_{+,t}\Big(\int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big).\end{aligned}$$

按照命题 4.1.2中的论证，我们定义 $y(t) := V\big(\phi(t,x,u)\big)$ 并验证等式$\dot{V}_{u(t+\cdot)}\big(\phi(t,x,u)\big) = D^+y(t)$成立，并且 $y(0) = V(x)$。

鉴于 Σ的连续性公理，对于固定的 x， u 映射 $\phi(\cdot, x, u)$ 是连续的，因此 $t \mapsto -\alpha(\|\phi(t, x, u)\|_X)$ 也连续。因此，我们可以将不等式（4.9）改写为

$$D^+y(t) \le -\frac{d}{dt}\int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds + D_+\Big(\int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big).$$

由于 $-D_+\big(\int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds\big) = D^+\big(-\int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds\big)$，我们接下来

$$D^+y(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds + D^+\Big(-\int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big) \le 0.$$

与命题 4.1.2 的证明相同，利用 D^+的次可加性，我们得到

$$D^+\Big(y(t) + \int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds - \int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big) \le 0.$$

由命题 B.3.3 可知， $t \mapsto y(t) + \int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds - \int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds$是非递增的。对于 $t \ge 0$，定义 $G(t) := \int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds$。由于 $G(0) = 0$，对于所有$r > 0$，我们有

$$y(t) + G(t) - \int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds \le y(0) = V(x) \le \psi_2(\|x\|_X).$$

现在，对于所有 $t \in \mathbb{R}_+$， $y(t) \ge 0$，因此

$$\int_0^t \alpha(\|\phi(s,x,u)\|_X)ds \le \psi_2(\|x\|_X) + \int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds.$$

证明完毕。 □

4.3 局 部输入到状态稳定性的刻画 y

考虑以下形式的无限维演化方程

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)), \quad t > 0, \tag{4.10a}$$
$$x(0) = x_0, \tag{4.10b}$$

其中 $A: D(A) \subset X \to X$ 在巴拿赫空间 X 上生成强连续半群 $(T(t))_{t\ge 0}$，其由有界线性算子构成； U 是输入值的赋范向量空间，$x_0 \in X$ 是给定的初始条件，且 $f: X \times U \to X$。作为可容许输入的空间，我们考虑空间 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$，其由从 $\mathbb{R}_+$ 到 U 的全局有界、分段连续且右连续的函数构成。

显然，系统（4.10）是此前研究过的一般系统类中的一个特例。 (2.12)

在本章余下部分，我们将分析满足假设 4.10形式的非线性系统，并且满足假设 2.2.6，其中 $V = X$。正如我们在第 2 章所证明的，这类系统会导出

适定控制系统（X，$\mathcal{U}$，ϕ），其中 $\phi(\cdot,\ x,\ u)$ 是与初始条件 $x \in X$ 在 $t = 0$时以及输入 $u \in \mathcal{U}$相关联的（温和）解（4.10），且该解是唯一的极大解。

本节将推导形如（4.10）的系统的局部输入到状态稳定性性质的刻画。除了假设 2.2.6外，我们还假设 $f(0,\ 0) = 0$，即，$x \equiv 0$ 是（4.10）的一个平衡点。

我们将依据无扰动系统（4.10）的逆李雅普诺夫定理。为此，定义如下：

定义 4.3.1。一个连续函数 $V\colon\ D \to \mathbb{R}_+$, $0 \in \operatorname{int}(D) \subset X$，称为*0-UAS*李雅普诺夫函数，如果存在 $r > 0$, $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$，使得$\{x \in X\colon \|x\|_X \le r\} \in D$ 且 $\forall x \in X\colon$ $\|x\|_X \le r$，以下估计成立

$$\psi_1(\|x\|_X) \le V(x) \le \psi_2(\|x\|_X), \tag{4.11}$$

以及 的李导数 V沿系统轨迹（4.10），其中 $u = 0$ 满足 es

$$\dot{V}_0(x) \le -\alpha(\|x\|_X) \tag{4.12}$$

对所有 $x \in X\colon\ \|x\|_X \le r$。 ◁

无扰动系统的经典逆李雅普诺夫定理（4.10）表述如下，参见例如 [84, 定理 4.2。1]:

命题 4.3.2。 设 $f(\cdot,\ 0)$ 在 $x = 0$的某个邻域内利普希茨连续。如果 (4.10)是 *0-UAS*，则存在一个利普希茨连续的零输入一致渐近稳定李雅普诺夫函数，适用于(4.10)。

注 4.3.3。 注意，在 [84, 定理 4.2。1]中假设半群具有解析性。然而，在 [84, 定理 4.2。1] 的证明中并未用到这一假设；之所以作此假设，仅仅是因为 [84] 讨论的是解析半群。因此，[84, 定理 4.2。1] 对于仅强连续半群仍然成立。 ◁

下一个结果（与关于 0-UAS 性质鲁棒性的已知事实密切相关 [84, 推论 4.2。3]）表明，在对非线性项 f作出某项假设的条件下，系统（4.10）的利普希茨连续的零输入一致渐近稳定李雅普诺夫函数也是系统（4.10）的 LISS 李雅普诺夫函数。

命题 4.3.4。 设假设 *2.2.6*成立，$f(0,\ 0) = 0$，并且存在 $\sigma \in \mathcal{K}$和 $\rho > 0$，使得对所有 $v \in U\colon\ \|v\|_U \le \rho$ 以及所有 $x \in X\colon\ \|x\|_X \le \rho$ 均有

$$\|f(x, v) - f(x, 0)\|_X \le \sigma(\|v\|_U). \tag{4.13}$$

设 V 是系统 (4.10)的利普希茨连续的零输入一致渐近稳定李雅普诺夫函数。则 V 也是系统 (4.10)的 *LISS* 李雅普诺夫函数。

证明。 设 $V\colon\ D \to \mathbb{R}_+$, $D \subset X$，满足 $0 \in \operatorname{int}(D)$ 是系统（4.10）的一个利普希茨连续（0-UAS）李雅普诺夫函数，并且对所有 $x \in X\colon\ \|x\|_X \le r$ 满足（4.12）。

令假设 2.2.6 成立，并选取命题表述中给出的 ρ，使得 $B_\rho \subset D$。

引理 2.2.27 说明，(4.10) 的流在平衡点处连续。这意味着存在 $r_1 \in (0, r)$ $r_2 \in (0, \rho)$ 和 $t^* > 0$，使得对所有 $x \in X\colon\ \|x\|_X \le r_1$

以及所有 $u \in \mathcal{U}$: $\|u\|_{\mathcal{U}} \le r_2$解 $\phi(\cdot,\ x,\ u)$ 在 $[0,t^*]$ 上存在，并且 $\phi([0,t^*],\ x,\ u) \subset B_r \subset D$。

我们将证明 V 是（4.10）的 LISS 李雅普诺夫函数。为此，我们推导出 $V_u(x)$ 的耗散估计，对所有 $x,\ u$: $\|x\|_X \le r_1$ 以及 $\|u\|_{\mathcal{U}} \le r_2$。我们有:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u(x) &= \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\Big(V\big(\phi(t,x,u)\big) - V(x)\Big) \\
&= \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\Big(V\big(\phi(t,x,0)\big) - V(x) \\
&\qquad\qquad + V\big(\phi(t,x,u)\big) - V\big(\phi(t,x,0)\big)\Big) \\
&\le \dot{V}_0(x) + \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\Big(V\big(\phi(t,x,u)\big) - V\big(\phi(t,x,0)\big)\Big)
\end{aligned}$$

由于 V 是（4.10）的 0-UAS 李雅普诺夫函数，根据（4.12），对于某个$\alpha \in \mathcal{K}_\infty$，有

$$\dot{V}_u(x) \le -\alpha(\|x\|_X) + \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\Big|V\big(\phi(t,x,u)\big) - V\big(\phi(t,x,0)\big)\Big|.$$

由于对于所有 $x,\ u$: $\|x\|_X \le r_1$和 $\|u\|_{\mathcal{U}} \le r_2$，$\phi(t,\ x,\ u) \in D$，并且 V 在 D 上利普希茨连续，因此存在 $L > 0$，使得

$$\dot{V}_u(x) \le -\alpha(\|x\|_X) + L \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\|\phi(t,x,u) - \phi(t,x,0)\|_X. \tag{4.14}$$

常数变易公式意味着:

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t,x,u) - \phi(t,x,0)\|_X \\
&= \Big\| \int_0^t T(t-s)\big(f(\phi(s,x,u),u(s)) - f(\phi(s,x,0),0)\big)ds\Big\|_X \\
&\le \int_0^t \big\|T(t-s)\big\|\big\|f\big(\phi(s,x,u),u(s)\big) - f\big(\phi(s,x,0),0\big)\big\|_X ds.
\end{aligned}$$

记 $M := \sup_{0\le s\le t^*} \|T(s)\| < \infty$。采用这一记号，我们接下来

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t,x,u) - \phi(t,x,0)\|_X \\
&\qquad \le \int_0^t M\Big(\big\|f\big(\phi(s,x,u),u(s)\big) - f\big(\phi(s,x,0),u(s)\big)\big\|_X \\
&\qquad\qquad + \big\|f\big(\phi(s,x,0),u(s)\big) - f\big(\phi(s,x,0),0\big)\big\|_X\Big)ds.
\end{aligned}$$

回忆 $\|\phi(t,\ x,\ u)\|_X \le \rho$对所有 $t \in [0,t^*]$，利用不等式（4.13），并由于 f 关于第一自变量具有利普希茨连续性，存在 $L_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
&\|\phi(t,x,u) - \phi(t,x,0)\|_X \\
&\qquad \le ML_2 \int_0^t \big\|\phi(s,x,u) - \phi(s,x,0)\big\|_X ds + Mt\sigma\big(\sup_{0\le s\le t}\|u(s)\|_U\big) \\
&\qquad \le ML_2 t \sup_{0\le s\le t}\|\phi(s,x,u) - \phi(s,x,0)\|_X + Mt\sigma\big(\sup_{0\le s\le t}\|u(s)\|_U\big).
\end{aligned}$$

上述不等式的右端关于 t 非递减，因此

$$\sup_{0\le s\le t}\|\phi(s,x,u)-\phi(s,x,0)\|_X \le ML_2t\sup_{0\le s\le t}\|\phi(s,x,u)-\phi(s,x,0)\|_X+Mt\sigma\big(\sup_{0\le s\le t}\|u(s)\|_U\big).$$

选取足够小的 $t<t^*$，使得 $1-ML_2t>0$。那么

$$\sup_{0\le s\le t}\|\phi(s,x,u)-\phi(s,x,0)\|_X \le \frac{Mt}{1-ML_2t}\sigma\big(\sup_{0\le s\le t}\|u(s)\|_U\big).$$

在（4.14）中使用这一估计，令 $t\to+0$ 趋于极限，并注意到 u 是右连续函数，我们得到对所有 x： $\|x\|_X\le r_1$ 以及所有 $u\in\mathcal{U}$： $\|u\|_{\mathcal{U}}\le r_2$，LISS估计

$$\dot V_u(x)\le -\alpha(\|x\|_X)+LM\sigma\big(\|u(0)\|_U\big). \tag{4.15}$$

这表明 V 是（4.10）的 LISS李雅普诺夫函数。 □

利用前面的命题，我们得到主要结果：

定理 4.3.5。 设假设 *2.2.6* 成立（其中 $V=X$）， $f(0,0)=0$，并且存在 $\sigma\in\mathcal{K}$ 和 $\rho>0$，使得对所有 $v\in U$： $\|v\|_U\le\rho$ 以及所有 $x\in X$： $\|x\|_X\le\rho$，有

$$\|f(x,v)-f(x,0)\|_X\le\sigma(\|v\|_U).$$

那么，对于系统 (4.10)以下性质等价：

(i) 0-UAS。

(ii) 存在利普希茨连续的零输入一致渐近稳定李雅普诺夫函数。

(iii) 存在利普希茨连续的*LISS*李雅普诺夫函数。

(iv) 局部输入到
状态稳定性。

证明。 该定理的结论可由命题 4.3.2、4.3.4、定理1.5.4以及显然事实——LISS蕴含0-UAS——得出。 □

注4.3.6。 定理的证明4.3.5 基于针对 0-UAS 性质的逆李雅普诺夫定理，因此无法精确估计 $X\times\mathcal{U}$中 LISS 估计（1.4）成立的区域（给定 β， γ）。估计 LISS 估计成立的区域是一个难题，迄今尚未针对无限维系统进行研究。对于常微分方程系统，这个问题已通过线性规划方法数值构造连续分段仿射LISS李雅普诺夫函数来处理 [141]。 ◁

接下来，我们通过一个例子说明，在无限维情形下，定理 4.3.5 中的附加假设不能删去。

例 4.3.7 (零输入一致全局渐近稳定 $\wedge$ 强渐近增益 $\wedge$ 零增益渐近增益 $\wedge$ 零增益一致全局稳定 $\not\Rightarrow$ 局部输入到状态稳定性)。考虑一个系统 Σ，其状态空间为 $X = l_1 := \{(x_k): \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$，输入空间为 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$。

设 k 阶模态 Σ 的动力学为

$$\dot{x}_k(t) = -\frac{1}{1+k|u(t)|}x_k(t). \tag{4.16}$$

我们用记号 $\phi_k(t,\ x_k,\ u)$ 表示 k 阶模态 (4.16) 的状态。则 $\phi(t,\ x,\ u) = (\phi_k(t,\ x_k,\ u))$ (这里表示不同模态的动力学彼此独立)。

显然，Σ 是零输入一致全局渐近稳定的，因为对于 $u \equiv 0$，其动力学由 $\dot{x} = -x$ 给出。同时，对于所有 $t \geq 0$、$x \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$，不等式 $\|\phi(t,\ x,\ u)\|_X \leq \|x\|_X$ 均成立，因此 Σ 是零增益一致全局稳定的。

接下来，我们逐步证明：

(i) Σ满足假设 2.2.6 (因此属于我们所考虑的系统类)。

(ii) Σ是零增益渐近增益。

(iii) Σ 具有任意小（但必然非零）的线性增益的强渐近增益。换句话说，一致性是有代价的，但这个代价可以任意小。

(iv) 最后，Σ 不是局部输入到状态稳定性。

(i)：由于如上所述，系统 Σ 是零增益一致全局稳定，因此其流在平衡点处连续。接下来，我们证明假设 2.2.6 也成立。

注意，f 是全局利普希茨的，因为对于任意 x、$y \in X$ 和任意 $v \in U$

$$\begin{aligned}\|f(x,v)-f(y,v)\|_X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k|v|}|x_k - y_k| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \\ &= \|x-y\|_X.\end{aligned}$$

现在任取 $x \in X$，并证明 f（x、$\cdot$）在任意 $v \neq 0$处连续。考虑

$$\begin{aligned}\|f(x,v) - f(x,v_1)\|_X &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big|\frac{1}{1+k|v_1|} - \frac{1}{1+k|v|}\Big||x_k| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\big||v_1| - |v|\big|}{(1+k|v_1|)(1+k|v|)}|x_k| \\ &\leq |v_1 - v| \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{(1+k|v_1|)(1+k|v|)} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.\end{aligned}$$

由于 $v \neq 0$，并且我们考虑接近 v 的 v_1，因此我们也假设 $v_1 \neq 0$。于是

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{(1+k|v_1|)(1+k|v|)} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{1+k(|v_1|+|v|)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{1+k(|v_1|+|v|)} = \frac{1}{|v_1|+|v|}.$$

综上，我们得到

$$\|f(x,v)-f(x,v_1)\|_X \le \frac{|v_1-v|}{|v_1|+|v|}\|x\|_X.$$

令 $|v_1-v|\le\delta$，其中存在某个 $\delta\in(0,\frac{|v|}{2})$。于是 $|v_1|\ge|v|/2$，并且

$$\|f(x,v)-f(x,v_1)\|_X \le \frac{\delta}{3/2|v|}\|x\|_X.$$

现在，对于任意 $\varepsilon>0$，选取 $\delta<\frac{|v|}{2}$，使得 $\frac{\delta}{3/2|v|}\|x\|_X<\varepsilon$（这总是可行的，因为$v\neq 0$）。这说明 $f(x,\cdot)$ 在 $v\neq 0$ 上的连续性。注意，δ 的选取取决于 $\|x\|_X$，但不取决于 x 本身。

接下来，我们证明 $f(x,\cdot)$ 在零点也连续，但相对于 f 的第一自变量，它不再是一致连续的。再次任取 $x\in X$。对于任意 $\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon,x)>0$，使得 $\sum_{k=N+1}^{\infty}|x_k|<\frac{\varepsilon}{2}$。对于这个 x，我们有：

$$\begin{aligned}
\|f(x,0)-f(x,v_1)\|_X &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k|v_1|}{1+k|v_1|}|x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{N}\frac{k|v_1|}{1+k|v_1|}|x_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{k|v_1|}{1+k|v_1|}|x_k| \\
&\le \sum_{k=1}^{N}\frac{N|v_1|}{1+N|v_1|}|x_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty}|x_k| \\
&< \frac{N|v_1|}{1+N|v_1|}\|x\|_X + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le N|v_1|\|x\|_X + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

取 $\delta:=\frac{\varepsilon}{2\|x\|_X N}$。则对所有 $v_1\in U$：$|v_1|\le\delta$ 可得 $\|f(x,0)-f(x,v_1)\|_X<\varepsilon$。这表明，对于任意给定的 $x\in X$，$f(x,\cdot)$ 在零点处连续。不过请注意，δ 取决于 x（因为 N 也如此），而不只取决于 $\|x\|_X$。总之，我们证明了对于 Σ，假设 *2.2.6* 得以满足。

（***ii***）：Σ 是零增益渐近增益。对于任意 $x\in X$，对任意 $\varepsilon>0$，存在$N=N(x,\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得 $\sum_{k=N+1}^{\infty}|x_k(0)|<\frac{\varepsilon}{2}$。

Σ 在时间 t的状态范数可估计如下：

$$\begin{aligned}
\|\phi(t,x,u)\|_X &= \sum_{k=1}^{N}|\phi_k(t,x_k,u)| + \sum_{k=N+1}^{\infty}|\phi_k(t,x_k,u)| \\
&\le \sum_{k=1}^{N}|\phi_k(t,x_k,u)| + \sum_{k=N+1}^{\infty}|\phi_k(0,x_k,u)| \\
&\le \sum_{k=1}^{N}|\phi_k(t,x_k,u)| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

现在，我们对系统的第 k 个模式在所有 $k=1$、……、N 下的状态进行估计：

$$\begin{aligned}|\phi_k(t,x_k,u)| &= e^{-\int_0^t \frac{1}{1+k|u(s)|}ds}|x_k(0)| \\ &\leq e^{-\int_0^t \frac{1}{1+k\|u\|_{\mathcal{U}}}ds}|x_k(0)| \\ &= e^{-\frac{1}{1+k\|u\|_{\mathcal{U}}}t}|x_k(0)| \\ &\leq e^{-\frac{1}{1+N\|u\|_{\mathcal{U}}}t}|x_k(0)|,\end{aligned} \tag{4.17}$$

对于任意 $u\in\mathcal{U}$ 以及任意 $x_k(0)\in\mathbb{R}$，该式均成立。利用这一估计，我们接下来

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \sum_{k=1}^{N} e^{-\frac{1}{1+N\|u\|_{\mathcal{U}}}t}|x_k(0)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然，对于任意 $u\in\mathcal{U}$，都存在 $\tau_a=\tau_a(x,\varepsilon,u)$，使得 $\sum_{k=1}^{N} e^{-\frac{1}{1+N\|u\|_{\mathcal{U}}}t}|x_k(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ 对$t\geq\tau_a$成立。

总而言之，对于任意 $x\in X$、任意 $t\geq 0$ 以及所有 $u\in\mathcal{U}$，都存在$\tau_a=\tau_a(x,\varepsilon,u)$，使得对所有 $t\geq\tau_a$，$\|\phi(t,x,u)\|_X\leq\varepsilon$. 均成立。这表明 Σ 具有渐近增益稳定性，且 $\gamma\equiv 0$。然而，时间 τ_a 取决于 u，因此上述论证无法说明该系统是否具有强渐近增益稳定性。

(iii): 接下来，我们证明 Σ 是强渐近增益（*sAG*），但为此需要付出代价，即增加一个线性增益。不过，这个线性增益可以任意小。

在 (4.17) 中，我们得到了 Σ 的 k 模式的状态的以下估计：

$$|\phi_k(t,x_k,u)| \leq e^{-\frac{1}{1+k\|u\|_{\mathcal{U}}}t}|x_k(0)|.$$

该表达式还可以进一步估计为：

$$|\phi_k(t,x_k,u)| \leq e^{-\frac{1}{1+k\max\{\|u\|_{\mathcal{U}},\frac{2^k}{r}|x_k(0)|\}}t}\cdot\max\{|x_k(0)|,\frac{r}{2^k}\|u\|_{\mathcal{U}}\}. \tag{4.18}$$

对于 $|x_k(0)|\geq\frac{r}{2^k}\|u\|_{\mathcal{U}}$，我们得到

$$|\phi_k(t,x_k,u)| \leq e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)|. \tag{4.19}$$

对于 $|x_k(0)|\leq\frac{r}{2^k}\|u\|_{\mathcal{U}}$，不等式 (4.18) 意味着

$$|\phi_k(t,x_k,u)| \leq e^{-\frac{1}{1+k\|u\|_{\mathcal{U}}}t}\frac{r}{2^k}\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{r}{2^k}\|u\|_{\mathcal{U}}. \tag{4.20}$$

总之，对于任意 $x_k(0)\in\mathbb{R}$ 以及任意 $u\in\mathcal{U}$，由 (4.19) 和 (4.20) ：

$$|\phi_k(t,x_k,u)| \leq e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)| + \frac{r}{2^k}\|u\|_{\mathcal{U}}. \tag{4.21}$$

得到第 k 个模式的状态估计后，我们继续估计 Σ 的整体状态：

$$\begin{aligned}\|\phi(t,x,u)\|_X &= \sum_{k=1}^{\infty}|\phi_k(t,x_k,u)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{2^k}\|u\|_{\mathcal{U}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)| + r\|u\|_{\mathcal{U}}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

该估计对所有 $t \geq 0$、所有 $x \in X$、所有 $u \in \mathcal{U}$ 以及任意 $r > 0$ 均成立。

现在，我们应用上文在证明该系统具有渐近增益性质时使用的技巧。对于任意 $x \in X$，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得 $\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$。利用这一事实，我们从(4.22)继续进行估计：

$$\begin{aligned}\|\phi(t,x,u)\|_X &\leq \sum_{k=1}^{N} e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)| \\ &\qquad + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)| + r\|u\|_{\mathcal{U}}. \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)| + \frac{\varepsilon}{2} + r\|u\|_{\mathcal{U}}.\end{aligned}$$

对于上述 ε 和 x，我们可以找到足够大的时间 $\tau_a = \tau_a(\varepsilon, x)$（显然，$\tau_a$ 也取决于 N，但 N 本身只取决于 x 和 ε），使得对于所有 $u \in \mathcal{U}$ 以及所有 $t \geq \tau_a$

$$\sum_{k=1}^{N} e^{-\frac{1}{1+k\frac{2^k}{r}|x_k(0)|}t}|x_k(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

总之，我们得到：对于任意 $r > 0$，对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及任意 $x \in X$，存在$\tau_a = \tau_a(t, x)$，使得对于所有 $u \in \mathcal{U}$ 以及所有 $t \geq \tau_a$

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon + r\|u\|_{\mathcal{U}}.$$

这表明 Σ 具有强渐近增益性质，其增益为 $\gamma(s) = rs$。

为完成 ***(iii)*** 的证明，我们证明 Σ 对于增益 $\gamma \equiv 0$不是强渐近增益。

事实上，取 $\varepsilon := \frac{1}{2}$, $x = e_1 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)^T$，并考虑某个常值输入$u \equiv c$。相应的解只有一个非零分量——第一个分量。状态的范数等于

$$\|\phi(t, e_1, u)\|_X = |\phi_1(t, 1, u)| = e^{-\frac{1}{1+c}t}.$$

如果 Σ 具有零增益渐近增益，那么应存在一个不依赖于u的时间 τ_a，使得对于所有 c和所有 $t \geq \tau_a$都有 $e^{-\frac{1}{1+c}t} \leq \frac{1}{2}$成立。但这是错误的，因为只要 $c \to \infty$，$e^{-\frac{1}{1+c}\tau_a}$就会单调递增至 *1*。因此，Σ 不具有零增益渐近增益。

(iv)：我们通过反证法论证，Σ 不是局部输入到状态稳定性。假设 Σ 具有局部输入到状态稳定性，因此存在 $r > 0$、$\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$，使得不等式(1.4）对所有$x \in X$：$\|x\|_X \leq r$ 以及对所有 $u \in \mathcal{U}$：$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq r$均成立。

对所有 $t \geq 0$，选取一个常值输入 $u(t) = \varepsilon$，其中 $\varepsilon > 0$ 的选取满足

$$\max\{\varepsilon, 3\gamma(\varepsilon)\} \leq r.$$

这总是可行的，因为 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$。记 $c := \gamma(\varepsilon)$。

Σ 的局部输入到状态稳定性性质意味着，对于所有满足范数 $\|x\|_X = 3c \leq r$ 的 $x \in X$ 以及所有 $t \geq 0$，都有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \beta(3c, t) + c. \tag{4.23}$$

由于 $\beta \in \mathcal{KL}$，存在 t^* （它取决于 c，但不取决于 x），使得$\beta(3c,\ t^*) = c$[1]，因此对于所有 $x \in X$ 满足 $\|x\|_X = 3c$ 的情况，必有

$$\|\phi(t^*, x, u)\|_X \leq 2c. \tag{4.24}$$

现在考虑形如 $x_{<k>} = 3c \cdot e_k$ 的初始状态，其中 e_k 是 $X = l_1$ 的第 k 个标准基向量。当然，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\|x_{<k>}\|_X = 3c$ 。于是

$$\|\phi(t^*, x_{<k>}, u)\|_X = |\phi_k(t^*, 3c, u)| = e^{-\frac{1}{1+k\varepsilon}t^*}3c.$$

现在，对于任意 $t^* > 0$，存在 k 使得 $e^{-\frac{1}{1+k\varepsilon}t^*}3c > 2c$，这与 (4.24)矛盾。这说明 Σ不是局部输入到状态稳定性。

注 4.3.8。 可以直接验证，定理4.3.5 的第二个假设不成立。 ◁

在例 4.3.7中，我们已经证明，一个具有零输入一致全局渐近稳定、强渐近增益、零增益渐近增益和零增益一致全局稳定性质的系统，不一定具有局部输入到状态稳定性。接下来，我们修改这个例子，以说明即使系统除了具备上述性质外还具有局部输入到状态稳定性，也不能保证其具有输入到状态稳定性。

例 4.3.9 (零输入一致全局渐近稳定 $\wedge$强渐近增益$\wedge$零增益渐近增益 $\wedge$零增益一致全局稳定 $\wedge$局部输入到状态稳定性 $\not\Rightarrow$输入到状态稳定性)。 考虑一个系统 Σ，其状态空间为 $X := l_1$，输入空间为 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$。再设 Σ 的第 k 个模式的动力学为

$$\dot{x}_k(t) = -\frac{1}{1+|u(t)|^k}x_k(t). \tag{4.25}$$

我们继续使用记号 $\phi_k(t,\ x_k,\ u)$ 表示 k模式的状态 (4.25).

与例 *4.3.7*中一样，可以证明该系统满足假设 *2.2.6*，是零输入一致全局渐近稳定的，具有零增益一致全局稳定性、零增益渐近增益，以及具有非零增益的强渐近增益（由于证明完全类似，此处略去）。此外，对于 u: $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq 1$，对所有 $x \in X$ 及所有 $t \geq 0$，有

$$\|\phi(t, x, u)\|_X \leq e^{-\frac{1}{2}t}\|x\|_X. \tag{4.26}$$

因此， Σ 是零增益的局部输入到状态稳定，并且具有 $r = 1$。

证明 Σ 不是输入到状态稳定性的思路与例 *4.3.7*类似，只需将所考虑输入的范数改为大于 *1*。

4.4 半线性系统的 ISS 李雅普诺夫逆定理

本节将证明一个适用于形如 (4.10) 的系统的逆向 ISS 李雅普诺夫定理。

我们沿用 [209]中针对常微分方程描述的系统所提出的方法。考虑通过反馈律实现对（4.10）的全局稳定化问题，这些反馈律受到

[1]注意，任何满足 LISS估计的 $\beta \in \mathcal{KL}$ 都会自动满足 $\beta(r,\ 0) \geq r$，对所有 $r > 0$均成立（在 LISS估计中考虑 $t = 0$ 和 $u \equiv 0$ 即可）。

幅值不超过 1 的乘性扰动的影响。设 $\varphi: X \to \mathbb{R}_+$ 在有界集上利普希茨连续，并考虑输入

$$u(t) := d(t)\varphi(x(t)), \quad t \geq 0, \tag{4.27}$$

其中 $d \in \mathcal{D}$，其中

$$\mathcal{D} := \{d : \mathbb{R}_+ \to D, \text{ piecewise continuous}\}, \qquad D := \{d \in U : \|d\|_U \leq 1\}. \tag{4.28}$$

将此反馈律应用于（4.10），得到闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + f(x(t), d(t)\varphi(x(t))) \\ &=: Ax(t) + g(x(t), d(t)). \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.4.1 闭环系统的基本性质

一般而言，假设 2.2.6 并不能保证 g具有利普希茨连续性。为确保这一点，我们假设 f 关于 u也具有利普希茨连续性。

定义 4.4.1。如果对于每个 $R > 0$，都存在 $L > 0$ 使得.....，则称 $f: X \times U \to X$ 在 $X \times U$ 的有界球上利普希茨连续

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in \overline{B_R}, \quad u_1, u_2 \in \overline{B_{R,U}} \\ \Rightarrow \quad \|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)\|_X \leq L(\|x_1 - x_2\|_X + \|u_1 - u_2\|_U). \end{aligned} \tag{4.30}$$

◁

容易看出，如果 f 在 $X \times U$ 的有界球上利普希茨连续，则假设2.2.6 成立，特别是（4.10）是适定的。

下一个引理表明， g 在（4.29）中是利普希茨连续的。

引理 4.4.2. 设 f在 $X \times U$ 的有界球上利普希茨连续。那么 g（由 （4.29）定义）在 X 的有界球上关于第二个自变量一致地利普希茨连续，即存在 $\forall C > 0\ \exists L_g\ (C) > 0$, 使得 $\forall x,\ y \in B_C$ 并且 $\forall d \in D$，有

$$\|g(x, d) - g(y, d)\|_X \leq L_g(C)\|x - y\|_X.$$

证明。 任取 $C > 0, x,\ y \in B_C$ 和 $d \in D$。则

$$\begin{aligned} \|g(x, d) - g(y, d)\|_X &= \|f(x, d\varphi(x)) - f(y, d\varphi(y))\|_X \\ &= \|f(x, d\varphi(x)) - f(y, d\varphi(x)) + f(y, d\varphi(x)) - f(y, d\varphi(y))\|_X \\ &\leq \|f(x, d\varphi(x)) - f(y, d\varphi(x))\|_X + \|f(y, d\varphi(x)) - f(y, d\varphi(y))\|_X. \end{aligned}$$

由于 φ 是利普希茨连续的，因此它在 B_C 上有界，上界为 R。不失一般性，设 $R > C$。由于 f 在 $X \times U$的有界球上是利普希茨连续的，且由于$\|d\|_U \leq 1$，我们可以将第一项上界估计为 $L_f^1(R)\|x - y\|_X$，将第二项上界估计为 $L_f^2(R)|\varphi(x) - \varphi(y)|$。现在根据 φ的局部利普希茨连续性即可得到该结论。 □

特别地，引理 4.4.2表明，系统 (4.29) 是适定的。将系统 (4.29) 在时间 t、从 $x \in X$ 出发且带有扰动 $d \in \mathcal{D}$时的最大温和解记为 $\phi_\varphi(t, x, d)$。在其存在区间内，$\phi_\varphi(t, x, d)$ 与输入为 $u(t) = d(t)\varphi(\phi_\varphi(t, x_0, d))$ 的 (4.10) 的解重合。 [2]

注 4.4.3。 如果f 关于输入不是利普希茨连续的，那么利普希茨连续反馈未必会导出利普希茨连续的 g。例如，考虑 $\dot{x}(t) = (u(t))^{1/3}$ 和 $u(t) := x(t)$。

◁

接下来，我们列出闭环系统（4.29）的若干性质，这些性质对后续内容至关重要。

定义 4.4.4。 如果对任意$C > 0$ 以及任意 $\tau > 0$，系统（4.29）都满足

$$\sup_{\|x\|_X \le C,\ d\in\mathcal{D},\ t\in[0,\tau]} \|\phi_\varphi(t, x, d)\|_X < \infty.$$

◁

定义 4.4.5。 假设（4.29）是正向完备的。若对任意 $\tau > 0$ 和任意 $R > 0$，都存在 $L > 0$，使得对任意 x、$y \in B_R$，对所有 $t \in [0, \tau]$ 以及所有 $d \in \mathcal{D}$，均有

$$\|\phi_\varphi(t, x, d) - \phi_\varphi(t, y, d)\|_X \le L\|x - y\|_X. \tag{4.31}$$

◁

定义 4.4.6。 系统 (4.29) 称为 一致全局渐近稳定（*UGAS*），如果 (4.29) 是正向完备的，并且存在某个 $\beta \in \mathcal{KL}$ 使得

$$d \in \mathcal{D}, \quad x \in X, \quad t \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \|\phi_\varphi(t, x, d)\|_X \le \beta(\|x\|_X, t). \tag{4.32}$$

◁

UGAS 可以借助一致全局吸引性来刻画。

定义 4.4.7。 系统 (4.29) 称为一致全局吸引（*UGATT*），如果 (4.29) 是正向完备的，且对于任意 r，$\varepsilon > 0$ 存在 $\tau = \tau(r, \varepsilon)$，使得对于所有$d \in \mathcal{D}$ 均有

$$\|x\|_X \le r, \quad t \ge \tau(r, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \|\phi_\varphi(t, x, d)\|_X \le \varepsilon. \tag{4.33}$$

◁

定义 4.4.8. 系统 (4.29) 称为全局李雅普诺夫稳定，如果 (4.29) 是正向完备的，并且存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$d \in \mathcal{D}, \quad x \in X, \quad t \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \|\phi_\varphi(t, x, d)\|_X \le \sigma(\|x\|_X). \tag{4.34}$$

◁

[2] (4.10) 的正向完备性并不意味着 (4.29) 正向完备。例如，考虑$\dot{x} = -x + u$，$u(t) = d \cdot x^2(t)$ 对于 $d > 0$。

一致全局渐近稳定的以下刻画类似于引理 3.2.9，另见 [113,定理 2。2]。

命题 4.4.9。 系统 (4.29) 一致全局渐近稳定，当且仅当 (4.29) 一致全局吸引且全局李雅普诺夫稳定。

一致全局渐近稳定性所对应的强制李雅普诺夫函数定义如下：

定义 4.4.10。 称连续函数 $V\colon\ X \to \mathbb{R}_+$ 为系统（李雅普诺夫函数（4.29）的李雅普诺夫函数，如果存在 $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\psi_1(\|x\|_X) \leq V(x) \leq \psi_2(\|x\|_X) \quad \forall x \in X \tag{4.35}$$

成立，并且 V 沿系统（4.29）轨迹的 Dini导数对所有$x \in X$以及所有 $d \in \mathcal{D}$ 均满足

$$\dot{V}_d(x) \leq -\alpha(\|x\|_X). \tag{4.36}$$

◁

以下逆李雅普诺夫定理对我们的后续推导至关重要 [113,第 3 节。4]:

定理 4.4.11。 设 (4.29)一致全局渐近稳定，且其流关于 $\mathcal{D}$在紧区间上一致利普希茨连续。那么 (4.29) 存在一个李雅普诺夫函数，该函数在有界球上利普希茨连续。

我们将需要以下性质，该性质形式化了反馈（4.10）相对于反馈（4.27）的鲁棒性。

定义 4.4.12。 如果存在4.10系统，则称其为弱一致鲁棒渐近稳定（*WURS*），如果存在 $\varphi\colon\ X \to \mathbb{R}_+$，其在有界集上是利普希茨连续的，并且存在 $\psi \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\varphi(x) \geq \psi(\|x\|_X) \quad \forall x \in X,$$

并且（4.29）关于该 φ是一致全局渐近稳定的。 ◁

下一个命题说明了系统（4.10）的 WURS 性质如何反映（4.29）的解的正则性。

P命题 4.4.13。 考虑一个正向完备系统（4.10）。假设 t

(i) f 在 $X \times U$的有界球上是利普希茨连续的。

(ii) （4.10）是 *WURS*。

那么，对于任意 φ 满足定义 *4.4.12*中条件的，闭环系统 (4.29)的流在紧区间上关于 $\mathcal{D}$ 一致利普希茨连续。

证明。 由于 (4.10) 是 WURS，且 φ 是符合定义 4.4.12要求的稳定化反馈，因此系统 (4.29) 正向完备且一致全局渐近稳定。令 $\beta \in \mathcal{KL}$ 为 (4.32) 中的界。则 (4.29) 是 RFC，因为对于任意 $C > 0$ 以及任意 $\tau > 0$

$$\sup_{\|x\|_X \le C,\ d\in\mathcal{D},\ t\in[0,\tau]} \|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X \le \beta(C,0) < \infty.$$

假设 (i) 与引理 4.4.2 共同推出 g 关于第二个自变量一致地在有界集上利普希茨连续。现在，假设 2.2.1、2.2.2 显然对系统（4.29）成立。由于 f 关于两个自变量均利普希茨连续，且 φ也利普希茨连续，因此可知 g 关于两个变量连续。此外，系统（4.29）是一致全局渐近稳定的，因而有 $g(0,\ d)\ = 0$ 对所有 d成立。这表明假设 2.2.6 对（4.29）也成立。现在，将定理 2.2.24 应用于系统（4.29），即可得出结论。

□

4.4.2 主要结果

本节证明，对于系统（4.10），当 f 在 $X \times U$ 的有界球上利普希茨连续时，图 4.1 所示的概念彼此等价。

注 4.4.14。 在 f的有界球上具有利普希茨连续性 $X \times U$在常微分方程情形中就已是必要条件 [209] ，以确保辅助系统（4.29）的流具有利普希茨连续性。在无限维情形中，如果 f 在 u中不具有利普希茨连续性，非线性项 g 在（4.29）中就仅连续，而这通常甚至无法保证（4.29）的解存在，因为皮亚诺定理不适用于无限维系统 [72, 78]。 ◁

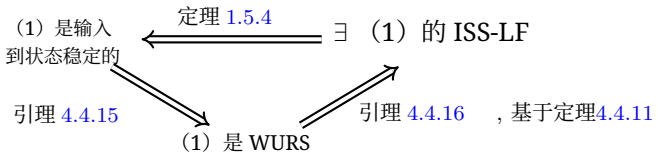

图 4.1：逆向 ISS 李雅普诺夫定理（定理4.4.17）。

首先，我们在引理4.4.15 中证明 ISS 蕴含 WURS。接下来，我们应用定理 4.4.11 证明（4.10）的 WURS 蕴含存在一个利普希茨连续的强制 ISS 李雅普诺夫函数。最后，直接李雅普诺夫定理（定理 1.5.4）完成证明。

引理 4.4.15。 如果 (4.10) 是 *ISS*，则 (4.10)是 *WURS*。

证明。 证明思路与 [209, 引理 2。12]类似。设（4.10）是 ISS。为证明（4.10）是 WURS，我们将使用命题4.4.9。

由于（4.10）是输入到状态稳定性（ISS），存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$，使得（1.4）对任意 $t \ge 0$、$x \in X$、 $u \in \mathcal{U}$均成立。定义 $\alpha(r) := \beta(r,\ 0)$，其中 $r \in \mathbb{R}_+$。将 $u \equiv 0$和 $t = 0$代入（1.4），可知 $\alpha(r) \ge r$ 对所有 $r \in \mathbb{R}_+$均成立。

任取 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$，使得对所有 $r \ge 0$, $\sigma(r) \le \gamma^{-1}\left(\frac{1}{4}\alpha^{-1}(\frac{2}{3}r)\right)$。我们可以选取在有界集上利普希茨连续的映射 $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ 和 $\psi \in \mathcal{K}_\infty$，使得 $\psi(\|x\|_X) \le$

$\varphi(x) \le \sigma(\|x\|_X)$（只需选取一个在有界集上利普希茨连续的 $\psi \in \mathcal{K}_\infty$，并令$\varphi(x) := \psi(\|x\|_X)$ 对所有 $x \in X$成立，这就保证了 φ 在有界集上利普希茨连续）。

我们将证明，对于所有 $x \in X$、所有 $t \ge 0$ 和所有 $d \in \mathcal{D}$，均有

$$\gamma\Big(\big\|d(t)\varphi(\phi_\varphi(t,x,d))\big\|_U\Big) \le \frac{\|x\|_X}{2}. \tag{4.37}$$

首先，我们证明，4.37) 对所有足够小的时间 $t \ge 0$ 均成立。由于 $\alpha^{-1}(r) \le r$ 对所有$r > 0$ 均成立，因此有

$$\begin{aligned}\gamma\Big(\big\|d(t)\varphi(\phi_\varphi(t,x,d))\big\|_U\Big) &\le \gamma\big(\sigma(\|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X)\big)\\ &\le \frac{1}{4}\alpha^{-1}\Big(\frac{2}{3}\|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X\Big) \le \frac{1}{6}\|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X.\end{aligned}$$

对于任意 $d \in \mathcal{D}$ 和任意 $x \in X$，只要将 t 取得足够小，就可以使后一个表达式小于 $\frac{1}{2}\|x\|_X$，因为 ϕ_φ 关于 t 连续。

现在任取 $d \in \mathcal{D}$、$x \in X$，并定义 $t^* = t^*(x,d)$ 如下：

$$t^* := \inf\left\{t \ge 0 : \gamma\Big(\|d(t)\|_U\big|\varphi(\phi_\varphi(t,x,d))\big|\Big) > \frac{\|x\|_X}{2}\right\}.$$

根据第一步，我们知道 $t^* > 0$。假设 $t^* < \infty$ (否则，我们的结论成立)。那么，4.37) 对所有 $t \in [0, t^*)$ 均成立。因此，对于所有 $t \in [0, t^*)$，均有

$$\begin{aligned}\|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X &\le \beta(\|x\|_X, t) + \frac{\|x\|_X}{2}\\ &\le \beta(\|x\|_X, 0) + \frac{\alpha(\|x\|_X)}{2} = \frac{3}{2}\alpha(\|x\|_X).\end{aligned}$$

利用这个估计，我们得到

$$\begin{aligned}\gamma\Big(\|d(t^*)\|_U\big|\varphi(\phi_\varphi(t^*,x,d))\big|\Big) &\le \frac{1}{4}\alpha^{-1}\Big(\frac{2}{3}\|\phi_\varphi(t^*,x,d)\|_X\Big)\\ &\le \frac{1}{4}\alpha^{-1}(\|x\|_X) \le \frac{1}{4}\|x\|_X.\end{aligned}$$

但这与 t^* 的定义相矛盾。因此，$t^* = +\infty$。

现在我们看到，对于任意 $x \in X$、任意 $d \in \mathcal{D}$ 以及所有 $t \ge 0$，都有

$$\|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X \le \beta(\|x\|_X, t) + \frac{\|x\|_X}{2}, \tag{4.38}$$

这表明 (4.29) 具有全局李雅普诺夫稳定性。

由于 $\beta \in \mathcal{KL}$，存在一个 $t_1 = t_1(\|x\|_X)$，使得 $\beta(\|x\|_X, t_1) \le \frac{\|x\|_X}{4}$，因此

$$d \in \mathcal{D},\ x \in X,\ t \ge t_1 \quad \Rightarrow \quad \|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X \le \frac{3}{4}\|x\|_X.$$

通过归纳法，我们得到存在一个严格递增的时间序列 $(t_k)_k$，它取决于 $\|x\|_X$ 的范数，但与 x 和 d 无关，使得

$$\|\phi_\varphi(t,x,d)\|_X \le \Big(\frac{3}{4}\Big)^k \|x\|_X,$$

对于所有 $x \in X$、任意 $d \in \mathcal{D}$ 以及所有 $t \geq t_k$，均成立。

这意味着，对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及所有 $\delta > 0$，存在一个时间 $\tau = \tau(\delta)$，使得对于所有满足 $\|x\|_X \leq \delta$ 的 $x \in X$、所有 $d \in \mathcal{D}$ 以及所有 $t \geq \tau$，我们都有

$$\|\phi_\varphi(t, x, d)\|_X \leq \varepsilon.$$

这表明（4.29）具有一致全局吸引性。

现在，命题 4.4.9 表明（4.29）是一致全局渐近稳定的，因此（4.10）是 WURS . □

引理 4.4.16。 如果 (4.10) 是 *WURS*，且 f 在 $X \times U$的有界球上利普希茨连续，那么存在一个关于 (4.10)的 *ISS* 李雅普诺夫函数，并且该函数在有界集上利普希茨连续。

证明。 设（4.10）是 WURS。这意味着（4.29）在 $\mathcal{D}$ 上是一致全局渐近稳定的，其中 φ 为适当的 ψ，并依据定义 4.4.12选取。命题 4.4.13 和定理 4.4.11 表明，存在一个在有界集上利普希茨连续的李雅普诺夫函数 $V\colon\ X \to \mathbb{R}_+$，其对于某些 ψ_1、$\psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 满足（4.35），且其沿（4.29）解的李导数对于所有 $x \in X$ 以及所有 $d \in \mathcal{D}$ 满足估计式

$$\dot{V}_{\varphi,d}(x) := \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{1}{t}\big(V(\phi_\varphi(t, x, d)) - V(x)\big) \leq -\alpha(V(x)). \tag{4.39}$$

由于（4.29）是一致全局渐近稳定的，$\phi_\varphi(\cdot,\ x,\ d)$ 对任意 $\mathbb{R}_+$和任意 $d \in \mathcal{D}$，在 $x \in X$ 上都有定义。现在任取 $x \in X$。我们断言，对所有满足 $u \in \mathcal{U}$ 的 $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \varphi(x)$，均有

$$\dot{V}_u(x) \leq -\alpha(V(x)). \tag{4.40}$$

由（4.40）可知，V是（4.10）的一个蕴含形式的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数，其李雅普诺夫增益为 $\chi := \psi^{-1}$。

下面的技术性论证将证明（4.40）。设 $x \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$ 满足. $\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \varphi(x)$。若 $x = 0$，则 $u \equiv 0$，且 $V_0(\mathbf{0}) = V_{\varphi,\,0}(\mathbf{0}) \leq -\alpha(V(\mathbf{0})) = 0$，并且（4.40）成立。

现在令 $x \neq 0$。那么存在 $d \in \mathcal{D}$，使得 $u(t) = d(t)\varphi(x)$，对于 $t \geq 0$。进一步定义$u_2(t) := d(t)\varphi(\phi_\varphi(t,\ x,\ d))$，$x(t) := \phi(t,\ x,\ u)$，$x_2(t) := \phi(t,\ x,\ u_2)$，对于 $t \in \mathbb{R}_+$。

我们来计算 V 的李导数:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u(x) &= \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{1}{t}\big(V(x(t)) - V(x)\big) \\
&= \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{1}{t}\Big(V(x(t)) - V(x_2(t)) + V(x_2(t)) - V(x)\Big) \\
&\leq \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{V(x(t)) - V(x_2(t))}{t} + \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{V(x_2(t)) - V(x)}{t} \\
&\leq \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{|V(x(t)) - V(x_2(t))|}{t} - \alpha(V(x)),
\end{aligned}$$

其中我们用到了（4.39），并且对于 $t \in \mathbb{R}_+$ 有

$$x_2(t) = \phi\big(t, x, d(\cdot)\varphi(\phi_\varphi(\cdot, x, d))\big) = \phi_\varphi(t, x, d).$$

由于 V 在有界集上是利普希茨连续的，因此存在常数 $L > 0$，使得

$$\dot{V}_u(x) \leq \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{L}{t}\big\|x(t) - x_2(t)\big\|_X - \alpha(V(x)). \tag{4.41}$$

由于 f 在 $X\times U$ 的有界球上是利普希茨连续的，并且存在 $M>0$，使得 $\|T(r)\|\le M$ 对于 $r\in[0,1]$ 成立，我们得到对于 $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}\big\|x(t)-x_2(t)\big\|_X &= \Big\|\int_0^t T(t-s)\big(f(x(s),u(s))-f(x_2(s),u_2(s))\big)ds\Big\|_X\\ &\le \int_0^t \big\|T(t-s)\big\|\big\|f(x(s),u(s))-f(x_2(s),u_2(s))\big\|_X ds\\ &\le M\int_0^t L_f\left(\|x(s)-x_2(s)\|_X+\|u(s)-u_2(s)\|_U\right)ds\\ &\le ML_f\left(t\sup_{s\in[0,t]}\big\|u(s)-u_2(s)\big\|_U+\int_0^t\big\|x(s)-x_2(s)\big\|_X ds\right),\end{aligned}$$

对于某个常数 $L_f>0$。格朗沃尔不等式（D.2.5）推出

$$\big\|x(t)-x_2(t)\big\|_X\le ML_f t\sup_{s\in[0,t]}\big\|u(s)-u_2(s)\big\|_U e^{ML_f t},\quad t\in[0,1].$$

将其代入（4.41），可得

$$\dot V_u(x)\ \le\ \overline{\lim_{t\to+0}}\left(LML_f\sup_{s\in[0,t]}\big\|u(s)-u_2(s)\big\|_U e^{ML_f t}\right)-\alpha(V(x)).\tag{4.42}$$

此外，由于对所有 $s\in[0,t]$，$\|d(s)\|_U\le 1$，我们有

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,t]}\big\|u(s)-u_2(s)\big\|_U &= \sup_{s\in[0,t]}\big\|d(s)\big(\varphi(x)-\varphi(\phi_\varphi(s,x,d))\big)\big\|_U\\ &\le \sup_{s\in[0,t]}|\varphi(x)-\varphi(\phi_\varphi(s,x,d))|.\end{aligned}$$

由于当 $s\to 0$ 时，$\phi_\varphi(s,x,d)\to x$，且 φ 是利普希茨连续的，我们得到 in

$$\sup_{s\in[0,t]}\big\|u(s)-u_2(s)\big\|_U\to 0,\quad t\to 0.$$

将其代入（4.42），可知（4.40）对所有 $x\in X$ 及所有 $u\in\mathcal{U}$ 满足$\|u\|_{\mathcal{U}}\le\psi(\|x\|_X)$ 时均成立。 □

我们令 我们以对 ISS 性质的以下刻画结束本节探讨 y:

定理 4.4.17。 设 f 在 $X\times U$ 的有界球上利普希茨连续。则下列陈述等价:

(i) (4.10) *is ISS.*

(*ii*) （4.10）是 *WURS*。

(iii) 存在一个在有界球上利普希茨连续的强制 *ISS* 李雅普诺夫函数，使得 (4.10)成立。

证明。 该结论由定理 1.5.4 以及引理 4.4.15 和 4.4.16 . □

4.5 有界输入算子线性系统的输入到状态稳定性李雅普诺夫刻画

我们的逆向 ISS 李雅普诺夫定理（定理 4.4.17）基于逆向一致全局渐近稳定李雅普诺夫定理（定理 4.4.11），后者在以下意义上是非构造性的：该结果证明中给出的李雅普诺夫函数是基于对流的了解构造的，而流通常是未知的。

接下来，我们给出线性系统输入到状态稳定性的完备判据

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{4.43}$$

其中 A 生成一个定义在巴拿赫空间 C_0上的 T -半群 X，且 $B \in L(U, X)$。特别地，我们基于由 T 生成的半群 A，给出输入到状态稳定系统 4.43 的 ISS 李雅普诺夫函数的显式表达式。

定理 4.5.1 (有界输入算子线性系统的 ISS 刻画)。对于系统 (4.43) 及 $B \in L(U, X)$，以下命题等价：

(i) (4.43) 关于 $PC_b(\mathbb{R}_+, U)$是输入到状态稳定的。

(ii) (4.43) 关于 $L^p(\mathbb{R}_+, U)$ 对所有 $p \in [1, +\infty]$，均具有指数输入到状态稳定性。

(iii) (4.43) 对于某个 $L^p(\mathbb{R}_+, U)$，是关于 $p \in [1, +\infty)$ 的 ***eISS***。

(iv) (4.43)是零输入一致全局渐近稳定的。

(v) 半群 T 是指数稳定的。

(vi) 函数 $V\colon X \to \mathbb{R}_+$ 定义为

$$V(x) = \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt \tag{4.44}$$

是 (4.43) 的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数，其中 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$。

(vii) 函数 $V^\gamma\colon X \to \mathbb{R}_+$ 定义为

$$V^\gamma(x) := \max_{s \geq 0} \|e^{\gamma s} T(s)x\|_X, \tag{4.45}$$

是一个一致全局 *Lipschitz* 连续强制性 *ISS* 李雅普诺夫函数，适用于(4.43)，其中 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$。这里 $\gamma \in (0, \lambda)$，且 $\lambda > 0$满足 $\|T(t)\| \leq Me^{-\lambda t}$对某个 $M > 0$ 以及所有 $t \geq 0$。

(viii) 存在一个非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数，适用于 (4.43)，其中 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (iv)。显然。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)。显然。

(iv) $\Rightarrow$ (v). 设（4.43）为零输入一致全局渐近稳定，并取 $u \equiv 0$。那么存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 使得$\|T(t)x\|_X \leq \beta(1, t)$ 对所有 $t \geq 0$ 以及所有 x 满足 $\|x\|_X = 1$的情形均成立。由于 $\beta \in \mathcal{KL}$，存在一个 $t^* > 0$ 使得 $\|T(t^*)\| < 1$，因此 T 是指数稳定半群。

(v)⇒(ii)。取 M, $\lambda>0$使得 $\|T(t)\|\le Me^{-\lambda t}$。另外任取 $x_0\in X$和$u\in\mathcal{U}$，并估计解 $x(t)=\phi(t,\ x_0,\ u)$的范数，其中该解满足（4.43）：

$$\begin{aligned}\|\phi(t,x_0,u)\|_X &= \Big\|T(t)x_0+\int_0^t T(t-r)Bu(r)dr\Big\|_X\\ &\le \|T(t)\|\|x_0\|_X+\int_0^t\|T(t-r)\|\|B\|\|u(r)\|_U dr,\\ &\le Me^{-\lambda t}\|x_0\|_X+M\|B\|\int_0^t e^{-\lambda(t-r)}\|u(r)\|_U dr.\end{aligned}$$

现在，对 $e^{-\lambda(t-r)}\le 1$、 $r\le t$进行估计，可得 (4.43) 关于 $L^1(\mathbb{R}_+,U)$ 具有指数输入到状态稳定性。从这里也可轻易得出，关于 $L^\infty(\mathbb{R}_+,U)$ 也具有指数输入到状态稳定性。

为证明关于 $p\in(1,\ +\infty)$ 的结论，任取 $q>1$ 使得 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。我们使用 H¨older 不等式继续上述估计：

$$\begin{aligned}\|\phi(t,x_0,u)\|_X &\le Me^{-\lambda t}\|x_0\|_X+M\|B\|\int_0^t e^{-\frac{\lambda}{2}(t-r)}e^{-\frac{\lambda}{2}(t-r)}\|u(r)\|_U dr\\ &\le Me^{-\lambda t}\|x_0\|_X+M\|B\|\Big(\int_0^t e^{-\frac{q\lambda}{2}(t-r)}dr\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\Big(\int_0^t e^{-\frac{p\lambda}{2}(t-r)}\|u(r)\|_U^p dr\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le Me^{-\lambda t}\|x_0\|_X+M\|B\|\Big(\frac{2}{q\lambda}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_0^t\|u(r)\|_U^p dr\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &= Me^{-\lambda t}\|x_0\|_X+w\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+,U)},\end{aligned}$$

其中 $w:=M\|B\|\Big(\frac{2}{q\lambda}\Big)^q$。这意味着，对于 $p>1$，(4.43) 关于 $L^p(\mathbb{R}_+,U)$ 也具有指数输入到状态稳定性。

(v) ⇒ (vi)。由命题4.5.5可得。

(v) ⇒ (vii)。由命题4.5.7可得。

(vi), (vii) ⇒ (viii)。清楚。

(viii) ⇒ (i)。由定理4.1.4（线性系统（4.43）的 CEP 和 BRS 性质，其中 $\mathcal{U}:=PC_b$（$\mathbb{R}_+$, U）和 $B\in L$（U, X）始终成立）可得。 □

注 4.5.2。由（4.44）定义的李雅普诺夫函数通常是非强制的。然而，对于某些特殊类别的系统，它是强制的。◁

定理 4.5.1表明，关于控制系统（4.43）的输入到状态稳定性问题（其中$B\in L$（U, X）可以归结为分析半群的指数稳定性问题T，该半群由 A生成，这是半群理论中的经典问题。另一方面，对于每个具有有界输入算子的输入到状态稳定线性系统，都存在一个二次非强制 ISS 李雅普诺夫函数以及一个齐次强制 ISS 李雅普诺夫函数。李雅普诺夫函数（4.44）广泛用于无输入线性系统，例如参见 [45,定理 5.1。3], 在希尔伯特空间框架下，它通过算子李雅普诺夫方程的解得到，参见定理 4.6.2。定理 4.5.1(vi) 的贡献在于，该函数对于（4.43）以及 $B\in L$（U, X）也是一个非强制 ISS 李雅普诺夫函数。诸如（4.44）这样的自然李雅普诺夫函数是非强制的，这一事实是促使人们研究非强制李雅普诺夫函数的原因之一。

注 4.5.3。对于有限维线性系统（4.43），零输入一致全局渐近稳定（因而也具有输入到状态稳定性）等价于半群的强稳定性 T，即对所有 $x\in X$

都有 $\phi(t,\ x,\ 0) = T(t)\,x \to 0$ 当 $t \to \infty$时。对于无穷维线性系统（4.43），即使半群 T 有界，其强稳定性也远弱于指数稳定性。此外，在这种情况下，即使输入有界且指数趋于零，（4.43）仍可能存在无界解，参见例如 [151, 第 247] 页。关于带输入系统强稳定性概念的类似 ISS 的非线性对应概念，参见第3.4 节。 ◁

我们继续介绍几个在定理 4.5.1的证明中使用的结果，其中假设 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+,\ U)$。

我们从一个技术引理开始；其证明很直接，故略去。

引理 4.5.4。 设 $B \in L(U, X)$，且 T 是一个 C_0-半群。则对任意 $u \in \mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$，有

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds = Bu(0). \tag{4.46}$$

命题 4.5.5。 如果 T 是指数稳定半群，则 $V:\ X \to \mathbb{R}_+$ 定义为

$$V(x) = \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt, \quad x \in X, \tag{4.47}$$

是（(4.43)的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数，并且在有界集上利普希茨连续。此外，对于所有 $x \in X$，$u \in \mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+,\ U)$ 以及 $\varepsilon > 0$，有

$$\dot{V}_u(x) \le -\|x\|_X^2 + \frac{\varepsilon M^2}{2\lambda}\|x\|_X^2 + \frac{M^2}{2\lambda\varepsilon}\|B\|^2\|u(0)\|_U^2, \tag{4.48}$$

其中 M、$\lambda > 0$ 满足

$$\|T(t)\| \le Me^{-\lambda t}. \tag{4.49}$$

证明。 由于 T 指数稳定，因此存在 M，$\lambda > 0$ 使得（4.49）成立。

考虑 $V:\ X \to \mathbb{R}_+$ 如（4.47）中所定义。我们有

$$V(x) \le \int_0^\infty \|T(t)\|^2\|x\|_X^2 dt \le \frac{M^2}{2\lambda}\|x\|_X^2. \tag{4.50}$$

设 $V(x) = 0$。那么 $\|T(t)x\|_X \equiv 0$ 在 $[0, \infty$ 上几乎处处成立。 T的强连续性意味着$x = 0$, 因此（4.1）成立。

接下来，我们估计 V 的 Dini导数：

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u(x) &= \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}(V(\phi(h,x,u)) - V(x)) \\
&= \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\Big(\int_0^\infty \|T(t)\phi(h,x,u)\|_X^2 dt - \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt\Big) \\
&= \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\Big(\int_0^\infty \Big\|T(t)\Big(T(h)x + \int_0^h T(h-s)Bu(s)ds\Big)\Big\|_X^2 dt \\
&\quad - \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(\int_0^\infty \Big\| T(t+h)x + T(t)\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X^2 dt \\
&\qquad - \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt \Big) \\
&\le \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(\int_0^\infty \Big(\Big\| T(t+h)x \Big\|_X \\
&\qquad + \Big\| T(t)\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X \Big)^2 dt - \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt \Big) \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}
$$

其中 $I_1 := \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(\int_0^\infty \|T(t+h)x\|_X^2 dt - \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt \Big)$,

$$
\text{and} \quad I_2 := \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h} \int_0^\infty \Big(2\Big\| T(t+h)x \Big\|_X \Big\| T(t)\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X
+ \Big\| T(t)\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X^2 \Big) dt.
$$

让我们计算 I_1:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(\int_h^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt - \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt \Big) \\
&= \overline{\lim_{h\to+0}} -\frac{1}{h}\int_0^h \|T(t)x\|_X^2 dt = -\|x\|_X^2.
\end{aligned}
$$

现在我们继续处理 I_2:

$$
\begin{aligned}
I_2 \le \overline{\lim_{h\to+0}} \int_0^\infty & 2\Big\| T(t+h)x \Big\|_X \Big\| T(t)\frac{1}{h}\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X dt \\
&+ \overline{\lim_{h\to+0}} \int_0^\infty \frac{1}{h}\Big\| T(t)\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X^2 dt.
\end{aligned}
$$

第二项的极限等于零，因为

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lim_{h\to+0}} \int_0^\infty \frac{1}{h}\Big\| T(t)\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X^2 dt \\
&\qquad \le \overline{\lim_{h\to+0}} \int_0^\infty \frac{1}{h} M^4 e^{-2\lambda t}\|B\|\|u\|_{\mathcal{U}} h^2 dt = \ 0.
\end{aligned}
$$

要计算第一项的极限，请注意

$$
\begin{aligned}
2\Big\| T(t+h)x \Big\|_X & \Big\| T(t)\frac{1}{h}\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds \Big\|_X \\
&\le 2M\|x\|_X\|T(t)\|M\|B\| \sup_{r\in[0,h]} \|u(r)\|_U \\
&\le 2M^3\|x\|_X\|B\|\|u\|_{\mathcal{U}} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

应用控制收敛定理、引理4.5.4和杨氏不等式，我们得到，对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty 2\|T(t)x\|_X \|T(t)Bu(0)\|_X dt \qquad (4.51)\\ &\le \int_0^\infty \varepsilon\|T(t)x\|_X^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|T(t)Bu(0)\|_X^2 dt \\ &\le \int_0^\infty \varepsilon\|T(t)\|^2 dt\|x\|_X^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty \|T(t)\|^2\|Bu(0)\|_X^2 dt \\ &\le \frac{\varepsilon M^2}{2\lambda}\|x\|_X^2 + \frac{M^2}{2\lambda\varepsilon}\|B\|^2\|u(0)\|_U^2. \end{aligned}$$

总之，我们得到，对于所有 $x \in X$、所有 $u \in \mathcal{U}$以及所有 $\varepsilon > 0$，不等式（4.48）成立。考虑到 $\varepsilon < \frac{2\lambda}{M^2}$，这表明$V$ 是系统（4.43）的一个非强制 ISS 李雅普诺夫函数（耗散形式）。

接下来还需证明 V在有界集上的利普希茨连续性。任取 $r > 0$和任意 $x,\ y \in B_r$。有

$$\begin{aligned} |V(x) - V(y)| &= \Big| \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 - \|T(t)y\|_X^2 dt \Big| \\ &\le \int_0^\infty \Big| \|T(t)x\|_X - \|T(t)y\|_X \Big| \big(\|T(t)x\|_X + \|T(t)y\|_X \big) dt \\ &\le \int_0^\infty \|T(t)x - T(t)y\|_X \big(\|T(t)x\|_X + \|T(t)y\|_X \big) dt \\ &\le \int_0^\infty Me^{-\lambda t}\|x - y\|_X Me^{-\lambda t}(\|x\|_X + \|y\|_X) dt \\ &\le \frac{M^2 r}{\lambda}\|x - y\|_X, \end{aligned}$$

这表明 V 在有界集上具有利普希茨连续性。 □

注 4.5.6。 由（4.47）定义的 ISS 李雅普诺夫函数 V一般来说并非强制的。由（4.47）定义的 V 的非强制性意味着该系统

$$\dot{x} = Ax, \quad y = x$$

在 $[0, \infty$上并非精确可观测（尽管我们可以测量完整状态！），参见 [45,推论 **4.1**。14]。这是因为，对于任意给定的指数衰减率，都存在衰减速度更快的状态，因此关于状态的部分信息会“无限快地”消失。 ◁

下面我们为具有有界输入算子的系统（4.43）提供另一种输入到状态稳定性李雅普诺夫函数的构造。该构造基于 C_0-半群分析中的一种标准构造，参见例如 [186,式（**5.14**）]。

命题 4.5.7。 设 T 是指数稳定的，且 $M \ge 1,\ \lambda > 0$ 使得成立，并设 $0 < \gamma < \lambda$。(4.49) 则 $V^\gamma :\ X \to \mathbb{R}_+$，定义为

$$V^\gamma(x) := \max_{s \ge 0} \|e^{\gamma s}T(s)x\|_X, \qquad (4.52)$$

是适用于 (4.43) 的强制全局 *Lipschitz* 连续 *ISS* 李雅普诺夫函数。

此外，它在 X 上定义了一个等价范数，并且对于任意 $u \in \mathcal{U}$、 $x \in X$，我们有耗散不等式

$$\dot{V}_u^\gamma(x) \le -\gamma\, V^\gamma(x) + V^\gamma(Bu(0))\,. \tag{4.53}$$

证明。 由于 $T(0) = I$，结合（4.49），对于任意 $x \in X$，我们有

$$\|x\|_X \le V^\gamma(x) \le M \max_{s\ge 0} e^{\gamma s} e^{-\lambda s} \|x\|_X = M\|x\|_X.$$

容易验证， V^γ 是一个范数，而前面的估计表明它与 X 上的原范数等价。特别地， V^γ 是强制的。

接下来，我们证明 V^γ 的利普希茨连续性。任取 x， $y \in X$ 并假设 $V^\gamma(x) > V^\gamma(y)$。则

$$\begin{aligned} V^\gamma(x) - V^\gamma(y) &= \max_{s\ge 0} \|e^{\gamma s} T(s)x\|_X - \max_{s\ge 0} \|e^{\gamma s} T(s)y\|_X \\ &\le \max_{s\ge 0} \big(\|e^{\gamma s} T(s)x\|_X - \|e^{\gamma s} T(s)y\|_X\big) \\ &\le \max_{s\ge 0} \big|\|e^{\gamma s} T(s)x\|_X - \|e^{\gamma s} T(s)y\|_X\big| \\ &\le \max_{s\ge 0} \|e^{\gamma s} T(s)(x-y)\|_X \le M\|x-y\|_X. \end{aligned}$$

$V^\gamma(y) > V^\gamma(x)$ 的情形可用类似方法处理。这表明 V^γ 是全局利普希茨连续的。

此外，注意对于所有 $x \in X$ 和所有 $t \ge 0$，我们有

$$V^\gamma(T(t)x) = \max_{s\ge 0} \|e^{\gamma s} T(s)T(t)x\|_X = e^{-\gamma t} \max_{s\ge 0} \|e^{\gamma(s+t)} T(s+t)x\|_X \le e^{-\gamma t} V^\gamma(x)\,. \tag{4.54}$$

为获得无穷小估计，我们使用三角不等式（V^γ 是一个范数），结合估计（4.54）和引理 4.5.4进行计算，

$$\begin{aligned} \dot{V}_u^\gamma(x) &= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}(V^\gamma(\phi(h,x,u)) - V^\gamma(x)) \\ &= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(V^\gamma\Big(T(h)x + \int_0^h T(h-s)Bu(s)ds\Big) - V^\gamma(x)\Big) \\ &\le \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(V^\gamma\big(T(h)x\big) + V^\gamma\Big(\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds\Big) - V^\gamma(x)\Big) \\ &\le \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big((e^{-\gamma h}-1)V^\gamma(x) + V^\gamma\Big(\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds\Big)\Big) \\ &= -\gamma\, V^\gamma(x) + V^\gamma(Bu(0))\,. \end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们用到了 V^γ 的连续性。这表明 V^γ 是一个 ISS 李雅普诺夫函数（耗散形式），且（4.53）成立。 □

4.6 无界输入算子的线性系统的 ISS 李雅普诺夫函数的构造

本节中，我们研究李雅普诺夫方法在分析具有无界输入算子的线性系统时的适用性。先来看一个好消息：

命题 4.6.1。 假设 X，U 是巴拿赫空间， $q \in [1, +\infty]$ 并且 B 是一个 q-可容许算子。如果 $q = \infty$，还需假设方程 ϕ 的温和解 (4.43)关于时间在 X的范数下连续。那么，对于 (4.43)，存在非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数意味着 (4.43)具有输入到状态稳定性。

证明。 在本命题的假设下，(4.43) 是一个定义良好的控制系统，并满足 CEP 和 BRS 性质，参见命题 2.1.14、2.1.15。结论由定理 4.1.4 得出。

□

命题 4.6.1 使我们能够像定理 4.5.1(vi) 中那样使用非强制 ISS 李雅普诺夫函数。然而，我们必须“补偿”无界输入算子的影响，这对 ISS 李雅普诺夫函数提出了进一步的要求。

4.6.1 一般线性系统的非强制逆李雅普诺夫定理

在本节余下部分，我们将讨论范围限定为赋有标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ 的复希尔伯特空间 X，以及输入空间 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，其中$U$ 是一个巴拿赫空间。算子 $P \in L(X)$ 的伴随算子记为 P^*；若 $P = P^*$，则称 $P \in L(X)$ 为自伴算子。

我们在定理4.5.1(vi) 中为具有有界输入算子的 ISS 线性系统构造了一个非强制 ISS 李雅普诺夫函数 $B \in L(U, X)$。该结果的希尔伯特空间版本如下：

命题 *4.6.2.* 设 X 是一个复希尔伯特空间， $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，其中 U 是一个巴拿赫空间， A 在 X 上生成一个强连续半群，并设 $B \in L(U, X)$。系统 *(4.43)* 具有输入到状态稳定性，当且仅当存在一个自伴算子 $P \in L(X)$，使得$\langle Px, x \rangle_X > 0$ 对 $x \neq 0$ 成立，且 P满足李雅普诺夫方程

$$\langle Px, Ax \rangle_X + \langle Ax, Px \rangle_X = -\|x\|_X^2, \quad x \in D(A). \tag{4.55}$$

此外， $V : X \to \mathbb{R}_+$ 定义为

$$V(x) = \langle Px, x \rangle_X \tag{4.56}$$

是系统 (4.43)的一个非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数。

众所周知，4.56）是函数（4.44）的另一种表示形式，参见 [44, 定理 4.1 的证明。3]。

命题 4.6.2对于仅含可容许算子的系统并不成立 B。与输入算子有界的系统不同，我们还需要对算子 P 和 A施加额外的关联假设。以下命题给出了此类充分条件。

定理 4.6.3。 设 A 是复希尔伯特空间 X 上的一个 C_0-半群$(T(t))_{t \geq 0}$ 的生成元，并设 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，其中 U 是一个巴拿赫空间。

假设存在一个满足以下条件的算子 $P \in L(X)$:

(i) P满足

$$\operatorname{Re}\langle Px, x\rangle_X > 0, \quad x \in X\backslash\{0\}. \tag{4.57}$$

(ii) $\operatorname{Im}(P) \subset D(A^*)$。

(iii) PA 可延拓为定义在 X 上的有界算子，即 $PA \in L(X)$。（我们也用 PA 表示此延拓。）

(iv) P 满足李雅普诺夫不等式

$$\operatorname{Re}\langle (PA + A^*P)x, x\rangle_X \leq -\langle x, x\rangle_X, \quad x \in D(A). \tag{4.58}$$

那么，对于任意 ∞-可容许输入算子 $B \in L(U, X_{-1})$，函数

$$V(x) := \operatorname{Re}\langle Px, x\rangle_X \tag{4.59}$$

是 (4.43)的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数。对于每个 $\varepsilon > 0$、所有 $x_0 \in X$以及所有 $u \in \mathcal{U}$，它满足耗散不等式

$$\dot{V}_u(x_0) \leq (\varepsilon - 1)\|x_0\|_X^2 + c(\varepsilon)\|u\|_\infty^2, \tag{4.60}$$

其中

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) := \frac{1}{4\varepsilon}\big(\|A^*P\|_{L(X)} + \|PA\|_{L(X)}\big)^2\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}^2 M^2 \\ + M\|A^*P\|_{L(X)}\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\kappa(0), \end{aligned} \tag{4.61}$$

以及 $\kappa(0) = \lim_{t\searrow 0}\kappa(t)$，其中 $\kappa(t) > 0$ 是满足下列条件的最小常数

$$\left\|\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)\,ds\right\|_X \leq \kappa(t)\|u\|_\infty, \tag{4.62}$$

对每个 $u \in L^\infty([0,t)\ U)$ 都成立。（常数 $\kappa(t)$ 的存在性由 B 的 ∞-可容许性蕴含。）

特别地，存在非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数 (4.59) 意味着，对于任意 ∞-可容许的 B，系统 (4.43)均具有输入到状态稳定性。

注 4.6.4。请注意，由于我们处理的是复希尔伯特空间，且不假设 P 是 X 上的正算子，因此必须对式（4.59）和（4.58）中的表达式取实部。◁

注 4.6.5。如果除了定理 4.6.3 的假设外，算子 P 还是自伴的，那么方程（4.55）等价于（4.58）。◁

证明。根据命题4.6.1，若 V 是系统(4.43)的非强制 ISS 李雅普诺夫函数，则(4.43)是输入到状态稳定的。

根据假设

$$0 < V(x) \leq \|P\|_{L(X)}\|x\|_X^2, \quad x \in X\backslash\{0\},$$

因此（4.1）成立。剩下需要证明 V满足耗散不等式（4.2。 .

算子 $A : D(A) \subset X \to X$ 作为 C_0-半群的无穷小生成元，其定义域是稠密的，因此 A^* 是良定义的，并且也是一个 C_0-半群的生成元，见 [186, 推论 10.6]。特别地，这意味着 A^* 是一个闭算子。由于$P \in L(X)$，算子 $S := A^*P$，其区域为 $D(S) := \{x \in X : Px \in D(A^*)\}$，是一个闭算子，例如见 [90, 命题 A.9]。然而，根据我们的假设，$\mathrm{Im}(P) \subset D(A^*)$，这意味着 $D(S) = X$，因此根据闭图定理，$S = A^*P \in L(X)$。特别地，（4.61）中的项 $\|A^*P\|_{L(X)}$ 是有意义的。

对于 $x_0 \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&V(\phi(t, x_0, u)) - V(x_0) && (4.63)\\
&\quad = \mathrm{Re}\left\langle P\left(T(t)x_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right),\right.\\
&\qquad \left. T(t)x_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X - \mathrm{Re}\,\langle Px_0, x_0\rangle_X\\
&\quad = \mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0, x_0\rangle_X - \mathrm{Re}\,\langle Px_0, x_0\rangle_X\\
&\quad + \mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0, T(t)x_0\rangle_X - \mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0, x_0\rangle_X && (4.64)\\
&\quad + \mathrm{Re}\left\langle PT(t)x_0, \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X && (4.65)\\
&\qquad + \mathrm{Re}\left\langle P\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, T(t)x_0\right\rangle_X && (4.66)\\
&\quad + \mathrm{Re}\left\langle P\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X. && (4.67)
\end{aligned}
$$

前一个表达式中第（4.64）行的项可转换为 :

$$
\mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0, T(t)x_0\rangle_X - \mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0, x_0\rangle_X = \mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0, T(t)x_0 - x_0\rangle_X. \qquad (4.68)
$$

应用 [44, 定理 4.1.3] 于算子 $_{1\,2}(P + P^*)$，可知条件 (i)、(ii) 和 (iv) 意味着 A 生成一个指数稳定半群。因此，A 的谱界为负，所以 $0 \in \rho(A)$ 存在，进而 $A^{-1} \in L(X)$ 也存在。此外，C_0-半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ 的指数稳定性意味着

$$
\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{-\omega t}, \quad t \geq 0,
$$

对于某些 常数 $M, \omega > 0$。由于 $\rho(A) = \rho(A_{-1})$，算子 A_{-1}^{-1} 存在，正如我们 ll.

根据 [65, 定理 II.5.5]，映射 $A : D(A) \to X$ 可连续延拓为线性等距映射 A_{-1}，它将 $(X, \|\cdot\|_X)$ 映射到 $(X_{-1}, \|\cdot\|_{X_{-1}})$。因此，将 $(X_{-1}, \|\cdot\|_{X_{-1}})$ 映射到 $(X, \|\cdot\|_X)$ 的 A_{-1}^{-1} 也是线性等距映射，因而是有界算子。由于 $B \in L(U, X_{-1})$，我们有 $A_{-1}^{-1}B \in L(U, X)$。特别地，对于所有 $t \geq 0$ 和所有 $s \in [0, t]$，$T_{-1}(t-s)A_{-1}^{-1}Bu(s) = T(t-s)A_{-1}^{-1}Bu(s) \in X$。由于 A_{-1}^{-1} 和 $T_{-1}(t-s)$ 可交换，我们得到

$$
\begin{aligned}
\left\|A_{-1}^{-1}\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\|_X &= \left\|\int_0^t A_{-1}^{-1}T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\|_X\\
&= \left\|\int_0^t T_{-1}(t-s)A_{-1}^{-1}Bu(s)ds\right\|_X.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\|_{L(X)}\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u(s)\|_U ds \\
&\leq \int_0^t M ds \|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty \\
&\leq Mt\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty. \qquad (4.69)
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Im}(P) \subset D(A^*)$，我们利用柯西-施瓦茨不等式和 (4.65) 来估计 (4.69) 中的表达式：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\langle PT(t)x_0, \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X \\
&\qquad = \mathrm{Re}\left\langle PT(t)x_0, AA^{-1}\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X \\
&\qquad = \mathrm{Re}\left\langle A^*PT(t)x_0, A_{-1}^{-1}\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X \\
&\qquad \leq \|A^*PT(t)x_0\|_X \cdot \left\|A_{-1}^{-1}\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\|_X \\
&\qquad \leq \|A^*P\|_{L(X)}\|T(t)x_0\|_X \cdot Mt\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty. \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

为了对表达式（4.66）给出上界，我们再次使用（4.69）得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\langle P\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, T(t)x_0\right\rangle_X \\
&\qquad = \mathrm{Re}\left\langle PAA^{-1}\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, T(t)x_0\right\rangle_X \\
&\qquad \leq \|PA\|_{L(X)} \cdot Mt\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty\|T(t)x_0\|_X. \qquad (4.71)
\end{aligned}$$

F最后，我们使用（4.67）和 κ （定义见（4.62 ）

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left\langle P\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, \int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X \\
&\qquad = \mathrm{Re}\left\langle P\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, AA_{-1}^{-1}\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X \\
&\qquad = \mathrm{Re}\left\langle A^*P\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds, A_{-1}^{-1}\int_0^t T_{-1}(t-s)Bu(s)ds\right\rangle_X \\
&\qquad \leq \|A^*P\|_{L(X)}\kappa(t)\|u\|_\infty \cdot Mt\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty. \qquad (4.72)
\end{aligned}$$

将（4.68）、（4.70）、（4.71）和（4.72）代入（4.63），得到：

$$\begin{aligned}
V(\phi(t,x_0,u)) - V(x_0) \leq\ & \mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0 - Px_0, x_0\rangle_X + \mathrm{Re}\,\langle PT(t)x_0, T(t)x_0 - x_0\rangle_X \\
&+ \|A^*P\|_{L(X)}\|T(t)x_0\|_X \cdot Mt\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty \\
&+ \|PA\|_{L(X)} \cdot Mt\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty\|T(t)x_0\|_X \\
&+ \|A^*P\|_{L(X)}\kappa(t)\|u\|_\infty \cdot Mt\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}\|u\|_\infty.
\end{aligned}$$

对于 $x_0 \in X$，我们有 $A^{-1}x_0 \in D(A)$，根据生成元 A 的定义可得

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\searrow 0}} \operatorname{Re} \frac{1}{t}\langle PT(t)x_0 - Px_0, x_0\rangle_X &= \overline{\lim_{t\searrow 0}} \operatorname{Re} \frac{1}{t}\langle PA[T(t)A^{-1}x_0 - A^{-1}x_0], x_0\rangle_X \\ &= \operatorname{Re}\langle PAx_0, x_0\rangle_X\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{t\searrow 0}} \frac{1}{t}\operatorname{Re}\langle PT(t)x_0, T(t)x_0 - x_0\rangle_X &= \overline{\lim_{t\searrow 0}} \operatorname{Re} \frac{1}{t}\langle A^*PT(t)x_0, T(t)A^{-1}x_0 - A^{-1}x_0\rangle_X \\ &= \operatorname{Re}\langle A^*Px_0, x_0\rangle_X .\end{aligned}$$

这意味着对于每个 $\varepsilon > 0$，有（回顾一下在（ $\kappa 0$）之前对4.62）的定义）

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x_0) = \overline{\lim_{t\searrow 0}} \frac{1}{t}(V(\phi(t, x_0, u)) - V(x_0)) \\ &\le \operatorname{Re}\langle PAx_0, x_0\rangle_X + \operatorname{Re}\langle A^*Px_0, x_0\rangle_X \\ &\quad + \|A^*P\|_{L(X)}\|x_0\|_X\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}M\|u\|_\infty \\ &\quad + \|PA\|_{L(X)}\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}M\|u\|_\infty\|x_0\|_X \\ &\quad + \|A^*P\|_{L(X)}\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}M\kappa(0)\|u\|_\infty^2 \\ &= \operatorname{Re}\langle PAx_0, x_0\rangle_X + \operatorname{Re}\langle A^*Px_0, x_0\rangle_X \\ &\quad + \|x_0\|_X(\|A^*P\|_{L(X)} + \|PA\|_{L(X)})\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}M\|u\|_\infty \\ &\quad + \|A^*P\|_{L(X)}\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}M\kappa(0)\|u\|_\infty^2.\end{aligned}$$

利用杨氏不等式和估计（4.58），我们得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x_0) \le -\|x_0\|_X^2 + \varepsilon\|x_0\|_X^2 + \frac{(\|A^*P\|_{L(X)} + \|PA\|_{L(X)})^2\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}^2M^2}{4\varepsilon}\|u\|_\infty^2 \\ + \|A^*P\|_{L(X)}\|A_{-1}^{-1}B\|_{L(U,X)}M\kappa(0)\|u\|_\infty^2,\end{aligned}$$

这表明耗散不等式（4.60）成立，因而（4.2）也成立。 □

注 4.6.6。 定理 4.6.3被表述为一个直接李雅普诺夫定理。然而，以下将其重新表述为部分逆定理也是可行的。假设（4.43）具有输入到状态稳定性，且李雅普诺夫方程（4.55）的解 P 满足 $\operatorname{Im}(P) \subset D(A^*)$，并且 PA 有界。则（4.59）是（4.43）的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数。 ◁

比较有界输入算子的 ISS 李雅普诺夫定理（命题 4.6.2）与可容许输入算子的 ISS 李雅普诺夫定理（定理 4.6.3）是有益的。这两个结果中考虑的 ISS 李雅普诺夫函数候选相同。不同之处在于假设以及输入算子的集合；对于该集合中的输入算子，此函数确实是一个 ISS 李雅普诺夫函数。命题 4.6.2 指出，如果由 A 生成的半群是指数稳定的，那么存在一个算子 P，它满足定理 4.6.3 的假设 (i) 和 (iv)，以及条件 $P = P^*$。此外，对于任意有界输入算子，(4.56) 是 (4.43) 的 ISS 李雅普诺夫函数。 因此，为了处理输入算子的无界性而额外施加的关键假设是假设 *(ii)* 和 *(iii)*。 我们注意到，在这些假设下，对于任意 ∞-可容许算子 B，(4.59) 都是一个 ISS 李雅普诺夫函数。

在接下来的小节中，我们将展示定理 4.6.3 在一些重要特殊情形下的适用性。首先，我们给出保证定理 4.6.3可在 $P = -A^{-1}$ 条件下应用的充分条件。然后，我们证明这些充分条件对于由次正规算子生成的广泛系统类别均成立。最后，我们讨论对角半群（其生成元为自伴算子），并构造一个针对具有狄利克雷边界输入的热方程的非强制 ISS 李雅普诺夫函数。

4.6.2 一个特殊情况： $P = -A^{-1}$

在本节中，我们给出适用定理 4.6.3 的充分条件$P := -A^{-1}$。

命题 4.6.7。设 A 是某个指数稳定 C_0-半群$(T(t))_{t\geq 0}$ 在一个（复）希尔伯特空间 X 上的生成元，并设 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，其中 U 是一个巴拿赫空间。

此外，假设娱乐主管

(a) $D(A) \subset D(A^*)$。

(b) 存在某个 $\delta \in (0,1)$，使得对于每个 $x \in X$，都有

$$\operatorname{Re}\langle A^* A^{-1} x, x\rangle_X + \delta \|x\|_X^2 \geq 0. \tag{4.73}$$

(c) $\operatorname{Re}\langle Ax, x\rangle_X < 0$ 对每个 $x \in D(A)\backslash\{0\}$都成立。

Then

$$V(x) := -\operatorname{Re}\langle A^{-1} x, x\rangle_X \tag{4.74}$$

是 (4.43) 关于任意 ∞-可容许算子 $B \in L(U, X_{-1})$ 的 *ISS* 李雅普诺夫函数。

证明。 由于 A 生成一个指数稳定半群， $0 \in \rho(A)$，因此 $P := -A^{-1} \in L(X)$。我们逐步证明，所选的 P 满足定理 4.6.3的所有要求 (i)–(iv)。

(i). 对任意 $x \in X\backslash\{0\}$，存在 $y \in D(A)\backslash\{0\}$，使得 $x = Ay$。根据该命题的假设，有

$$V(x) = -\operatorname{Re}\langle y, Ay\rangle_X = -\operatorname{Re}\langle Ay, y\rangle_X > 0.$$

(ii). 我们有 $\operatorname{Im}(P) = \operatorname{Im}(A^{-1}) = D(A) \subset D(A^*)$，这由我们的假设成立。(iii). 由于 $PA = -I$，显然成立。(iv). 根据假设，存在一个 $\delta < 1$，使得

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle (PA + A^*P)x, x\rangle_X = \operatorname{Re}\left\langle (-I - A^* A^{-1})x, x\right\rangle_X &= -\langle x, x\rangle_X - \operatorname{Re}\left\langle A^* A^{-1} x, x\right\rangle_X \\ &\leq -(1-\delta)\langle x, x\rangle_X ,\end{aligned}$$

因此， P 满足带有缩放系数的李雅普诺夫不等式（并且 $\tilde{P} := \frac{1}{1-\delta} P$恰好满足（4.58）。

因此，定理 4.6.3的所有假设均已满足，应用定理 4.6.3 即可得出该结论。

□

命题 4.6.7 可用于为具有无界输入算子和亚正规生成元的线性系统推导逆向非强制 ISS 李雅普诺夫定理，参见 [97,推论 6。7]接下来，我们介绍这一结果的一个重要特例：由自伴算子支配的系统：

推论 4.6.8. 设 X 为复希尔伯特空间，且 $(A, D(A))$ 是 X上的负定自伴算子，也就是说，对于所有 $x \in D(A)\backslash\{0\}$ 和 $D(A) = D(A^*)$，$\langle Ax, x\rangle_X < 0$，且对于所有 $x \in D(A)$，$Ax = A^*x$。那么

$$V(x) := -\langle A^{-1}x, x\rangle_X$$

是 (*4.43*) 的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数(4.43)，其中任取一个 ∞-可容许算子 B。

*Pro*关于。取 $P := -A^{-1}$。由于 $A = A^*$，对所有 $x \in X$，我们有 $\langle A^{-1}x, x\rangle_X \in \mathbb{R}$，因为

$$\left\langle A^{-1}x, x\right\rangle_X = \left\langle A^{-1}x, A^*A^{-1}x\right\rangle_X = \left\langle AA^{-1}x, A^{-1}x\right\rangle_X = \left\langle x, A^{-1}x\right\rangle_X .$$

所有假设 命题 4.6.7的所有假设均已满足，应用该命题即可得证 . □

4.6.3 输入到状态稳定对角系统的 ISS 李雅普诺夫函数

考虑一个线性系统（4.43），其状态空间为

$$X = \ell_2(\mathbb{N}) := \left\{x = (x_k) : \|x\|_X = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} < \infty\right\}$$

以通常方式赋予标量积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\ell_2}$。令 $U := \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。考虑算子 $A : X \to X$，定义为 $Ae_k = -\lambda_k e_k$，其中 e_k 是 $\ell_2(\mathbb{N})$中的第 k个单位向量，且 $\lambda_k \in \mathbb{R}$ 对所有 k、$\lambda_1 > \varepsilon > 0$ 和 $\lambda_k \to \infty$ 均满足 $\lambda_k < \lambda_{k+1}$，其中 $k \to \infty$。

算子 A 可以用谱分解表示为

$$Ax := \sum_{k=1}^{\infty} -\lambda_k \langle x, e_k\rangle_{\ell_2} e_k, \quad x \in D(A), \tag{4.75}$$

with

$$D(A) = \{x \in \ell_2(\mathbb{N}) : \sum_{k=1}^{\infty} -\lambda_k \langle x, e_k\rangle_{\ell_2} e_k \text{ converges}\}. \tag{4.76}$$

我们有以下结果：

命题 4.6.9。 设 A 由 (4.75)、(4.76) 和 $B \in L(\mathbb{C}^m, X_{-1})$给出。则 (4.43)是 L_∞-输入到状态稳定系统，并且

$$V(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle x, e_k\rangle_{\ell_2}^2 \tag{4.77}$$

是 非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数，适用于 (4.43)。

证明。 根据假设，算子 A 是自伴的，且 $\sigma(A) \subset (-\infty,0)$。因此，推论 4.6.8的假设成立。此外， A 的逆算子为

$$A^{-1}x := \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{\lambda_k} \langle x, e_k \rangle_{\ell_2} e_k, \tag{4.78}$$

因此，李雅普诺夫函数（4.74）具有形式（4.77）。 □

容易看出，由（V4.77）给出的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数$\lambda_k \to \infty$ 并非强制的，因为当 $k \to \infty$时。

4.6.4 狄利克雷边界输入下热方程的 ISS 李雅普诺夫函数

众所周知，具有狄利克雷边界输入的经典热方程是输入到状态稳定的，其中 $\mathcal{U}$:= $L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，这一点已通过多种不同方法得到验证[98, 116, 163]。然而，目前尚未提出输入到状态稳定性李雅普诺夫函数的构造。在下一个例子中，我们将展示，利用定理 4.6.3 可以为该系统构造一个非强制的输入到状态稳定性李雅普诺夫函数。

例 4.6.10。 考虑定义在 $[0,1]$ 上、在点 1 处具有狄利克雷边界输入的热方程：

$$x_t(z,t) = a x_{zz}(z,t), \quad z \in (0,1),\ t > 0, \tag{4.79a}$$
$$x(0,t) = 0, \quad x(1,t) = u(t), \quad t > 0, \tag{4.79b}$$
$$x(z,0) = x_0(z), \tag{4.79c}$$

其中 $a > 0$。我们取 $X = L^2(0,1)$、 $U = \mathbb{C}$ 和 $\mathcal{U}$:= $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$。

系统 (4.79)可改写为以下形式 (4.43) 其中 A 定义为

$$Af = af'', \quad f \in D(A) := \left\{ f \in H^2(0,1) : f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

这里， $H^2(0,1)$ 表示函数 $f \in L^2(0,1)$构成的索伯列夫空间，这些函数具有 ≤ 2 阶弱导数，且这些导数均属于 $L^2(0,1)$。众所周知， A 是 X 上的自伴算子，并在 X 上生成一个指数稳定的解析 C_0-半群。

根据定理 *2.1.17*， $B \in L(U, X_{-1})$ 是 ∞-可容许的，对每个 $x_0 \in X$ 以及 $u \in L^\infty(0, \infty)$ 相应的温和解关于时间连续，且 $\kappa(0) = 0$。在 *[98]*,以下 *ISS* 估计已得到证明：

$$\|\phi(t, x_0, u)\|_{L^2(0,1)} \leq \mathrm{e}^{-a\pi^2 t}\|x_0\|_{L^2(0,1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\|u\|_{L^\infty(0,t)},$$
$$\|\phi(t, x_0, u)\|_{L^2(0,1)} \leq \mathrm{e}^{-a\pi^2 t}\|x_0\|_{L^2(0,1)} + c\left(\int_0^t |u(s)|^p ds\right)^{1/p},$$

对任意 $x_0 \in X$、 $u \in \mathcal{U}$、 $p > 2$ 以及某个常数 $c = c(p) > 0$。直接应用推论*4.6.8*可得

$$V(x) = -\langle A^{-1}x, x\rangle_X = \int_0^1 \left(\int_z^1 (z-\tau)x(\tau)d\tau\right)\overline{x(z)}dz$$

是系统的非强制 *ISS* 李雅普诺夫函数(4.79)，因此 (4.79)是 *ISS*。

4.7 利普希茨连续系统的 ISS叠加定理

对于满足某个附加性质的系统（4.10），该性质是定理 4.3.5中证明 LISS 与 0-UAS 等价所必需的；对于这类系统，可以强化定理 3.2.3中给出的 ISS叠加定理：

定理 4.7.1. 设 (4.10) 是正向完备的，满足假设 *2.2.6*, $f(0,0) = 0$，并设存在 $\sigma \in \mathcal{K}$ 和 $\rho > 0$，使得对所有 $v \in U$: $\|v\|_U \leq \rho$ 以及所有 $x \in X$.$\|x\|_X \leq \rho$ 均有

$$\|f(x,v) - f(x,0)\|_X \leq \sigma(\|v\|_U).$$

以下陈述等价：

(i) (4.10)具有输入到状态稳定性。

(ii) (4.10)具有 *bUAG* 和有界可达集。

(iii) (4.10)具有 *bULIM*、一致局部稳定和有界可达集。

(iv) (4.10)是 *bULIM* 且一致全局稳定。

(v) (4.10)是 *bULIM*、一致局部稳定且具有有界可达集。

证明。 根据引理 2.2.27，我们的假设意味着 (4.10) 具有 CEP 性质。结合适用于一般正向完备控制系统的 ISS 叠加定理（定理 3.2.3），可得 (i)–(iv) 等价。显然，(iii) 蕴含 (v)。

(v) $\Rightarrow$ (iii)。由有界可达集性质可知，数值

$$\tilde{\beta}(r,t) := \sup\{\|\phi(t,x,0)\|_X \ : \ x \in B_r\}$$

对所有 $(r,t) \in \mathbb{R}^2_+$均有限。函数 $\tilde{\beta}$ 关于 r非递减。由 (4.10) 的 0-ULS 性质可知，$\tilde{\beta}$关于第一自变量在 0 处连续。

此外，对于固定的 $r \geq 0$，我们断言 $\lim_{t\to\infty} \beta(r,t) = 0$，这是由 bULIM 和 0-ULS 得出的。为此，令 σ 为刻画 0-ULS 的函数。给定 $\varepsilon > 0$，根据 bULIM，我们可以选取一个 $\tau > 0$，使得对于所有 $x \in B_r$，都存在一个 $t \leq \tau$，满足

$$\|\phi(t,x,0)\|_X \leq \sigma^{-1}(\varepsilon).$$

根据 0-ULS 和余循环性质可知 $\|\phi(t,\ x,\ 0)\|_X \leq \varepsilon$ 对所有 $t \geq \tau$ 以及所有满足$x \in B_r$ 的情形均成立，因此得到了所需的收敛。现在我们有，对所有 $x \in X$ 以及所有$t \geq 0$

$$\|\phi(t,x,0)\|_X \leq \max\{\tilde{\beta}(\|x\|_X, t+s) \ : \ s \geq 0\} + \|x\|_X e^{-t}.$$

该上界是 $(\|x\|_X,\ t)$ 的良定义函数，在 $\|x\|_X = 0$ 处关于第一个变量连续，关于 $\|x\|_X$ 严格递增，并且关于 t 严格递减至 0。容易看出，存在一个 $\beta \in \mathcal{KL}$ 使得

$$\|\phi(t,x,0)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t),$$

因此，（4.10）是零输入一致全局渐近稳定的。

因此，定理 4.3.5 蕴含（4.10）具有局部输入到状态稳定性（尤其是一致局部稳定性）。 □

最后，我们在图 4.10 中总结了具有利普希茨连续非线性的适定正向完备系统的判据 4.2。

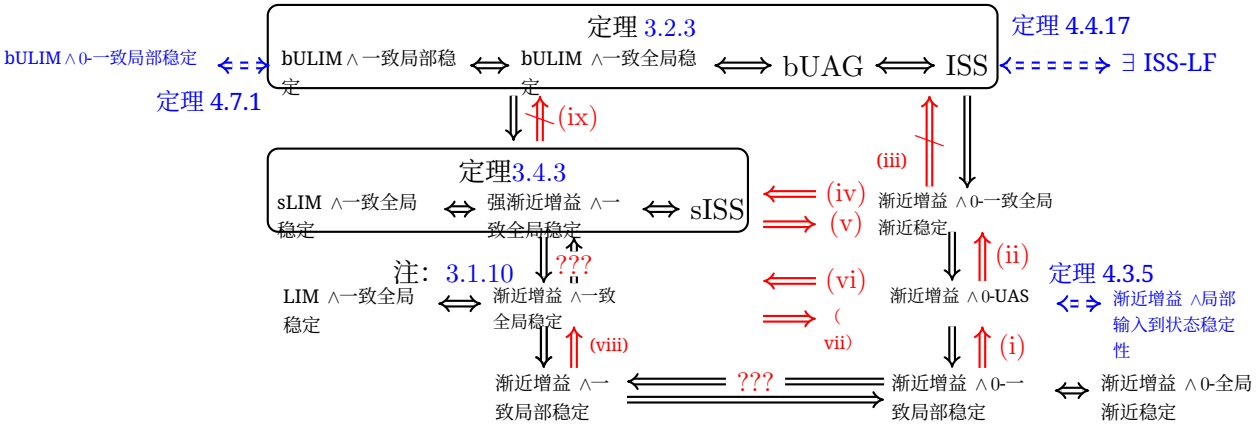

图 4.2：具有鲁棒平衡点和有界可达集的无限维系统的稳定性性质之间的关系：

- 黑色箭头表示在无限维的一般控制系统中成立的蕴含关系或等价性。
- 红色箭头（带否定符号）表示不成立的蕴含关系；根据现有反例，参见注 3.5.1。
- 蓝色虚线等价关系 仅对形式为（4.10）的系统，并在满足某些附加条件时得到证明。
- 带问号的黑色箭头表示目前（据作者所知）尚不清楚逆向蕴含关系是否成立。

4.8 总结

在无扰动线性系统中使用非强制李雅普诺夫函数由来已久。利用算子李雅普诺夫方程 [44, 定理 4.1。3], 构造的李雅普诺夫函数通常是非强制的。当然，它具有特殊结构（事实上，这个李雅普诺夫函数正是 Datko-Pazy 定理中使用的泛函，其中 $p = 2$）。然而，Littman 和 Rolewicz 对 Datko-Pazy结果的延拓 [144],[225, 定理 3.2。2] 表明，其他类型的非强制李雅普诺夫函数也可作为半群指数稳定性的判据。最近，有研究报告了针对无限维切换系统的非强制逆李雅普诺夫定理[80]。

对于非线性系统，[173],中引入了非强制李雅普诺夫函数，并将其用于分析一致全局渐近稳定性。在 [172], 中，非强制李雅普诺夫函数的存在性与非线性系统的积分型稳定性概念相关联，该文改进了 [173]中的一些结果。第4.1 节讨论的非强制 ISS 李雅普诺夫函数相关结果来自 [97] ，是将 [173]中的结果延拓到带输入系统。

定理4.3.5 （LISS 的刻画）已在 [153, 定理 4]中得到证明。该证明技巧受到 [84, 推论 4.23]的启发。针对常微分方程系统，这一结果已在 [147, 定理 14]中报告。较弱一些的结果指出，对于常微分方程系统，0-GAS 蕴含 LISS；该结果已在 [210, 引理 I1]中证明。0-UAS 与 LISS 的等价性令人联想到渐近稳定性与所谓完全稳定性之间的等价关系（参见 [77,定理 56.3、564]）。

该 c 逆李雅普诺夫定理4.4.17 见 [171, 定理 5]。对于常微分方程 s,

更强的结果见 [209, 定理 1], ，其中证明了输入到状态稳定系统存在光滑 ISS 李雅普诺夫函数。我们的证明策略遵循 [209]。证明中的一个关键步骤是对带扰动的辅助系统（4.29）应用逆李雅普诺夫定理。对于常微分方程系统， [143] 中的光滑李雅普诺夫逆定理被用于 [209]。据作者所知，尚无适用于无限维系统的此类光滑逆定理。因此，我们采用由4.4.11给出的利普希茨连续逆李雅普诺夫定理，参见 [113,第 3 节。4]。

定理 4.7.1 （半线性演化方程的 ISS 叠加定理）归功于 [170, 定理 6]。

有界输入算子的线性系统的 ISS 李雅普诺夫刻画。 定理4.5.1由 [166]提出。其中一些等价性归功于[162, 命题 4]。其他等价性基于命题4.5.5、4.5.7，归功于 [171,命题 6,7]。

线性系统的逆向 ISS 李雅普诺夫定理。 第 4.6节中的结果归功于 [97]。尽管取得了这些积极成果，但我们目前对无界算子线性系统的李雅普诺夫方法的认识仍不充分，还有许多问题尚待解决。首先要问的是，(4.43) 的 ISS 是否意味着存在一个（强制或非强制的）ISS 李雅普诺夫函数。

在第 1.6.1 节中，我们为带边界输入的输运方程构造了一个强制二次 ISS 李雅普诺夫函数，而 [217], 中则证明，类似的方法也能为线性双曲守恒律系统构造强制 ISS 李雅普诺夫函数。在第 1.6.5 节中，我们利用强制二次 ISS 李雅普诺夫函数，证明了带诺伊曼边界输入的（线性或非线性）热方程具有 ISS 性质。

与此同时，尽管付出了大量努力，针对带狄利克雷边界控制的热方程（4.79），仍未有人提出强制 ISS 李雅普诺夫函数，尽管该系统存在一个非强制的李雅普诺夫函数，参见第 4.6.4 节。

热方程中诺伊曼输入算子的可容许度优于同一方程中狄利克雷输入算子的可容许度。因此，人们可能会猜测，强制二次 ISS 李雅普诺夫函数可能不存在，原因在于输入算子的可容许度较差。另一方面，迄今为止，ISS 分析几乎完全采用二次 ISS 李雅普诺夫函数。因此，也许需要寻找其他类别的 ISS 李雅普诺夫函数。

此外，目前尚不清楚是否存在这样的线性 ISS 控制系统：它不存在强制 ISS 李雅普诺夫函数，却存在非强制 ISS 李雅普诺夫函数。由于 ISS 可刻画为底层半群的指数稳定性与输入算子的可容许性相结合，因此，对可容许性的李雅普诺夫刻画或许会有所帮助。对于 2-可容许性的情形，已有这样的刻画，见 [79,定理 3。1]。

第5章

积分输入到状态稳定性

尽管输入到状态稳定性框架具有诸多优势，但对于某些实际系统而言，输入到状态稳定性的要求过于严格。这是因为输入到状态稳定性排除了这样一类系统：只要施加的输入幅值和初始状态的大小低于某个特定阈值，系统状态就保持有界；但只要输入幅值或初始状态的大小超过该阈值，系统状态便会变得无界。这种行为通常由驱动和处理速率方面的饱和及限制引起。积分输入到状态稳定性（iISS）的概念旨在刻画这类非线性 [206, 8]。

5.1 iISS系统的基本性质

在本节中，我们假设 Σ 是一个正向完备控制系统，其含义见定义1.1.1，且 $\mathcal{U}$ 是空间 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, U)$ 中局部 Bochner 可积 U 值函数构成的线性子空间。

定义 5.1.1。正向完备系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 称为积分输入到状态稳定（*iISS*），如果存在 $\theta \in \mathcal{K}_\infty$、$\mu \in \mathcal{K}$ 和 $\beta \in \mathcal{KL}$，使得对所有 $(t, x, u) \in \mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U}$，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t) + \theta\left(\int_0^t \mu(\|u(s)\|_U)ds\right). \tag{5.1}$$

◁

如果右端（5.1）中的积分发散，我们就将其视为等于 $+\infty$。

注 5.1.2.（积分输入到状态稳定性与正向完备性）我们仅对正向完备系统定义了积分输入到状态稳定性。另一种做法是在积分输入到状态稳定性的定义中要求，估计式（5.1）仅对（t、x、u）$\in D_\phi \subset \mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U}$ 成立。如果 Σ 满足 BIC 性质（见定义 1.2.4），则容易证明 Σ 正向完备。相同的论证也适用于输入到状态稳定性。

最后请注意，积分输入到状态稳定性比正向完备性与零输入一致全局渐近稳定的组合更强，即使对于非线性常微分方程系统也是如此；参见 [8, 第 V 节]中的一个例子。◁

在常微分方程和时滞系统的输入到状态稳定性理论中，以及许多其他类别的演化方程中，L^∞ 空间或由分段连续函数构成的 PC_b 空间是自然的输入空间选择。对于这类输入空间选择，ISS 估计

(1.4) 给出了系统响应相对于所施加输入的极大幅值的上界。相比之下，积分输入到状态稳定性给出了系统响应相对于输入系统的一类能量的上界，该能量由 (5.1) 右端的积分描述。

定义 5.1.3. 我们称正向完备系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 具有有界能量收敛状态（*BECS*）性质，如果存在 $\xi\in\mathcal{K}$ 使得

$$\int_0^\infty \xi(\|u(s)\|_U)ds<\infty \quad\Rightarrow\quad \forall r>0 \ \lim_{t\to\infty}\sup_{\|x\|_X\le r}\|\phi(t,x,u)\|_X=0. \tag{5.2}$$

◁

与命题 1.3.7类似，我们有以下 iISS 系统的基本性质，这些性质属于输入到状态稳定性理论中的公知结果：

命题 5.1.4. 设 Σ 是一个积分输入到状态稳定控制系统。则 Σ是零输入一致全局渐近稳定的，并且满足 *BECS* 性质，其中 $\xi:=\mu$。

证明. 设正向完备系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 是 iISS 系统，其对应的函数为 $\theta\in\mathcal{K}_\infty$ 和 $\mu\in\mathcal{K}$。任取 $u\in\mathcal{U}$，使得 $\int_0^\infty\mu(\|u(s)\|_U)ds<\infty$。

为了证明该命题的结论，我们需要证明，对于所有 $\varepsilon>0$ 和 $r>0$，存在时间 $t^*=t^*(\varepsilon,r)>0$，使得

$$\|x\|_X\le r \quad\wedge\quad t\ge t^* \quad\Rightarrow\quad \|\phi(t,x,u)\|_X\le\varepsilon.$$

任取 r，$\varepsilon>0$并选择 $t_1>0$，使得 $\int_{t_1}^\infty\mu(\|u(s)\|_U)ds\le\theta^{-1}(\frac{\varepsilon}{2})$。

注意，由移位不变性公理可知，对于所有 $t_1\ge0$，$u(\cdot+t_1)\in\mathcal{U}$。由于 Σ的半群性质和积分输入到状态稳定性，对于所有 $t\ge0$ 和所有 $x\in B_r$，我们有

$$\begin{aligned}
\|\phi(t+t_1,x,u)\|_X &= \big\|\phi\big(t,\phi(t_1,x,u),u(\cdot+t_1)\big)\big\|_X\\
&\le \beta\big(\|\phi(t_1,x,u)\|_X,t\big)+\theta\Big(\int_0^t\mu(\|u(s+t_1)\|_U)ds\Big)\\
&\le \beta\Big(\beta(\|x\|_X,t_1)+\theta\Big(\int_0^{t_1}\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big),t\Big)\\
&\qquad +\theta\Big(\int_{t_1}^{t+t_1}\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big)\\
&\le \beta\Big(\beta(r,0)+\theta\Big(\int_0^\infty\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big),t\Big)+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

以满足以下条件的方式任取 t_2

$$\beta\big(\beta(r,0)+\theta\Big(\int_0^\infty\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big),t_2\big)\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

这确保了对于所有 $t\ge0$ 和所有 $x\in B_r$

$$\begin{aligned}
\|\phi(t+t_2+t_1,x,u)\|_X &\le \beta\Big(\beta(r,0)+\theta\Big(\int_0^\infty\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big),t+t_2\Big)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\le \beta\Big(\beta(r,0)+\theta\Big(\int_0^\infty\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big),t_2\Big)+\frac{\varepsilon}{2}\\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon>0$ 和 $r>0$ 是任意的，因此命题的结论成立。 □

我们在关于输入到状态稳定性的引理 1.4.2 中给出的“稠密性论证”，也可以用于积分输入到状态稳定性：

命题 5.1.5。 考虑控制系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$，并设 ϕ 关于输入和初始状态连续依赖。

ˆ ˆ设 X、$\mathcal{U}$ 分别是 X 和 $\mathcal{U}$ 的稠密赋范向量子空间，并分别赋予从 X 和 $\mathcal{U}$ 继承的ˆ ˆ范数；设 $\Sigma:=(X,\mathcal{U},\phi)$ 是由ˆ转移映射 ϕ生成的系统，该映射与 Σ 中的相同，但限制在状态空间 X 和可容许输入空间ˆ $\mathcal{U}$ 上。

ˆ设 Σ 具有积分输入到状态稳定性（*iISS*）。那么 Σ 也具有积分输入到状态稳定性（*iISS*），并且在估计式 β、θ 和 μ 中具有相同的 (5.1)。

ˆ ˆ对于系统 Σ，其状态空间 X 是一个赋范向量空间，我们按照定义 5.1.1 中对巴拿赫空间上的系统 X所采用的相同方式定义积分输入到状态稳定性（iISS）。

ˆ ˆ ˆ证明。 由于 Σ具有积分输入到状态稳定性（iISS），因此存在 $\beta\in\mathcal{KL}$ 和 $\mu\in\mathcal{K}$、$\theta\in\mathcal{K}_\infty$，使得 $\forall\hat{}x\in X$，$\forall\hat{}u\in\mathcal{U}$以及 $\forall t\geq 0$ 成立，即

$$\|\phi(t,\hat{x},\hat{u})\|_X\leq\beta(\|\hat{x}\|_X,t)+\theta\Big(\int_0^t\mu(\|\hat{u}(s)\|_U)ds\Big). \tag{5.3}$$

设 Σ 在相同的 β，μ，θ 下不是积分输入到状态稳定的。那么存在 $t^*>0$、$x\in X$、$u\in\mathcal{U}$:

$$\|\phi(t^*,x,u)\|_X=\beta(\|x\|_X,t^*)+\theta\Big(\int_0^{t^*}\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big)+r, \tag{5.4}$$

其中 $r=r(t^*,\ x,\ u)>0$。由（5.3）和（5.4），可得

$$\begin{aligned}\|\phi(t^*,x,u)\|_X-\|\phi(t^*,\hat{x},\hat{u})\|_X\geq\ &\beta(\|x\|_X,t^*)-\beta(\|\hat{x}\|_X,t^*)\\&+\theta\Big(\int_0^{t^*}\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big)-\theta\Big(\int_0^{t^*}\mu(\|\hat{u}(s)\|_U)ds\Big)+r.\end{aligned} \tag{5.5}$$

ˆ ˆ由于 X 和 $\mathcal{U}$ 分别在 X 和 $\mathcal{U}$ 中稠密，且映射

$$u\mapsto\theta\Big(\int_0^{t^*}\mu(\|u(s)\|_U)ds\Big)$$

ˆ ˆ连续，因此我们可以找到序列 $(\hat{}x_i)\subset X$：$\|x-\hat{}x_i\|_X\to 0$ 和 $(\hat{}u_i)\subset\mathcal{U}$：$\|u-\hat{}u_i\|_{\mathcal{U}}\to 0$。由（5.5）可知，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在ˆx_i 和ˆu_i，使得

$$\|\phi(t^*,x,u)-\phi(t^*,\hat{x}_i,\hat{u}_i)\|_X\geq\big|\|\phi(t^*,x,u)\|_X-\|\phi(t^*,\hat{x}_i,\hat{u}_i)\|_X\big|\geq r-2\varepsilon.$$

这与 Σ 对初始状态和输入的连续依赖这一假设矛盾。因此，Σ 在相同的 θ、β 和 μ 下满足积分输入到状态稳定性（5.1）。 □

对于输入算子有界的线性系统，ISS 与积分输入到状态稳定性的概念等价；参见定理 4.5.1。对于非线性系统以及输入算子无界的线性系统，情况则更为复杂。

定义 5.1.6。考虑一个控制系统 $\Sigma=(X,\ \mathcal{U},\ \phi)$，其输入空间为 $\mathcal{U}:=PC_b(\mathbb{R}_+,\ U)$。连续函数 $V\colon X\to\mathbb{R}_+$称为 Σ的非强制 *iISS* 李雅普诺夫函数，如果存在 $\psi_2\in\mathcal{K}_\infty$、$\alpha\in\mathcal{P}$ 和 $\sigma\in\mathcal{K}$，使得

$$0<V(x)\le\psi_2(\|x\|_X),\quad \forall x\in X\backslash\{0\},\tag{5.6}$$

以及 V 沿系统（4.10）轨迹的李导数满足

$$\dot{V}_u(x)\le-\alpha(\|x\|_X)+\sigma(\|u(0)\|_U),\quad x\in X,\ u\in\mathcal{U}.\tag{5.7}$$

如果还存在一个 $\psi_1\in\mathcal{K}_\infty$，使得

$$\psi_1(\|x\|_X)\le V(x)\le\psi_2(\|x\|_X),\quad x\in X,\tag{5.8}$$

那么 V 称为（强制的）积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数，其对应于 Σ。 ◁

请注意，在积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数的定义中，衰减率 α 是一个 $\mathcal{P}$函数；而在耗散形式的输入到状态稳定李雅普诺夫函数定义中 $\alpha\in\mathcal{K}_\infty$。

积分输入到状态稳定性的直接李雅普诺夫定理如下（其证明与常微分方程系统中相应结果的证明类似，见 [8,第 1088]页）：

命题 5.1.7。考虑控制系统 $\Sigma=(X,\ \mathcal{U},\ \phi)$，其中 $\mathcal{U}:=PC_b(\mathbb{R}_+,\ U)$，满足 *BIC* 性质。如果 Σ存在强制 *iISS* 李雅普诺夫函数，则 Σ具有积分输入到状态稳定性。

证明。由于 $\alpha\in\mathcal{P}$，根据命题 B.1.14，存在 $\omega\in\mathcal{K}_\infty$ 和 $\sigma\in\mathcal{L}$，使得 $\alpha(r)\ge\omega(r)\sigma(r)$ 对所有 $r\ge0$均成立。任取 $\tilde{\alpha}\in\mathcal{P}$ 满足

$$\tilde{\alpha}(r)\ge\omega(\psi_2^{-1}(r))\cdot\sigma(\psi_1^{-1}(r)),\quad r\in\mathbb{R}_+.\tag{5.9}$$

由（5.7）和（5.8），对于任意 $x\in X,\ u\in\mathcal{U}$ 有

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x)&\le-\alpha(\|x\|_X)+\sigma(\|u(0)\|_U)\\&\le-\omega(\|x\|_X)\sigma(\|x\|_X)+\sigma(\|u(0)\|_U)\\&\le-\omega\circ\psi_2^{-1}(V(x))\cdot\sigma\circ\psi_1^{-1}(V(x))+\sigma(\|u(0)\|_U)\\&\le-\tilde{\alpha}(V(x))+\sigma(\|u(0)\|_U).\end{aligned}\tag{5.10}$$

现在，任取输入 $u\in\mathcal{U}$ 和初始状态 $x\in X$，并考虑相应的解 $\phi(\cdot,\ x,\ u)$，该解定义在 $[0,t_m(x,\ u))$.

由于 V连续，且 ϕ关于 t连续，映射 $y\colon t\mapsto V(\phi(t,\ x,\ u))$ 连续，并且对于所有 $t\in[0,t_m(x,\ u))$，由（5.10）可得

$$D^+V(\phi(t,x,u))\le-\tilde{\alpha}\big(V(\phi(t,x,u))\big)+\sigma(\|u(t)\|_U).$$

由命题 B.4.3，存在 $\beta\in\mathcal{KL}$（其不依赖于 x 和 u），使得

$$V(\phi(t,x,u))\le\beta(V(x),t)+\int_0^t2\sigma(\|u(s)\|_U)ds,\quad t\in[0,t_m(x,u)),$$

因此由（5.8）

$$\psi_1(\|\phi(t,x,u)\|_X)\le\beta(\psi_2(\|x\|_X),t)+\int_0^t2\sigma(\|u(s)\|_U)ds,\quad t\in[0,t_m(x,u)).$$

利用对所有 $a,\ b \geq 0,\ \psi_1^{-1}(a+b) \leq \psi_1^{-1}(2a) + \psi_1^{-1}(2b)$，我们最终得到对于 $t \in [0, t_m(x, u))$，有

$$\begin{aligned} \|\phi(t,x,u)\|_X &\leq \psi_1^{-1}\Big(\beta(\psi_2(\|x\|_X),t) + \int_0^t 2\sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big) \\ &\leq \psi_1^{-1}\Big(2\beta\big(\psi_2(\|x\|_X),t\big)\Big) + \psi_1^{-1}\Big(4\int_0^t \sigma(\|u(s)\|_U)ds\Big). \end{aligned} \tag{5.11}$$

由于 Σ 满足 BIC 性质，这一估计确保了 $t_m(x,\ u) = \infty$。这表明系统具有积分输入到状态稳定性。

□

备注5.1.8。请注意，对于定义 $\mathcal{U}$1.1.1所允许的一般输入空间，$u(0)$ 在式（5.7）中可能没有意义，例如，$\mathcal{U} = L^\infty(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R})$ 就是这种情况。为了允许具有一般输入空间的控制系统，必须修改积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数的定义。例如，可以仿照输入到状态稳定李雅普诺夫函数的定义，要求积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数的定义满足以下不等式，而不是式（5.7）：

$$\dot{V}_u(x) \leq -\alpha(\|x\|_X) + \sigma(\|u\|_\mathcal{U}). \tag{5.12}$$

然后，利用与命题 5.1.7 的证明中相同的论证，可以从存在这样的李雅普诺夫函数推导出积分输入到状态稳定性的某种变体，但它可能弱于积分输入到状态稳定性。◁

定义5.1.9. 系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 称为关于小输入的输入到状态稳定（*ISS*），如果存在 $\beta \in \mathcal{KL}$、$\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $R > 0$，使得对所有 $x \in X$、$u \in \mathcal{U}$，当 $\|u\|_\mathcal{U} \leq R$ 且 $t \geq 0$ 时，均有

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t) + \gamma(\|u\|_\mathcal{U}). \tag{5.13}$$

◁

尽管积分ISS系统与ISS系统具有若干相同的良好性质，但二者之间也存在重要区别。

例5.1.10. 设 $X = \mathbb{R}$ 和 $\mathcal{U} = PC_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$。考虑系统

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+x^2} + u. \tag{5.14}$$

该系统具有积分输入到状态稳定性。然而，它不具备输入收敛—状态收敛性质（参见命题*1.3.7*），并且只要初始状态选得足够大，任意小幅值的常值输入都会导致无界轨迹。

例5.1.10 所揭示的障碍促使我们对积分输入到状态稳定性作如下加强；这一加强在常微分方程系统中已得到广泛研究 [35, 36]:

定义 5.1.11。系统 $\Sigma = (X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 称为强积分输入到状态稳定（强 *iISS*），如果 Σ 具有积分输入到状态稳定性，并且对于小输入具有输入到状态稳定性。◁

5.2 双线性系统

非线性控制系统中最简单的一类是双线性系统，它们在非线性理论与线性理论之间架起桥梁，并广泛应用于生化反应、量子力学过程 [185, 28],以及利用催化剂控制的反应-扩散-对流过程 [129],等。

下面的例子表明，大多数双线性系统都不具备输入到状态稳定性：

例 5.2.1. 下面给出一个非输入到状态稳定的强积分输入到状态稳定系统的简单例子：一个一维双线性系统

$$\dot{x} = -x + xu, \tag{5.15}$$

满足 $x(t) \in \mathbb{R}$ 和 $u \in PC_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$。显然，当 $u \equiv 2$时，解无界，因此该系统不可能是输入到状态稳定系统。同时，(5.15) 具有积分输入到状态稳定性。这可通过使用积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数 $V(x) = \ln(1 + x^2)$来证明， $x \in \mathbb{R}$。显然，(5.15) 对于小输入也具有输入到状态稳定性，因此 (5.15)具有强积分输入到状态稳定性。

与此同时，所有双线性有限维零输入全局一致渐近稳定系统都具有积分输入到状态稳定性 [206], ，甚至具有强积分输入到状态稳定性 [35, 推论 2]。这些结果已推广至 [162, 168]具有有界双线性项的广义双线性分布参数系统。在这里，我们将介绍这些结果，并从强积分输入到状态稳定性的角度进行阐述。

考虑系统（4.10）的如下特殊情形

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + C(x(t), u(t)), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中 A 在 X 上生成一个强连续半群， $B \in L(U, X)$ ，且 C： $X \times U \to X$ 满足假设 2.2.6，此外，

$$\exists \xi \in \mathcal{K}: \quad \|C(x,u)\|_X \le \|x\|_X \xi(\|u\|_U) \quad \forall x \in X,\ u \in U. \tag{5.17}$$

与系统（4.10）一样，我们假设输入属于空间 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$ 。接下来，我们给出（5.16）强积分输入到状态稳定性的一个判据。

命题 5.2.2。 设 （5.16）满足假设 （5.17）。以下陈述等价：

(i) （5.16）是强积分输入到状态稳定的。

(ii) （5.16）是积分输入到状态稳定的。

(iii) (5.16)是零输入一致全局渐近稳定。

(iv) A 生成一个指数稳定的 C_0半群。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)。这些蕴含关系根据定义显而易见。

(iii) $\Rightarrow$ (iv)。鉴于（5.17）， $C(x, 0) = 0$。因此，无输入系统（5.16）是线性的，由此可根据定理 4.5.1得出该推论。

(iv) $\Rightarrow$(i)。**步骤1：积分输入到状态稳定性**。取 M， $\lambda > 0$ 使得 $\|T(t)\| \leq Me^{-\lambda t}$ 对所有 $t \geq 0$成立。任取 $u \in \mathcal{U}$，并且 x_0 以及任意 t 使得 $x(\cdot) := \phi(\cdot, x_0, u)$ 在$[0,t]$上有定义。（5.16）的温和解形式如下：

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-r)\big(Bu(r) + C(x(r), u(r))\big)dr.$$

由 $B \in L(U, X)$ 以及不等式 (5.17) 可得

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_X &\leq \|T(t)\|\|x_0\|_X + \int_0^t \|T(t-r)\|\big(\|B\|\|u(r)\|_U + \|C(x(r), u(r))\|_X\big)dr \\ &\leq Me^{-\lambda t}\|x_0\|_X + \int_0^t Me^{-\lambda(t-r)}\big(\|B\|\|u(r)\|_U + \|x(r)\|_X\xi(\|u(r)\|_U)\big)dr.\end{aligned}$$

将不等式两边乘以 $e^{\lambda t}$，并定义 $z(t) := x(t)e^{\lambda t}$。由 $\lambda > 0$，可得

$$\|z(t)\|_X \leq M\Big(\|z(0)\|_X + \|B\| \int_0^t e^{\lambda r}\|u(r)\|_U dr\Big) + \int_0^t M\|z(r)\|_X\xi(\|u(r)\|_U)dr.$$

由于 $q\colon t \mapsto M\big(\|z(0)\|_X + \|B\| \int_0^t e^{\lambda r}\|u(r)\|_U dr\big)$ 是一个非递减函数，根据格朗沃尔不等式（引理D.2.5）可得

$$\|z(t)\|_X \leq M\Big(\|z(0)\|_X + \|B\| \int_0^t e^{\lambda r}\|u(r)\|_U dr\Big)e^{\int_0^t M\xi(\|u(r)\|_U)dr}.$$

回到原变量并利用 $\lambda > 0$，可得

$$\begin{aligned}\|x(t)\|_X &\leq M\Big(e^{-\lambda t}\|x_0\|_X + \|B\| \int_0^t e^{-\lambda(t-r)}\|u(r)\|_U dr\Big)e^{\int_0^t M\xi(\|u(r)\|_U)dr} \\ &\leq M\Big(e^{-\lambda t}\|x_0\|_X + \|B\| \int_0^t \|u(r)\|_U dr\Big)e^{\int_0^t M\xi(\|u(r)\|_U)dr}.\end{aligned}$$

对两边应用定义在所有 $r \geq 0$ 上的函数 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$，其中 $\alpha(r) = \ln(1+r)$，可得

$$\alpha(\|x(t)\|_X) \leq \ln\Big(1 + M\big(e^{-\lambda t}\|x_0\|_X + \|B\| \int_0^t \|u(r)\|_U dr\big)e^{\int_0^t M\xi(\|u(r)\|_U)dr}\Big).$$

由于对所有 a， $b \in \mathbb{R}_+$ 均成立：

$$\ln\big(1 + ae^b\big) \leq \ln\big((1+a)e^b\big) = \ln(1+a) + b,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\alpha(\|x(t)\|_X) \leq \ln\Big(1 + M\big(e^{-\lambda t}\|x_0\|_X + \|B\| \int_0^t \|u(r)\|_U dr\big)\Big) \\ + \int_0^t M\xi(\|u(r)\|_U)dr.\end{aligned}$$

此外，对于所有 $a, b \in \mathbb{R}_+$，均有

$$\ln(1+a+b) \le \ln((1+a)(1+b)) = \ln(1+a) + \ln(1+b),$$

这意味着

$$\alpha(\|x(t)\|_X) \le \ln\big(1 + Me^{-\lambda t}\|x_0\|_X\big) + \ln\Big(1 + M\|B\| \int_0^t \|u(r)\|_U dr\Big) + \int_0^t M\xi(\|u(r)\|_U)dr.$$

由于 $\beta\colon (s,t) \mapsto \ln\big(1+Me^{-\lambda t}s\big)$ 是一个 $\mathcal{KL}$-函数，利用对任意 $a, b \in \mathbb{R}_+$ 都成立的 $\alpha^{-1}(a+b) \le \alpha^{-1}(2a) + \alpha^{-1}(2b)$，我们得到在 $\phi(\cdot, x_0, u)$ 的存在域上具有形式 (5.1) 的估计。这意味着 $\phi(\cdot, x_0, u)$ 在其存在域上有界。由于假设 2.2.6 成立，根据推论 2.2.20，(5.16) 具有 BIC 性质，因此 $\phi(\cdot, x_0, u)$ 在全局上有定义，(5.16) 是正向完备且具有积分输入到状态稳定性。

步骤 2：关于小输入的输入到状态稳定性。任取 $\gamma \in (0, \lambda)$。下面证明

$$V^\gamma(x) := \max_{r\ge 0} \|e^{\gamma r}T(r)x\|_X, \quad x \in X,$$

是（5.16）关于输入空间 $B_{R,\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} : \|u\|_{\mathcal{U}} \le R\}$ 的强制 ISS 李雅普诺夫函数，其中 $R > 0$ 足够小。

首先注意，$V^\gamma(x) \ge \|x\|_X$ 对任意 $x \in X$ 成立，并且 V^γ 根据命题4.5.7，是全局利普希茨连续的。

为了得到一个无穷小估计，我们利用三角不等式（V^γ 是一个范数）进行计算，得到对所有 u均成立的以下估计：

$$\begin{aligned}
\dot V_u^\gamma(x) &= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\big(V^\gamma(\phi(h,x,u)) - V^\gamma(x)\big)\\
&= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(V^\gamma\Big(T(h)x + \int_0^h T(h-s)Bu(s)ds\\
&\qquad + \int_0^h T(h-s)C\big(\phi(s,x,u),u(s)\big)ds\Big) - V^\gamma(x)\Big)\\
&\le \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\Big(V^\gamma\big(T(h)x\big) + V^\gamma\Big(\int_0^h T(h-s)Bu(s)ds\Big)\\
&\qquad + V^\gamma\Big(\int_0^h T(h-s)C\big(\phi(s,x,u),u(s)\big)\Big) - V^\gamma(x)\Big).
\end{aligned}$$

令 $u \in \mathcal{U}$ 满足 $\|u\|_{\mathcal{U}} \le R$，其中 $R > 0$ 将在后文具体说明。则有：

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h} V^\gamma\Big(\int_0^h T(h-s)C\big(\phi(s,x,u),u(s)\big)ds\Big)\\
&\quad\le \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h} \max_{r\ge0} e^{\gamma r}\|T(r)\| \int_0^h \|T(h-s)\|\|C\big(\phi(s,x,u),u(s)\big)\|_X ds\\
&\quad\le \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h} \max_{r\ge0} Me^{(\gamma-\lambda)r} \int_0^h Me^{-\lambda(h-s)}\|\phi(s,x,u)\|_X \xi(\|u(s)\|_U)ds\\
&\quad\le \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h} M^2 \int_0^h \|\phi(s,x,u)\|_X \xi(\|u(s)\|_U)ds\\
&\quad= M^2\|\phi(0,x,u)\|_X \xi(\|u(0)\|_U) \le M^2\xi(R)\|x\|_X \le M^2\xi(R)V^\gamma(x).
\end{aligned}$$

这里我们利用了 ϕ 关于时间的连续性，以及 u 的分段连续性。

利用这一估计并仿照命题 4.5.7中的论证，可得

$$\dot{V}_u^\gamma(x) \le -\gamma\, V^\gamma(x) + V^\gamma(Bu(0)) + M^2\xi(R)V^\gamma(x).$$

选择 $R > 0$ 使得 $M^2\xi(R) < \gamma$，可知 V^γ 是系统 (5.16) 关于输入 B_R的 ISS 李雅普诺夫函数，u因此，根据定理 1.5.4，系统 (5.16) 关于输入 u 是一致全局渐近稳定。。 □

在对 C 施加更强要求的情况下，我们还可以证明，积分输入到状态稳定性意味着存在某种特定形式的非强制 iISS 李雅普诺夫函数。请注意，目前尚无结果证明，存在非强制 iISS 李雅普诺夫函数（可能还需满足若干进一步限制）就意味着控制系统具有积分输入到状态稳定性。不过，以下结果或许能推动这一领域的进一步研究。

命题 5.2.3。 设 (5.16)满足假设

$$\exists \xi \in \mathcal{K}: \quad x \in X,\ u \in U,\ t \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \|T(t)C(x,u)\|_X \le \|T(t)x\|_X \xi(\|u\|_U). \tag{5.18}$$

以下陈述等价:

(i)-(iii) (5.16)是强积分输入到状态稳定/积分输入到状态稳定/零输入一致全局渐近稳定的。

(iv) A 生成指数稳定半群。

(v) 函数 $W: X \to \mathbb{R}_+$，定义如下:

$$W(x) = \ln\Big(1 + \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt\Big), \quad x \in X, \tag{5.19}$$

是系统 (5.16)的非强制 *iISS* 李雅普诺夫函数。

证明。 命题 5.2.2证明了断言 (i)–(iv) 的等价性。

(iv) $\Rightarrow$ (v)。由于 T 是指数稳定半群，因此存在 M，$\lambda > 0$ 使得$\|T(t)\| \le Me^{-\lambda t}$，对所有 $t \ge 0$ 均成立。考虑线性系统（其中 $C \equiv 0$）的李雅普诺夫函数，该函数在（ 4.44 ）中引入。

$$V(x) := \int_0^\infty \|T(t)x\|_X^2 dt, \quad x \in X.$$

Dini 导数的链式法则（引理 B.3.2）蕴含

$$\dot{W}_u(x) = \frac{1}{1+V(x)}\dot{V}_u(x). \tag{5.20}$$

为计算 $\dot{V}_u(x)$，我们按照命题 4.5.5 中相同的推导，得到估计式 (4.52)，但不同之处在于，我们需要考虑 $Bu(t)$，而不是 $Bu(t)+C(x(t)\ u(t))$。我们有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u(x) &= -\|x\|_X^2 + \int_0^\infty 2\|T(t)x\|_X \big\|T(t)\big(Bu(0) + C(x,u(0))\big)\big\|_X dt \\
&\le -\|x\|_X^2 + \int_0^\infty 2\|T(t)x\|_X \big(\|T(t)Bu(0)\|_X + \|T(t)C(x,u(0))\|_X\big) dt \\
&\le -\|x\|_X^2 + \int_0^\infty 2\|T(t)x\|_X \|T(t)Bu(0)\|_X dt \\
&\qquad + \int_0^\infty 2\|T(t)x\|_X \|T(t)C(x,u(0))\|_X dt.
\end{aligned}$$

对第二项使用杨氏不等式，并对最后一项使用 (5.18)，可得对任意 $\varepsilon > 0$，估计式为：

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &\leq -\|x\|_X^2 + \int_0^\infty \varepsilon\|T(t)x\|_X^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|T(t)Bu(0)\|_X^2 dt \\ &\quad + \int_0^\infty 2\|T(t)x\|_X\|T(t)x\|_X\xi(\|u(0)\|_U)dt \\ &\leq -\|x\|_X^2 + \frac{\varepsilon M^2}{2\lambda}\|x\|_X^2 + \frac{M^2}{2\lambda\varepsilon}\|B\|^2\|u(0)\|_U^2 + 2V(x)\xi(\|u(0)\|_U).\end{aligned}$$

由（5.20），我们得到

$$\begin{aligned}\dot{W}_u(x) &\leq \Big(\frac{\varepsilon M^2}{2\lambda} - 1\Big)\frac{\|x\|_X^2}{1+V(x)} + \frac{M^2}{2\lambda\varepsilon}\frac{\|B\|^2\|u(0)\|_U^2}{1+V(x)} \\ &\quad + \frac{2V(x)}{1+V(x)}\xi(\|u(0)\|_U) \\ &\leq \Big(\frac{\varepsilon M^2}{2\lambda} - 1\Big)\frac{\|x\|_X^2}{1+\frac{M^2}{2\lambda}\|x\|_X^2} + \frac{M^2}{2\lambda\varepsilon}\|B\|^2\|u(0)\|_U^2 + 2\xi(\|u(0)\|_U).\end{aligned}$$

考虑 $\varepsilon \in (0, \frac{2\lambda}{M^2})$，可知 W 是（5.16）的非强制 iISS 李雅普诺夫函数。

(v) $\Rightarrow$ (iv)。这一蕴含由 Datko-Pazy 定理得出（参见 [102, 引理 8.1。2]，[45,引理 5.1。2]）。□

注 5.2.4。 条件（5.18）例如对 $C(x,u) = xBu$成立，其中 $B \in L(U,\mathbb{R})$。◁

5.3 示例

5.3.1 输入到状态稳定性和积分输入到状态稳定性

在本节的结尾，我们通过一个积分输入到状态稳定性抛物型系统的例子来说明我们的研究结果。令 $c > 0$ 和 $L > 0$。考虑以下反应扩散系统

$$x_t(z,t) = cx_{zz}(z,t) + \frac{x(z,t)}{1+|z-1|x(z,t)^2}u(z,t), \tag{5.21a}$$

$$x(0,t) = x(L,t) = 0, \tag{5.21b}$$

o在区域 $(z,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$ 上，取值于 $\mathbb{R}$ 的函数 $x(z,t)$ 和 $u(z,t$).

我们选择状态空间为 $X := L^2(0,L)$，输入空间为 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$，其中 $U := C(0,L)$。

容易看出，上述系统是一个广义双线性系统，因为其非线性满足（5.17）。该系统是零输入一致全局渐近稳定的。因此，对任意 $L > 0$，它都是积分输入到状态稳定的。下面我们将显式构造该系统的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数。随后，我们证明当 $L < 1$时，该系统具有输入到状态稳定性。

定义

$$W(x) := \int_0^L x^2(z)dz = \|x\|_{L^2(0,L)}^2.$$

取任意光滑的 $x \in X$、任意 $u \in \mathcal{U}$，并记 $v := u(\cdot, 0)$。由于 $1 + |z-1|x(z)^2 \geq 1$，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{W}_u(x) &= 2\int_0^L x(z)\Big(cx_{zz}(z) + \frac{x(z)}{1+|z-1|x(z)^2}v(z)\Big)dz \\ &\leq -2c\int_0^L (x_z(z))^2\,dz + 2\int_0^L x^2(z)|v(z)|dz.\end{aligned}$$

对首项应用弗里德里希不等式（命题D.6.1），我们得到:

$$\dot{W}_u(x) \leq -2c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 W(x) + 2W(x)\|v\|_{C(0,L)}.$$

取

$$V(x) := \ln(1 + W(x)) \tag{5.22}$$

得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &\leq -2c\Big(\frac{\pi}{L}\Big)^2 \frac{W(x)}{1+W(x)} + 2\frac{W(x)}{1+W(x)}\|v\|_{C(0,L)} \\ &\leq -2c\Big(\frac{\pi}{L}\Big)^2 \frac{\|x\|^2_{L^2(0,L)}}{1+\|x\|^2_{L^2(0,L)}} + 2\|v\|_{C(0,L)}, \\ &= -\alpha(\|x\|_{L^2(0,L)}) + \sigma(\|v\|_{C(0,L)}),\end{aligned} \tag{5.23}$$

其中

$$\alpha(s) = 2c\Big(\frac{\pi}{L}\Big)^2 \frac{s^2}{1+s^2}, \quad \sigma(s) = 2s. \tag{5.24}$$

因此，命题 5.1.7 证明了（5.21）具有积分输入到状态稳定性，而不受 $L > 0$ 取值的影响。

上述推导适用于足够光滑的函数 x，并且根据命题 $x \in L^2(0, L$，对于所有 5.1.5，均可得出输入到状态稳定性。

有趣的是，当 $L < 1$ 时，系统 (5.21) 对输入空间 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$ 关于 $U = C(0, L)$ 和 $U = L^2(0, L)$ 都具有输入到状态稳定性。为验证这一点，我们首先注意到

$$\sup_{s\in\mathbb{R}}\left|\frac{s}{1+|z-1|s^2}\right| = \frac{1}{2\sqrt{1-z}} \tag{5.25}$$

对 $z < 1$ 成立。假设 $L < 1$。使用相同的李雅普诺夫函数 W，对于光滑的 x 和 v，我们得到: $= u(\cdot, 0) \in C(0, L)$，于是

$$\begin{aligned}\dot{W}_u(x) &\leq 2\int_0^L x(z)cx_{zz}(z)dz + 2\int_0^L \frac{1}{2\sqrt{1-z}}|x(z)v(z)|dz \\ &\leq -2c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \|x\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{1}{\sqrt{1-L}}\|x\|_{L^2(0,L)}\|v\|_{L^2(0,L)} \\ &\leq -\left(2c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - w\right)\|x\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{1}{4(1-L)w}\|v\|^2_{L^2(0,L)}\end{aligned} \tag{5.26}$$

对于 $0 < w < 2c(\pi/L)^2$。回想一下，$\|v\|^2_{L^2(0,L)} \leq L\|v\|^2_{C(0,L)}$ 对于 $v \in C(0, L)$。因此，根据命题 5.1.7，系统 (5.21) 在 $L < 1$时是输入到状态稳定性（ISS）的。我们强调，

在$\|u\|^2_{L^2(0,L)}$ 中，(5.26) 的系数趋于 ∞，当 L 从下方趋近于 1 时。因此，ISS 估计 (5.26) 仅在 $L < 1$时有效。

对于输入值空间 $U = L^p(0, L)$ 的选择，若 $p \geq 1$，则 $L \geq 1$这种情况不允许我们得到类似于 (5.26) 的 ISS 估计。事实上，如果 $L \geq 1$ 且 $U = L^p(0, L)$ 对任意 $p \geq 1$，则系统 (5.21) 的右端未定义。

为说明这一点，取 $u\colon z \mapsto |z-1|^{-\frac{1}{2p}} \in L^p(0, L)$ 和 $x\colon z \mapsto |z-1|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}} \notin L^2(0, L)$。那么，对于任意固定的 t，我们有 $f_t(x, u)\colon z \mapsto \frac{x(z,t)}{1+|z-1|x(z,t)^2} u(z, t) \notin L^2(0, L)$。因此，根据我们对 (4.10) 的表述，对于任意实数 $p \geq 1$，系统 (5.21) 在 $U = L^p(0, L)$ 上未定义。

对于输入空间 $U = C(0, L)$ 的选择，我们预期系统 (5.21) 对 $L \geq 1$ 不是输入到状态稳定的，但目前尚未证明这一点。与 $V = W$ 对应的耗散不等式 (5.7) 中，(5.26) 的 σ- 项爆增，这表明在 $L \geq 1$ 的情况下，系统 (5.21) 不具备输入到状态稳定性。值得注意的是，iISS 估计 (5.23) 对所有 $L > 0$ 都成立，也就是说，对于所有 $L > 0$，我们都不会在 (5.24) 中遇到 σ 爆增，而且 α 不会变成零函数。事实上，可以回想一下命题 5.1.7 与定义 5.1.6 所展示的思路。积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数通过仅允许耗散不等式 (5.7) 中的衰减率 α 满足 $\lim_{s\to\infty} \alpha(s) < \lim_{s\to\infty} \sigma(s)$，来刻画输入到状态稳定性的缺失。当 $\lim_{s\to\infty} \alpha(s) \geq \lim_{s\to\infty} \sigma(s)$ 时，积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数会导出输入到状态稳定性，而 (5.24) 并非如此。无论系统是否具有输入到状态稳定性，都能够一致地刻画积分输入到状态稳定性，这在许多应用中都具有优势。例如，子系统具有输入到状态稳定性并非其互联系统稳定的必要条件；并且有一些一致全局渐近稳定互联系统的例子，其中包含的积分输入到状态稳定系统并不具备输入到状态稳定性 [92, 94, 5, 115]。

5.3.2 一类非线性抛物型系统的 ISS 李雅普诺夫函数：Sobolev 状态空间

在输入到状态稳定性理论中，将 L^p 空间同时选作状态空间和输入值空间，是抛物型系统中的标准做法 [151, 51]。然而，正如我们在第 4.6.3 节所看到的，对于 iISS系统，这种选择往往不可行。由于我们的最终目标是考虑 iISS系统与 ISS系统的互联系统，因此需要构造具有 Sobolev 状态空间的 ISS 李雅普诺夫函数。本节将给出这样一种构造。

考虑系统

$$x_t(z,t) = cx_{zz}(z,t) + f\big(x(z,t), x_z(z,t)\big) + u(z,t), \quad z \in (0, L), \quad t > 0, \tag{5.27}$$

满足狄利克雷边界条件

$$x(0,t) = x(L,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{5.28}$$

下一个定理通过构造李雅普诺夫函数，给出了系统（5.27）相对于状态空间 $X := W^{1,2q}_0(0, L)$、$q \in \mathbb{N}$ 以及输入值空间 U 的输入到状态稳定性的一个充分条件。

定理 5.3.1. 假设存在一个凸连续函数 $\eta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$，使得

$$\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2} y_{zz}(z) f\left(y(z), y_z(z)\right) dz \geq \int_0^L \eta\left(\left(y_z(z)\right)^{2q}\right) dz \tag{5.29}$$

对所有二次连续可微的 $y \in W^{1,2q}_0(0, L)$均成立。此外，假设存在 $\epsilon > 0$，使得

$$\hat{\alpha}(s) := \frac{\pi^2}{q^2 L^2}(c-\epsilon)s + L\eta\left(\frac{s}{L}\right) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \tag{5.30}$$

Then

$$V(y) := \int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q} dz = \|y\|^{2q}_{W_0^{1,2q}(0,L)}, \quad y \in W_0^{1,2q}(0,L), \tag{5.31}$$

是相对于输入值空间 $(0, L)$ 的 (5.27)、(5.28) 的 *ISS* 李雅普诺夫函数，同时也相对于 $U = W^{1,2q}_0(0, L) \cap W^{2,2q}(0, L)$。

证明。 暂且假设状态 $y \in X$ 是光滑的，并且 $u \in \mathcal{U}$ 满足$v := u(\cdot, 0) \in C(0, L)$。沿着方程(5.27)、(5.28)的解，函数 V如(5.31)所定义，满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(y) =& \ 2q\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-1} y_{zt}(z)dz \\ =& -2q(2q-1)\int_0^L y_t(z)\Big(y_z(z)\Big)^{2q-2} y_{zz}(z)dz + 2q\Big(y_z(z)\Big)^{2q-1} y_t(z)\Big|_{z=0}^L.\end{aligned}$$

由于 (5.28)，我们有 $y_t(z)\big|_{z=0}^L = 0$ 因此

$$\dot{V}_u(y) = -2q(2q-1)\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2} y_{zz}(z)\cdot\Big(cy_{zz}(z) + f(y(z), y_z(z)) + v(z)\Big)dz.$$

接下来我们利用（5.29）得到

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2q(2q-1)}\dot{V}_u(y) \leq& -c\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2}\Big(y_{zz}(z)\Big)^2 dz - \int_0^L \eta\left((y_z(z))^{2q}\right)dz \\ & - \int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2} y_{zz}(z)v(z)dz.\end{aligned} \tag{5.32}$$

对于任意 $\omega > 0$，利用杨氏不等式 $y_{zz}(z)v(z) \leq \frac{\omega}{2}\Big(y_{zz}(z)\Big)^2 + \frac{1}{2\omega}v^2(z)$，我们得到

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2q(2q-1)}\dot{V}_u(y) \leq& \left(\frac{\omega}{2} - c\right)\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2}\Big(y_{zz}(z)\Big)^2 dz - \int_0^L \eta\left((y_z(z))^{2q}\right)dz \\ & + \frac{1}{2\omega}\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2} v^2(z)dz.\end{aligned} \tag{5.33}$$

不难看出,

$$\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2}\Big(y_{zz}(z)\Big)^2 dz = \frac{1}{q^2}\int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial z}\Big(\Big(y_z(z)\Big)^q\Big)\right)^2 dz.$$

根据弗里德里希不等式（D.29），我们继续进行

$$\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q-2}\Big(y_{zz}(z)\Big)^2 dz \geq \frac{\pi^2}{q^2L^2}\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q} dz = \frac{\pi^2}{q^2L^2}V(y). \tag{5.34}$$

定义

$$\xi(s) := \frac{1}{L}\hat{\alpha}(Ls) = \frac{\pi^2}{q^2L^2}(c-\epsilon)s + \eta(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \tag{5.35}$$

这里我们假设 $\epsilon \in (0,\ c)$。η 的凸性意味着 ξ是凸的。根据 V的定义（5.31），詹森不等式（D.12）给出

$$\int_0^L \xi\left((y_z(z))^{2q}\right) dz \geq \hat{\alpha}(V(y)). \tag{5.36}$$

我们分别在 $q=1$ 和 $q>1$ 的情形下继续估计 $\dot{V}$。

在 $q=1$的情形下，不等式（5.33）对 $\omega < 2c$给出

$$\begin{aligned}
\dot{V}_u(y) &\leq 2\Big(\frac{\omega}{2}-c\Big)\frac{\pi^2}{L^2}V(y) - 2\int_0^L \eta\left(|y_z(z)|^2\right)dz + \frac{1}{\omega}\|v\|^2_{L^2(0,L)} \\
&= 2\Big(\frac{\omega}{2}-c\Big)\frac{\pi^2}{L^2}V(y) - 2\int_0^L \xi\left(|y_z(z)|^2\right)dz \\
&\qquad + 2(c-\epsilon)\frac{\pi^2}{L^2}\int_0^L |y_z(z)|^2\, dz + \frac{1}{\omega}\|v\|^2_{L^2(0,L)} \\
&\leq 2\Big(\frac{\omega}{2}-\epsilon\Big)\frac{\pi^2}{L^2}V(y) - 2\hat{\alpha}(V(y)) + \frac{1}{\omega}\|v\|^2_{L^2(0,L)}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

这里，最后一个不等式用到了（5.36）。回顾 $\epsilon > 0$，并任取 $\omega \in (0,\ 2\epsilon)$。上述不等式表明，只要 y 和 u 足够光滑，就能得到所需的 V估计（y）。

接下来，假设 $q>1$。我们对（5.33）中的最后一项应用杨氏不等式（D.3），取任意 $\omega_2 > 0$，得到

$$\Big(y_z(z)\Big)^{2q-2} v^2(z) \leq \frac{1}{q\omega_2}v^{2q}(z) + \omega_2^{\frac{1}{q-1}}\frac{q-1}{q}\Big(y_z(z)\Big)^{2q}.$$

将此表达式代入（5.33），并利用（5.35），最终得到

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2q(2q-1)}\dot{V}_u(y) &\leq \Big(\Big(\frac{\omega}{2}-c\Big)\frac{\pi^2}{q^2L^2} + \omega_2^{\frac{1}{q-1}}\frac{q-1}{2\omega q}\Big)V(y) \\
&\qquad - \int_0^L \eta\left((y_z(z))^{2q}\right)dz + \frac{1}{2\omega\omega_2 q}\|v\|^{2q}_{L^{2q}(0,L)} \\
&\leq \Big(\Big(\frac{\omega}{2}-\epsilon\Big)\frac{\pi^2}{q^2L^2} + \omega_2^{\frac{1}{q-1}}\frac{q-1}{2\omega q}\Big)V(y) \\
&\qquad - \hat{\alpha}(V(y)) + \frac{1}{2\omega\omega_2 q}\|v\|^{2q}_{L^{2q}(0,L)}.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

It 很容易看出，通过将 $\omega > 0$ 和 $\omega_2 > 0$ 取得足够小，我们可以确保 e

$$\Big(\frac{\omega}{2}-\epsilon\Big)\frac{\pi^2}{q^2L^2} + \omega_2^{\frac{1}{q-1}}\frac{q-1}{2\omega q} < 0.$$

在上述证明中，我们多次使用了分部积分以及 y 和 u的偏导数。因此，只要这些函数足够光滑，推导就是合理的。

然而，不等式 (5.37) 和 (5.38) 的右端在 X 和 U的范数下是连续的。左端 $V_u(y)$ 在 X的范数下也连续。

因此，对于所有 $y \in X$ 和所有 $u \in U$，(5.37)和(5.38)均成立。由(5.30)可知，函数 V 是(5.27)的一个输入到状态稳定性李雅普诺夫函数，其输入空间为 $U = L^{2q}(0, L)$，$q \geq 1$。对$\|u\|^{2q}_{L^{2q}(0,L)}$ 应用弗里德里希不等式可证明，V 是关于 $U = W^{1,2q}_0(0, L) \cap W^{2,2q}(0, L)$的一个输入到状态稳定性李雅普诺夫函数。 □

根据(1.20)，积分输入到状态稳定性允许 V 的衰减率在状态变量幅值较大时变得慢得多（因为 $\alpha \in \mathcal{P}$ 可以有界），而输入到状态稳定性则不允许如此。这表明，积分输入到状态稳定性李雅普诺夫函数需要采用截然不同的构造。下一节将专门讨论这一问题。

5.3.3 积分输入到状态稳定性的非线性抛物型系统类：L^p 状态空间

考虑如下系统

$$x_t(z,t) = cx_{zz}(z,t) + f(x(z,t), u(z,t)), \quad t > 0, \tag{5.39}$$

定义在空间域 $(0, L)$ 上，其中

$$x(0,t)x_z(0,t) = x(L,t)x_z(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{5.40}$$

表示狄利克雷、诺伊曼或混合型边界条件。对于 (5.39)，我们选择状态空间为 $X := L^{2q}(0, L)$，其中 $q \in \mathbb{N}$，并将输入空间取为$U := L^\infty(0, L)$ 和 $H^1_0(0, L)$。

定义与 (5.39) 相关的如下常微分方程：

$$\dot{w}(t) = f(w(t), r(t)), \quad w(t),\ r(t) \in \mathbb{R}. \tag{5.41}$$

下面的定理给出了适用于 (5.39) 形式的一类非线性系统的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数的构造。

定理 5.3.2. 假设 $W: w \mapsto w^{2q}$ 对某些 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$、$\sigma \in \mathcal{K}$ 以及所有 $w \in \mathbb{R}$ 和 $r \in \mathbb{R}$ 满足

$$\dot{W}_r(w) := 2qw^{2q-1}f(w,r) \leq -\alpha(W(w)) + W(w)\sigma(|r|). \tag{5.42}$$

以下条件之一成立：

(i) $x(0,t) = 0$ *for all* $t \geq 0$ *or* $x(L,t) = 0$ *for all* $t \geq 0$.

(ii) α 是凸的，且 $\mathcal{K}_\infty$。

设 $X := L^{2q}(0, L)$。则对于 (5.39) 满足 (5.40) 且相对于输入空间 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$，其中 $U = L^\infty(0, L)$ 或 $U = H^1_0(0, L)$的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数为

$$V(x) = \ln(1 + Z(x)), \tag{5.43}$$

其中 Z 定义为

$$Z(x) = \int_0^L W(x(z))dz = \|x\|^{2q}_{L^{2q}(0,L)}. \tag{5.44}$$

此外，如果 α 是凸的并且满足

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\alpha(s)}{s} = \infty, \tag{5.45}$$

那么 V 如上所述，是关于(5.39) 的(5.40) 输入到状态稳定性李雅普诺夫系统，适用于 $U = L^\infty(0, L)$ 以及 $U = H^1_0(0, L)$。

证明。考虑 Z 由式(5.44)给出，并令 $U = L^\infty(0, L)$。任取光滑的 $y \in X$ 以及任意 $u \in \mathcal{U}$满足 $v := u(\cdot,0) \in C(0, L)$。利用式(5.42)，可得

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_u(y) &= 2q \int_0^L y^{2q-1}(z) \cdot (cy_{zz}(z) + f(y(z), v(z)))\, dz \\
&\le -2q(2q-1)c \int_0^L y^{2q-2}(z)\, (y_z(z))^2\, dz \\
&\qquad + \int_0^L \Big(- \alpha\big(W(y(z))\big) + W(y(z))\sigma(|v(z)|)\Big) dz \\
&\le -\frac{2(2q-1)c}{q} \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial z}(y^q)(z)\right)^2 dz - \int_0^L \alpha\big(W(y(z))\big) dz + Z(y)\sigma(\|v\|_U).
\end{aligned} \tag{5.46}$$

最后一个估计中，我们用到了边界条件(5.40)。

首先，假设条件(i)成立。由于 $y \in W^{2q,1}(0, L)$，我们有 $y^q \in L^2(0, L)$，并且根据霍尔德不等式（因为 $\frac{dy}{dz} \in L^{2q}(0, L)$），$\frac{d}{dz}(y^q) = qy^{q-1}\frac{dy}{dz} \in L^2(0, L)$。综上，我们有 $y^q \in W^{2,1}(0, L)$。将庞加莱不等式(D.30)应用于式(5.46)中的第一项，可得

$$\dot{Z}_u(y) \le -\frac{2(2q-1)c}{q}\frac{\pi^2}{4L^2} Z(y) + Z(y)\sigma(\|v\|_U)$$

借助 $y(0) = 0$ 或 $y(L) = 0$。按照（V 5.43）中的定义，可得

$$\dot{V}_u(y) \le -\frac{2(2q-1)c}{q}\frac{\pi^2}{4L^2}\frac{\|y\|^{2q}_X}{1+\|y\|^{2q}_X} + \sigma(\|v\|_U). \tag{5.47}$$

回忆一下，$X = L^{2q}(0, L)$。因此，V是（5.39）在空间 $U = L^\infty(0, \infty)$ 上满足边界条件（5.40）的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数。

接下来，假设条件 (ii)成立。由于 α的凸性，利用（5.46）中的詹森不等式可得

$$\dot{Z}_u(y) \le -L\alpha\left(\frac{1}{L}Z(y(z))\right) + Z(y)\sigma(\|v\|_U).$$

对于 V在 (5.43) 中，我们有

$$\dot{V}_u(y) \le -\frac{L\alpha\left(\frac{1}{L}\|y\|^{2q}_X\right)}{1+\|y\|^{2q}_X} + \sigma(\|v\|_U). \tag{5.48}$$

因此，函数 V 是 (5.39) 的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数，其边界条件为 (5.40)，输入值空间为 $U = L^\infty(0, L)$。由于 (5.45) 意味着

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\alpha(s)}{1+Ls} = \infty,$$

上述不等式保证 V 在（5.45）的情况下是一个输入到状态稳定性李雅普诺夫函数。

最后，为了处理输入值所在的空间 $H_0^1(0, \pi)$，我们回顾 Agmon不等式（D.31），它推出对于 $v \in H_0^1(0, \pi)$

$$\|v\|^2_{L^\infty(0,L)} \le \|v\|^2_{L^2(0,L)} + \|v_z\|^2_{L^2(0,L)}.$$

这个不等式给出

$$\|v\|^2_{L^\infty(0,L)} \le \left(\frac{L^2}{\pi^2} + 1\right) \|v\|^2_{H_0^1(0,L)} \tag{5.49}$$

借助弗里德里希不等式（D.29）。将（5.49）代入（5.47）和（5.48），可证明 V在情形 5.39）-（5.40）下，关于 $U = H_0^1(0, \pi)$，无论满足条件 (i) 还是条件 (ii)，都是一个积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数。 □

注 5.3.3。我们希望提醒读者注意输入空间的选择。首先，我们已经证明，系统（5.50）对于输入空间 $L^\infty(0, L)$ 具有积分输入到状态稳定性。对于许多应用而言，这种输入空间的选择合理且足够。然而，在考虑控制系统的互联系统时，一个系统的输入就是另一个系统的状态。因此，将 $L^\infty(0, L)$ 作为第一子系统的输入空间，意味着它自动成为另一个子系统的状态空间；这会使证明其输入到状态稳定性变得复杂，因为针对这种状态空间构造李雅普诺夫函数很难（例如，如何对这类李雅普诺夫函数求导？），如果可行的话。如第 5.3.2 节所示，若选择 $H_0^1(0, L)$ 作为状态空间，则情况并非如此。这凸显了 Agmon不等式在我们构造中的作用；正是它使得前一定理中从空间 $L^\infty(0, L)$ 到 $H_0^1(0, L)$ 的转移成为可能。◁

注意，$W(w)\sigma(|r|)$ 中的项 (5.42) 允许分析具有双线性项或广义双线性项、但不具备输入到状态稳定性的偏微分方程 (5.39)。

5.3.4 一类非线性抛物型系统的积分输入到状态稳定性：Sobolev 状态空间

我们不再使用 L^p 第 5.3.3 节中用于刻画一类抛物型系统积分输入到状态稳定性的状态空间，而是在本节证明，借助 Sobolev 状态空间也可以建立积分输入到状态稳定性。我们考虑

$$x_t(z,t) = cx_{zz}(z,t) + f\big(x(z,t), x_z(z,t)\big) + x_z(z,t)u(z,t) \tag{5.50}$$

定义在 $(z,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$ 上，并满足狄利克雷边界条件

$$x(0,t) = x(L,t) = 0, \quad \forall t \ge 0. \tag{5.51}$$

我们取 $X := W^{1,2q}_0(0, L)$，$q \in \mathbb{N}$。修改定理 5.3.1，可以验证如下内容 g.

定理 5.3.4。假设 (5.29) 对所有 $y \in X$ 均成立，其中 η 是某个凸连续函数， $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 且存在某个 $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ 使得 (5.30) 成立。如果 $\epsilon > 0$，那么由V 定义的函数为

$$V(y) = \ln(1 + Z(y)), \tag{5.52}$$

$$Z(y) = \int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^{2q} dz = \|y\|^{2q}_{W_0^{1,2q}(0,L)} \tag{5.53}$$

是关于输入值空间 $U = L^\infty(0, L)$ 以及 $U = H_0^1(0, L)$ 的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数。（5.50）–（5.51）

证明。 如定理 5.3.1的证明所示，在 $q = 1$的情况下，对于（5.50）–（5.51）的解，函数 Z 由（5.53）给出，并且对于由（α 由（5.30）给出（且取决于（ η 由（5.29）得到）的以下估计：

$$\begin{aligned}\dot{Z}_u(y) &\le 2\Big(\frac{\omega}{2} - \epsilon\Big)\frac{\pi^2}{L^2}Z(y) - 2\hat{\alpha}(Z(y)) + \frac{1}{\omega}\int_0^L \Big(y_z(z)\Big)^2 v^2(z)dz \\ &\le 2\Big(\frac{\omega}{2} - \epsilon\Big)\frac{\pi^2}{L^2}Z(y) - 2\hat{\alpha}(Z(y)) + \frac{Z(y)}{\omega}\|v\|^2_{L^\infty(0,L)}\end{aligned} \tag{5.54}$$

对于任意 $\omega > 0$。由（5.52），有

$$\dot{V}_u(y) \le 2\Big(\frac{\omega}{2} - \epsilon\Big)\frac{\pi^2}{L^2}\frac{\|y\|^2_X}{1 + \|y\|^2_X} - \frac{2\hat{\alpha}(\|y\|^2_X)}{1 + \|y\|^2_X} + \frac{1}{\omega}\|v\|^2_{L^\infty(0,L)}. \tag{5.55}$$

取 $\omega \in (0, 2\epsilon)$。则 $\epsilon > 0$ 以及性质（5.55）表明， V 是关于输入值空间 $U = L^\infty(0, L)$ 的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数。

接下来，考虑 $q > 1$。同样，沿用定理5.3.1证明中所使用的论证，可得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2q(2q-1)}\dot{Z}_u(y) \le \Big(\big(\frac{\omega}{2} - \epsilon\big)\frac{\pi^2}{q^2L^2} + \omega_2^{\frac{1}{q-1}}\frac{q-1}{2\omega q}\Big)Z(y) \\ - \hat{\alpha}(Z(y)) + \frac{Z(y)}{2\omega\omega_2 q}\|v\|^{2q}_{L^\infty(0,L)}.\end{aligned} \tag{5.56}$$

对于任意 ω， $\omega_2 > 0$。由（5.52）可得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2q(2q-1)}\dot{V}_u(y) \le \Big(\big(\frac{\omega}{2} - \epsilon\big)\frac{\pi^2}{q^2L^2} + \omega_2^{\frac{1}{q-1}}\frac{q-1}{2\omega q}\Big)\frac{\|y\|^{2q}_X}{1 + \|y\|^{2q}_X} \\ - \frac{\hat{\alpha}(\|y\|^{2q}_X)}{1 + \|y\|^{2q}_X} + \frac{1}{2\omega\omega_2 q}\|v\|^{2q}_{L^\infty(0,L)}.\end{aligned} \tag{5.57}$$

当 ω， $\omega_2 > 0$ 足够小时，此不等式意味着 V 是关于输入值空间 $U = L^\infty(0, L)$ 的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数。

为处理输入值所在的空间 $H_0^1(0, \pi)$，将（5.49）代入（5.55）和（5.57）。

□

5.4 无界输入算子线性系统的积分输入到状态稳定性

ISS 估计是用 X 和 $\mathcal{U}$中的范数定义的，这也是用半群的指数稳定性和输入算子的可容许性来刻画 ISS 相当优雅的原因之一。与此相反，积分输入到状态稳定性是通过对具有非线性缩放的输入函数进行积分来定义的，见（5.1），该积分不一定产生范数。这使得对积分输入到状态稳定性的刻画更加复杂。

回顾一下，对于输入算子有界的线性系统，根据定理 4.5.1，输入到状态稳定性与积分输入到状态稳定性是等价概念。如果 $\mathcal{U}$ 是一个 L^p-空间，且满足 $p<\infty$，那么对于算子无界的线性系统，这一结论仍然成立。

命题 5.4.1. 设 X 和 U 是巴拿赫空间。如果系统 (2.5) 是 L^p-输入到状态稳定的，其中某个 $p\in[1,\infty)$，那么对于所有 (2.5) 都是 L^q-输入到状态稳定的，并且是积分输入到状态稳定的。

证明。由于 (2.5) 是 L^p-输入到状态稳定的，B 是 p-可容许的，且 T 是指数稳定的。根据注 2.1.18，B 对所有 q都是 $q\in[p,\infty]$-可容许的，这意味着对于所有此类 L^q，系统都是 q-输入到状态稳定的。

此外，对于 $\mathcal{U}:=L^p(\mathbb{R}_+,U)$ 且 $p\in[1,\infty)$ 时，ISS 估计（1.4）自动成为 iISS 估计，其中 $\theta(r):=\gamma(r^{1/p})$ 且 $\mu(r):=r^p$，$r\geq 0$。 □

情形 $p=\infty$ 需要特别谨慎。首先，积分输入到状态稳定性蕴含输入到状态稳定性：

命题 5.4.2。 设 X和 U是巴拿赫空间，且设 $\mathcal{U}:=L^\infty(\mathbb{R}_+,U)$。若 (2.5) 具有积分输入到状态稳定性，则 T 是指数稳定半群，且 B 是无限时间 ∞-可容许算子。若进一步 ϕ 关于时间在 X的范数下连续，则 (2.5) 具有L^∞-输入到状态稳定性。

证明。对于 $u\equiv 0$ 的积分输入到状态稳定性估计蕴含半群 T的指数稳定性。此外，积分输入到状态稳定性蕴含系统（2.5）对于 $\mathcal{U}:=L^\infty(\mathbb{R}_+,U)$ 适定，这等价于 ∞-可容许性 B。根据引理 2.1.20，B 是无限时间 ∞-可容许的。由于 ϕ 关于时间在 X 的范数下连续，定理 2.1.21表明 L^∞-（2.5）具有输入到状态稳定性。 □

注 5.4.3。 在本文中，（温和）解的连续性是系统定义的一部分，这与第2.1.1节中线性无限维控制系统的适定性概念一致。然而，按照 [98, 100],的术语，解的连续性并非输入到状态稳定性定义的一部分。因此，按照 [98, 100]的术语，L^∞-ISS（2.5）等价于以下性质：T 是指数稳定半群，且 B 是无穷时间 ∞-可容许算子。命题 5.4.2（此时不再假设 ϕ连续）可表述如下：

$$(2.5)\text{ is iISS}\quad\Rightarrow\quad(2.5)\text{ is }L^\infty\text{-ISS}.$$

◁

根据命题 5.4.2，我们知道积分 ISS 蕴含 L^∞-ISS。反向蕴含是否成立仍是一个开放问题。

根据一般无限维系统的强制 ISS 李雅普诺夫函数的定义可知，任何此类函数自动也是强制积分输入到状态稳定李雅普诺夫

	公式（2.5），B 有界	公式（2.5），B 无界	公式（4.10），f 在（x，u）中满足利普希茨条件
维数 $X < \infty$	输入到状态稳定性 $\iff$ 积分输入到状态稳定性		输入到状态稳定性 $\Rightarrow$ iISS（$\not\Leftarrow$）
维数 $X = \infty$	输入到状态稳定性 $\iff$ 积分输入到状态稳定性	输入到状态稳定性 $\overset{\Leftarrow}{(\Rightarrow)}$ 积分输入到状态稳定性	未知

表 5.1：（取自 [98]）。在不同情形下，关于 L^∞ 以及假设 ϕ 在 X-范数下连续时，输入到状态稳定性与积分输入到状态稳定性之间的关系。

函数，因此，具有强制 ISS 李雅普诺夫函数的系统既是 ISS 的，也是积分输入到状态稳定的。因此，如果存在不是积分输入到状态稳定的 ISS 控制系统（即上述问题的答案是否定的），那么这些系统就不具有强制 ISS 李雅普诺夫函数。

利用全纯函数演算，针对希尔伯特空间上的抛物型系统，在 [100] 中对这一开放问题给出了部分肯定的答案。

命题 5.4.4。 *[100, 定理 2]*假设 A 在希尔伯特空间 X上生成一个指数稳定的解析半群，并且该半群与一个压缩半群相似。令U满足 维数$(U) < \infty$, $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。

以下陈述等价：

(i) $B \in L(U, X_{-1})$.

(ii) (2.5) *is* L^∞*-ISS.*

(iii) (2.5) *is iISS.*

证明。 (iii) $\Rightarrow$ (ii)。相对于 $\mathcal{U}$，系统 (2.5) 的积分输入到状态稳定性意味着 B 是一个 ∞-可容许算子，特别地，$B \in L(U, X_{-1})$。根据定理 2.1.17，三元组 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是一个控制系统，特别地，ϕ 关于时间在 X-范数下连续。现在，命题5.4.2 表明 L^∞系统 (2.5) 具有输入到状态稳定性。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。显然。(i) $\Rightarrow$ (iii)。参见 [100, 定理 2]。 □

线性系统的输入到状态稳定性与积分输入到状态稳定性之间关系的图示见表 5.1。

注 5.4.5。 一个值得注意的结果 [98, 定理 3。1] 表明，(2.5) 的积分输入到状态稳定性等价于存在一个奥尔利奇空间 W 使得 (2.5) 在 $\mathcal{U}$ 下具有输入到状态稳定性：$= W$。 ◁

5.5 对角系统

现在我们研究一类已有充分研究的线性抛物型对角系统（例如参见 [222, 第 2.6、5 节3]）的输入到状态稳定性和积分输入到状态稳定性。

对于 $q \in [1, \infty)$，用 ℓ_q 表示序列 $(a_k)_k$, $a_k \in \mathbb{C}$ 所构成的巴拿赫空间，使得 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q < \infty$。

定义 5.5.1。 设 X 是一个可分希尔伯特空间。若向量序列 (ϕ_k) 是 X 的一组 q-黎斯基，且 (ϕ_k) 是 X 的一组绍德基，并且存在常数$c_1, c_2 > 0$，使得对所有序列 $(a_k)_k \in \ell_q$，都有

$$c_1 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k \right\|_X^q \leq c_2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^q.$$

◁

假设 $U = \mathbb{C}$ 和 $q \in [1, \infty$。进一步地，设 X 为可分希尔伯特空间，并设 X 具有一个由 A 的特征向量 (ϕ_k) 构成的 q-黎斯基基，其对应特征值为 (λ_k)。

我们进一步假设序列 $(\lambda_k)_k$ 属于 $\mathbb{C}$，且 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$，并且存在一个常数 $R > 0$，使得 $|\mathrm{Im}\ \lambda_k| \leq R|\mathrm{Re}\,\lambda_k|$, $k \in \mathbb{N}$。

因此，线性算子 A: $D(A) \subset X \to X$，定义为

$$A\phi_k = \lambda_k \phi_k, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad D(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k \phi_k : (x_k)_k \in \ell_q \ \wedge \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k \lambda_k|^q < \infty \right\},$$

生成一个解析半群（$T(t)$）$_{t\geq 0}$ 作用于 X（参见 [84, 定理 1.3。4] 并注意到$-A$是一个扇形算子）。该半群由下式给出 $T(t)\phi_k = \mathrm{e}^{t\lambda_k}\phi_k$，对所有 $t \geq 0$ 以及$k \in \mathbb{N}$。

在 [98, 定理 4.1]中，已证明了以下结果：

命题 5.5.2. 设 $\dim(U) < \infty$且 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。假设算子 A拥有由特征向量组成的 q-黎斯基基底 X $(\phi_k)_k$，其特征值 $(\lambda_k)_k$位于开左半平面的一个扇形区域 $\mathbb{C}_-$ 内，且 $\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ 并且 $B \in L(U, X_{-1})$。

那么，系统 (2.5) 是一个 L^∞-积分输入到状态稳定性（*iISS*）且 L^∞-输入到状态稳定（*ISS*）控制系统，符合定义 *1.1.1*中的含义。

证明。首先假设 $U = \mathbb{C}$。根据 [98, 定理 4.1], ，可知 B 是一个 ∞-可容许算子，而方程 (2.5) 的温和解 ϕ 满足 ISS 和 iISS 估计。后者意味着 B 是一个所谓的零类 ∞-可容许算子，即在 (2.9) 中，当 $t \to 0$ 时，有 $h_t \to 0$。最后，[98, 命题 2.5] 表明 ϕ 是连续的。这说明对于 $U = \mathbb{C}$，三元组 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$ 是符合定义 1.1.1 含义的控制系统，并且 Σ 具有 ISS 性质。

一般有限维 U 的情形可化归为一维情形[100,命题 4]。

□

命题5.5.2 给出了另一类（除命题5.4.4之外），在这类系统中，L^∞-积分输入到状态稳定性与 L^∞-输入到状态稳定性是等价概念。

保证 B 属于 $L(\mathbb{C}, X_{-1})$的一个简单判据可见于 [98, 第882]页。特别地，命题 5.5.2 说明了具有狄利克雷边界条件的一维热方程具有输入到状态稳定性，见 [98]。

例如，我们考虑一类文献 [139], [140]中研究的 Riesz 谱边界控制系统。

定义 5.5.3。（参见 [45, 定义 2.3.1]）设 X 为希尔伯特空间，且 A: $D(A) \subset X \to X$ 为线性闭算子。对于 $n \in \mathbb{N}$，令 λ_n 为 A 的特征值，$\phi_n \in D(A)$为对应的特征向量。若满足以下条件，则称 A 为 *Riesz* 谱算子：

(i) $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是一个 2-黎斯基。

(ii) $\{\lambda_n$ 的闭包：$n \in \mathbb{N}\}$ 是全不连通的，也就是说，不存在两点 $\lambda, \mu \in \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ 能够通过一条完全位于 $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$中的线段连接起来。

◁

根据 [45, 定理 2.3。5], Riesz 谱算子 $\sigma(A$的谱 A 由下式给出$\sigma(A)$：$= \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$，而由 T 生成的半群 A 的增长界可计算为

$$\omega_0 := \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}\lambda_i < 0, \tag{5.58}$$

也就是说，A 满足谱决定增长假设。

作为命题5.5.2的一个应用，我们得到

命题 5.5.4。设 X 是一个可分希尔伯特空间，并考虑边界控制系统(2.30)。假设算子 A 是一个 *Riesz* 谱算子，生成一个指数稳定解析半群。此外，假设维数$(U) < \infty$且 $\mathcal{U}$：$= L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$。则$B$ 由(2.40) 给出的算子是可容许算子，且系统(2.30) 具有输入到状态稳定性，其参数为 X和 $\mathcal{U}$。

证明。 由命题5.5.2得出。 □

我们注意到，在论文 [139], [140], 中，研究黎斯谱边界控制系统的输入到状态稳定性时采用了另一种方法，该方法是谱方法的一种改进，已在第 2.5 节中简要介绍。该方法的核心是将 X 关于黎斯基 $\{\phi_k$ 进行分解：$k \in \mathbb{N}\}$。

5.6 总结

积分输入到状态稳定性（积分 ISS）和 iISS 李雅普诺夫函数的概念已在 [206]中引入。此后，这些概念得到了深入研究。关于 iISS 性质的刻画已在一系列论文 [206, 8, 7, 6]中得到发展。强积分输入到状态稳定性的概念已在 [35] 中引入，并在[36]中进一步研究。

关于有限维系统积分输入到状态稳定性理论中已有结果的综述，请参见 [160] 和 [207] 。对于无限维系统，iISS 理论的发展则要有限得多，仍有许多问题尚未解决，见第 10 节 [166, 1]。

命题5.1.7 归功于 [162]。证明与常微分方程系统的相应结果类似 [8, 第 1088] 页。

在命题 5.2.2、5.2.3中，我们总结了若干归功于 [162, 定理 4。2]，[168, 命题 5], [166, 命题 3。34]。第 5.3 节的示例取自[161, 162]。

第 5.4、5.5 节的结果归功于 [98]。命题 5.4.2 归功于 [98, 命题 2。10]以及命题 5.4.4 归功于 [100, 定理 2]。

具有可容许控制算子的双线性系统已在 [88], 中得到研究，相关结果已应用于受控福克–普朗克方程。然而，具有无界输入算子的双线性系统的 iISS 理论，远不如具有容许输入算子的线性系统的 ISS 理论成熟。

第6章

无限互联系统：非李雅普诺夫方法

在现实世界的系统中，网络的规模及其组件之间的连接数量可能未知且随时间变化，这给此类网络的稳定性分析和控制设计带来了新的挑战。一种有前景的解决方法是用一个无限网络对该网络进行过近似，并针对这个无限过近似模型进行稳定性分析和控制设计 [43, 108, 47]。过去二十年来，这种方法受到了广泛关注。尤其是，大量文献致力于研究空间不变系统和／或线性系统，这些系统由无限多个组件构成，且组件之间按照相同的模式互连 [18, 19, 22, 43]。

近年来，出现了许多关于非线性无限常微分方程网络的稳定性与控制的研究，这些网络不一定具有空间不变性 [53, 54, 125, 165, 164]。无限网络的小增益分析尤其具有挑战性，因为汇集内部增益信息的增益算子作用于一个无限维空间；这与任意性质的有限个系统之间的耦合不同。因此，需要谨慎选择整体网络的无限维状态空间，并促使我们在小增益分析中运用有序巴拿赫空间上正算子的理论。

本章将为连续时间无限网络提供相当一般的、基于轨迹的非线性ISS小增益定理，其组件可以是不同类型的无限维系统。

6.1 无限互联系统

在本节中，我们介绍由某个非空集合 I索引的任意数量控制系统的（反馈）互连。对于每个 $i \in I$，令 $(X_i, \|\cdot\|_{X_i}$ 为一个赋范向量空间，它将作为控制系统 Σ_i 的状态空间（依据定义 1.1.1）。在指定 Σ_i的输入空间之前，我们首先要构造整体状态空间。下文中，我们使用序列记号 $(x_i)_{i\in I}$表示区域为 I的函数。于是，整体状态空间定义如下：

$$X := \Big\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \sup_{i\in I} \|x_i\|_{X_i} < \infty\Big\}.$$

对于逐点加法和标量乘法，它是一个向量空间；我们可以通过以下方式将其赋予范数，使之成为赋范空间：

Pro位置 6.1.1. 状态空间 X 关于范数是一个赋范空间

$$\|x\|_X := \sup_{i\in I} \|x_i\|_{X_i}.$$

如果所有空间 $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ 都是巴拿赫空间，那么$(X, \|\cdot\|_X)$也是巴拿赫空间。

证明。 设 $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 中的一个柯西序列。那么，对每个 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n, m \geq N$ 和 $i \in I$，都有 $\|x_i^n - x_i^m\|_{X_i} \leq \varepsilon$。特别地，$(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ 中的柯西序列。设 $x_i \in X_i$ 是其极限，并令 $x := (x_i)_{i\in I}$。我们有

$$\sup_{i\in I} \|x_i\|_{X_i} \leq \sup_{i\in I} \left(\|x_i - x_i^N\|_{X_i} + \|x_i^N\|_{X_i}\right) \leq \varepsilon + \|x^N\|_X < \infty$$

这意味着 $x \in X$，且 x^n 收敛到 x。 □

我们还对每个 $i \in I$ 定义赋范向量空间 $X_{\neq i}$，其构造与上述相同，但指标集限制为 $I \setminus \{i\}$。于是， $X_{\neq i}$ 可识别为 X中的闭线性子空间 $\{(x_j)_{j\in I} \in X : x_i = 0\}$。

现在，对每个 $i \in I$ 考虑如下形式的控制系统（定义见 1.1.1）

$$\Sigma_i = (X_i, PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i}) \times \mathcal{U}, \bar{\phi}_i), \tag{6.1}$$

其中 $PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i})$ 是所有全局有界分段连续函数的空间w: $\mathbb{R}_+ \to X_{\neq i}$，其范数为 $\|w\|_\infty = \sup_{t\geq 0} \|w(t)\|_{X_{\neq i}}$。 $PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i}) \times \mathcal{U}$上的范数定义为

$$\|(w, u)\|_{PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i})\times\mathcal{U}} := \max\{\|w\|_\infty, \|u\|_{\mathcal{U}}\}. \tag{6.2}$$

这里假设 $\mathcal{U} \subset U^{\mathbb{R}_+}$对于某个向量空间 U，且 $\mathcal{U}$满足平移不变性和平移拼接公理。于是，根据 $PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i})$ 的定义以及范数（6.2），这些公理对于乘积空间 $PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i}) \times \mathcal{U}$也成立。

定义 6.1.2。 给定控制系统 Σ_i $(i \in I)$，如（6.1）中所定义，假设存在一个映射 ϕ : $D_\phi \to X$，定义在 $D_\phi \subset \mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U}$上，使得：

(i) 对于每个 $x \in X$ 和每个 $u \in \mathcal{U}$，都存在 $\varepsilon > 0$，使得 $[0, \varepsilon] \times \{(x, u)\} \subset D_\phi$。

(ii) 此外，转移映射 $\phi : D_\phi \to X$ 的组件 ϕ_i 满足

$$\phi_i(t, x, u) = \bar{\phi}_i(t, x_i, (\phi_{\neq i}, u)) \quad \forall (t, x, u) \in D_\phi,$$

其中，对于所有 $i \in I$， $\phi_{\neq i}(\cdot) = (\phi_j(\cdot, x, u))_{j\in I\setminus\{i\}}$。[1]

我们还假设， ϕ 是极大的，即不存在其他映射 $\tilde{\phi} : D_{\tilde{\phi}} \to X$，满足 $D_{\tilde{\phi}} \supset D_\phi$，且符合上述所有性质并在 D_ϕ 上与 ϕ 一致。

[1]根据因果性公理，我们可以假设 $\phi_{\neq i}$ 在全局有界，因为 $\bar{\phi}_i(t, x_i, (\phi_{\neq i}, u))$ 不依赖于 $\phi_{\neq i}(s)$ 在 $s > t$ 时的取值；而在紧区间 $[0, t]$ 上， $\phi_{\neq i}$ 有界，因为它是连续的。

如果映射 ϕ 是唯一满足上述性质的映射，并且 $\Sigma=(X,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 是满足 BIC 性质的控制系统，那么 Σ 称为系统 Σ_i 的（反馈）互连。

我们将 $X_{\neq i}$ 称为内部输入值空间，将 $PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i})$称为内部输入空间，并将 $\mathcal{U}$ 称为该系统 Σ_i的外部输入空间。此外，我们将 Σ_i Σ的第 i个子系统称为 Σ_i Σ的第 i个子系统。$\lhd$

上述稳定性性质是根据整个输入的范数来定义的，这不适合用于考察耦合系统，因为我们关注的不仅是所有输入对某个子系统的整体影响，也包括特定子系统对给定子系统的影响。以下定义提供了所需的灵活性。

设 Z为一个巴拿赫空间。对于 $g\in PC(\mathbb{R}_+,Z)$ 和 $t>0$，我们记 $\|g\|_{[0,t]}:=\sup_{s\in[0,t]}|g(s)|$。

定义 6.1.3。给定空间 $(X_j,\|\cdot\|_{X_j})$、$j\in I$，以及固定$i\in I$时的系统 Σ_i，若 Σ_i正向完备，且存在 $\gamma_{ij},\gamma_j\in\mathcal{K}\cup\{0\}$，使得对所有 $j\in I$，以及存在 $\beta_i\in\mathcal{KL}$，使得对于所有初始状态 $x_i\in X_i$、所有内部输入 $w_{\neq i}=(w_j)_{j\in I\setminus\{i\}}\in PC_b(\mathbb{R}_+,X_{\neq i})$、所有外部输入 $u\in\mathcal{U}$ 和 $t\geq 0$，均有：

$$\|\bar{\phi}_i(t,x_i,(w_{\neq i},u))\|_{X_i}\leq\beta_i(\|x_i\|_{X_i},t)+\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(\|w_j\|_{[0,t]})+\gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}).$$

这里假设函数 γ_{ij} 对每个 $r\geq 0$ 都满足 $\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(r)<\infty$（这意味着右端的和是有限的），并且 $\gamma_{ii}=0$。$\lhd$

此定义中的函数 γ_{ij} 和 γ_i 称为（非线性）增益。

接下来，我们用 $\ell_\infty(I)$ 表示由所有满足 $\|x\|_{\ell_\infty(I)}:=\sup_{i\in I}|x(i)|<\infty$ 的函数 $x:I\to\mathbb{R}$ 构成的巴拿赫空间。此外，通过引入由正锥 $\ell_\infty^+(I)$ 给出的序，我们将 $\ell_\infty(I)$ 构造成一个有序巴拿赫空间：

$$\ell_\infty^+(I):=\{x\in\ell_\infty(I):x(i)\geq 0,\ \forall i\in I\}.$$

关于有序巴拿赫空间理论的基础知识，请参见附录 C；本章将以此为基础展开讨论。

假设所有系统 Σ_i、$i\in I$ 都以半最大值表述满足输入到状态稳定性，则我们可以根据增益 γ_{ij} 定义一个非线性单调算子 $\Gamma_\otimes:\ell_\infty^+(I)\to\ell_\infty^+(I)$：

$$\Gamma_\otimes(s):=\big(\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(s_j)\big)_{i\in I},\quad s=(s_i)_{i\in I}\in\ell_\infty^+(I).\tag{6.3}$$

这个算子以及其他由单个增益组成的类似算子，通常称为增益算子。

一般而言，$\Gamma_\otimes$ 定义不明确。很容易看出，以下假设等价于 $\Gamma_\otimes$ 定义明确。

假设 6.1.4。对于每个 $r>0$，都有 上确界$_{i,\ j\in I}\gamma_{ij}(r)<\infty$。

引理 6.1.5. 假设 *6.1.4* 等价于存在 $\zeta\in\mathcal{K}_\infty$ 和 $a\geq 0$，使得对所有 $r\geq 0$，都有 $\sup_{i,\ j\in I}\gamma_{ij}(r)\leq a+\zeta(r)$。

证明。 显然，蕴含关系“⇐”成立。反过来，定义 $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 为

$$\xi(r) := \sup_{i,j\in I} \gamma_{ij}(r).$$

作为连续增函数的上确界， ξ 在其定义域上是下半连续且非递减的。根据假设，对于每个 $r \geq 0$ ， $\xi(r)$都是有限的，因此定义

$$\tilde{\xi}(r) := \begin{cases} 0 & \text{if } r = 0, \\ \xi(r) - a & \text{if } r > 0, \end{cases}$$

其中 $a :=$ 极限$_{r\to+0}\,\xi(r) \geq 0$ （由于 ξ ξ 是非递减的，该极限存在）。根据构造， $\tilde{}$ 是非递减的，在 0 处连续，并满足 $\tilde{\xi}(0) = 0$。因此， ξ 可以由某个 $\zeta \in \mathcal{K}_\infty$ 上界控制（这可由 [172, 命题 9]中的一个更一般结果推出）。总之，对于所有 ， $\sup_{j\in I} \gamma_{ij}(r) \leq a + \zeta(r)$。 □

此外，注意到，如果定义良好， $\Gamma_\otimes$是一个单调算子。也就是说，对于所有 s^1， $s^2 \in \ell^+_\infty(I)$，以下蕴含关系成立

$$s^1 \leq s^2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_\otimes(s^1) \leq \Gamma_\otimes(s^2).$$

注 6.1.6. 如果所有增益 γ_{ij} 都是线性的，那么 $\Gamma_\otimes$ 满足以下两个性质 s:

(i) $\Gamma_\otimes$ 是一个一阶齐次算子，即对于所有 $a \geq 0$ 和 $s \in \ell^+_\infty(I)$， $\Gamma_\otimes(as) = a\Gamma_\otimes(s)$。

(ii) $\Gamma_\otimes$ 是次可加的，即对于所有 s^1， $s^2 \in \ell^+_\infty(I)$， $\Gamma_\otimes(s^1 + s^2) \leq \Gamma_\otimes(s^1) + \Gamma_\otimes(s^2)$。

◁

最后，我们给出一个判据，用于判断 $\Gamma_\otimes$ 的连续性

命题 6.1.7. 假设族 $\{\gamma_{ij}\}_{(i,j)\in I^2}$ 逐点等度连续，即对于每个 $r \in \mathbb{R}_+$ 和 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ ，使得只要$(i, j) \in I^2$ 且 $|r - s| \leq \delta$，就有 $|\gamma_{ij}(r) - \gamma_{ij}(s)| \leq \varepsilon$ 。那么 $\Gamma_\otimes$ 定义良好且连续。

证明。 首先，我们证明 $\Gamma_\otimes$ 定义良好。固定某个 $r > 0$，由紧性论证可知，族 $\{\gamma_{ij}\}_{(i,j)\in I^2}$ 在紧区间 $[0, r]$上一致等度连续。因此，我们可以找到 $\delta > 0$ ，使得 $|s_1 - s_2| \leq \delta$ 与 $s_1, s_2 \in [0, r]$ 蕴含$|\gamma_{ij}(s_1) - \gamma_{ij}(s_2)| \leq 1$ 对所有 i, j都成立。我们可以假设 δ 具有如下形式：对于某个整数n， r/n 。那么

$$\gamma_{ij}(r) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\gamma_{ij}\left(\frac{k+1}{n}r\right) - \gamma_{ij}\left(\frac{k}{n}r\right)\right] \leq n < \infty$$

对所有 $(i, j) \in I^2$均成立。因此， $\Gamma_\otimes$ 定义良好。

现在我们证明连续性。任取 $\varepsilon > 0$，固定某个 $s^0 \in \ell^+_\infty(I)$，并令 $s \in \ell^+_\infty(I)$，使得$\|s - s^0\|_{\ell_\infty(I)} \leq \delta$，其中 $\delta > 0$ 待定。根据所要求的一致等度连续性，我们可以选取足够小的 δ $|\gamma_{ij}\ s^0_j\ - \gamma_{ij}\ s_j\ | \leq \varepsilon$ $i\ j$ $|s^0_j - s_j| \leq$，使得对于所有 (,)，当 () 时，$\|s^0 - s\|_{\ell_\infty\ I} \leq \delta$ ( ) ( )。这也意味着

$$\|\Gamma_\otimes(s^0) - \Gamma_\otimes(s)\|_{\ell_\infty(I)} = \sup_{i\in I} \left|\sup_{j\in I} \gamma_{ij}(s^0_j) - \sup_{j\in I} \gamma_{ij}(s_j)\right| \leq \varepsilon.$$

在最后一个不等式中，我们使用了以下估计

$$\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(s_j^0)-\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(s_j)\le\sup_{j\in I}(\gamma_{ij}(s_j)+\varepsilon)-\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(s_j)=\varepsilon,$$

以及反方向上的类似估计。 □

系统 Σ_i 的另一种 ISS 表述如下。在这种表述中，我们需要假设 I 是可数集。

定义 6.1.8。 假设 I 是一个非空可数集。给定空间 $(X_j,\|\cdot\|_{X_j})$、$j\in I$，以及固定 $i\in I$ 下的系统 Σ_i，若 Σ_i 是正向完备的，并且存在 $\gamma_{ij},\gamma_j\in\mathcal{K}\cup\{0\}$（对所有 $j\in I$）以及 $\beta_i\in\mathcal{KL}$，使得对于所有初始状态 $x_i\in X_i$、所有内部输入 $w_{\neq i}=(w_j)_{j\in I\setminus\{i\}}\in PC_b(\mathbb{R}_+,X_{\neq i})$、所有外部输入 $u\in\mathcal{U}$ 和 $t\ge 0$，都有：

$$\|\bar\phi_i(t,x_i,(w_{\neq i},u))\|_{X_i}\le\beta_i(\|x_i\|_{X_i},t)+\sum_{j\in I}\gamma_{ij}(\|w_j\|_{[0,t]})+\gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}).$$

这里假设函数 γ_{ij} 满足：对于每个 $r\ge 0$，$\sum_{j\in I}\gamma_{ij}(r)<\infty$（这意味着右端的和是有限的），且 $\gamma_{ii}=0$。◁

注 6.1.9。 如果一个网络具有有限个组件，那么求和形式的 ISS 与半最大值表述的 ISS 是等价的概念。尽管如此，即使对于有限网络，半最大值表述中的增益与求和形式中的增益也各不相同；对于某些系统，其中一种表述优于另一种，因为它能得到更紧（因而更小）的增益。这促使我们对这两种表述都进行分析。我们将在第 6.3.3、6.3.4 节通过示例说明这一点。事实上，文献中还研究了网络输入到状态稳定性的更一般表述，这些表述采用单调聚合函数的形式体系，见第 7.2 节。◁

假设所有系统 Σ_i，$i\in I$ 都具有输入到状态稳定性，我们可以根据增益 γ_{ij} 定义非线性单调算子 $\Gamma_\boxplus:\ell_\infty^+(I)\to\ell_\infty^+(I)$，如下所示：

$$\Gamma_\boxplus(s):=\Big(\sum_{j\in I}\gamma_{ij}(s_j)\Big)_{i\in I},\quad s=(s_i)_{i\in I}\in\ell_\infty^+(I).$$

同样，$\Gamma_\boxplus$ 可能没有良好定义。因此，我们需要作出适当的假设 n.

假设 6.1.10。对于 $r>0$，有

$$\sup_{i\in I}\sum_{j\in I}\gamma_{ij}(r)<\infty.$$

注 6.1.11。 假设所有增益 $\gamma_{ij},(i,j)\in I^2$都是线性函数。那么，增益算子 $\Gamma_\boxplus$ 可以视为定义在 $\ell_\infty(I)$ 上的线性算子，且假设 6.1.10等价于 $\Gamma_\boxplus$ 是定义在 $\ell_\infty(I)$ 上的有界线性算子。◁

命题 6.1.12。 假设算子 $\Gamma_\boxplus$ 定义良好。$\Gamma_\boxplus$ 连续的一个充分判据是，每个 γ_{ij} 都是一个 C^1-函数，并且

$$\sup_{i\in I}\sum_{j\in I}\sup_{0<s\le r}\gamma_{ij}'(s)<\infty,\quad r>0.$$

证明。固定 $s^0 = s^0_j{}_{j\in I} \in \ell^+_\infty\, I \qquad \varepsilon > 0 \qquad s \in \ell^+_\infty\, I \qquad \|s - s^0\|_{\ell_\infty\, I} = \quad {}_{i\in I}\,|s_i - (\,)(\,)$ 和 。令 $(\,)$ 满足 $()$ $s^0_i| \le \delta \qquad \delta > 0$ 对某个 的上确界，稍后确定该值。于是

$$\|\Gamma_\boxplus(s^0) - \Gamma_\boxplus(s)\|_{\ell_\infty(I)} = \sup_{i\in I}\Big|\sum_{j\in I}(\gamma_{ij}(s^0_j) - \gamma_{ij}(s_j))\Big|.$$

利用每个 γ_{ij} 都是 C^1 函数这一假设，并记 $s^0_{\max} := \|s^0\|_{\ell_\infty(I)}$，我们可以将其估计为

$$\begin{aligned}\|\Gamma_\boxplus(s) - \Gamma_\boxplus(s^0)\|_{\ell_\infty(I)} &\le \sup_{i\in I}\sum_{j\in I}|\gamma_{ij}(s_j) - \gamma_{ij}(s^0_j)| \\ &\le \sup_{i\in I}\sum_{j\in I}\sup_{r\in[s^0_j-\delta, s^0_j+\delta]}|\gamma'_{ij}(r)||s_j - s^0_j| \le \delta\sup_{i\in I}\sum_{j\in I}\sup_{r\le s^0_{\max}+\delta}\gamma'_{ij}(r).\end{aligned}$$

根据假设，最后一个上确界是有限的，这意味着可以将 δ 取得足够小，使整个表达式小于 ε。 □

我们还需要系统 Σ_i 的一致全局稳定版本。

定义 6.1.13。给定空间 $(X_j, \|\cdot\|_{X_j})$、$j \in I$，以及固定$i \in I$时的系统 Σ_i，若 Σ_i 正向完备，且存在 $\gamma_{ij}, \gamma_j \in \mathcal{K}\cup\{0\}$，使得对所有 $j \in I$，以及 $\sigma_i \in \mathcal{K}_\infty$，对于所有初始状态 $x_i \in X_i$、所有内部输入 $w_{\neq i} = (w_j)_{j\in I\setminus\{i\}} \in PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i})$、所有外部输入 $u \in \mathcal{U}$ 和 $t \ge 0$，均有：一致全局稳定 *(UGS)*（半最大值表述）

$$\|\bar\phi_i(t, x_i, (w_{\neq i}, u))\|_{X_i} \le \sigma_i(\|x_i\|_{X_i}) + \sup_{j\in I}\gamma_{ij}(\|w_j\|_{[0,t]}) + \gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}).$$

这里假设函数 γ_{ij} 满足：对每个 $r \ge 0$，$\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(r) < \infty$（这意味着右端的和有限），并且 $\gamma_{ii} = 0$。◁

定义 6.1.14。设 I 为可数指标集。给定空间 $(X_j, \|\cdot\|_{X_j})$、$j \in I$，以及固定 $i \in I$ 时的系统 Σ_i，如果 Σ_i 正向完备，且存在 $\gamma_{ij}, \gamma_j \in \mathcal{K}\cup\{0\}$，使得对所有 $j \in I$，以及 $\sigma_i \in \mathcal{K}_\infty$，对所有初始状态 $x_i \in X_i$、所有内部输入$w_{\neq i} = (w_j)_{j\in I\setminus\{i\}} \in PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i})$、所有外部输入 $u \in \mathcal{U}$ 和 $t \ge 0$，均满足以下条件，则称 Σ_i 为一致全局稳定（*UGS*）（求和形式）：

$$\|\bar\phi_i(t, x_i, (w_{\neq i}, u))\|_{X_i} \le \sigma_i(\|x_i\|_{X_i}) + \sum_{j\in I}\gamma_{ij}(\|w_j\|_{[0,t]}) + \gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}).$$

这里我们假设函数 γ_{ij} 满足：对于每个 $r \ge 0$，都有 $\sum_{j\in I}\gamma_{ij}(r) < \infty$（这意味着右端的和是有限的），并且 $\gamma_{ii} = 0$。◁

6.2 离散时间系统的稳定性

本节中，我们研究该系统的稳定性性质

$$x(k+1) \le A(x(k)) + u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.4}$$

这里，(X, X^+) 是一个有序巴拿赫空间，$A: X^+ \to X^+$ 是锥 X^+ 上的非线性算子，而输入 u 是 $\ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X^+)$ 的一个元素，后一个空间定义为

$$\ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X^+) := \{u = (u(k))_{k\in\mathbb{Z}_+} : u(k) \in X^+,\ \|u\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \|u(k)\|_X < \infty\}.$$

方程（*6.4*）的一个解是映射 $x: \mathbb{Z}_+ \to X^+$，它满足（6.4）。如果映射 $x: \mathbb{Z}_+ \to X^+$ 是递减的，则 $x(k+1) \le x(k)$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}_+$均成立。

正如我们将看到的，对于无限互联系统的小增益分析，增益算子以及由增益算子诱导的离散时间系统（6.4）的性质至关重要。因此，我们现在将系统（6.4）的稳定性与算子 A 的性质联系起来。

定义 6.2.1。如果存在 $\xi \in \mathcal{K}_\infty$，使得对每个 $\varepsilon > 0$、每个常值输入 $u(\cdot) :\equiv w \in X^+$ 以及（$: \mathbb{Z}_+ \to X^+$）的每个递减解，存在 $N = N(\varepsilon, u, x(\cdot)) \in \mathbb{Z}_+$，且

$$\|x(N)\|_X \le \varepsilon + \xi(\|w\|_X).$$

◁

定义 6.2.2。设 (X, X^+) 为有序巴拿赫空间，且令 $A: X^+ \to X^+$ 为一个非线性算子。如果存在 $\xi \in \mathcal{K}_\infty$，使得对所有 $v, w \in X^+$ 均满足以下蕴含关系，则称 id $-A$ 具有单调有界可逆性（*MBI*）性质：

$$(\mathrm{id} - A)(v) \le w \quad \Rightarrow \quad \|v\|_X \le \xi(\|w\|_X).$$

◁

命题 6.2.3。设 (X, X^+) 为有序巴拿赫空间，且令 $A: X^+ \to X^+$ 为一个非线性算子。如果系统 (6.4) 具有 *MLIM* 性质，则算子 $\mathrm{id} - A$具有 *MBI* 性质。

证明。假设对于某些 v、$w \in X^+$，$(\mathrm{id} - A)(v) \le w$。将其写作 $v \le A(v) + w$。因此，$x(\cdot) :\equiv v$ 是系统 (6.4) 的一个常值解，对应于常值输入序列 $u(\cdot) :\equiv w$。根据 MLIM 性质，存在 $\xi \in \mathcal{K}_\infty$（与 v、w 无关），使得对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 N，满足

$$\|v\|_X = \|x(N)\|_X \le \varepsilon + \xi(\|u\|_\infty) = \varepsilon + \xi(\|w\|_X).$$

由于这对每个 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们得到 $\|v\|_X \le \xi(\|w\|_X)$，证明至此完成。

□

MBI 性质是否严格弱于 *MLIM* 性质，还是二者等价，这是一个开放问题。不过，在下面的命题中，我们将证明，在算子 A 或锥 X^+满足某些假设的情况下，二者等价。稍后，在命题6.6.1 和6.6.2中，我们将证明，对于定义在 $\ell_\infty(I)$ 上的线性算子，以及具有线性增益的增益算子 $\Gamma_\otimes$，二者等价。

若锥 X^+ 满足*Levi* 性质，则称其具有该性质；如果 X^+ 中的每个递减序列都按范数收敛 [1, 定义 2.44(2)]。典型示例包括 L^p-空间中（对于 $p \in [1, \infty)$）的标准锥，以及空间 c_0 中由收敛到 0 的实值数列构成的标准锥。顺便指出，若锥 X^+ 具有 Levi 性质，则它是正规的 [1,定理 2。45]。

命题 6.2.4。 设(X, X^+) 是一个锥正规的有序巴拿赫空间，且$A: X^+ \to X^+$ 是一个非线性、连续且单调的算子。若锥 X^+ 具有 *Levi* 性质，或者算子 A 是紧的（即，它将有界集映射到相对紧集），则下列命题等价：

(i) 系统 (6.4)满足 *MLIM* 性质。

(ii) 算子 $\mathrm{id} - A$ 满足 *MBI* 性质。

证明。根据命题 6.2.3，只需证明蕴含关系“(ii) $\Rightarrow$ (i)”。因此，考虑一个常值输入 $u(\cdot) :\equiv w \in X^+$ 以及实数集 X^+ 中的一个递减序列 $x(\cdot)$，使得对所有 $k \in \mathbb{Z}_+$，$x(k+1) \le A(x(k)) + w$。由于 A是单调的，算子 $\tilde{A}(x) := A(x) + w$，$\tilde{A}: X^+ \to X^+$也是单调的；如果 A 是紧的，那么 $\tilde{A}$也是紧的。此外，

$$x(k+1) \le \tilde{A}(x(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.5}$$

现在考虑序列 $y(k) := A(x(k))$，$k \in \mathbb{Z}_+$。由于 x 是递减的，y也递减。接下来注意到，y 在范数下收敛。事实上，如果锥具有 Levi 性质，这一点显然成立。如果锥不具有 Levi 性质，那么根据假设，A，因此 $\tilde{A}$是紧的。所以 y 有一个收敛子序列。由于 y 是递减的，且锥是正规的，因此 y 本身也收敛。

令 $y_* \in X^+$ 表示序列 y的极限。对等式两边应用 $\tilde{A}$，得到 (6.5)

$$y(k+1) \le \tilde{A}(y(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

令 $k \to \infty$ 取极限，并利用 $\tilde{A}$ 的连续性，得到 $y_* \le \tilde{A}(y_*) = A(y_*) + w$。由于这可以写成 $(\mathrm{id} - A)(y_*) \le w$，$\mathrm{id} - A$的 MBI 性质给出$\|y_*\| \le \xi(\|w\|)$。由于 X^+ 是正规锥，存在 $\delta > 0$，使得对每个 $\varepsilon > 0$，都存在足够大的$k > 0$，使得

$$\|x(k+1)\|_X \le \delta \|\tilde{A}(x(k))\|_X \le \varepsilon + \delta\xi(\|w\|_X).$$

证明完毕。 □

6.3 小增益定理

6.3.1 半最大值形式下的小增益定理

本小节将在半最大值形式下证明一致全局稳定和输入到状态稳定性的小增益定理。我们先讨论一致全局稳定。

定理 6.3.1（半最大值表述下的一致全局稳定小增益定理）。 令 I 为任意非空指标集，$(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$、$i \in I$为赋范空间，并令 $\Sigma_i = (X_i, PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i}) \times \mathcal{U}, \phi_i)$ 为正向完备控制系统。假设系统 Σ_i 的互联系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 定义良好。此外，设以下假设成立：

(i) 每个系统 Σ_i 根据定义 *6.1.13* 的意义，均是一致全局稳定的，且具有 $\sigma_i \in \mathcal{K}$ 和非线性增益 γ_{ij}，$\gamma_i \in \mathcal{K} \cup \{0\}$。 *(ii)* 存在 $\sigma_{\max} \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\gamma_{\max} \in \mathcal{K}_\infty$，使得 $\sigma_i \le \sigma_{\max}$ 且 $\gamma_i \le \gamma_{\max}$，对所有 $i \in I$逐点成立。

(iii) 假设 6.1.4 对算子 $\Gamma_\otimes$ 成立，该算子由 *(i)* 中的增益 γ_{ij} 定义，且 $\mathrm{id}-\Gamma_\otimes$ 具有 *MBI* 性质。

那么， Σ正向完备且一致全局稳定。

证明。 固定 $(t,x,u)\in D_\phi$，并注意到

$$\|\phi(t,x,u)\|_X=\sup_{i\in I}\|\phi_i(t,x,u)\|_{X_i}=\sup_{i\in I}\|\bar{\phi}_i(t,x_i,(\phi_{\neq i},u))\|_{X_i}.$$

简记 $\bar{\phi}_j(\cdot)=\phi_j(\cdot,x_j,(\phi_{\neq j},u))$，并利用假设 (i)，可得估计

$$\sup_{s\in[0,t]}\|\bar{\phi}_i(s,x_i,(\phi_{\neq i},u))\|_{X_i}\le\sigma_i(\|x_i\|_{X_i})+\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(\|\bar{\phi}_j\|_{[0,t]})+\gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{6.6}$$

由不等式（利用 $s\mapsto\phi(s,x,u)$ 的连续性）

$$0\le\sup_{s\in[0,t]}\|\bar{\phi}_i(s,x_i,(\phi_{\neq i},u))\|_{X_i}\le\sup_{s\in[0,t]}\|\phi(s,x,u)\|_X<\infty,\quad i\in I,$$

可知

$$\vec{\phi}_{\max}(t):=\Big(\sup_{s\in[0,t]}\|\bar{\phi}_i(s,x_i,(\phi_{\neq i},u))\|_{X_i}\Big)_{i\in I}\in\ell_\infty^+(I).$$

由假设 (ii) 可知，向量 $\vec{\sigma}(x):=(\sigma_i(\|x_i\|_{X_i}))_{i\in I}$ 和 $\vec{\gamma}(u):=(\gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}))_{i\in I}$ 均包含于 $\ell_\infty^+(I)$ 中。因此，我们可以将不等式（6.6）写成向量形式:

$$(\mathrm{id}-\Gamma_\otimes)(\vec{\phi}_{\max}(t))\le\vec{\sigma}(x)+\vec{\gamma}(u).$$

根据假设 (iii)，可得对某个 $\xi\in\mathcal{K}_\infty$，其与 x,u 无关:

$$\|\vec{\phi}_{\max}(t)\|_{\ell_\infty(I)}\le\xi(\|\vec{\sigma}(x)+\vec{\gamma}(u)\|_{\ell_\infty(I)})\le\xi(\|\vec{\sigma}(x)\|_{\ell_\infty(I)}+\|\vec{\gamma}(u)\|_{\ell_\infty(I)}).$$

由于对所有 $a,b\ge0$， $\xi(a+b)\le\max\{\xi(2a),\xi(2b)\}\le\xi(2a)+\xi(2b)$，因此可推出

$$\begin{aligned}\|\vec{\phi}_{\max}(t)\|_{\ell_\infty(I)}&\le\xi(2\|\vec{\sigma}(x)\|_{\ell_\infty(I)})+\xi(2\|\vec{\gamma}(u)\|_{\ell_\infty(I)})\\&\le\xi(2\sigma_{\max}(\|x\|_X))+\xi(2\gamma_{\max}(\|u\|_{\mathcal{U}})),\end{aligned}$$

由此我们得出

$$\|\phi(t,x,u)\|_X\le\|\vec{\phi}_{\max}(t)\|_{\ell_\infty(I)}\le\xi(2\sigma_{\max}(\|x\|_X))+\xi(2\gamma_{\max}(\|u\|_{\mathcal{U}})),$$

这是一个一致全局有界估计，其中 $\sigma(r):=\xi(2\sigma_{\max}(r))$， $\gamma(r):=\xi(2\gamma_{\max}(r))$，适用于 Σ for all $(t,x,u)\in D_\phi$。由于根据假设， Σ具有 BIC 性质，因此可知 Σ正向完备且一致全局稳定。

□

现在我们可以陈述 ISS小增益定理了。

定理 6.3.2 （半最大值表述下的非线性 ISS 小增益定理）。 令I 为任意非空指标集，$(X_i,\|\cdot\|_{X_i})$、 $i\in I$为赋范空间，且 $\Sigma_i=(X_i,PC_b(\mathbb{R}_+,X_{\neq i})\times\mathcal{U},\phi_i)$ 为正向完备控制系统。假设系统 Σ_i的互联系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 定义良好。此外，假设满足以下条件:

(*i*) 每个系统 Σ_i 都按照定义 *6.1.3* 中的意义满足输入到状态稳定性（*ISS*），其增益为 $\beta_i \in \mathcal{KL}$，非线性增益为 γ_{ij}、$\gamma_i \in \mathcal{K} \cup \{0\}$。

(ii) 存在 $\beta_{\max} \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma_{\max} \in \mathcal{K}$，使得对所有 $i \in I$，$\beta_i \le \beta_{\max}$ 和 $\gamma_i \le \gamma_{\max}$ 逐点成立。

(iii) 假设 *6.1.4* 成立，且离散时间系统

$$w(k+1) \le \Gamma_{\otimes}(w(k)) + v(k), \tag{6.7}$$

其中 $w(\cdot)$ $v(\cdot)$ 取值于 $\ell^+_\infty(I)$，具有 *MLIM* 性质。

那么 Σ具有输入到状态稳定性。

证明。 我们证明 Σ 是一致全局稳定的，并满足 bUAG 性质；由定理 3.2.3，这意味着它具有输入到状态稳定性。

一致全局稳定。这由定理 6.3.1得出。事实上，定理 6.3.1 的假设 (i) 和 (ii) 均满足，其中 $\sigma_i(\cdot) := \beta_i(\cdot,0) \in \mathcal{K}$ 以及增益 γ_{ij}, γ_i 来自 $\Sigma_i, i \in I$的 ISS 估计。根据命题 6.2.3 和本定理的假设 (iii)，可知定理 6.3.1的假设 (iii) 得到满足。因此， Σ 是正向完备且一致全局稳定的。

bUAG。由于 Σ 是系统 Σ_i 的互联系统，且 Σ 正向完备，我们有 $\phi_i(t,x,u) = \phi_i(t, x_i, (\phi_{\neq i}, u))$，对所有 $(t,x,u) \in \mathbb{R}_+ \times X \times \mathcal{U}$ 和 $i \in I$ 均成立，其中采用定义 6.1.2 中的记号。

任取 $r > 0$、任意的 $u \in B_{r,\overline{u}}$以及 $x \in B_{r,\overline{x_\circ}}$由于 Σ 一致全局稳定，存在 σ^{UGS}，$\gamma^{\mathrm{UGS}} \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$\|\phi(t,x,u)\|_X \le \sigma^{\mathrm{UGS}}(r) + \gamma^{\mathrm{UGS}}(r) =: \mu(r), \quad t \ge 0.$$

根据余循环性质，对所有 $i \in I$ 和 t，$\tau \ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}\phi_i(t+\tau,x,u) &= \bar{\phi}_i(t+\tau, x_i, (\phi_{\neq i}, u)) \\ &= \bar{\phi}_i(\tau, \bar{\phi}_i(t, x_i, (\phi_{\neq i}, u)), (\phi_{\neq i}(\cdot+t), u(\cdot+t))).\end{aligned}$$

给定 $\varepsilon > 0$，选择 $\tau^* = \tau^*(\varepsilon, r) \ge 0$，使得 $\beta_{\max}(\mu(r), \tau^*) \le \varepsilon$。于是

$$\begin{aligned} x \in \overline{B_{r,X}} \ \wedge \ u \in \overline{B_{r,\mathcal{U}}} \ \wedge \ \tau \ge \tau^* \ \wedge \ t \ge 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\phi_i(t+\tau,x,u)\|_{X_i} &\le \beta_i(\|\bar{\phi}_i(t, x_i, (\phi_{\neq i}, u))\|_{X_i}, \tau) \\ &\quad + \sup_{j\in I} \gamma_{ij}(\|\phi_j\|_{[t,t+\tau]}) + \gamma_i(\|u(\cdot+t)\|_{\mathcal{U}}) \\ &\le \beta_{\max}(\|\phi(t,x,u)\|_X, \tau^*) + \sup_{j\in I} \gamma_{ij}(\|\phi_j\|_{[t,\infty)}) + \gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}) \\ &\le \varepsilon + \sup_{j\in I} \gamma_{ij}(\|\phi_j\|_{[t,\infty)}) + \gamma_i(\|u\|_{\mathcal{U}}). \end{aligned} \tag{6.8}$$

现在任取 $k \in \mathbb{N}$ 并写为

$$B(r,k) := \overline{B_{r,X}} \times \{u \in \mathcal{U} : \|u\|_{\mathcal{U}} \in [2^{-k}r, 2^{-k+1}r]\}.$$

然后，对所有 $(x,\ u) \in B(r,\ k)$，取上述不等式的上确界，可得对于所有 $i \in I$ 和所有 $t \ge 0$，

$$\sup_{(x,u)\in B(r,k)} \|\phi_i(t+\tau^*,x,u)\|_{X_i} \le \varepsilon + \sup_{j\in I} \gamma_{ij}\Big(\sup_{(x,u)\in B(r,k)} \|\phi_j\|_{[t,\infty)}\Big) + \gamma_i(2^{-k+1}r).$$

这意味着对于所有 $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}&\sup_{s\geq t+\tau^*}\sup_{(x,u)\in B(r,k)}\|\phi_i(s,x,u)\|_{X_i}\\&\quad\leq \varepsilon+\sup_{j\in I}\gamma_{ij}\Big(\sup_{s\geq t}\sup_{(x,u)\in B(r,k)}\|\phi_j(s,x,u)\|_{X_j}\Big)+\gamma_i(2^{-k+1}r).\end{aligned}$$

现在我们定义

$$w_i(t,r,k):=\sup_{s\geq t}\sup_{(x,u)\in B(r,k)}\|\phi_i(s,x,u)\|_{X_i}$$

并注意到，对于所有 $i\in I$ 和 $t\geq 0$， $w_i(t,r,k)\in[0,\mu(r)]$ 。采用这一记号，我们可以将前面的不等式改写为

$$w_i(t+\tau^*,r,k)\leq\varepsilon+\sup_{j\in I}\gamma_{ij}(w_i(t,r,k))+\gamma_i(2^{-k+1}r).$$

采用向量记号，令 $\vec{w}(t,r,k):=(w_i(t,r,k))_{i\in I}$，且 $\vec{\gamma}(r):=(\gamma_i(r))_{i\in I}$，并记 $\mathbb{1}:=(1,1,\ldots)$，则可将其写为

$$\vec{w}(t+\tau^*,r,k)\leq\Gamma_\otimes(\vec{w}(t,r,k))+\varepsilon\mathbb{1}+\vec{\gamma}(2^{-k+1}r).$$

注意到 $\vec{w}(t,r,k)\in\ell^+_\infty(I)$，因为该向量的各分量一致有界于$\mu(r)$，且当 $t_2\geq t_1$ 时， $\vec{w}(t_2,r,k)\leq\vec{w}(t_1,r,k)$。因此， $\vec{w}(l):=\vec{w}(l\tau^*,r,k)$， $l\in\mathbb{Z}_+$ 是方程 (6.7) 对常值输入 $v(\cdot)\equiv\varepsilon\mathbb{1}+\vec{\gamma}(2^{-k+1}r)$ 的一个单调解。根据定理的假设 (iii)，这意味着存在时间 $\tilde{\tau}=\tilde{\tau}(\varepsilon,r,k)$ 以及一个 $\mathcal{K}_\infty$-函数ξ ，使得

$$\begin{aligned}\|\vec{w}(\tilde{\tau},r,k)\|_{\ell_\infty(I)}&\leq\varepsilon+\xi(\|\varepsilon\mathbb{1}+\vec{\gamma}(2^{-k+1}r)\|_{\ell_\infty(I)})\\&\leq\varepsilon+\xi(\|\varepsilon\mathbb{1}\|_{\ell_\infty(I)}+\|\vec{\gamma}(2^{-k+1}r)\|_{\ell_\infty(I)})\\&\leq\varepsilon+\xi(\varepsilon+\gamma_{\max}(2^{-k+1}r))\\&\leq\varepsilon+\xi(2\varepsilon)+\xi(2\gamma_{\max}(2^{-k+1}r)).\end{aligned}$$

根据定义，这意味着

$$\begin{aligned}&i\in I\quad\wedge\quad(x,u)\in B(r,k)\quad\wedge\quad t\geq\tilde{\tau}(\varepsilon,r,k)\\&\Rightarrow\|\phi_i(t,x,u)\|_{X_i}\leq\varepsilon+\xi(2\varepsilon)+\xi(2\gamma_{\max}(2^{-k+1}r)).\end{aligned}$$

现在，将 $k_0=k_0(\varepsilon,r)$ 定义为满足 $\xi(2\gamma_{\max}(2^{1-k}r))\leq\varepsilon$ 的最小 $k\geq 1$ ，并令

$$\hat{\tau}(\varepsilon,r):=\max\{\tilde{\tau}(\varepsilon,r,k):1\leq k\leq k_0(\varepsilon,r)\}.$$

任取 $0\neq u\in B_{r,\mathcal{U}}$ 则存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $\|u\|_{\mathcal{U}}\in(2^{-k}r,2^{-k+1}r]$。如果 $k\leq k_0$ (大输入)，那么对于 $t\geq\hat{\tau}(\varepsilon,r)$，我们有

$$\begin{aligned}\|\phi(t,x,u)\|_X&\leq\varepsilon+\xi(2\varepsilon)+\xi(\gamma_{\max}(2^{-k+1}r))\\&\leq\varepsilon+\xi(2\varepsilon)+\xi(2\gamma_{\max}(2\|u\|_{\mathcal{U}})).\end{aligned}\tag{6.9}$$

接下来考虑 $k>k_0$ （小输入）的情况。对于任意 $q\in[0,r]$，可以对 (6.8) 中的 $x\in B_{r,\,X}$ 和 $u\in B_{q,\,\mathcal{U}}$ 取上确界，得到

$$\begin{aligned}&\sup_{(x,u)\in\overline{B_{r,X}}\times\overline{B_{q,\mathcal{U}}}}\|\phi_i(t+\tau,x,u)\|_{X_i}\\&\quad\leq\varepsilon+\sup_{j\in I}\gamma_{ij}\Big(\sup_{(x,u)\in\overline{B_{r,X}}\times\overline{B_{q,\mathcal{U}}}}\|\phi_j\|_{[t,\infty)}\Big)+\gamma_i(q).\end{aligned}$$

令 $z_i(t,\ r,\ q) := \sup_{s\geq t} \sup_{(x,u)\in \overline{B_{r,X}}\times \overline{B_{q,\mathcal{U}}}} \|\phi_i(s,\ x,\ u)\|_{X_i}$，按照上述类似步骤可得：对于每个 $\varepsilon > 0$、$r > 0$ 和 $q \in [0, r]$，都存在一个时间 $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\varepsilon,\ r,\ q)$，使得

$$(x,u) \in \overline{B_{r,X}} \times \overline{B_{q,\mathcal{U}}} \ \wedge \ t \geq \bar{\tau} \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X \leq \varepsilon + \xi(2\varepsilon) + \xi(2\gamma_{\max}(q)).$$

特别是，对于 $q_0 := 2^{-k_0(\varepsilon,\ r)+1}$，我们有

$$(x,u) \in \overline{B_{r,X}} \times \overline{B_{q_0,\mathcal{U}}} \ \wedge \ t \geq \bar{\tau} \quad \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X \leq 2\varepsilon + \xi(2\varepsilon), \tag{6.10}$$

由于 $\xi(2\gamma_{\max}(q_0)) = \xi(2\gamma_{\max}(2^{-k_0(\varepsilon,r)+1})) \leq \varepsilon$，根据 k_0 的定义。定义 $\tau(\varepsilon,r) :=\max\{\hat{}\tau(\varepsilon,r)\ \bar{\tau}(\varepsilon,r,q_0)\}$。结合（6.9）和（6.10），我们得到

$$\begin{aligned}(x,u) \in \overline{B_{r,X}} \times \overline{B_{r,\mathcal{U}}} \ \wedge \ t \geq \tau(\varepsilon,r)\\ \Rightarrow \quad \|\phi(t,x,u)\|_X \leq 2\varepsilon + \xi(2\varepsilon) + \xi(2\gamma_{\max}(2\|u\|_{\mathcal{U}})).\end{aligned}$$

由于 $r \mapsto \xi(2\gamma_{\max}(2r))$ 是一个 $\mathcal{K}_\infty$-函数，我们已经证明 Σ 具有 bUAG 性质，从而完成证明。 □

对于有限网络，定理6.3.2已在 [158] 中证明。然而，在无限维情形的证明中存在一些重要的新内容，因为无限多个子系统的轨迹不一定具有一致的收敛速度。这也使得所采用的小增益条件得到了加强。

当所有互联增益 γ_{ij} 都是线性的特殊情况下，正如下述推论所示，我们定理中的小增益条件可以直接用增益来表述。

推论 6.3.3（半最大值表述下的线性 ISS 小增益定理）。给定系统 $(\Sigma,\ \mathcal{U},\ \phi)$ 的互联系统 Σ_i，如定理 *6.3.2*所述，除满足该定理的假设 ***(i)*** 和 ***(ii)*** 外，还假设所有增益 γ_{ij} 均为线性函数（因此可视为非负实数），$\Gamma_\otimes$ 有定义，且满足以下条件：

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{j_1,\ldots,j_{n+1}\in I} \gamma_{j_1 j_2} \cdots \gamma_{j_n j_{n+1}} \right)^{1/n} < 1. \tag{6.11}$$

那么 Σ 是输入到状态稳定的。

证明。我们只需证明定理6.3.2的假设 (iii) 可由（6.11）推出。增益 γ_{ij} 的线性性意味着算子 $\Gamma_\otimes$ 是一次齐次且次可加的，见注6.1.6。然后，命题 6.5.2 和注 6.7.2共同表明，（6.11）意味着系统

$$w(k+1) \leq \Gamma_\otimes(w(k)) + v(k)$$

是指数输入到状态稳定（根据定义6.5.1），这很容易推出该系统具有 MLIM 性质。

□

6.3.2 求和形式下的小增益定理

现在我们以求和形式表述一致全局稳定和输入到状态稳定的小增益定理。

定理 6.3.4 （求和形式下的一致全局稳定小增益定理）。 设 I 是一个可数指标集， $(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$ 、 $i \in I$ 是赋范空间， $\Sigma_i = (X_i, PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i}) \times \mathcal{U}, \phi_i)$ 、$i \in I$ 是正向完备控制系统。假设这些系统 Σ_i 的互联系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 定义良好。此外，设满足以下假设：

（*i*）每个系统 Σ_i 都按照定义*6.1.14*（求和形式）是一致全局稳定的，且具有 $\sigma_i \in \mathcal{K}$ 和非线性增益 γ_{ij}， $\gamma_i \in \mathcal{K} \cup \{0\}$。 （*ii*）存在 $\sigma_{\max} \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\gamma_{\max} \in \mathcal{K}_\infty$ ，使得 $\sigma_i \leq \sigma_{\max}$ 且 $\gamma_i \leq \gamma_{\max}$对所有 $i \in I$均逐点成立。 （*iii*）算子*6.1.10* 的假设对算子 $\Gamma_\boxplus$ 成立，该算子由 （*i*） 中的增益 γ_{ij} 定义，且$\mathrm{id} - \Gamma_\boxplus$ 具有 *MBI* 性质。

那么 Σ是正向完备且一致全局稳定的。

证明。 证明与定理6.3.1的证明完全相同，只需将算子 $\Gamma_\boxplus$ 替换为 $\Gamma_\otimes$。

□

定理 6.3.5 (求和形式的非线性 ISS 小增益定理)。 设 I 为可数指标集，$(X_i, \|\cdot\|_{X_i})$，$i \in I$ 为赋范空间，且 $\Sigma_i = (X_i, PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i}) \times \mathcal{U}, \phi_i)$， $i \in I$ 为正向完备控制系统。假设这些系统的互联系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$ 定义良好。此外，假设满足以下条件：

(i) 每个系统 Σ_i 按照定义 *6.1.8* 的意义是 *ISS*，且具有 $\beta_i \in \mathcal{KL}$ 和非线性增益 γ_{ij}、$\gamma_i \in \mathcal{K} \cup \{0\}$。

(ii) 存在 $\beta_{\max} \in \mathcal{KL}$ 和 $\gamma_{\max} \in \mathcal{K}$ ，使得对于所有 $i \in I$，逐点成立 $\beta_i \leq \beta_{\max}$ 和 $\gamma_i \leq \gamma_{\max}$。

(iii) 假设 *6.1.10* 成立，且离散时间系统

$$w(k+1) \leq \Gamma_\boxplus(w(k)) + v(k), \tag{6.12}$$

其中 $w(\cdot)$ $v(\cdot)$ 取值于 $\ell_\infty^+(I)$，具有 *MLIM* 性质。

那么 Σ是输入到状态稳定的。

证明。 证明与定理6.3.2的证明几乎完全相同。唯一的区别是，我们现在需要使用估计 $\sup_{s \geq t}$ 和 $\sup_{j \in I}$，而不是交换两个上确界 sup 的次序

$$\sup_{s \geq t} \sum_{j \in I} \ldots \leq \sum_{j \in I} \sup_{s \geq t} \ldots,$$

这显然成立。

□

再次，我们针对所有增益 γ_{ij} 均为线性的情形推导一个推论。

推论 6.3.6（求和形式的线性 ISS 小增益定理）。考虑如下互联系统 $(\Sigma, \mathcal{U}, \phi)$，该系统由 Σ_i 组成，如定理 *6.3.5*中所述。除定理 *6.3.5*的假设 ***(i)*** 和 ***(ii)*** 外，进一步假设所有增益 γ_{ij} 均为线性函数（因此可视为非负实数），线性算子 $\Gamma_{\boxplus}$ 定义良好（因而有界），并满足谱半径条件 $r(\Gamma_{\boxplus}) < 1$。那么 Σ具有输入到状态稳定性。

证明。根据命题 6.6.1，$r(\Gamma_{\boxplus}) < 1$ 等价于系统（6.12）具有 MLIM 性质，因此也等价于定理 6.3.5的假设 (iii)。 □

6.3.3 例：线性空间不变系统

我们来分析该空间不变无限网络的稳定性

$$\dot{x}_i = ax_{i-1} - x_i + bx_{i+1} + u, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{6.13}$$

其中 a，$b > 0$ 且每个 Σ_i 都是一个标量系统，其状态为 $x_i \in \mathbb{R}$，内部输入为 x_{i-1},x_{i+1}，外部输入为 u，属于输入空间 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$。

按照第 6.1 节的一般方法，我们将 $(\Sigma_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 的互联系统的状态空间定义为 $X := \ell_\infty(\mathbb{Z})$。与有限维常微分方程类似，可以为方程 (6.13) 引入温和（Carath´eodory）解的概念，相关内容参见 [125]。由于 (6.13) 是线性的，容易看出，对每个初始条件 $x_0 \in X$ 和每个输入 $u \in \mathcal{U}$，相应的温和解都是唯一的，且存在于 $\mathbb{R}_+$ 上。我们将其记为 $\phi(\cdot, x_0, u)$。容易验证，三元组 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$ 按照本章的定义构成一个适定且正向完备的互联系统。

给定适定控制系统 Σ，我们接下来对其进行稳定性分析。

命题 6.3.7。耦合系统 (6.13) 是输入到状态稳定性的，当且仅当 $a + b < 1$。

证明。“⇒”：对于任意 a，$b > 0$，函数 $y : t \mapsto (e^{(a+b-1)t}x^*)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是满足初始条件（6.13) 的解，初始条件为 $(x^*)_{i\in\mathbb{Z}}$，输入为 $u \equiv 0$。这表明 $a + b \geq 1$ 意味着系统（6.13）不是输入到状态稳定的。

“⇐”：根据常数变易法可知，对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，将 x_{i-1}, x_{i+1} 视为来自 $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ 的外部输入，我们得到 x_i-子系统的如下 ISS 估计：

$$\begin{aligned} |x_i(t)| &= \left| e^{-t}x_i(0) + \int_0^t e^{s-t}[ax_{i-1}(s) + bx_{i+1}(s) + u(s)]ds \right| \\ &\leq e^{-t}|x_i(0)| + a\|x_{i-1}\|_\infty + b\|x_{i+1}\|_\infty + \|u\|_\infty, \end{aligned}$$

对于任意 $t \geq 0$, $x_i(0) \in \mathbb{R}$ 以及所有 $x_{i-1}, x_{i+1}, u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$。

这表明，x_i-子系统在求和形式下具有输入到状态稳定性，相应的增益算子是线性算子 $\Gamma : \ell_\infty^+(\mathbb{Z}) \to \ell_\infty^+(\mathbb{Z})$，作用于 $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其形式为 $\Gamma(s) = (as_{i-1} + bs_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$。不难看出

$$\|\Gamma\| := \sup_{\|s\|_{\ell_\infty(\mathbb{Z})}=1} \|\Gamma s\|_{\ell_\infty(\mathbb{Z})} = \|\Gamma \mathbb{1}\|_{\ell_\infty(\mathbb{Z})} = a + b < 1,$$

因此 $r(\Gamma) < 1$，根据推论6.3.6，该网络具有输入到状态稳定性。 □

6.3.4 例：非线性空间不变系统

考虑无限互连（按前几节中的含义）

$$\dot{x}_i = -x_i^3 + \max\{ax_{i-1}^3, bx_{i+1}^3, u\}, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{6.14}$$

其中 a, $b > 0$。与第 6.3.3 节一样，每个 Σ_i 都是一个标量系统，其状态为 $x_i \in \mathbb{R}$，内部输入为 x_{i-1}、x_{i+1}，外部输入为 u，它属于输入空间 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$。设互联系统 Σ 的状态空间为 $X := \ell_\infty(\mathbb{Z})$。

首先，我们分析互联系统（6.14）的适定性。对 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$ 和 $v \in \mathbb{R}$

$$f_i(x, v) := -x_i^3 + \max\{ax_{i-1}^3, bx_{i+1}^3, v\}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

以及

$$f(x, v) := (f_i(x, v))_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}.$$

成立

$$|f_i(x, v)| \le \|x\|_X^3 + \max\{a, b\} \max\{\|x\|_X^3, |v|\},$$

因此 $f(x, v) \in X$，其中 $\|f(x, v)\|_X \le \|x\|_X^3 + \max\{a, b\} \max\{\|x\|_X^3, |v|\}$。

此外，f 显然关于第二自变量连续。下面证明，f 关于第一自变量在有界球上是利普希茨连续的。对于任意 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$, $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X$ 以及任意 $v \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
\|f(x, u) - f(y, u)\|_X &= \sup_{i\in\mathbb{Z}} |f_i(x, u) - f_i(y, u)| \\
&= \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| -x_i^3 + \max\{ax_{i-1}^3, bx_{i+1}^3, v\} + y_i^3 - \max\{ay_{i-1}^3, by_{i+1}^3, v\} \right| \\
&\le \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| x_i^3 - y_i^3 \right| + \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| \max\{ax_{i-1}^3, bx_{i+1}^3, v\} - \max\{ay_{i-1}^3, by_{i+1}^3, v\} \right|.
\end{aligned}$$

根据伯克霍夫不等式 $|\max\{a_1, a_2, a_3\} - \max\{b_1, b_2, b_3\}| \le \sum_{i=1}^3 |a_i - b_i|$，该不等式对所有实数 a_i, b_i均成立，可得

$$\begin{aligned}
\|f(x, u) - f(y, u)\|_X &\le \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| x_i^3 - y_i^3 \right| + a \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| x_{i-1}^3 - y_{i-1}^3 \right| + b \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| x_{i+1}^3 - y_{i+1}^3 \right| \\
&= (1 + a + b) \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| x_i^3 - y_i^3 \right| \le (1 + a + b) \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| x_i - y_i \right| \sup_{i\in\mathbb{Z}} \left| x_i^2 + x_i y_i + y_i^2 \right| \\
&\le (1 + a + b) \|x - y\|_X \left(\|x\|_X^2 + \|x\|_X \|y\|_X + \|y\|_X^2 \right),
\end{aligned}$$

这表明，f 关于第一自变量在 X 中的有界球上是利普希茨连续的，并且关于第二自变量一致。

根据 [15, 定理 2。4][2]，这确保了方程（6.14）的 Carathéodory 解局部存在，并且对于任意固定的初始条件 $x_0 \in X$ 和外部输入$u \in \mathcal{U}$，其解唯一。我们将相应的极大解记为 $\phi(\cdot, x_0, u)$。容易验证，三元组 $\Sigma := (X, \mathcal{U}, \phi)$ 定义了本章意义下的适定互联系统。此外，Σ 具有 BIC 性质。

我们继续进行稳定性分析：

[2]所引用的结果假设满足全局利普希茨条件，因此确保正向完备性。然而，通过收缩方法，可以很容易地将该结果局部化。

命题 6.3.8。 耦合系统 （6.14） 当且仅当 最大值$\{a, b\} < 1$。

证明。 “⇒”：对于任意 a， $b > 0$ 考虑标量方程

$$\dot{z} = -(1 - \max\{a, b\})z^3,$$

满足初始条件 $z(0) = x^*$。函数 $t \mapsto (z(t))_{i\in\mathbb{Z}}$ 是方程 (6.14) 在初始条件 $(x^*)_{i\in\mathbb{Z}}$ 和输入 $u \equiv 0$ 下的一个解。这表明，对于 $\max\{a, b\} \geq 1$，系统 (6.14) 不具有输入到状态稳定性。

“⇐”：将 x_{i-1}、 x_{i+1} 和 u 作为输入，作用于方程 x_i (6.14) 的 - 子系统，并定义 $q := \max\{ax_{i-1}^3, bx_{i+1}^3, u\}$。沿轨迹 $|x_i(\cdot)|$ 的导数几乎处处满足以下 t 不等式：

$$\frac{d}{dt}|x_i(t)| \leq -|x_i(t)|^3 + q(t) \leq -|x_i(t)|^3 + \|q\|_\infty.$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，若 $\|q\|_\infty \leq \frac{1}{1+\varepsilon}|x_i(t)|^3$，则得到

$$\frac{d}{dt}|x_i(t)| \leq -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}|x_i(t)|^3.$$

根据比较原理（命题B.4.1），对 $y(t)$ 应用后：$= |x_i(t)|$，我们可以得到存在某个 $\beta \in \mathcal{KL}$，使得对所有 $t \geq 0$ 均有

$$\begin{aligned}
|x_i(t)| &\leq \beta(|x_i(0)|, t) + \big((1+\varepsilon)\|q\|_\infty\big)^{1/3} \\
&= \beta(|x_i(0)|, t) + \max\{a_1\|x_{i-1}\|_\infty, b_1\|x_{i+1}\|_\infty, (1+\varepsilon)^{1/3}\|u\|_\infty^{1/3}\} \\
&\leq \beta(|x_i(0)|, t) + \max\{a_1\|x_{i-1}\|_\infty, b_1\|x_{i+1}\|_\infty\} + (1+\varepsilon)^{1/3}\|u\|_\infty^{1/3},
\end{aligned}$$

其中 $a_1 := (1+\varepsilon)^{1/3}a^{1/3}$, $b_1 := (1+\varepsilon)^{1/3}b^{1/3}$。

这表明， x_i-子系统在半最大值表述下具有输入到状态稳定性，其对应的一次齐次增益算子为 $\Gamma : \ell_\infty^+(\mathbb{Z}) \to \ell_\infty^+(\mathbb{Z})$，对所有$s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 均由 $\Gamma(s) = (\max\{a_1 s_{i-1}, b_1 s_{i+1}\})_{i\in\mathbb{Z}}$给出。

前述计算对所有 $\varepsilon > 0$均成立。现在选取 $\varepsilon > 0$ 使得 $a_1 < 1$且 $b_1 < 1$，这是可行的，因为 $a \in (0,1)$ 且 $b \in (0,1)$。根据推论 6.3.3，网络具有输入到状态稳定性。 □

6.4 小增益条件

ISS 和 UGS 小增益定理的关键假设分别是单调极限性质和单调有界可逆性性质。本节将深入探讨这些性质。具体而言，在第 6.4.1 节中，我们根据一致小增益条件刻画 MBI 性质；在第 6.4.2 节中，我们将一致小增益条件与若干种已用于有限与无限网络小增益分析的非一致小增益条件联系起来。在第 6.4.3 节中，我们推导有限维情形下小增益条件之间的新关系。最后，在第 6.6 节中，我们针对线性算子以及由线性增益诱导的 $\Gamma_\otimes$ 形式的算子，给出 MLIM 和 MBI 性质的有效判据。

6.4.1 一致小增益条件与 MBI 性质

正如我们在第 6.3 节中所见，单调有界可逆性是有限与无限网络小增益分析中的一项关键性质。下面的命题给出了针对 MBI 性质的小增益型判据。在本章推导的基于轨迹的小增益定理中，我们主要关注 $(X, X^+) = (\ell_\infty(I)\ \ell_\infty^+(I))$ 的情形。然而，我们在更一般的框架下证明这些结果。除了具有数学上的吸引力外，这种框架还对无限网络的 Lyapunov 型小增益定理有重要应用；在这些定理中，其他对 X 的选择也很有用，参见例如 [125]，其中 $X = \ell_p$ 对有限的 $p \geq 1$。

命题 6.4.1. 设 (X, X^+) 是一个具有生成锥 X^+ 的有序巴拿赫空间。对于每个非线性算子 $A : X^+ \to X^+$，以下条件等价：

(i) $\mathrm{id} - A$ 满足 ***MBI*** 性质。

(ii) 满足一致小增益条件：存在 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\operatorname{dist}(A(x) - x, X^+) \geq \eta(\|x\|_X), \quad x \in X^+. \tag{6.15}$$

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii)。固定 $x \in X^+$，并记 $a := (A - \mathrm{id})(x)$。设 $\varepsilon > 0$。我们选取$z \in X^+$ 使得 $\|a - z\|_X \leq \operatorname{dist}(a, X^+) + \varepsilon$，并令 $y := a - z$。若常数$M > 0$ 按 (C.1) 选取，则可将 y 分解为 $y = u - v$，其中 $u, v \in X^+$ 且$\|u\|_X, \|v\|_X \leq M\|y\|_X \leq M\operatorname{dist}(a, X^+) + M\varepsilon$。于是

$$(\mathrm{id} - A)(x) = -a = -y - z = v - (u + z) \leq v,$$

因此可由 $\mathrm{id} - A$ 的 MBI 性质推出

$$\|x\|_X \leq \xi(\|v\|_X) \leq \xi\big(M\operatorname{dist}(a, X^+) + M\varepsilon\big).$$

因此，

$$\operatorname{dist}(a, X^+) \geq \frac{1}{M}\xi^{-1}(\|x\|_X) - \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，这意味着 (ii) 其中 $\eta := \frac{1}{M}\xi^{-1}$。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。令 $v,\ w \in X^+$ 且 $(\mathrm{id} - A)(v) \leq w$。向量 $z := w + (A - \mathrm{id})(v)$ 是正的，因此由 (ii) 可得

$$\eta(\|v\|_X) \leq \operatorname{dist}\big((A - \mathrm{id})(v), X^+\big) \leq \|(A - \mathrm{id})(v) - z\|_X = \| - w\|_X = \|w\|_X.$$

因此，$\|v\|_X \leq \eta^{-1}(\|w\|_X)$。 □

注 6.4.2。 命题 6.4.1(ii)中的一致小增益条件是著名小增益条件的一致版本，有时也称为 无共同增大条件：

$$A(x) \not\geq x, \quad x \in X^+ \setminus \{0\}.$$

事实上，$A(x) \not\geq x$ 等价于 $A(x) - x \not\geq 0$，而这又等价于 $\operatorname{dist}(A(x) - x,\ X^+) > 0$。 ◁

注 6.4.3。需要指出的是，在命题6.4.1的一致小增益条件中出现的到正锥的距离，在许多具体空间上都可以显式计算。事实上，许多重要的实值序列空间或函数空间，例如 $X = \ell_p$ 或 $X = L^p(\Omega\ \mu)$（对于 $p \in [1, \infty]$ 以及测度空间 $(\Omega\ \mu)$）而言），不仅是有序巴拿赫空间，还是所谓的 巴拿赫格。

现在，假设 $(X,\ X^+)$ 是一个巴拿赫格，并令 $x \in X$。那么，向量$x^+ := \frac{|x|+x}{2} \geq 0$ 和 $x^- := \frac{|x|-x}{2} \geq 0$ 分别称为 x 的正部和负部；显然，它们满足 $x^+ - x^- = x$ 和 $x^+ + x^- = |x|$。如果 X 是一个具体的序列或函数空间，那么在 x 为正的所有点上，x^- 都是 0；而在 x 为负的所有点上，x^- 都等于 $-x$。

在巴拿赫格 $(X,\ X^+)$ 中，我们有如下公式

$$\operatorname{dist}(x, X^+) = \|x^-\|_X$$

对每个 $x \in X$ 都成立，这一点很容易验证。 ◁

如果有序巴拿赫空间（$X,\ X^+$）的锥具有非空内部，则命题 6.4.1 中的一致小增益条件也可以通过涉及 X^+ 的一个固定内点的条件来表述。

命题 6.4.4。设 (X, X^+) 是一个有序巴拿赫空间，假设锥 X^+ 具有非空内部，并令 z 为 X^+ 的一个内点。对于每个非线性算子$A:\ X^+ \to X^+$，以下条件等价：

(i) 存在 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$A(x) \not\geq x - \eta(\|x\|_X)z, \quad x \in X^+ \setminus \{0\}. \tag{6.16}$$

(ii) 命题 *6.4.1(ii)* 中的一致小增益条件成立。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)。设 (i) 对某个 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$成立。根据命题 C.2.4，我们可以找到一个数 $c > 0$，使得对于每个 $y \in X$，都有

$$\|y\|_X \leq c \quad \Rightarrow \quad y \geq -z. \tag{6.17}$$

反设 (ii) 不成立。那么，(6.15) 不成立，特别是对于函数 $c\eta$也不成立。因此，我们可以推断存在 $x \in X^+ \setminus \{0\}$ 使得

$$\operatorname{dist}\big((A - \mathrm{id})(x), X^+\big) < c\eta(\|x\|_X).$$

因此，存在 $y \in X^+$ 使得

$$\|(A - \mathrm{id})(x) - y\|_X \leq c\eta(\|x\|_X).$$

因此，向量 $(A-\mathrm{id})(\eta\ \|x\|_X^{x\ -y}\ )()$ 的范数至多为 c，所以由 (6.17) 可得 $(A - \mathrm{id})(x) - y \geq -\eta(\|x\|_X)z$。因此，

$$(A - \mathrm{id})(x) \geq -\eta(\|x\|_X)z + y \geq -\eta(\|x\|_X)z,$$

这表明，对于函数 （6.16），条件不成立，矛盾。 η

（ii） ⇒ （i）。令 （ii）在某个 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$下成立。我们证明，将 6.16）中的函数 $\frac{\eta}{2\|z\|_X}$ 替换为 η 后，条件（ 6.16 ）仍成立。反设，对于函数 $\frac{\eta}{2\|z\|_X}$，条件（ 6.16 ）不成立。那么存在 $x \in X^+ \setminus \{0\}$ 使得

$$(A - \mathrm{id})(x) + \frac{\eta(\|x\|_X)}{2\|z\|_X} z \geq 0.$$

因此，可得

$$\operatorname{dist}\big((A-\mathrm{id})(x), X^+\big) \leq \Big\|(A-\mathrm{id})(x) - \big((A-\mathrm{id})(x) + \frac{\eta(\|x\|_X)}{2\|z\|_X} z\big)\Big\|_X = \frac{\eta(\|x\|_X)}{2},$$

这表明（6.15）对于函数 η不成立。 □

具有非空内部的锥的有序巴拿赫空间的一个典型例子是 $(X,\ X^+) = (\ell_\infty(I)\ \ell_\infty^+(I))$，其中 I 是某个指标集。例如，在该空间中，向量 1 是正锥的一个内点。

6.4.2 非一致小增益条件

在命题 6.4.1和 6.4.4中，我们根据一致小增益条件刻画了 MBI 性质。在本小节中，我们回顾若干进一步的小增益条件，这些条件已用于有限与无限网络的小增益分析 [57, 55, 53], ，并将它们与一致小增益条件联系起来。

在本小节中，我们始终假设 $(X,\ X^+) = (\ell_\infty(I)\ \ell_\infty^+(I))$，其中 I 是某个非空指标集（这正是增益算子作用的空间）。

定义 6.4.5。 我们称非线性算子 $A\colon \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$ 满足 s

（i）小增益条件 如果

$$A(x) \not\geq x, \quad x \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}. \tag{6.18}$$

（ii）强小增益条件 如果存在 $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ 以及相应的算子$D_\rho : \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$，对任意 $x \in \ell_\infty^+(I)$ 定义为

$$D_\rho(x) := \big((\mathrm{id} + \rho)(x_i)\big)_{i\in I},$$

使得

$$D_\rho \circ A(x) \not\geq x, \quad x \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}. \tag{6.19}$$

（iii）鲁棒小增益条件 如果存在 $\omega \in \mathcal{K}_\infty$ ，满足 $\omega < \mathrm{id}$，使得对于所有$i,\ j \in I$ 由下式给出的算子 $A_{i,\ j}$

$$A_{i,j}(x) := A(x) + \omega(x_j) e_i, \quad x \in \ell_\infty^+(I) \tag{6.20}$$

满足小增益条件（6.18）；此处， $e_i \in \ell_\infty$（I）表示 i阶标准单位向量。

（iv）鲁棒强小增益条件：若存在 ω，$\rho \in \mathcal{K}_\infty$，且 $\omega < \mathrm{id}$，使得对所有 i，$j \in I$ 由（$A_{i,\,j}$ 定义的算子6.20）满足强小增益条件（6.19），且对所有 ρ，均使用相同的 i，j。

◁

强小增益条件最早在 [57], 中提出，其中证明了：如果增益算子满足强小增益条件，那么由 ISS 系统组成的有限网络（以求和形式定义）就是 ISS 的。鲁棒强小增益条件则是在 [53] 中，针对无限网络的基于李雅普诺夫的小增益分析提出的。

注6.4.6。 对于有限网络，所谓的循环小增益条件也发挥着重要作用，因为当 $A = \Gamma_\otimes$ 时，它们有助于有效检验小增益条件（6.18）。这对于最大值形式的小增益定理十分重要。关于这一主题的更多讨论，请参见 [158] 。对于无限网络，$\Gamma_\otimes$ 的循环条件可由（6.18）推出，见 [53, 引理4。1], 但对于小增益分析而言，这个条件过于宽松。对于最大线性系统，注6.7.2 和推论6.3.3 与循环小增益条件有相似之处。◁

现在给出一个判据，用于判断是否满足鲁棒强小增益条件。

命题 6.4.7. 非线性算子 $A\colon \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$ 满足鲁棒强小增益条件，当且仅当存在 ω、$\eta \in \mathcal{K}_\infty$ 以及一个算子 $\vec{\eta}\colon \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$，定义如下：

$$\vec{\eta}(x) := (\eta(x_i))_{i\in I}, \quad x \in \ell_\infty^+(I), \tag{6.21}$$

使得对所有 $k \in I$，均有

$$A(x) \not\geq x - \vec{\eta}(x) - \omega(\|x\|_{\ell_\infty(I)})e_k \quad \textit{for all } x \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}. \tag{6.22}$$

证明。“⇒”：设鲁棒强小增益条件成立，且对应的 ρ, ω 和D_ρ如上。则对于任意 $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}$ 以及任意 $j, k \in I$，均有

$$\exists i \in I: \quad \big[D_\rho\big(A(x) + \omega(x_j)e_k\big)\big]_i = (\mathrm{id} + \rho)\big([A(x) + \omega(x_j)e_k]_i\big) < x_i. \tag{6.23}$$

由于 $\rho \in \mathcal{K}_\infty$，存在 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$ 使得 $\mathrm{id} - \eta = (\mathrm{id} + \rho)^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$，这一点可如引理 B.1.6(i) 中所示予以证明。因此，(6.23) 等价于

$$\exists i \in I: \quad A(x)_i < x_i - \eta(x_i) - \big[\omega(x_j)e_k\big]_i. \tag{6.24}$$

对于每个 $x \in \ell_\infty^+(I)$，都存在 $j \in I$ 使得 $x_j \geq \frac{1}{2}\|x\|_{\ell_\infty(I)}$，条件（6.24）结合这个特定的 j 可推出

$$\exists i \in I: \quad A(x)_i < x_i - \eta(x_i) - \Big[\omega\big(\frac{1}{2}\|x\|_{\ell_\infty(I)}\big)e_k\Big]_i = \Big[x - \vec{\eta}(x) - \omega\big(\frac{1}{2}\|x\|_{\ell_\infty(I)}\big)e_k\Big]_i,$$

这与（6.22）仅相差一个常数。

“⇐”：令 (6.22) 对某个 $\eta_1 \in \mathcal{K}_\infty$ 及相应的 $\vec{\eta}_1$成立。根据引理 B.1.19，可以选取 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$，使得 $\eta \leq \eta_1$ 且 $\mathrm{id} - \eta \in \mathcal{K}_\infty$。于是，(6.22) 对此 η及相应的 $\vec{\eta}$成立，即对于所有 $k \in I$，都有

$$\exists i \in I: \quad A(x)_i < x_i - \eta(x_i) - \big[\omega(\|x\|_{\ell_\infty(I)})e_k\big]_i.$$

由于对于任意 $j \in I$，$\|x\|_{\ell_\infty(I)} \geq x_j$，这意味着对于所有 j，$k \in I$ 均有

$$\exists i \in I: \quad A(x)_i < x_i - \eta(x_i) - \big[\omega(x_j)e_k\big]_i,$$

因此

$$\exists i \in I: \quad \big[A(x) + \omega(x_j)e_k\big]_i < (\mathrm{id} - \eta)(x_i).$$

由于 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$ 满足条件 $\mathrm{id} - \eta \in \mathcal{K}_\infty$，根据引理 B.1.6(i)，存在 $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ 使得 $(\mathrm{id} - \eta)^{-1} = \mathrm{id} + \rho$，因此对所有 j，$k \in I$ 性质 (6.23) 成立，这表明 A 满足鲁棒强小增益条件。 □

Sp将强小增益条件特化后，命题 6.4.7 表述如下 .

推论 6.4.8。 非线性算子 $A: \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$ 满足强小增益条件，当且仅当存在 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$ 以及一个算子 $\vec{\eta}: \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$，由(6.21)定义，使得

$$A(x) \not\geq x - \vec{\eta}(x), \quad x \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}.$$

接下来的命题表明，一致小增益条件至少不比鲁棒强小增益条件弱。

命题 6.4.9。 设 $A: \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$ 为一个非线性算子。若 A 满足一致小增益条件，则 A满足鲁棒强小增益条件。

证明。 由于 A 满足一致小增益条件，且 η，由命题 6.4.4 中取 $z := \mathbb{1}$，可知对于所有 $x \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}$

$$A(x) \not\geq x - \frac{1}{2\|\mathbb{1}\|_{\ell_\infty(I)}}\eta(\|x\|_{\ell_\infty(I)})\mathbb{1} = x - \frac{1}{2}\eta(\|x\|_{\ell_\infty(I)})\mathbb{1}.$$

对于任意 $x \in \ell_\infty^+(I)$ 和任意 $k \in I$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\eta(\|x\|_{\ell_\infty(I)})\mathbb{1} &= \frac{1}{4}\eta(\|x\|_{\ell_\infty(I)})\mathbb{1} + \frac{1}{4}\eta(\|x\|_{\ell_\infty(I)})\mathbb{1} \\ &\geq \frac{1}{4}\vec{\eta}(x) + \frac{1}{4}\eta(\|x\|_{\ell_\infty(I)})e_k,\end{aligned}$$

由命题 6.4.7， A 满足鲁棒强小增益条件。 □

6.4.3 有限维情形

有限维 X 的情形十分重要，因为它是有限网络稳定性分析的关键。

命题 6.4.10。 假设 $(X, X^+) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+)$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$成立，其中 $\mathbb{R}^n$ 配备最大范数 $\|\cdot\|$，而 $\mathbb{R}^n_+$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的标准正锥。此外，假设算子 A 连续且单调。则以下陈述等价:

(i) 系统 (6.4)具有 *MLIM* 性质。

(ii) 算子 $\mathrm{id} - A$ 具有 *MBI* 性质。

(iii) 一致小增益条件成立：存在一个 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$，使得对于所有 $x \in X^+$，$\operatorname{dist}(A(x) - x, X^+) \geq \eta(\|x\|)$。

(iv) 存在一个 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$A(x) \not\geq x - \eta(\|x\|)\mathbb{1}, \quad x \in X^+ \setminus \{0\}.$$

*Ad*此外，如果 A 是 $\Gamma_\boxplus$ 或 $\Gamma_\otimes$，那么上述条件等价于 :

(v) A 满足鲁棒强小增益条件。

(vi) A 满足强小增益条件。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)。由命题 6.2.3 可得。(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)。由命题 6.4.4、6.4.1 可得。(ii) $\Rightarrow$ (i)。由命题 6.2.4 可得，因为锥 $\mathbb{R}^n_+$ 具有 Levi 性质。(iv) $\Rightarrow$ (v)。由命题 6.4.9 可得。(v) $\Rightarrow$ (vi)。显然。(vi) $\Rightarrow$ (ii)。由 [193, 定理 6.1]可得。

□

注 6.4.11。借助单调聚合函数形式体系，可以大幅拓展能够证明(i)–(iv)与(v)、(vi) 之间等价性的算子类别，参见 [193, 定理 6。1]。然而，[57,引理 13] 中这一蕴含的证明用到了增益算子的更多结构，而不仅仅是单调性。因此，这一蕴含对一般单调 A 是否成立仍是一个开放问题。◁

6.5 线性且一次齐次次可加离散时间系统的指数输入到状态稳定性

本节刻画一次齐次且次可加算子的指数输入到状态稳定性。

定义 6.5.1。设 (X, X^+) 为一个有序巴拿赫空间。系统 (6.4) 称为指数输入到状态稳定（*eISS*），如果存在 $M \geq 1, a \in (0,1)$ 和 $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$，使得对于任意 $u \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X^+)$ 以及系统 $x(\cdot) = (x(k))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ 的任意解，均有

$$\|x(k)\|_X \leq M\|x(0)\|_X a^k + \gamma(\|u\|_\infty), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.25}$$

◁

命题 6.5.2。设 (X, X^+) 为具有生成的正规锥 X^+的有序巴拿赫空间。考虑系统 (6.4)，并假设算子 $A: X^+ \to X^+$ 是单调的，并满足以下性质：

(i) A 是一阶齐次的，即 $A(rx) = rA(x)$ 对所有 $x \in X^+$ 和 $r \geq 0$均成立。

(ii) *A is subadditive, i.e., $A(x+y) \leq A(x) + A(y)$ for all $x, y \in X^+$.*

(iii) A满足

$$C := \sup_{x \in X^+,\, \|x\|_X = 1} \|A(x)\|_X < \infty.$$

那么 A 是全局利普希茨连续的，且以下陈述等价：

(*a*) 系统 (6.4)是指数输入到状态稳定的。

(*b*) 成立的是

$$r(A) := \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X^+,\, \|x\|_X=1} \|A^n(x)\|_X^{1/n} < 1. \tag{6.26}$$

(*c*) 存在一个全局利普希茨映射 $V\colon X^+ \to \mathbb{R}_+$ 以及 $L_1, L_2, \psi > 0$, $\eta > 1$，使得

$$L_1\|x\|_X \le V(x) \le L_2\|x\|_X, \quad x \in X^+, \tag{6.27}$$

并且对任意 $u \in \ell_\infty(\mathbb{Z}_+, X^+)$，以及 (6.4) 的任意解，均成立

$$V(x(k+1)) \le \eta^{-1}V(x(k)) + \psi\|u\|_\infty, \quad k \ge 0. \tag{6.28}$$

证明。首先，我们证明 A 是利普希茨连续的。任取 $x, y \in X^+$。由于 X^+ 是生成的，因此存在 $M > 0$（其取值与 x, y无关）以及 $a, b \in X^+$，使得$x - y = a - b$且 $\|a\|_X \le M\|x-y\|_X$, $\|b\|_X \le M\|x-y\|_X$。因此，对所有 $x, y \in X^+$，有

$$\begin{aligned} A(x) - A(y) &= A(x-y+y) - A(y) = A(a-b+y) - A(y) \\ &\le A(a+y) - A(y) \le A(a) + A(y) - A(y) = A(a). \end{aligned}$$

同理，对于所有 x，$y \in X^+$ 都有 $A(x) - A(y) \ge -A(b)$。由于 X^+ 是正规的，根据 [1, 定理 2。38], 存在 $c > 0$一个仅取决于（X，X^+）的量，使得

$$\begin{aligned} \|A(x)-A(y)\|_X &\le c\max\{\|A(a)\|_X, \|A(b)\|_X\} \\ &\le c\max\{\|a\|_X\|A(a/\|a\|_X)\|_X, \|b\|_X\|A(b/\|b\|_X)\|_X\} \le cCM\|x-y\|_X. \end{aligned}$$

(a) $\Rightarrow$ (b)。若（6.4）是指数输入到状态稳定性的，则对于 $u \equiv 0$、任意 $x \in X^+$ 以及（6.4）的解 $x(k+1) = A(x(k))$，不等式（6.25）表明，对所有 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\|A^n(x)\|_X \le Ma^n\|x\|_X$。因此，当 $n \to \infty$ 时，$\sup_{x\in X^+,\ \|x\|_X=1} \|A^n(x)\|_X^{1/n} \le M^{1/n}a \to a$，从而 $r(A) \le a < 1$。

(b) $\Rightarrow$ (c)。根据假设(i) 和 (iii) 可知

$$\|A(x)\|_X = \|x\|_X\|A(x/\|x\|_X)\|_X \le C\|x\|_X, \quad x \in X^+ \setminus \{0\}. \tag{6.29}$$

考虑该序列

$$a_n := \sup_{x\in X^+,\, \|x\|_X=1} \|A^n(x)\|_X, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

该序列是次乘法的，因为对所有 m，$n \in \mathbb{Z}_+$，都有

$$\begin{aligned} a_{n+m} &= \sup_{x\in X^+,\, \|x\|_X=1} \|A^m(A^n(x))\|_X = \sup_{x\in X^+,\, \|x\|_X=1} \|A^n(x)\|_X \left\|A^m\Big(\frac{A^n(x)}{\|A^n(x)\|_X}\Big)\right\|_X \\ &\le \sup_{x\in X^+,\, \|x\|_X=1} \|A^n(x)\|_X \cdot \sup_{x\in X^+,\, \|x\|_X=1} \|A^m(x)\|_X = a_n \cdot a_m. \end{aligned}$$

根据 Fekete 次可加引理的次乘性版本，

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} \le a_1 < \infty,$$

因此，式（6.26）中的极限存在。

我们固定 $\eta > 1$ 使得 $\eta r(A) < 1$ 并定义函数 $V\colon\ X^+ \to \mathbb{R}_+$ 为

$$V(x) := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \eta^n \|A^n(x)\|_X, \quad x \in X^+.$$

在上确界中令 $n := 0$，我们看到对于所有 $x \in X^+$都有 $\|x\|_X \le V(x)$。由于$r(A) < \eta^{-1}$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{x\in X^+,\, \|x\|_X=1} \|A^n(x)\|_X \le \eta^{-n}, \quad n \ge N.$$

由 A 的一次齐次性，这意味着

$$\eta^n \|A^n(x)\|_X = \|x\|_X \eta^n \|A^n(\tfrac{x}{\|x\|_X})\|_X \le \|x\|_X, \quad n \ge N,\ x \in X^+ \setminus \{0\}.$$

由（6. 29），我们有 $\|A（x）\|_X \le C\|x\|_X$ 对于所有 $x \in X^+$。由于 A

$$\|A^n(x)\|_X = \|A^{n-1}(x)\|_X \|A(\frac{A^{n-1}(x)}{\|A^{n-1}(x)\|_X})\|_X \le C\|A^{n-1}(x)\|_X$$

对于所有 $x \in X^+$，并通过归纳法，对于所有 $x \in X^+$都有 $\|A^n(x)\|_X \le C^n\|x\|_X$。

由于 $\eta^0\|A^0(x)\|_X = \|x\|_X$，且对于 $\psi := \max_{0\le n<N}(\eta C)^n$，我们有

$$V(x) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \eta^n \|A^n(x)\|_X = \sup_{0\le n<N} \eta^n \|A^n(x)\| \le \psi\|x\|_X. \tag{6.30}$$

此外，注意到

$$V(A(x)) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \eta^n \|A^{n+1}(x)\|_X = \eta^{-1} \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \eta^{n+1} \|A^{n+1}(x)\|_X \le \eta^{-1} V(x).$$

由于 A 是单调且次可加的，根据归纳法，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均有

$$A^n(x + y) = A^{n-1}(A(x + y)) \le A^{n-1}(A(x) + A(y)) \le A^n(x) + A^n(y),$$

也就是说，A^n 也是次可加的。

不失一般性，我们可以假设范数 $\|\cdot\|_X$ 是单调的，即对于任意 x，$y \in X^+$，若 $0 \le x \le y$，则 $\|x\|_X \le \|y\|_X$。否则，我们选取一个具有此性质的等价范数，并注意到，在一种范数下的 eISS 意味着在任何其他等价范数下也具有 eISS，且谱半径不依赖于等价范数的选取。

结合 $A^n, n \in \mathbb{N}$的次可加性，可得对于所有 x，$y \in X^+$，均有

$$\begin{aligned} V(x + y) &= \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \eta^n \|A^n(x + y)\|_X \le \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \eta^n \|A^n(x) + A^n(y)\|_X \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \eta^n (\|A^n(x)\|_X + \|A^n(y)\|_X) \le V(x) + V(y), \end{aligned} \tag{6.31}$$

and 因此，V 也具有次可加性。现在考虑实数集 X^+ 中的序列 $x(\cdot)$，使得 t

$$x(k + 1) = A(x(k)) + u(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.32}$$

由此可得

$$V(x(k + 1)) = V(A(x(k)) + u(k)) \le V(A(x(k))) + V(u(k)) \le \frac{1}{\eta} V(x(k)) + V(u(k)).$$

由式（6.30），可得

$$V(x(k + 1)) \le \eta^{-1} V(x(k)) + \psi\|u\|_\infty, \quad k \ge 0.$$

由于 V 是一次齐次、次可加且单调的，根据证明开头的论证，V 是利普希茨连续的。

(c) $\Rightarrow$ (a)。这个标准论证被省略了。 □

6.6 具有线性增益的系统

这里我们证明，对于线性增益算子和超线性增益算子，MBI 和 MLIM 性质等价，并且可以通过谱条件来刻画。

对于线性系统，我们得到以下结果，并用它以求和形式表述一个高效的小增益定理，参见推论 6.3.6。

命题 6.6.1. 设 (X, X^+) 是一个有序巴拿赫空间，具有生成的正规锥 X^+。设算子 $A : X^+ \to X^+$ 是定义在 X^+ 上的正线性算子在 X上的限制。那么以下陈述等价：

(i) 系统 (6.4)是指数 *ISS*。

(ii) 系统 (6.4)满足 *MLIM* 性质。

(iii) 算子 $\mathrm{id} - A$ 满足 *MBI* 性质。

(iv) A 的谱半径满足 $r(A) < 1$。

*Pro*的。 蕴含关系“(i) $\Rightarrow$ (ii)”显然成立。根据命题 6.2.3， (ii)蕴含(ii i).

(iii) $\Rightarrow$ (iv)。容易验证，若 A 是一次齐次的，且 $\mathrm{id} - A$满足 MBI 性质，其中某个 $\xi \in \mathcal{K}_\infty$，则 $\mathrm{id} - A$ 满足 MBI 性质，其中 $r \mapsto \xi(1)r$ 代替 ξ。应用定理 C.9.4 可得 (iv)。

(iv) $\Rightarrow$ (i)。由命题6.5.2可得。 □

For 对于超线性系统，MBI 性质仍等价于指数输入到状态稳定性，并且有以下结论：

命题 6.6.2。 假设增益 γ_{ij}、$(i, j) \in I^2$ 均为线性的，且相应的增益算子 $\Gamma_\otimes$ 定义良好。则以下陈述等价：

(i) 算子 $\mathrm{id} - \Gamma_\otimes$ 满足 *MBI* 性质。

(ii) 存在 $\lambda \in (0、1)$ 以及 $s_0 \in \mathrm{int}(\ell_\infty^+(I))$ 使得

$$\Gamma_\otimes(s_0) \leq \lambda s_0. \tag{6.33}$$

(iii) $\Gamma_\otimes : \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$ 的谱半径满足

$$r(\Gamma_\otimes) = \lim_{n\to\infty} \sup_{s\in\ell_\infty^+(I),\, \|s\|_{\ell_\infty}=1} \|\Gamma_\otimes^n(s)\|_{\ell_\infty(I)}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|\Gamma_\otimes^n(\mathbb{1})\|_{\ell_\infty(I)}^{1/n} < 1.$$

(iv) 系统 (6.4) 在 $A = \Gamma_\otimes$ 下是指数输入到状态稳定的。

(v) 系统 (6.4) 在 $A = \Gamma_\otimes$ 下具有 *MLIM* 性质。

证明。 由命题 6.5.2， (iii) 等价于 (iv)。显然， (iv) 蕴含 (v)。由命题6.2.3， (v)蕴含(i)。

(i) $\Rightarrow$ (ii)。根据命题 6.4.1，$\mathrm{id} - \Gamma_\otimes$ 的 MBI 性质等价于一致小增益条件。接着，命题 6.4.4表明

$$\Gamma_\otimes(s) \not\geq s - \eta(\|s\|_{\ell_\infty})\mathbb{1}, \quad s \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}$$

对于某个 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$。特别是，

$$\Gamma_\otimes\Big(\frac{s}{\|s\|_{\ell_\infty}}\Big) \not\geq \frac{s}{\|s\|_{\ell_\infty}} - \eta(1)\mathbb{1}, \quad s \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}.$$

将该不等式乘以 $\|s\|_{\ell_\infty}$，令 $\eta := \eta(1)$，并利用 $\Gamma_\otimes$ 的一阶齐次性，可得

$$\Gamma_\otimes(s) \not\geq s - \eta\|s\|_{\ell_\infty}\mathbb{1}, \quad s \in \ell_\infty^+(I) \setminus \{0\}.$$

那么，对于任意 $s \in \ell_\infty^+(I)$，我们有

$$(1+\varepsilon)\Gamma_\otimes(s) \not\geq (1+\varepsilon)(s - \eta\|s\|_{\ell_\infty}\mathbb{1}) = s + \varepsilon s - (1+\varepsilon)\eta\|s\|_{\ell_\infty}\mathbb{1}.$$

由于 $s + \varepsilon s - (1+\varepsilon)\eta\|s\|_{\ell_\infty}\mathbb{1} \leq s - [(1+\varepsilon)\eta - \varepsilon]\|s\|_{\ell_\infty}\mathbb{1}$，我们有

$$(1+\varepsilon)\Gamma_\otimes(s) \not\geq s - [(1+\varepsilon)\eta - \varepsilon]\|s\|_{\ell_\infty}\mathbb{1}.$$

选择 $\varepsilon > 0$ 足够小，命题6.4.9 推出 $(1+\varepsilon)\Gamma_\otimes$ 满足鲁棒强小增益条件。根据引理6.7.5，算子

$$Q^\varepsilon(s) := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} (1+\varepsilon)^k \Gamma_\otimes^k(s), \quad s \in \ell_\infty^+(I)$$

是良定义的，并且满足

$$\Gamma_\otimes(Q^\varepsilon(s)) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} Q^\varepsilon(s), \quad s \in \ell_\infty^+(I).$$

特别地，这对 $s = \mathbb{1}$ 成立。由于 $s_0 := Q^\varepsilon(\mathbb{1}) \geq \mathbb{1}$，我们有 $s_0 \in \operatorname{int}(\ell_\infty^+(I))$。

(ii) $\Rightarrow$ (iii)。根据 $\Gamma_\otimes$的单调性和一次齐次性，我们有

$$\Gamma_\otimes^k(s_0) \leq \lambda^k s_0 \quad \text{for all } k \geq 1.$$

存在 存在 $n \in \mathbb{N}$，使得任何满足 $\|s\|_{\ell_\infty} = 1$ 的 $s \in \ell_\infty^+(I)$ 都满足 $s \leq n s_0$。因此 ，

$$\Gamma_\otimes^k(s) \leq \Gamma_\otimes^k(n s_0) = n\Gamma_\otimes^k(s_0) \leq n\lambda^k s_0, \quad k \geq 1,\ \|s\|_{\ell_\infty} = 1.$$

这意味着 $r(\Gamma_\otimes) \leq \lambda < 1$，从而完成证明。 □

注 6.6.3。 算子 $\Gamma_\otimes$ 的特殊形式仅用于命题 6.6.2 中蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (ii)的证明。其余蕴含关系对于更一般类型的算子也成立。注意，若 s_0 如条目 (ii)所述，则 ts_0也满足条目 (ii)中的所有条件，对任意 $t > 0$均如此。因此，我们可以为增益算子 $\Gamma_\otimes$构造一条严格衰减路径 $t \mapsto ts_0$，这是基于李雅普诺夫函数的 ISS 小增益定理证明中的一个重要要素，参见 [56]。 ◁

6.7 由 amax形式增益算子支配的系统

在本节中，我们研究算子 $\Gamma_\otimes$ 及其强传递闭包的性质。这些结果强化了 [53, 第 4] 节中的相应结果，并以此为基础。我们利用这些结果，在命题 6.6.2中刻画算子 $\Gamma_\otimes$具有线性增益时的 MBI 和 MLIM 性质。此外，本节的推导也有助于为非线性算子 $\Gamma_\otimes$构造严格衰减路径，这对于非线性基于李雅普诺夫的小增益定理至关重要。

算子 $\Gamma_\otimes$ 的幂有一种特别简单的表示：

引理 6.7.1。 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和任意 $x \in \ell_\infty^+(I)$，都有

$$\Gamma_\otimes^n(x) = \Big(\sup_{j_2,\dots,j_{n+1}\in I} \gamma_{ij_2} \circ \cdots \circ \gamma_{j_n j_{n+1}}(x_{j_{n+1}}) \Big)_{i\in I}. \tag{6.34}$$

*Pro*关于。 对于 $n=1$，该断言显然成立。设该断言对某个 $n \in \mathbb{N}$成立。那么

$$\Gamma_\otimes^{n+1}(x) = \Gamma_\otimes(\Gamma_\otimes^n(x)) = \big(\sup_{j_2\in I} \gamma_{ij_2} \circ \sup_{j_3,\dots,j_{n+2}\in I} \gamma_{j_2j_3} \circ \cdots \circ \gamma_{j_{n+1}j_{n+2}}(x_{j_{n+2}}) \big)_{i\in I}.$$

由于 $(\gamma_{ij}) \subset \mathcal{K}_\infty$， $(x) = ($上确界$_{j_2,\ \dots,\ j_{n+2}\in I}$ $\gamma_{ij_2} \circ \gamma_{j_2j_3} \circ \cdots \circ \gamma_{j_{n+1}j_{n+2}}$ $(x_{j_{n+2}})$ $)_{i\in I}$. □

注 6.7.2。 设 $\Gamma_\otimes$ 是齐次的，当且仅当所有增益γ_{ij} 都是线性的。于是，利用 $\Gamma_\otimes$ 的单调性以及公式（6.34），我们得到 $\Gamma_\otimes$的谱半径的如下表达式：

$$\begin{aligned} r(\Gamma_\otimes) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\ell_\infty^+(I),\, \|x\|_{\ell_\infty(I)}=1} \|\Gamma_\otimes^n(x)\|_{\ell_\infty(I)}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|\Gamma_\otimes^n(\mathbb{1})\|_{\ell_\infty(I)}^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{j_1,\dots,j_{n+1}\in I} \gamma_{j_1j_2} \cdots \gamma_{j_nj_{n+1}} \Big)^{1/n}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

◁

我们需要以下引理，该引理取自 [53, 引理 41]。

引理 6.7.3。 假设 $\Gamma_\otimes$ 满足小增益条件。那么，由增益 γ_{ij} 构成的所有环都是压缩映射。也就是说，

$$\gamma_{i_1i_2} \circ \cdots \circ \gamma_{i_{k-1}i_k}(r) < r$$

对所有 $r>0$，如果 i_1，……，i_k是任意一条满足 $i_1 = i_k$的路径。

证明。 假设对于某个环，命题不成立：

$$\gamma_{i_1i_2} \circ \cdots \circ \gamma_{i_{k-1}i_k}(r) \geq r, \quad i_1 = i_k,\ r>0.$$

于是定义向量

$$\begin{aligned} s := {} & re_{i_1} + e_{i_2}\gamma_{i_2i_3} \circ \cdots \circ \gamma_{i_{k-1}i_k}(r) \\ & + e_{i_3}\gamma_{i_3i_4} \circ \cdots \circ \gamma_{i_{k-1}i_k}(r) + \ldots + e_{i_{k-1}}\gamma_{i_{k-1}i_k}(r). \end{aligned}$$

我们验证 $\Gamma_\otimes(s) \geq s$，从而得到矛盾。事实上，对于 i_ν 所索引的 s 的任意非零分量，有（回忆一下， $i_k = i_1$）

$$\Gamma_{\otimes,i_\nu}(s) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \gamma_{i_\nu j}(s_j) \geq \gamma_{i_\nu i_{\nu+1}}(s_{i_{\nu+1}}) = \gamma_{i_\nu i_{\nu+1}} \circ \cdots \circ \gamma_{i_{k-1}i_k}(r).$$

如果 $\nu \in \{2,\dots,k-1\}$，最后一个表达式等于 s_{i_ν}；如果 $\nu=1$，则大于或等于 $r = s_{i_1}$。这意味着 $\Gamma_\otimes(s) \geq s$，与小增益条件矛盾。 □

引理 6.7.3中所示的蕴含关系一般不能逆转。然而，如果算子 Γ 是由有限维分量构成的块对角矩阵，那么该蕴含关系可以“升级”为以下判据。

命题 6.7.4。 假设增益矩阵 $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, $\gamma_{ij} \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$ 是如下形式的块对角矩阵：$\Gamma = \mathrm{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots)$，其中所有 $\Gamma_j \colon \mathbb{R}_+^{n_j} \to \mathbb{R}_+^{n_j}$ 且对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $n_j < \infty$。相应的增益算子记为 $\Gamma_\otimes = \mathrm{diag}(\Gamma_{1,\otimes}, \Gamma_{2,\otimes}, \ldots)$。那么，以下陈述等价：

(i) $\Gamma_\otimes : \ell_\infty^+ \to \ell_\infty^+$ 满足小增益条件。

(ii) 对所有 $i \in \mathbb{N}$，算子 $\Gamma_{i,\otimes}$ 满足小增益条件。

(iii) 由 Γ 的增益构成的所有环都是压缩映射（定义见引理 *6.7.3*）。

(iv) 由 Γ_i、$i \in \mathbb{N}$ 的增益构成的所有环都是压缩映射。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii)。假设 $\Gamma_\otimes$ 满足小增益条件。任取 $i \in \mathbb{N}$，并考虑向量 $s = (s_1, s_2, \ldots\ldots) \in \ell_\infty^+$，其中 $s_j = 0$ 对于 $j \neq i$ 和 $s_i \neq 0$ 成立。

对于该算子，我们有 $(\Gamma_\otimes s)_i = \Gamma_{i,\otimes} s_i$，以及 $(\Gamma_\otimes s)_j = 0$ 对于 $j \neq i$ 成立。由于对所有 $s_i \neq 0$ 都有 $\Gamma_\otimes s \not\geq s$，因此对所有 $s_i \neq 0$ 都有 $\Gamma_{i,\otimes} s_i \not\geq s_i$。由于 $i \in \mathbb{N}$ 是任意选取的，结论得证。

(ii) $\Rightarrow$ (i)。任取 $s \in \ell_\infty^+ \backslash \{0\}$。我们可以将其写成 $s = (s_1, s_2, \ldots\ldots)$。任取满足 $s_i \neq 0$ 的 $i \in \mathbb{N}$。由于 $s \neq 0$，这样的 i 存在，且有 $\Gamma_i s_i \not\geq s_i$。

由于 $\Gamma_\otimes s = (\Gamma_{1,\otimes} s_1, \Gamma_{2,\otimes} s_2, \ldots\ldots)$，并且根据 ℓ_∞ 中序的定义，有 $\Gamma_\otimes s \geq s \Leftrightarrow \Gamma_{i,\otimes} s_i \geq s_i$ 对所有 i 都成立，因此可得 $\Gamma_\otimes s \not\geq s$。

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv)。众所周知，参见例如 [57,第 108]页。

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv)。注意到 $\Gamma_\otimes$ 的所有非零环都是 $\Gamma_{i,\otimes}$ 的环，其中 $i \in \mathbb{N}$ 为某个值，即可得出此结论。

□

我们将使用下面这个引理。它本身也很有意思，因为它不要求增益是线性的。该引理见 [164, 引理 B。5]，，且是对[53, 引理 4。3]的加强。这个结果最终有助于在基于李雅普诺夫的小增益定理中构造所谓的严格衰减路径（又称 Ω-路径），参见 [126, 53] 关于无限网络的讨论，以及第7 章关于有限网络的讨论。

引理 6.7.5。 假设 $\Gamma_\otimes : \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I)$按(6.3)中的定义，良定义、连续且满足鲁棒小增益条件。那么算子

$$Q : \ell_\infty^+(I) \to \ell_\infty^+(I), \quad Q(s) := \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \Gamma_\otimes^k(s), \quad s \in \ell_\infty^+(I),$$

其中上确界是逐分量取的，该算子良定义且满足

$$s \leq Q(s) \leq \omega^{-1}(\|s\|_{\ell_\infty})\mathbb{1}, \quad s \in \ell_\infty^+(I), \tag{6.36}$$

其中 $\omega \in \mathcal{K}_\infty$, $\omega <$id 源自鲁棒小增益条件。特别是 r,

$$\|s\|_{\ell_\infty} \leq \|Q(s)\|_{\ell_\infty} \leq \omega^{-1}(\|s\|_{\ell_\infty}), \quad s \in \ell_\infty^+(I). \tag{6.37}$$

此外，

$$\Gamma_\otimes(Q(s)) = Q(\Gamma_\otimes(s)) \leq Q(s), \quad s \in \ell_\infty^+(I). \tag{6.38}$$

证明。 考虑定义中的 $k=0$ Q，显然，对于所有 $s\in\ell_\infty^+(I)$， $Q(s)\geq s$。

现在假设，要么 Q 未定义良好，要么对于某个 $s\in\ell_\infty^+(I)$， $Q(s)>\omega^{-1}(\|s\|_{\ell_\infty})$1。无论哪种情况，这都意味着存在 $s\in\ell_\infty^+(I)$ 和 $i\in I$，使得 $\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\left[\Gamma_\otimes^k(s)\right]_i>\omega^{-1}(\|s\|_{\ell_\infty})$。

根据公式（6.34），可知存在 $k\in\mathbb{N}$、指标 i、$j\in\mathbb{N}$ 以及一条路径j_1、.....、j_k，使得

$$\gamma_{ij_1}\circ\gamma_{j_1j_2}\circ\cdots\circ\gamma_{j_kj}(s_j)\geq\omega^{-1}(\|s\|_{\ell_\infty}). \tag{6.39}$$

对于给定的 i， j，我们定义算子

$$\tilde{\Gamma}_{ji}(s)_l:=\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left[\gamma_{lk}(s_k)+\delta_{jl}\delta_{ik}\omega(s_k)\right]\Big)_{l\in\mathbb{N}},\quad s\in\ell_\infty^+(I),$$

其中 δ_{xy} 是克罗内克δ，并注意到

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ji}(s)&\leq\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_{lk}(s_k)+\sup_{k\in\mathbb{N}}\delta_{jl}\delta_{ik}\omega(s_k)\Big)_{l\in\mathbb{N}}\\&=\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_{lk}(s_k)+\delta_{jl}\omega(s_i)\Big)_{l\in\mathbb{N}}=\Gamma_\otimes(s)+\omega(s_i)e_j=\Gamma_{ji}(s).\end{aligned}$$

˜由于 Γ_{ji} 根据假设满足小增益条件，因此 Γ_{ji} 也满足小增益˜条件 $\Gamma_{ji}(s)\not\geq s$，对所有 $s\in\ell_\infty^+(I)\setminus\{0\}$均成立。根据引理 6.7.3，由这些增益构成的所有环

$$\tilde{\gamma}_{lk}(r):=\gamma_{lk}(r)+\delta_{jl}\delta_{ik}\omega(r),\quad(l,k)\in\mathbb{N}^2$$

是压缩映射。特别地，

$$\tilde{\gamma}_{ji}\circ\tilde{\gamma}_{ij_1}\circ\tilde{\gamma}_{j_1j_2}\circ\cdots\circ\tilde{\gamma}_{j_kj}(s_j)<s_j.$$

结合（6.39），由此可得

$$\begin{aligned}s_j&>\tilde{\gamma}_{ji}\circ\tilde{\gamma}_{ij_1}\circ\tilde{\gamma}_{j_1j_2}\circ\cdots\circ\tilde{\gamma}_{j_kj}(s_j)\geq\tilde{\gamma}_{ji}\circ\gamma_{ij_1}\circ\gamma_{j_1j_2}\circ\cdots\circ\gamma_{j_kj}(s_j)\\&=(\gamma_{ji}+\omega)\circ\gamma_{ij_1}\circ\gamma_{j_1j_2}\circ\cdots\circ\gamma_{j_kj}(s_j)\geq\|s\|_{\ell_\infty}\geq s_j,\end{aligned}$$

矛盾。因此，这证明了（6.36）。

夹逼估计（6.37）由（6.36）以及范数在$\ell_\infty(I)$上的单调性得出。

下面证明（6.38）。对每个 $i\in\mathbb{N}$，都有

$$\begin{aligned}[\Gamma_\otimes(Q(s))]_i&=\sup_{j\in\mathbb{N}}\gamma_{ij}(Q(s)_j)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\gamma_{ij}(\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_\otimes^k(s)_j)\\&=\sup_{j\in\mathbb{N}}\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\gamma_{ij}(\Gamma_\otimes^k(s)_j)=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\sup_{j\in\mathbb{N}}\gamma_{ij}(\Gamma_\otimes^k(s)_j)\\&=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_\otimes(\Gamma_\otimes^k(s))_i=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_\otimes^{k+1}(s)_i\leq\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_\otimes^k(s)_i=Q(s)_i,\end{aligned}$$

因此（6.38）成立。最后，对任意 $s\in\ell_\infty^+(I)$，都有

$$Q(\Gamma_\otimes(s))=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_\otimes^{k+1}(s)=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\Gamma_\otimes(\Gamma_\otimes^k(s))=\Gamma_\otimes(\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}(\Gamma_\otimes^k(s)))=\Gamma_\otimes(Q(s)).$$

□

注 6.7.6。 算子 Q 在极大代数中至关重要，有时称为 $\Gamma_\otimes$的强传递闭包，或 Kleene星号，参见 [29, 第 1.6 节。2],或者简称为 $\Gamma_\otimes$的闭包，参见 [194, 第 1 节。4]。 ◁

6.8 总结

本章基于 [164]。关于有限与无限网络小增益理论的历史说明和简要概述，请参见第 7.4 节。

第7章

有限互联系统的基于李雅普诺夫的小增益定理

与大多数情况一样，非线性系统的输入到状态稳定性通常通过构造适当的 ISS 李雅普诺夫函数来验证，因此很自然地希望在表述小增益定理时利用有关子系统 ISS 李雅普诺夫函数的信息。本章将表明这是可行的，并且如果已知子系统的 ISS 李雅普诺夫函数，就可以为整体系统构造 ISS 李雅普诺夫函数。

7.1 输入到状态稳定系统的互联系统 S

考虑如下形式的互联系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + f_i(x_1, \ldots, x_n, u), \quad x_i(t) \in X_i,\ u(t) \in U, \\ i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{7.1}$$

其中，第 i个子系统的状态空间 X_i 是一个巴拿赫空间，且 A_i 是 C_0半群在 X_i上的生成元， $i = 1$, ……， n。我们将输入空间取为 $\mathcal{U} := PC_b(\mathbb{R}_+, U)$，其中 U是某个输入值巴拿赫空间。系统（7.1）的状态空间定义为

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n,$$

这是一个配备范数的巴拿赫空间

$$\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{X_1} + \ldots + \|\cdot\|_{X_n}.$$

第 i 个子系统的内部输入空间为

$$X_{\neq i} := X_1 \times \ldots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n.$$

我们将 $X_{\neq i}$ 中的范数定义为

$$\|\cdot\|_{X_{\neq i}} := \|\cdot\|_{X_1} + \ldots + \|\cdot\|_{X_{i-1}} + \|\cdot\|_{X_{i+1}} + \ldots + \|\cdot\|_{X_n}.$$

$X_{\neq i}$ 的元素记作 $x_{\neq i} = (x_j)_{j \neq i}$。

第 i 个子系统的转移映射记作

$$\phi_i : \mathbb{R}_+ \times X_i \times (PC_b(\mathbb{R}_+, X_{\neq i}) \times \mathcal{U}) \to X_i.$$

对于 $x = (x_i)_{i=1}^n$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, 定义

$$f(x,u) := (f_1(x,u)^T, \ldots, f_n(x,u)^T)^T,$$

and

$$A := \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_n), \quad D(A) := D(A_1) \times \ldots \times D(A_n).$$

显然, A 是 X 上一个 C_0-半群的生成元。

我们将系统（7.1）改写为向量形式:

$$\dot{x} = Ax + f(x,u). \tag{7.2}$$

我们假设

假设 7.1.1. 系统 (7.2)满足以下性质:

(i) f 在 $X \times U$ 上连续。

(ii) 对于每个 $i = 1, \ldots, n$, f_i, 关于有界子集上的 x_i 利普希茨连续 $s.$

(iii) 每个子系统都是正向完备的。

(iv)（适定性）对于任意初始条件 $x \in X$ 和任意输入 $u \in \mathcal{U}$, 方程 (7.2). 都存在唯一极大解

(v) (7.2)满足 *BIC* 性质。

7.2 基于李雅普诺夫的小增益定理

为了分析网络，我们必须了解子系统（或相应李雅普诺夫函数）对来自所有其他子系统的输入的响应。为了将各个输入汇总为全输入，我们采用以下形式化方法:

定义 7.2.1. 函数 $\mu : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ 称为单调聚合函数（*MAF*），如果 μ 连续并满足以下性质:

(i) *Positivity*: 对所有 $v \in \mathbb{R}_+^n$, $\mu(v) \geq 0$。

(ii) 严格递增性: 如果对所有 $i = 1, \ldots, n$, $v_i < w_i$, 那么 $\mu(v) < \mu(w)$。

(iii) 无界性: 当 $|v| \to \infty$ 时, $\mu(v) \to \infty$ 。

(iv) 次可加性: 对于所有 $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, $\mu(v+w) \leq \mu(v) + \mu(w)$。

◁

单调聚合函数的两个重要示例是

$$\mu_{\boxplus} : s = (s_i)_{i=1}^n \mapsto s_1 + \ldots + s_n, \tag{7.3}$$

and

$$\mu_{\otimes} : s = (s_i)_{i=1}^n \mapsto \max\{s_1, \ldots, s_n\}. \tag{7.4}$$

现在，除了假设 7.1.1之外，还假设以下条件成立：

假设 7.2.2。对于每个 $i = 1, \ldots, n$，存在一个连续函数 $V_i \colon X_i \to \mathbb{R}_+$，满足以下性质：

(i) 存在 $\psi_{i1}, \psi_{i2} \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$\psi_{i1}(\|x_i\|_{X_i}) \leq V_i(x_i) \leq \psi_{i2}(\|x_i\|_{X_i}), \quad x_i \in X_i. \tag{7.5}$$

(ii) 存在一个单调聚合函数 μ_i，以及 $\chi_{ij} \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}$, $j = 1, \ldots, n$，其中 $\chi_{ii} = 0$，且 $\chi_{iu} \in \mathcal{K}$, $\alpha_i \in \mathcal{P}$，使得对于所有 $x_j \in X_j$, $j = 1, \ldots, n$ 以及所有 $u \in \mathcal{U}$，以下蕴含关系成立：

$$\begin{aligned} V_i(x_i) > \max\Big\{\mu_i\Big[\big(\chi_{ij}(V_j(x_j))\big)_{j=1}^n\Big], \chi_{iu}(\|u\|_{\mathcal{U}})\Big\} \\ \Rightarrow \dot{V}_{i,u}(x_i) \leq -\alpha_i(V_i(x_i)). \end{aligned} \tag{7.6}$$

函数 χ_{ij} 称为内部李雅普诺夫增益，而函数 χ_{iu} 称为外部李雅普诺夫增益。

函数 μ_i 将来自所有 x_j-子系统的输入合并（“聚合”）为来自网络中其他元素、输入至 x_i-子系统的全内部输入。如果 $\mu_i = \mu_{\otimes}$，那么输入至第 i个子系统的总输入就是各个子系统输入的最大值。如果 $\mu_i = \mu_{\boxplus}$，见（7.3），那么输入至第 i个子系统的总输入就是各个子系统输入之和。允许这种灵活性后，我们便能在各种应用中获得针对网络稳定性的更精确条件。

我们将 i 对应的李雅普诺夫增益 $\chi_{ij} \in \mathcal{K}_\infty \cup \{0\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 汇集成矩阵$\Gamma := (\chi_{ij})_{i,j=1}^n$。我们将所有单调聚合函数（MAF） μ_i 组合成单调聚合函数向量$\mu := (\mu_i)_{i=1}^n$。

于是，数对 (Γ, μ) 导出如下单调连续算子，称为增益算子

$$\Gamma_\mu(s) := \begin{pmatrix} \mu_1\big(\chi_{11}(s_1), \ldots, \chi_{1n}(s_n)\big) \\ \vdots \\ \mu_n\big(\chi_{n1}(s_1), \ldots, \chi_{nn}(s_n)\big) \end{pmatrix}, \quad s = (s_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^n. \tag{7.7}$$

若对于所有 i 均有 $\mu_i = \mu_{\boxplus}$，则 Γ_μ 对应于算子

$$\Gamma_{\boxplus} := \Big(\sum_{j=1}^n \chi_{ij}(s_j)\Big)_{i=1}^n,$$

并且，若对于所有 i 均有 $\mu_i = \mu_{\otimes}$，则 Γ_μ 对应于算子

$$\Gamma_{\otimes} := \Big(\max_{j=1}^n \chi_{ij}(s_j)\Big)_{i=1}^n.$$

我们将需要以下技术引理，此处不加证明地陈述（参见 [160,第 3 节。5]）。

引理 7.2.3。 设 $(x_k^1)_{k=1}^{\infty}, \ldots, (x_k^m)_{k=1}^{\infty}$ 是实数序列。设极限$\lim_{k\to\infty} \max_{i=1}^{m} x_k^i$ 存在。那么

$$\lim_{k\to\infty} \max_{i=1}^{m} x_k^i = \max_{i=1}^{m} \overline{\lim_{k\to\infty}}\, x_k^i, \tag{7.8}$$

其中，$\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k^i$ 是序列 x_k^i的上极限。

推论 7.2.4。 设 $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在$t = 0$的某个邻域 D 内有定义且有界。以下结论成立

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \max_{i=1}^{m} f_i(t) = \max_{i=1}^{m} \overline{\lim_{t\to 0}} f_i(t) \tag{7.9}$$

为了为整个互联系统构造一个 ISS 李雅普诺夫函数，我们将使用以下概念:

定义 7.2.5。 设 $\Gamma\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ 为一个非线性算子。若函数 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^T$:$\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$，其中 $\sigma_i \in \mathcal{K}_\infty$, $i = 1, \ldots, n$，具有以下性质，则称其为相对于算子 Γ的非严格衰减正则路径：

(i) 对每个紧区间 $K \subset (0, \infty)$，存在 $0 < c \le C < \infty$，使得对所有 $r_1, r_2 \in K$ 和 $i \in \mathbb{N}$

$$c|r_1 - r_2| \le |\sigma_i^{-1}(r_1) - \sigma_i^{-1}(r_2)| \le C|r_1 - r_2|. \tag{7.10}$$

(ii) Γ 在 $\sigma(\mathbb{R}_+)$ 上单调不增:

$$\Gamma(\sigma(r)) \le \sigma(r) \quad \forall r \ge 0. \tag{7.11}$$

如果映射 σ 还满足 $\Gamma(\sigma(r)) \ll \sigma(r)$, $\forall r > 0$，那么称 σ 为严格衰减正则路径。$\lhd$

下一个定理给出了互联系统的 ISS 子系统的 ISS 李雅普诺夫函数的构造，前提是存在增益算子的非严格衰减路径。

定理 7.2.6 (基于李雅普诺夫函数的 ISS 小增益定理)。 设假设 *7.2.2* 成立。若存在与算子 $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)^T$相对应的非严格衰减正则路径，且该算子由 Γ_μ 定义为 (7.7)，则可构造出 (7.2) 的 *ISS* 李雅普诺夫函数

$$V(x) := \max_{i=1}^{n} \sigma_i^{-1}(V_i(x_i)), \tag{7.12}$$

整个系统的李雅普诺夫增益为

$$\chi(r) := \max_{i=1}^{n} \sigma_i^{-1}(\chi_i(r)). \tag{7.13}$$

证明。 我们将证明分成几个部分。

(i). 对 X进行划分。任取 $u \in \mathcal{U}$。为证明 V是一个 ISS 李雅普诺夫函数，将其定义域划分为若干子集，使得在这些子集上 V的形式更简单，这样做很有帮助。因此，对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，定义集合

$$M_i = \left\{x \in X : \sigma_i^{-1}(V_i(x_i)) > \sigma_j^{-1}(V_j(x_j)) \ \forall j = 1, \ldots, n, \ j \ne i\right\}.$$

由 V_i 和 σ_i^{-1}, $i = 1$、.....、 n 的连续性可知，所有 M_i 都是开集。此外，注意到 $X = \bigcup_{i=1}^n M_i$，并且对所有 i， j： $i \neq j$ 成立 $M_i \bigcap M_j = \emptyset$。

(ii) 关于 $V_u(x)$ 的估计**在** $\bigcup_{i=1}^n M_i$**上**。取某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 并任取 $x \in M_i$。假设 $V(x) \geq \chi(\|u\|_{\mathcal{U}})$ 成立，其中 χ 由（7.13）给出。我们得到

$$\sigma_i^{-1}(V_i(x_i)) = V(x) \geq \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) = \max_{j=1}^n \sigma_j^{-1} \circ \chi_j(\|u\|_{\mathcal{U}}) \geq \sigma_i^{-1}(\chi_i(\|u\|_{\mathcal{U}})).$$

由于 $\sigma_i^{-1} \in \mathcal{K}_\infty$，因此有

$$V_i(x_i) \geq \chi_i(\|u\|_{\mathcal{U}}). \tag{7.14}$$

另一方面，根据非严格衰减条件（7.11），并利用单调聚合函数 μ_i的单调性，我们得到

$$\begin{aligned} V_i(x_i) = \sigma_i(V(x)) &\geq \Big[\Gamma_\mu\Big(\sigma\big(V(x)\big)\Big)\Big]_i \\ &= \mu_i\Big[\Big(\chi_{ij}\big(\sigma_j\left(V\left(x\right)\right)\big)\Big)_{j=1}^n\Big] = \mu_i\Big[\Big(\chi_{ij}\big(\sigma_j\left(\sigma_i^{-1}\left(V_i\left(x_i\right)\right)\right)\big)\Big)_{j=1}^n\Big] \\ &\geq \mu_i\Big[\Big(\chi_{ij}\big(\sigma_j\left(\sigma_j^{-1}\left(V_j\left(x_j\right)\right)\right)\big)\Big)_{j=1}^n\Big] = \mu_i\Big[\Big(\chi_{ij}\big(V_j\left(x_j\right)\big)\Big)_{j=1}^n\Big]. \end{aligned}$$

结合（7.14），得到

$$V_i(x_i) \geq \max\Big\{\mu_i\Big[\Big(\chi_{ij}\big(V_j\left(x_j\right)\big)\Big)_{j=1}^n\Big], \chi_i(\|u\|_{\mathcal{U}})\Big\}. \tag{7.15}$$

现在，由（7.6）可得

$$\dot{V}_{i,u}(x_i) \leq -\alpha_i(V_i(x_i)). \tag{7.16}$$

对于所有 $j \neq i$，有 $\sigma_i^{-1}(V_i(x_i)) > \sigma_j^{-1}(V_j(x_j))$。由于所有子系统的轨迹都是连续的，因此存在时间 $t > 0$，使得对于所有 $s \in [0,t]$，均有 $\sigma_i^{-1}\big(V_i(\phi_i(s,x,u))\big) > \sigma_j^{-1}\big(V_j(\phi_j(s,x,u))\big)$。因此，对于 $s \in [0,t]$，有 $V(\phi(s,x,u)) = \sigma_i^{-1}\big(V_i(\phi_i(s,x,u))\big)$。另请注意，根据（7.16），$V_i(\phi_i(s,x,u)) \leq V_i(x_i)$。

我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\Big(V(\phi(s,x,u)) - V(x)\Big) &= \frac{1}{s}\Big(\sigma_i^{-1}\big(V_i(\phi_i(s,x,u))\big) - \sigma_i^{-1}\big(V_i(x_i)\big)\Big) \\ &= -\frac{1}{s}\Big|\sigma_i^{-1}\big(V_i(\phi_i(s,x,u))\big) - \sigma_i^{-1}\big(V_i(x_i)\big)\Big|. \end{aligned} \tag{7.17}$$

定义（逐点） $\sigma_{min} := \text{最小值}_{i=1}^n \sigma_i$ 以及 $\sigma_{max} := \text{最大值}_{i=1}^n \sigma_i$。

由于 $s \mapsto \sigma_i^{-1}\big(V_i(\phi_i(s,\ x,\ u))\big)$的连续性，我们取足够小的 t，使得对所有 $s \in [0,t]$ 都有

$$\frac{1}{2}V_i(x_i) \leq V_i(\phi_i(s,x,u)) \leq V_i(x_i) = \sigma_i(V(x)) \leq \sigma_{max}(V(x)).$$

同样，我们估计

$$\frac{1}{2}V_i(x_i) = \frac{1}{2}\sigma_i(V(x)) \geq \frac{1}{2}\sigma_{min}(V(x)).$$

对任意 $r \geq 0$ 定义

$$K(r) := \Big[\frac{1}{2}\sigma_{min}(r), \sigma_{max}(r)\Big],$$

并令 $c = c(K(r)) > 0$ 为满足以下条件的极大常数

$$|\sigma_i^{-1}(r_1) - \sigma_i^{-1}(r_2)| \geq c|r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in K(r).$$

对于所有 $s \in (0, t)$，由式（7.17）可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\Big(V(\phi(s,x,u)) - V(x)\Big) &\leq -c\big(K(V(x))\big)\frac{1}{s}\Big|V_i\big(\phi_i(s,x,u)\big) - V_i(x_i)\Big| \\ &= c(K(V(x)))\frac{1}{s}\big(V_i(\phi_i(s,x,u)) - V_i(x_i)\big).\end{aligned}$$

取上极限，得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &= \varlimsup_{s\to+0}\frac{1}{s}\Big(V(\phi(s,x,u)) - V(x)\Big) \\ &\leq c(K(V(x)))\dot{V}_i(x_i) \\ &\leq -c(K(V(x)))\alpha_i(V_i(x_i)) \\ &= -c(K(V(x)))\alpha_i(\sigma_i(V(x))).\end{aligned}$$

现在定义

$$\hat{\alpha}(r) := c(K(r))\min_{i=1}^{n}\alpha_i(\sigma_i(r)), \quad r \geq 0.$$

(iii). $\hat{\alpha}$ 的下界。 接下来需要用一个正定函数给出 $\hat{\alpha}$ 的下界。对于每个 $r > 0$，定义 $K_2(r) := \bigcup_{q\in K(r)} \mathrm{str}(1, q)$，其中 $\mathrm{str}(1, q)$ 在 $q \geq 1$ 时等于 $[1, q]$，在 $q < 1$ 时等于 $[q, 1]$。显然，$K_2(r)$ 是 $(0, \infty)$ 的紧子集。此外，我们引入

$$\hat{\alpha}_2(r) := c(K_2(r))\min_{i=1}^{n}\alpha_i(\sigma_i(r)), \quad \forall r > 0.$$

由于对于任意 $r > 0$，$K(r) \subset K_2(r)$，所以对于所有 $r > 0$，$\hat{\alpha}(r) \geq \hat{\alpha}_2(r)$。此外，存在 $r_{\min}$ 使得对于所有满足 $r_1 < r_2$ 的 $r_1, r_2 \in (0, r_{\min})$，$K_2(r_1) \supset K_2(r_2)$。这意味着 $\hat{\alpha}_2$ 是 $(0, r_{\min})$ 上的非递减正函数，并且 $\lim_{r\to-0}\hat{\alpha}_2(r) = 0$。此外，对于所有 $r \in (0, r_{\min})$，我们有

$$\hat{\alpha}_2(r) = \frac{2}{r}\int_{r/2}^{r}\hat{\alpha}_2(r)\,ds \geq \frac{2}{r}\int_{r/2}^{r}\hat{\alpha}_2(s)\,ds,$$

由于 $\hat{\alpha}_2$ 在 $(0, r_{\min})$ 上单调，因此它在该区间上可积。因此，$\hat{\alpha}_2$，进而 $\hat{\alpha}$，可以用 $[0, r_{\min}]$ 上的连续函数作下界。同理，存在 $r_{\max}$，使得对于所有满足 $r_1 > r_2$ 的 $r_1, r_2 \in (r_{\max}, \infty)$，都有 $K_2(r_1) \supset K_2(r_2)$。这意味着 $\hat{\alpha}_2$ 在 $(r_{\max}, \infty)$ 上是非递增正函数。因此，对于 $r \in (r_{\max}, \infty)$，我们有

$$\hat{\alpha}_2(r) = \frac{1}{r}\int_{r}^{2r}\hat{\alpha}_2(r)\,ds \geq \frac{1}{r}\int_{r}^{2r}\hat{\alpha}_2(s)\,ds.$$

因此，$\hat{\alpha}_2$以及$\hat{\alpha}$都可以由 $[r_{\max}, \infty$上的连续函数下界估计。由于$\hat{\alpha}$ 取正值，并且在$(0, \infty)$ 中的每个紧区间上都与零有正距离，因此$\hat{\alpha}$ 可以由一个正定函数下界估计，我们将其记为 α。

总之，对于所有 $x \in \bigcup_{i=1}^n M_i$，都有

$$\dot{V}_u(x) \le -\alpha(V(x)).$$

(iv). $V_u(x)$ **的估计，适用于** X。现在令 $x \notin \bigcup_{i=1}^n M_i$。由 $X = \bigcup_{i=1}^n M_i$ 可知，$x \in \bigcap_{i\in I(x)} \partial M_i$，其中某个指标集 $I(x) \subset \{1,\dots,n\}$, $|I(x)| \ge 2$。显然，

$$\bigcap_{i\in I(x)} \partial M_i = \big\{x \in X : \forall i \in I(x),\ \forall j \notin I(x)\ \sigma_i^{-1}(V_i(x_i)) > \sigma_j^{-1}(V_j(x_j))$$
$$\forall i,j \in I(x)\ \sigma_i^{-1}(V_i(x_i)) = \sigma_j^{-1}(V_j(x_j))\big\}.$$

由于 ϕ 的连续性，我们有：存在 $t > 0$，使得对于所有 $s \in [0,t)$，均有

$$\phi(s,x,u) \in \left(\bigcap_{i\in I(x)} \partial M_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I(x)} M_i\right).$$

根据李导数的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &= \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\Big(V(\phi(t,x,u)) - V(x)\Big)\\ &= \overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\left(\max_{i\in I(x)}\{\sigma_i^{-1}(V_i(\phi_i(t,x,u)))\} - \max_{i\in I(x)}\{\sigma_i^{-1}(V_i(x_i))\}\right).\end{aligned} \tag{7.18}$$

由 $I(x)$ 的定义可知

$$\sigma_i^{-1}(V_i(x_i)) = \sigma_j^{-1}(V_j(x_j)) \quad \forall i,j \in I(x),$$

因此，取得最大值 $\max_{i\in I(x)}\{\sigma_i^{-1}(V_i(x_i))\}$ 的指标 i，总可以取为使 $\max_{i\in I(x)}\{\sigma_i^{-1}(V_i(\phi_i(t,x,u)))\}$ 达到最大值的指标。

由估计式（7.18）可推得

$$\dot{V}_u(x) = \overline{\lim_{t\to+0}} \max_{i\in I(x)} \left\{\frac{1}{t}\left(\sigma_i^{-1}(V_i(\phi_i(t,x,u))) - \sigma_i^{-1}(V_i(x_i))\right)\right\}.$$

利用引理 7.2.3可得

$$\begin{aligned}\dot{V}_u(x) &= \max_{i\in I(x)} \left\{\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{1}{t}\left(\sigma_i^{-1}(V_i(\phi_i(t,x,u))) - \sigma_i^{-1}(V_i(x_i))\right)\right\}\\ &\le -\alpha(V(x)).\end{aligned}$$

综上，对于所有 $x \in X$ 和 $u \in \mathcal{U}$，均有

$$V(x) \ge \chi(\|u\|_{\mathcal{U}}) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_u(x) \le -\alpha(V(x)),$$

并且构造了整个互联系统的蕴含形式 ISS 李雅普诺夫函数。根据定理 1.5.4，可得整个系统是 ISS。 □

我们已经证明，只要算子 Γ_μ存在一条非严格衰减路径，ISS系统网络就是 ISS。只要 Γ_μ 满足所谓的强小增益条件，就能保证存在一条严格衰减路径（因此也存在一条非严格衰减路径），至少在其正则性范围内；参见 [160, 附录 C，C 节。8]。作为一个特例，考虑由 2 个系统构成的互联系统，其对应的内部增益为 χ_{12}，χ_{21}，其中 $\mu_1 = \mu_2 =$ 恒等映射。

推论7.2.7 （2 个系统的耦合）。 设 $n = 2$，并且假设 *7.2.2* 满足$\mu_1 = \mu_2 = \mathrm{id}$。若

$$\chi_1 \circ \chi_2(r) < r, \quad r > 0, \tag{7.19}$$

则 （7.2）是输入到状态稳定的。

证明。 根据假设，增益算子具有如下形式

$$\Gamma \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{12}(s_2) \\ \chi_{21}(s_1) \end{pmatrix}. \tag{7.20}$$

根据 [57, 第 108], [160], 页，条件（7.19）保证我们的增益算子存在一条非严格衰减正则路径。应用定理 7.2.6 即可完成证明。

□

7.2.1 例：线性系统耦合

作为一个具体例子，考虑以下互联系统：线性反应-扩散方程

$$\begin{cases} x_{1,t}(z,t) = c_1 x_{1,zz}(z,t) + a_{12} x_2(z,t), & z \in (0,d),\ t > 0, \\ x_1(0,t) = x_1(d,t) = 0; \\ x_{2,t}(z,t) = c_2 x_{2,zz}(z,t) + a_{21} x_1(z,t), & z \in (0,d),\ t > 0, \\ x_2(0,t) = x_2(d,t) = 0. \end{cases} \tag{7.21}$$

d、 c_1和 c_2 是正常数。

我们为子系统选取状态空间： $X_1 := L^2(0, d)$， $X_2 := L^2(0, d)$。算子 $A_i = c_i \frac{d^2}{dz^2}$ 满足 $D(A_i) = H_0^1(0, d) \cap H^2(0, d)$， $i = 1, 2$，是相应子系统的解析半群生成元。

两个子系统均为输入到状态稳定性，此外， $\sigma(A_i) = \{-c_i \left(\frac{\pi n}{d}\right)^2 : n \in \mathbb{N}\}, i = 1, 2$。

取 $P_i = \frac{1}{2c_i}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \mathrm{id}$，其中id是 X_i上的恒等算子。我们有

$$\begin{aligned} \langle A_i x_i, P_i x_i\rangle + \langle P_i x_i, A_i x_i\rangle &= \frac{1}{c_i}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \langle A_i x_i, x_i\rangle \\ &= \left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \int_0^d x_{i,zz}(z) x_i(z) dz = -\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \int_0^d x_{i,z}^2(z) dz \\ &\le -\|x_i\|^2_{L^2(0,d)}. \end{aligned}$$

在最后一个估计中，我们使用了弗里德里希不等式（D.29）。子系统的李雅普诺夫函数定义为

$$V_i(x_i) = \langle P_i x_i, x_i\rangle = \frac{1}{2c_i}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 \|x_i\|^2_{L^2(0,d)}, \quad x_i \in X_i.$$

利用柯西-施瓦茨不等式，我们得到导数的以下估计：

$$\dot{V}_1(x_1) \leq -\|x_1\|^2_{L^2(0,d)} + \frac{1}{c_1}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 |a_{12}| \|x_1\|_{L^2(0,d)} \|x_2\|_{L^2(0,d)},$$

$$\dot{V}_2(x_2) \leq -\|x_2\|^2_{L^2(0,d)} + \frac{1}{c_2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 |a_{21}| \|x_1\|_{L^2(0,d)} \|x_2\|_{L^2(0,d)}.$$

我们按以下方式选择增益：

$$\gamma_{12}(r) = \frac{c_2}{c_1^3}\left(\frac{d}{\pi}\right)^4 \left|\frac{a_{12}}{1-\varepsilon}\right|^2 r, \qquad \gamma_{21}(r) = \frac{c_1}{c_2^3}\left(\frac{d}{\pi}\right)^4 \left|\frac{a_{21}}{1-\varepsilon}\right|^2 r, \qquad r \geq 0.$$

对于所有 x_1， $x_2 \in L^2(0,\ d)$，均有

$$\begin{aligned} V_1(x_1) \geq \gamma_{12} \circ V_2(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad V_1(x_1) \geq \gamma_{12}(1) V_2(x_2) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{c_1}{c_2}\gamma_{12}(1)} \|x_2\|_{L^2(0,d)} \leq \|x_1\|_{L^2(0,d)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{c_1}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 |a_{12}| \|x_2\|_{L^2(0,d)} \leq (1-\varepsilon)\|x_1\|_{L^2(0,d)}. \end{aligned}$$

鉴于上述不等式，对于所有 x_1， $x_2 \in L^2(0,\ d)$，我们有以下蕴含关系：

$$V_1(x_1) \geq \gamma_{12} \circ V_2(x_2) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_1(x_1) \leq -\varepsilon \|x_1\|^2_{L^2(0,d)}.$$

T这表明 V_1 是（7.21中第一子系统的 ISS 李雅普诺夫函数).

类似地地，假设对于某个 x_1， $x_2 \in L^2(0,\ d)$，以下不等式成立 s

$$V_2(x_2) \geq \gamma_{21} \circ V_1(x_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c_2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^2 |a_{21}| \|x_1\|_{L^2(0,d)} \leq (1-\varepsilon)\|x_2\|_{L^2(0,d)},$$

我们有

$$V_2(x_2) \geq \gamma_{21} \circ V_1(x_1) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_2(x_2) \leq -\varepsilon \|x_2\|^2_{L^2(0,d)}.$$

这表明 V_2 是（7.21）中第二子系统的 ISS 李雅普诺夫函数。

我们来寻找能够保证小增益条件成立的条件：

$$\gamma_{12} \circ \gamma_{21} < \mathrm{id} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c_1^2 c_2^2}\left(\frac{d}{\pi}\right)^8 \frac{|a_{12}a_{21}|^2}{(1-\varepsilon)^4} < 1,$$

其中，我们可以任意选取一个足够小的 $\varepsilon > 0$ 。

根据推论 7.2.7，如果

$$|a_{12}a_{21}| < c_1 c_2 \left(\frac{\pi}{d}\right)^4 \tag{7.22}$$

得到满足，则整个系统（7.21）是零输入一致全局渐近稳定的。

7.2.2 例：非线性系统耦合

现在考虑两个非线性抛物型系统的耦合：

$$\begin{cases} x_{1,t}(z,t) = q_1 x_{1,zz}(z,t) + x_2^2(z,t), \quad z \in (0,\pi),\ t>0, \\ x_1(0,t) = x_1(\pi,t) = 0; \\ x_{2,t}(z,t) = q_2 x_{2,zz}(z,t) + \sqrt{|x_1(z,t)|}, \quad z \in (0,\pi),\ t>0, \\ x_2(0,t) = x_2(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{7.23}$$

这里 q_1， $q_2 > 0$ 是扩散系数。

该系统可用于描述一个包含两种反应物的化学反应网络，这两种反应物在点 z、时间 t 的密度分别为 $x_i(z,\ t)$、 $i = 1,\ 2$。

我们假设 $x_1 \in L^2(0,\ \pi) =: X_1$ 且 $x_2 \in L^4(0,\ \pi) =: X_2$。整个系统（7.23）的状态为 $X := X_1 \times X_2$。

We 分别为子系统 1 和 2 选择以下李雅普诺夫函数 ：

$$V_1(x_1) = \int_0^\pi x_1^2(z)dz = \|x_1\|^2_{L^2(0,\pi)},$$

$$V_2(x_2) = \int_0^\pi x_2^4(z)dz = \|x_2\|^4_{L^4(0,\pi)}.$$

暂且假设映射 x_i 二次连续可微。考虑 V_1 的李导数：

$$\begin{aligned} \dot V_1(x_1) &= 2\int_0^\pi x_1(z)\left(q_1 x_{1,zz}(z) + x_2^2(z)\right)dz \\ &\le -2q_1\|x_{1,z}\|^2_{L^2(0,\pi)} + 2\|x_1\|_{L^2(0,\pi)}\|x_2\|^2_{L^4(0,\pi)}. \end{aligned}$$

在上一个估计中，第一项使用了分部积分，第二项使用了柯西-施瓦茨不等式。

对第一项应用弗里德里希不等式（D.29），我们得到估计

$$\begin{aligned} \dot V_1(x_1) &\le -2q_1\|x_1\|^2_{L^2(0,\pi)} + 2\|x_1\|_{L^2(0,\pi)}\|x_2\|^2_{L^4(0,\pi)} \\ &= -2q_1 V_1(x_1) + 2\sqrt{V_1(x_1)}\sqrt{V_2(x_2)}. \end{aligned}$$

Take

$$\chi_{12}(r) = \frac{1}{a}r,\ \forall r > 0,$$

其中 $a > 0$ 任意。对于所有 $x_1 \in X_1$、 $x_2 \in X_2$，我们有

$$V_1(x_1) \ge \chi_{12}(V_2(x_2)) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}V_1(x_1) \le -2(q_1 - a^{\frac{1}{2}})V_1(x_1). \tag{7.24}$$

该推导是在假设 x_1， x_2 为二阶连续可微函数的条件下进行的。由于稠密性论证，上述估计对一般的$x_1 \in L^2(0,\ \pi)$也成立。为确保 V_1 是一个 ISS 李雅普诺夫函数，必须满足以下条件：

$$2(q_1 - a^{\frac{1}{2}}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < q_1^2. \tag{7.25}$$

现在假设 x_1 和 x_2 足够光滑，考虑 V_2的李导数:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x_2) &= 4\int_0^\pi x_2^3(z)\Big(q_2 x_{2,zz}(z) + \sqrt{|x_1(z)|}\Big)dz \\ &\le -3q_2\int_0^\pi 4x_{2,z}^2(z)x_2^2(z)dz + 4\int_0^\pi x_2^3(z)|x_1(z)|^{\frac{1}{2}}dz \\ &= -3q_2\int_0^\pi \Big(\frac{\partial}{\partial z}(x_2^2)\Big)^2 dz + 4\int_0^\pi x_2^3(z)|x_1(z)|^{\frac{1}{2}}dz.\end{aligned}$$

对第一项应用弗里德里希不等式（注意 $x_2^2 \in L^2(0,\ d)$），对最后一项应用 H¨older 不等式，可得

$$\dot{V}_2(x_2) \le -3q_2V_2(x_2) + 4(V_2(x_2))^{3/4}(V_1(x_1))^{1/4}.$$

Let

$$\chi_{21}(r) = \frac{1}{b}r,\ \forall r > 0,$$

其中 $b > 0$ 是任意常数。以下蕴含关系成立:

$$V_2(x_2) \ge \chi_{21}(V_1(x_1)) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_2(x_2) \le -(3q_2 - 4b^{\frac{1}{4}})V_2(x_2).$$

为确保 V_2 是第二子系统的 ISS 李雅普诺夫函数，必须满足以下条件:

$$3q_2 - 4b^{\frac{1}{4}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b < \Big(\frac{3q_2}{4}\Big)^4. \tag{7.26}$$

为确保互联系统的稳定性，我们应用小增益条件

$$\chi_{12}\circ\chi_{21} < \mathrm{id} \quad \Leftrightarrow \quad ab > 1. \tag{7.27}$$

如果施加条件

$$q_1^2\Big(\frac{3q_2}{4}\Big)^4 > 1, \tag{7.28}$$

那么就可以找到 a，b，使得条件（7.25）、（7.26）以及小增益条件（7.27）均得到满足。因此，如果 q_1 和 q_2 满足（7.28），小增益定理（推论7.2.7）便可保证互联系统具有一致全局渐近稳定性。

7.3 积分ISS系统的互联系统

小增益理论也可用于研究具有强积分输入到状态稳定性的系统之间的耦合。

本节将陈述半线性系统的 iISS 小增益定理

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i(t) = A_ix_i(t) + f_i(x_1, x_2, u), \quad i = 1, 2,\\ &x_i(t) \in X_i, \quad u \in \mathcal{U},\end{aligned} \tag{7.29}$$

其中，X_i 是第 i个子系统的状态空间，而 $A_i:\ D(A_i) \subset X_i \to X_i$ 是 X_i上的强连续半群的生成元。令 $X := X_1 \times X_2$，它是 $x = (x_1, x_2)$的空间，且 X 上的范数定义为 $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{X_1} + \|\cdot\|_{X_2}$。在本

节中，我们假设存在连续函数 $V_i: X_i \to \mathbb{R}_+$, $\psi_{i1}, \psi_{i2} \in \mathcal{K}_\infty$,$\alpha_i \in \mathcal{K}$, $\sigma_i \in \mathcal{K}$ 和 $\kappa_i \in \mathcal{K} \cup \{0\}$，对于 $i = 1,2$，使得

$$\psi_{i1}(\|x_i\|_{X_i}) \le V_i(x_i) \le \psi_{i2}(\|x_i\|_{X_i}) \quad \forall x_i \in X_i, \tag{7.30}$$

且系统（7.29）满足

$$\dot{V}_i(x_i) \le -\alpha_i(\|x_i\|_{X_i}) + \sigma_i(\|x_{3-i}\|_{X_{3-i}}) + \kappa_i(\|u(0)\|_U) \tag{7.31}$$

对所有 $x_i \in X_i$、$x_{3-i} \in X_{3-i}$ 和 $u \in \mathcal{U}$ 均成立，其中对应于输入 $u \in \mathcal{U}$ 和 $v \in PC_b(\mathbb{R}_+, X_{3-i})$ 的 V_i 的李导数（$v(0) = x_{3-i}$）定义为

$$\dot{V}_i(x_i) = \overline{\lim_{t \to +0}} \frac{1}{t}\Big(V_i\big(\phi_i(t, x_i, v, u)\big) - V_i(x_i)\Big). \tag{7.32}$$

为了给出互联系统（7.29的小增益判据（其组成部分不一定具有输入到状态稳定性），我们使用扩展非负数集 $\mathbb{R}_+ := [0, \infty]$上的逆映射的广义表达式。对于 $\omega \in \mathcal{K}$，定义函数$\omega^{\ominus}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 如下

$$\omega^{\ominus}(s) := \sup\{v \in \mathbb{R}_+ : s \ge \omega(v)\} = \begin{cases} \omega^{-1}(s) & \text{, if } s \in \operatorname{Im} \omega, \\ +\infty & \text{, otherwise.} \end{cases}$$

函数 $\omega \in \mathcal{K}$扩展到 $\omega: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，定义为 $\omega(s) := \sup_{v \in \{y \in \mathbb{R}_+ :\ y \le s\}} \omega(v)$。这些记号有助于简洁地表述以下结果。

定理 7.3.1（积分 ISS 小增益定理）。假设

$$\lim_{s \to \infty} \alpha_i(s) = \infty \ \ or \ \ \lim_{s \to \infty} \sigma_{3-i}(s)\kappa_i(1) < \infty \tag{7.33}$$

对 $i = 1$，2成立。若存在 $c > 1$，使得

$$\psi_{11}^{-1} \circ \psi_{12} \circ \alpha_1^{\ominus} \circ c\sigma_1 \circ \psi_{21}^{-1} \circ \psi_{22} \circ \alpha_2^{\ominus} \circ c\sigma_2(s) \le s \tag{7.34}$$

对所有 $s \in \mathbb{R}_+$均成立，则系统 (7.29) 具有积分输入到状态稳定性。此外，若还满足 $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$对 $i = 1$,2成立，则系统 (7.29) 具有输入到状态稳定性。此外，可以构造 $\lambda_i \in \mathcal{K}$（详见*[161,*定理 *6]*），使得

$$V(x) = \int_0^{V_1(x_1)} \lambda_1(s)ds + \int_0^{V_2(x_2)} \lambda_2(s)ds \tag{7.35}$$

是系统 (7.29)的积分输入到状态稳定性（输入到状态稳定性）李雅普诺夫函数。

证明。略，见 [161, 定理 6]。 □

注 7.3.2。条件（7.34）可称为积分输入到状态稳定性小增益条件。乍看之下，该条件似乎有些技术性。然而，若 $V_i(x_i) = \psi_i(\|x_i\|_{X_i})$，其中 ψ_1，$\psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$，则该条件可大大简化。在这种情况下 $\psi_{11} = \psi_{12} = \psi_i$，$i = 1$，2，且（7.34）可写成

$$\alpha_1^{\ominus} \circ c\sigma_1 \circ \alpha_2^{\ominus} \circ c\sigma_2(s) \le s. \tag{7.36}$$

术语 $\alpha_i^{\ominus} \circ \sigma_i$ 可以解释为 i-th 子系统的李雅普诺夫增益。这种解释说明了为什么将 (7.34) 称为“小增益条件”。◁

注 7.3.3。在定理7.3.1中，我们要求 iISS 李雅普诺夫函数 α_i 的衰减率是 $\mathcal{K}$-函数。文献 [35, 中的定理 1] 表明，存在具有此类衰减率的 iISS 李雅普诺夫函数，不仅意味着积分输入到状态稳定性，还意味着强输入到状态稳定性积分形式。该结果同样可以推广到无限维系统。因此，在定理7.3.1中，我们隐含地假设这些子系统不仅具有积分输入到状态稳定性，而且是强积分输入到状态稳定的。◁

7.3.1 例：一个 ISS 与 iISS 非线性反应扩散系统的耦合

考虑耦合的非线性反应扩散系统

$$\begin{cases} x_{1,t}(z,t) = x_{1,zz}(z,t) + x_1(z,t)x_2^4(z,t), \\ x_1(0,t) = x_1(\pi,t) = 0; \\ x_{2,t}(z,t) = x_{2,zz}(z,t) + ax_2(z,t) - bx_2(z,t)\Big(x_{2,z}(z,t)\Big)^2 + \Big(\frac{x_1^2(z,t)}{1+x_1^2(z,t)}\Big)^{\frac{1}{2}}, \\ x_2(0,t) = x_2(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{7.37}$$

定义在区域 $(z,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty)$ 上。为了完整定义该系统，我们需要选择子系统的状态空间。我们取 $X_1 := L^2(0,\pi)$，用于 $x_1(\cdot,t)$；并取 $X_2 := H_0^1(0,\pi)$，用于$x_2(\cdot,t)$。我们将分析分为三部分。首先，根据第 5.3.3 节中的推导，证明 x_1-子系统具有 iISS。接下来，利用第 5.3.2 节中的结果，证明 x_2-子系统具有 ISS。最后，我们利用第 7.1 节中提出的小增益定理，推导出保证整体系统 (7.37) 一致全局渐近稳定（UGAS）的条件。

第一子系统具有 iISS

首先，我们对 $X_1 = L^2(0,\pi)$ 应用定理 5.3.2 的第 (i) 项，其中 $q = 1$。于是 $W(h) = h^2$，并且由于 $\dot{W}(h) \le 2W(h)|y_2|^4$，且对所有 $t \in \mathbb{R}_+$，$y_1(0,t) = y_1(\pi,t) = 0$，可以选择

$$V_1(y_1) := \ln\Big(1 + \|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}\Big) \tag{7.38}$$

作为 x_1-子系统的积分输入到状态稳定李雅普诺夫函数。根据（5.47），其李导数满足

$$\dot{V}_1(y_1) \le -\frac{2\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}{1+\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}} + 2\|y_2\|^4_{L^\infty(0,\pi)}. \tag{7.39}$$

请注意，在公式（5.47）中，我们使用了 $1 = \frac{\pi^2}{\pi^2}$，而不是 $\frac{\pi^2}{4\pi^2}$，因为 $y_1 = 0$ 在区间 $[0,\pi]$的两端均成立，因此在推导（5.47）时，可以使用不那么保守的弗里德里希不等式，而不是庞加莱不等式。要将（7.39）中使用的输入空间里的 $L^\infty(0,\pi)$ 替换为$X_2 = H_0^1(0,\pi)$，我们回顾（5.49），由此得到

$$\dot{V}_1(y_1) \le -\frac{2\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}{1+\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}} + 8\|y_2\|^4_{H_0^1(0,\pi)}. \tag{7.40}$$

因此，我们得到（7.31），对于 $i = 1$，且 x_1-子系统相对于状态空间 $X_1 = L^2(0,\pi)$ 和输入值空间 $X_2 = H_0^1(0,\pi)$ 具有积分输入到状态稳定性。

第二子系统具有输入到状态稳定性

我们应用定理 5.3.1 ，其中 $q=1$。为简化记号，我们记

$$u_2(z) := \Big(\frac{y_1^2(z)}{1+y_1^2(z)}\Big)^{1/2}.$$

根据（5.31），考虑以下 Lyapunov 函数候选：

$$V_2(y_2) := \int_0^\pi \Big(y_{2,z}(z)\Big)^2 dz = \|y_2\|^2_{H_0^1(0,\pi)}. \tag{7.41}$$

注意，x_2-子系统的形式为（5.27），其中 $c=1$ 且

$$f(y_2(z), y_{2,z}(z)) = ay_2(z) - by_2(z)(y_{2,z}(z))^2.$$

为得到（5.29），对 $y_2(0) = y_2(\pi) = 0$ 进行分部积分，可得

$$\int_0^L y_{2,zz}(z)\Big(ay_2(z) - by_2(z)\Big(y_{2,z}(z)\Big)^2\Big)dz = -aV_2(y_2) - b\int_0^L y_{2,zz}(z)y_2(z)\Big(y_{2,z}(z)\Big)^2 dz.$$

由于 $y_2(0) = y_2(\pi) = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi y_{2,zz}(z)y_2(z)\Big(y_{2,z}(z)\Big)^2 dz &= -\int_0^\pi y_{2,z}(z)\Big(2y_2(z)y_{2,z}(z)y_{2,zz}(z) + \Big(y_{2,z}(z)\Big)^3\Big)dz \\ &= -\int_0^\pi 2y_2(z)\Big(y_{2,z}(z)\Big)^2 y_{2,zz}(z)dz - \int_0^\pi \Big(y_{2,z}(z)\Big)^4 dz,\end{aligned}$$

这意味着

$$\int_0^\pi y_{2,zz}(z)y_2(z)\Big(y_{2,z}(z)\Big)^2 dz = -\frac{1}{3}\int_0^\pi \Big(y_{2,z}(z)\Big)^4 dz. \tag{7.42}$$

因此，我们得到（5.29），其中

$$\eta(s) = -as + \frac{b}{3}s^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+, \tag{7.43}$$

当 $b \geq 0$ 时，它是凸的。我们还得到

$$\hat{\alpha}(s) = (1-a-\epsilon)s + \frac{b}{3\pi}s^2 \tag{7.44}$$

对于（5.30）。当 $\epsilon = 1-a > 0$ 且 $a < 1$ 时，（5.30）中的不等式取等号。因此，若 $a<1$ 和 $b \geq 0$ 成立，则定理 5.3.1 结合 $q=1$ 可证明，对于 $\omega \in (0, 2(1-a)]$, ，函数V_2 满足（其中 $\epsilon = 1-a$）

$$\dot{V}_2(y_2) \leq -2\Big(1-a-\frac{\omega}{2}\Big)V_2(y_2) - \frac{2b}{3\pi}V_2(y_2)^2 + \frac{1}{\omega}\|u_2\|^2_{L^2(0,\pi)}, \tag{7.45}$$

与（5.37）中一样，并且 V_2 是关于状态空间 x_2-子系统的 ISS 李雅普诺夫函数 $X_2 = H_0^1(0,\ \pi)$ 以及输入空间 $U_2 = L^2(0,\ \pi)$。由于 $s \mapsto s/(1+s)$ 是关于 $s \in \mathbb{R}_+$的凹函数，根据凹函数的詹森不等式（D.13）可得

$$\int_0^\pi |u_2(z)|^2 dz = \int_0^\pi \frac{y_1^2(z)}{1+y_1^2(z)} dz \le \pi \frac{(1/\pi)\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}{1+(1/\pi)\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}} = \frac{\pi\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}{\pi+\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}} \le \frac{\pi\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}{1+\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}.$$

将这一性质用于（7.45）中，可得

$$\dot{V}_2(y_2) \le -2\Big(1-a-\frac{\omega}{2}\Big)\|y_2\|^2_{H_0^1(0,\pi)} - \frac{2b}{3\pi}\|y_2\|^4_{H_0^1(0,\pi)} + \frac{\pi}{\omega}\left(\frac{\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}{1+\|y_1\|^2_{L^2(0,\pi)}}\right). \tag{7.46}$$

因此， V_2 是关于状态空间 $X_2 = H_0^1(0,\pi)$ 和输入空间 $X_1 = L^2(0,\pi)$ 的 x_2-子系统的 ISS 李雅普诺夫函数。

虽然性质 (7.46足以用于证明整体系统(7.37的一致全局渐近稳定性，但值得一提的是，我们可以得到关于 V_2的另一种估计。

利用 与定理5.3.1中相同的推导，我们可以从 (5.32) 得到估计 e

$$\dot{V}_2(y_2) \le -2(1-a)V_2(y_2) - \frac{2b}{3}\int_0^\pi \Big(y_{2,z}(z)\Big)^4 dz - 2\int_0^\pi y_{2,zz}(z)u_2(z)dz. \tag{7.47}$$

现在，我们将把 (5.32) 中的最后一项估计为输入和状态的若干函数之和，以便补偿由此产生的“状态空间”项；与之前采用线性动力学不同，这里借助系统的非线性动力学。对 (7.47) 中的最后一项进行分部积分，并利用 $u_2(0) = u_2(\pi) = 0$（由 (7.37) 得出），可得

$$\begin{aligned} -\int_0^\pi y_{2,zz}(z)u_2(z)dz &= \int_0^\pi y_{2,z}(z)\frac{\partial u_2}{\partial z}(z)dz \\ &\le \int_0^\pi |y_{2,z}(z)|\left|\frac{\partial u_2}{\partial z}(z)\right| dz \\ &\le \frac{\omega}{4}\int_0^\pi \Big|y_{2,z}(z)\Big|^4 dz + \frac{1}{\omega^{\frac{1}{3}}}\frac{3}{4}\int_0^\pi \Big|\frac{\partial u_2}{\partial z}(z)\Big|^{\frac{4}{3}} dz, \end{aligned} \tag{7.48}$$

其中，最后一个估计式是应用杨氏不等式得到的，其中 $p=4$以及 $\omega>0$。将（7.48）代入（7.47）可得

$$\dot{V}_2(y_2) \le -2(1-a)V_2(y_2) - \Big(\frac{2b}{3}-\frac{\omega}{2}\Big)\int_0^\pi \Big(y_{2,z}(z)\Big)^4 dz + \frac{1}{\omega^{\frac{1}{3}}}\frac{3}{2}\|u_2\|^{\frac{4}{3}}_{W_0^{1,\frac{4}{3}}(0,\pi)}. \tag{7.49}$$

对于 $\omega < \frac{4b}{3}$ 和 $a \le 1$，上述估计证明了第二子系统对于 y_2，$u_2 \in C_0^\infty(0,\pi)$ 具有输入到状态稳定性。稠密性论证表明，上述不等式对所有 $y_2 \in X_2 = H_0^1(0,\pi)$ 以及所有 $u_2 \in W^{1,\frac{4}{3}}_0(0,\pi)$ 均成立。

估计式（7.46）和（7.49）表明，对输入空间的不同选择会导致同一系统具有不同的性质，即使状态空间保持不变。耗散估计（7.46）还说明，输入到状态稳定性并不一定意味着指数衰减率。相比之下，在（7.49）中，所构造的函数 V_2 保证在全局范围内呈现指数衰减率或更快的衰减率。

最后，值得注意的是，如果 $a>1$，那么 $x=0$线性化的 x_2- 子系统在 $y_1 \equiv 0$ 下并非一致全局渐近稳定（参见 [84, 定理 5.1。3]）。因此，若 $a>1$，则非线性x_2-子系统在 $y_1 \equiv 0$ 下也不可能是一致全局渐近稳定 $a>1$。

互联系统是一致全局渐近稳定的

现在，我们汇总前几个小节的结果。假设 $a < 1$且 $b \geq 0$。对于空间 $X := L^2(0,\pi)\times H_0^1(0,\pi)$，为两个子系统定义的李雅普诺夫函数（如式 (7.38) 和 (7.41) 所示）满足式 (7.30)，其中类 $\mathcal{K}_\infty$ 函数为 $\psi_{11} = \psi_{12}$：$s \mapsto \ln(1+s^2)$ 和 $\psi_{21} = \psi_{22}$：$s \mapsto s^2$。根据式 (7.40) 和 (7.46)，对于以下情形，我们有式 (7.31)：

$$\alpha_1(s) = \frac{2s^2}{1+s^2}, \quad \sigma_1(s) = 8s^4, \quad \kappa_1(s) = 0, \tag{7.50}$$

$$\alpha_2(s) = 2\left(1-a-\frac{\omega}{2}\right)s^2 + \frac{2b}{3\pi}s^4, \quad \sigma_2(s) = \frac{\pi}{\omega}\left(\frac{s^2}{1+s^2}\right), \quad \kappa_2(s) = 0, \tag{7.51}$$

定义为 $\omega \in (0,2(1-a)]$。对于这些函数，条件 (7.34) 对所有 $s \in \mathbb{R}_+$成立，当且仅当

$$\frac{12c^2\pi^2}{b\omega}\left(\frac{s^2}{1+s^2}\right) \leq \frac{2s^2}{1+s^2} \quad \forall s \in \mathbb{R}_+ \tag{7.52}$$

成立。因此，存在 $c > 1$ 使得 (7.34) 成立，当且仅当 $6\pi^2/b < \omega$ 成立。结合 $\omega \in (0,2(1-a)]$, $a < 1$ 以及 $b \geq 0$，定理 7.3.1 证明了整个系统 ($x = 0$ 7.37) 一致全局渐近稳定，前提是

$$a + \frac{3\pi^2}{b} < 1, \quad b \geq 0. \tag{7.53}$$

注意，(7.33) 成立。由于 y_2 的边界条件，弗里德里希不等式保证 $\|y_2(\cdot,t)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \|y_2(\cdot,t)\|_{H_0^1(0,\pi)}$。因此，一致全局渐近稳定性保证存在$\beta \in \mathcal{KL}$ 使得

$$\|\phi(t,x,0)\|_{L^2(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \leq \|\phi(t,x,0)\|_X \leq \beta(\|x\|_X, t) \tag{7.54}$$

对所有 $x \in X = L^2(0,\pi) \times H_0^1(0,\pi)$ 以及所有 $t \in \mathbb{R}_+$ 都成立。

7.4 总结

互联系统的分析在系统理论中发挥着重要作用，因为它能够通过分析复杂系统中较为简单的组件的稳定性性质及其相互作用类型，来确立该复杂系统的稳定性。小增益理论是研究控制领域文献中无处不在的反馈互联的强大工具。最早的小增益结果出现在以输入-输出增益为特征的线性系统中。参见 [60], [128, 第 5]章，以了解这类经典结果的概述。在 [86, 150], 中，小增益定理被扩展到输入-输出框架下的非线性反馈系统。

有限维系统有限网络的输入到状态稳定性小增益定理。 [105, 106]中介绍了两个常微分方程输入到状态稳定系统的一般反馈互联系统的非线性小增益定理。这些结果已在 [55, 56, 57]扩展到由 $n \geq 2$ 有限维输入到状态稳定系统组成的网络。小增益定理 [55, 定理 5.3]的证明基于Clarke广义梯度的概念

有限维映射不太适合用于分析含有无限维组件的网络。针对有限维系统耦合的小增益定理，$n \in \mathbb{N}$ 给出了一种基于 Dini 导数概念的替代证明，见 [160], 。在定理 7.2.6 中，我们将这一证明转移到了无限维情形。定理 7.2.6的一个特殊情形见 [51], ，该结果是关于无限维子系统网络的最早小增益结果之一（关于其他性质迥异的结果，见 [114]）。

关于常微分方程系统耦合的积分输入到状态稳定性小增益定理的总结，以及在这一过程中遇到的挑战（例如，我们在定理7.2.6中使用的最大型李雅普诺夫函数并不充分），已在 [93]中作了出色的阐述。在[92, 94, 95, 5, 115], 中，针对子系统未必具有输入到状态稳定性的互联系统，已经提出了小增益定理。

关于有限维系统构成的有限与无限网络已有的小增益结果综述，请参阅 [160] 中的相关章节。另请参阅 [58]，其中综述了截至2011年发表的小增益结果。小增益定理的应用已在 [147]中得到研究。

级联互联系统。考虑两个形式为（7.29）的演化方程构成的互联系统，其中右端 f_2 不依赖于 x_1。换言之，第二子系统不依赖于第一系统的动力学，但会影响第一系统的动力学。这类互联系统称为级联互联系统。

两个输入到状态稳定常微分方程系统的级联互联系统本身具有输入到状态稳定性这一事实已在 [205]中得到证明。它可以作为轨迹表述中的小增益定理（针对有限网络作了特化）的推论得出，这些定理适用于由任意有限个具有相当一般性质的系统构成的级联互联系统。与此相反，两个 iISS 系统的级联互联系统只有在满足一些附加条件时才具有 iISS 性质，参见 [9, 34]。如果不满足这些条件，两个 iISS 系统的级联互联系统不一定具有 iISS 性质，如 [9, 例 1]所示。这一重要性质的失效是引入强积分输入到状态稳定性的动机之一，见 [35]。[36], 中证明了，强积分输入到状态稳定常微分方程系统的级联互联系统仍然是强积分输入到状态稳定的。关于 iISS 理论的统一论述，尤其是有限维 iISS 系统的级联互联系统，请参见 [160, 第 4] 章。

无限维系统的有限网络。在无限维输入到状态稳定理论中，[106, 105, 57, 55] 提出了将 [20, 51, 158, 221]中的结果推广到有限个无限维系统的耦合的做法。关于有限耦合的小增益结果及更多参考文献，请参阅 [158]。对于有限网络的基于轨迹的ISS小增益定理，从有限维推广到无限维时的主要困难在于，[210] 中为常微分方程系统建立的输入到状态稳定刻画不再适用于无限维系统。正如 [158], 所论述的，必须采用 [170] 中给出的更一般的刻画，这需要对小增益结果的证明作出重大修改。在 [164], 中，[158]的研究成果已推广到无限维系统的无限互连情形。在第6章中，我们紧密遵循 [164]。第7.3节中介绍的积分ISS小增益定理和示例见 [161]。

有限网络的小增益定理已应用于 [119]中耦合抛物-双曲偏微分方程（PDE）的稳定性分析。[121]中提出了基于小增益的边界反馈设计，用于实现一维半线性抛物型偏微分方程的全局指数稳定化。

无限网络的基于李雅普诺夫的小增益定理。近年来，研究者投入了大量精力，将本章讨论的基于李雅普诺夫的小增益定理推广到无限多个子系统的互联系统 [53, 54, 125, 126, 165, 182]。下面简要讨论这些研究成果。

在 [54], 中证明，若刻画各子系统之间相互影响的增益函数均小于恒等映射，则由可数无穷多个连续时间输入到状态稳定系统组成的网络是输入到状态稳定的；但这是一个非常保守的条件。在 [53], 中证明，针对有限网络在 [55] 中提出的经典最大形式强小增益条件，无法确保无限网络的稳定性，即便在线性情形下也是如此。为解决这一问题， [53]中提出了限制更严格的鲁棒强小增益条件。不过，已有研究表明，对于常微分方程系统组成的无限网络，只有在增益算子存在一条线性严格衰减路径这一相当强的限制下，输入到状态稳定小增益结论才成立，因此该结果并非完全非线性。

相比之下，对于由具有指数 ISS 李雅普诺夫函数和线性增益的指数输入到状态稳定系统组成的网络， [125] 中证明，若增益算子 $r(\Gamma)$ 的谱半径小于一，则整个网络是指数输入到状态稳定的，并且整个网络存在一个强制性指数输入到状态稳定李雅普诺夫函数。该结果是紧的，并将 [48, 命题 3。3] 从有限网络完整推广到了无限网络。在 [70], 中，已有大量针对一般正有界线性算子的条件 $r(\Gamma) < 1$ 的判据（此类结果之一见定理C.9.4），使得能够在实践中高效检验该条件。

文献 [125]中的小增益定理已在 [182] 中扩展到相对于闭集的输入到状态稳定性，并应用于无限时变网络的稳定性分析以及无限网络分布式观测器的设计。

文献 [126] 建立了首个针对具有非线性增益和保上确界增益算子的网络的完全非线性、基于李雅普诺夫函数的 ISS 小增益定理。该定理指出，若算子 $\Gamma_{\otimes}$ 存在一条（可能是非线性的）严格衰减路径（并满足某些一致性条件），则整个网络具有输入到状态稳定性，而且可以构造出相应的网络 *ISS* 李雅普诺夫函数。这一结果将文献 [55] 中以最大值公式形式证明的有限网络非线性、基于李雅普诺夫函数的小增益定理部分扩展到了无限维情形；它将文献 [53], 中针对无限网络的基于李雅普诺夫的小增益定理作为特例，并部分恢复了文献 [54] 中的主要结果。详细讨论见文献 [126] 。

此外，通过改进 [53], 中提出的构造严格衰减路径的技术， [126] 证明了，增益算子的鲁棒小增益条件与由该增益算子诱导的离散时间动力系统的全局吸引性，共同确保了增益算子存在严格衰减路径，进而确保互联系统存在 ISS 李雅普诺夫函数。

在 [165], 中，针对具有线性增益以及齐次、次可加增益算子（包括线性算子和最大线性算子）的系统，已证明一个输入到状态稳定性小增益定理，该定理严格建立在 [126]中的非线性小增益定理之上。对于齐次增益算子，可以通过类似于著名的线性算子谱半径盖尔范德公式的定义，引入谱半径的概念。在这种情况下，增益算子存在严格衰减路径，等价于存在严格衰减点，而这又等价于谱小增益条件。这些发现将 [70] 中得到的谱小增益条件小增益判据，扩展到了齐次、次可加单调算子的情形。

结论

在这项工作中，我们讨论了广泛的技术，用于分析分布参数系统的输入到状态稳定性；这些系统涉及非线性控制、算子理论与半群理论、李雅普诺夫理论、非线性网络以及偏微分方程（PDE）。

我们研究了强制与非强制李雅普诺夫方法，它们是分析非线性控制系统稳定性不可或缺的工具。我们证明了小增益定理，这些定理是分析由非线性稳定分量构成的有限与无限网络稳定性的有力工具。最后但同样重要的是，我们讨论了可容许性方法；这些方法最终有助于分析一般的线性边界控制系统。

尽管无限维输入到状态稳定性理论取得了巨大进展，但对具有边界输入的偏微分方程，或更一般地，对边界控制系统进行输入到状态稳定性分析、鲁棒控制和观测，仍然极具挑战性。即使对于线性边界控制系统，也不存在通用的逆向 ISS 李雅普诺夫定理。这使人们严重质疑李雅普诺夫方法在边界控制系统输入到状态稳定性分析中的适用性。此外，对于某些输入到状态稳定的边界控制系统，已知存在强制 ISS 李雅普诺夫函数，而且这类函数相当常见。然而，对于其他系统，包括具有狄利克雷边界输入的热方程，尚未构造出强制 ISS 李雅普诺夫函数。无限维输入到状态稳定性理论中最重要的开放问题之一，是精确理解造成这一现象的原因。解决这一问题后，分析非线性问题将会很有意义。非线性边界控制系统的适定性理论仍处于起步阶段，针对这类系统的输入到状态稳定性分析成果寥寥。尤其是，对于 Burgers方程 这样的系统，目前还没有全局输入到状态稳定性结果。

作者确信，未来几年将在线性和非线性分布参数系统的输入到状态稳定性理论方面取得更多突破，使输入到状态稳定性成为无限维系统控制的坚实基础。他希望这项工作能够为此有所助益。

附录 A

有限维ISS理论概要

关于常微分方程系统的输入到状态稳定性理论的现代综合论述，请参阅专著 [160]。另一本近期出版、着重讨论互联系统的输入到状态稳定性理论入门读物是 [147]。关于将输入到状态稳定性理论应用于非线性控制系统的自适应稳定控制设计，可参见 [132]。这里我们陈述一些重要结果，并将其与本文中的结果联系起来。

经典的常微分方程输入到状态稳定性理论研究如下形式的系统

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{A.1}$$

假设 A.0.1。 在本附录中，我们始终假设 f 满足假设 *2.2.6*，这意味着 f 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$上连续，并且关于第一自变量在有界球上利普希茨连续。

设输入 u 属于空间 $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$，该空间由本质有界的勒贝格可测函数构成。

常微分方程解映射的标准性质表明，(A.1) 满足具有以下条件的控制系统的所有性质： $X := \mathbb{R}^n$， $U := \mathbb{R}^m$ 以及 $\mathcal{U} := L^\infty(\mathbb{R}_+, U)$，并且$\phi(\cdot, x, u)$ 由 (A.1) 在初始条件 $x \in \mathbb{R}^n$ 和输入 $u \in \mathcal{U}$下的极大解给出。

有限维空间的拓扑蕴含以下重要性质，该性质归功于 [143,命题 51]:

定理 A.0.2。 假设 *A.0.1* 成立。若 (A.1) 是正向完备的，则具有有界可达集。 (A.1)

以下结果有助于获得常微分方程系统的紧致叠加定理，归功于 [170, 命题 13]，而该命题又基于 [210, 推论 III。3]。

命题 A.0.3。 假设 *A.0.1* 成立，且 (A.1)正向完备。则(A.1)是 *LIM* 当且仅当它是 *ULIM*。

定义 A.0.4。 在有界球上利普希茨连续的函数 $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ 称为 输入到状态稳定性李雅普诺夫函数，对于（A.1），若存在 $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$， $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 以及 $\chi \in \mathcal{K}$使得

$$\psi_1(|x|) \le V(x) \le \psi_2(|x|), \quad x \in X \tag{A.2}$$

成立，并且对于 V可微的点 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及任意输入值 $v \in \mathbb{R}^m$，以下蕴含关系成立：

$$V(x) \geq \chi(|v|) \quad \Rightarrow \quad \nabla V(x) \cdot f(x,v) \leq -\alpha(V(x)). \tag{A.3}$$

◁

定义 A.0.5. 若存在 $r > 0$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\xi \in \mathcal{K}$，使得 $B_r \subset D$，则称利普希茨连续函数 $V\colon D \to \mathbb{R}_+$, $0 \in \text{int}\,(D) \subset \mathbb{R}^n$ 为*LISS*李雅普诺夫函数。

$$\psi_1(|x|) \leq V(x) \leq \psi_2(|x|), \quad x \in B_r \tag{A.4}$$

and

$$|x| \leq r,\ \|u\|_\infty \leq r \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_u(x) \leq -\alpha(V(x)) + \xi(\|u\|_\infty). \tag{A.5}$$

◁

接下来，我们刻画局部输入到状态稳定性。

定理 A.0.6 （LISS 的刻画）。 设假设 *A.0.1* 成立，且 $f(0,0) = 0$。

对于系统 (A.1)，以下性质等价：

(i) 0-UAS

(ii) 存在利普希茨连续的零输入一致渐近稳定李雅普诺夫函数

(iii) 利普希茨连续的*LISS*李雅普诺夫函数的存在性

(iv) LISS

证明。 该结果的证明见 [160]。若 $\mathcal{U} = PC_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$，则可由定理 4.3.5推出该结果。事实上，在有限维情形下，4.13成立，其中

$$\sigma(r) := \sup_{v \in \mathcal{U}:\|v\|_U \leq r} \sup_{x \in X:\|x\|_X \leq \rho} \|f(x,v) - f(x,0)\|_X + r,$$

这是由于实数集 $\mathbb{R}^m$ 中闭球的紧致性。

此外，假设A.0.1 还意味着假设 2.2.6 也成立。因此，定理 4.3.5 的所有假设均已满足，故可得出所述结论。 □

常微分方程系统的 ISS 叠加定理 3.2.3 的对应结果如下，见 [210], 另见 [160]。

定理 A.0.7 (ISS 叠加定理)。 设 (A.1) 正向完备， $f(0,\ 0) = 0$，且假设 *A.0.1* 成立。以下陈述等价：

(i) (A.1) *is ISS.*

(ii) (A.1) *is UAG.*

(iii) (A.1)具有渐近增益和一致局部稳定性。

(iv) (A.1) *is LIM and ULS.*

(v) (A.1) *is LIM and UGS.*

(vi) (A.1) *is AG and UGS.*

(vii) (A.1)具有 *LIM* 和 *0-ULS*。

(viii) (A.1) *is LIM and 0-UGAS.*

(ix) (A.1) *is AG and 0-UGAS.*

证明。 根据定理 A.0.2，正向完备性蕴含有界可达集性质。根据引理 2.2.27，(A.1) 具有 CEP 性质。命题 A.0.3 保证 LIM 等价于 ULIM。现在，(i)-(vi) 的等价性是定理 3.2.3的推论。

在 $\mathcal{U} = PC_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ 的情况下，剩余的蕴含关系可通过进一步应用定理 4.7.1得到。□

输入到状态稳定性的积分刻画如下：

推论 A.0.8。 设 f 在 (A.1)关于两个变量均利普希茨连续。假设 (A.1) 正向完备。那么以下命题彼 此等价 *t:*

(i) (A.1)具有输入到状态稳定性

(ii) (A.1)具有积分到积分输入到状态稳定性

(iii) (A.1)具有范数到积分输入到状态稳定性

证明。 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)。已在 [206, 定理 1]中证明。该等价关系的证明用到了两个变量上的利普希茨连续性； [206, 定理 1] 基于 [209], 中的光滑 ISS 逆李雅普诺夫定理，该定理至少要求两个变量上的利普希茨连续性（实际上，假设 f 关于 (x, u) 连续可微）。

(i) $\Leftrightarrow$ (iii)。众所周知，在对 f 作出上述假设后，前向完备的系统（A.1）满足 BRS 性质（由定理 A.0.2）和 CEP 性质（由命题 2.2.27）。结论由定理 3.3.6得出。□

附录 B

比较函数与比较原理

在本附录中，我们介绍对发展稳定性理论非常有用的比较函数类，并推导这些函数的若干重要性质。接下来，我们定义 Dini 导数，并基于比较函数的形式化方法介绍若干比较原理。

我们省略了大多数结果的证明，这些证明可见于 [160], ，其中还包含一些其他结果和大量习题。

B.1 比较函数

回顾一下， $C(\mathbb{R}_+)$ 表示从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的连续映射所构成的向量空间。本节中，我们研究以下几类比较函数的性质：

$$\mathcal{P} := \{\gamma \in C(\mathbb{R}_+) : \ \gamma(0) = 0 \text{ 且 } \gamma(r) > 0 \text{ 对于 } r > 0\}, \mathcal{K} := \{\gamma \in \mathcal{P} : \ \gamma \text{ 严格递增}\}, \mathcal{K}_\infty := \{\gamma \in \mathcal{K} : \ \gamma \text{ 无界}\}, \mathcal{L} := \{\gamma \in C(\mathbb{R}_+) : \ \gamma \text{ 严格递减，且 } \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0\}, \mathcal{KL} := \{\beta \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) : \ \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K} \ \forall t \geq 0, \ \beta(r, \cdot) \in \mathcal{L} \ \forall r > 0\}.$$

$\mathcal{P}$ 类函数也称为正定函数。 $\mathcal{K}$ 类函数也常称为 $\mathcal{K}$ 类函数，或简称为 $\mathcal{K}$-函数。对于其他类别的比较函数，我们也采用同样的约定。

各种稳定性性质都可以用比较函数来重新表述，而稳定性理论中的许多结果的证明，也可以通过对比较函数进行标准运算而显著简化。

B.1.1 比较函数的基本性质

我们先列出 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$ 函数的一些简单性质。这里我们用 $\circ$ 表示这些映射的复合，即 $f \circ g(\cdot) := f(g(\cdot))$。

命题 B.1.1 （ $\mathcal{K}$ 类和 $\mathcal{L}$ 类函数的基本性质）。 以下性质成立：

(*i*) 对于所有 f、$g \in \mathcal{K}$，都有 $f \circ g \in \mathcal{K}$。

(ii) 对任意 $f \in \mathcal{K}_\infty$，存在 f^{-1}，且它也属于 $\mathcal{K}_\infty$。

(iii) 对任意 $f \in \mathcal{K}$、$g \in \mathcal{L}$，都有 $f \circ g \in \mathcal{L}$ 和 $g \circ f \in \mathcal{L}$。

(iv) $(\mathcal{K}_\infty$、$\circ)$ 是一个群。

(v) 对任意 γ_1、$\gamma_2 \in \mathcal{K}$，可知 γ_+：$s \mapsto \max\{\gamma_1(s)\ \gamma_2(s)\}$ 和 γ_-：$s \mapsto \min\{\gamma_1(s)\ \gamma_2(s)\}$ 也属于类 $\mathcal{K}$。

(vi) 对任意 β_1、$\beta_2 \in \mathcal{KL}$，可知 $\beta_+ : (s、t) \mapsto \max\{\beta_1(s、t)\ \beta_2(s、t)\}$ 和 $\beta_- :(s、t) \mapsto \min\{\beta_1(s、t)\ \beta_2(s、t)\}$ 也属于类 $\mathcal{KL}$。

注 B.1.2。如果 $f \in \mathcal{K}$，那么 f^{-1} 在 $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$ 上有定义。我们稍微滥用一下记号，令 $f(r) := +\infty$，其中 $r \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathrm{Im}(f)$。◁

关于 $\mathcal{K}$ 类函数，一个基础但有用的结果是

命题 B.1.3（弱三角不等式）。对于任意 $\gamma \in \mathcal{K}$ 和任意 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$，都有：

$$\gamma(a+b) \leq \max\left\{\gamma(a+\sigma(a)), \gamma(b+\sigma^{-1}(b))\right\}. \tag{B.1}$$

特别地，在（$\sigma := \mathrm{id}$（$\mathbb{R}_+$上的恒等算子）代入（B.1）后，对于任意$\gamma \in \mathcal{K}$，可得到一个简单的不等式

$$\gamma(a+b) \leq \max\left\{\gamma(2a), \gamma(2b)\right\}.$$

另一个有用的不等式是

命题 B.1.4（$\mathcal{K}_\infty$-不等式）。对于所有 a、$b \geq 0$，以及所有 $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $r > 0$，都有

$$ab \leq ra\alpha(a) + b\alpha^{-1}(\tfrac{b}{r}). \tag{B.2}$$

我们还有

命题 B.1.5. 对于任意 $\alpha \in \mathcal{K}$ 和任意 a，$b \geq 0$ 成立：

$$\alpha(a+b) \geq \frac{1}{2}\alpha(a) + \frac{1}{2}\alpha(b). \tag{B.3}$$

引理 B.1.6. 对于任意满足 $\mathrm{id} - \eta \in \mathcal{K}_\infty$ 的 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$，有：

(i) 存在 $\rho \in \mathcal{K}_\infty$，使得 $(\mathrm{id} - \eta)^{-1} = \mathrm{id} + \rho$。

(ii) 存在 η_1、$\eta_2 \in \mathcal{K}_\infty$，使得 $\mathrm{id} - \eta_1$、$\mathrm{id} - \eta_2 \in \mathcal{K}_\infty$，且 $\mathrm{id} - \eta = (\mathrm{id} - \eta_1) \circ (\mathrm{id} - \eta_2)$。

类似地，以下结论成立

引理 B.1.7. 对于任意 $\eta \in \mathcal{K}_\infty$，都有

(*i*) 存在 $\rho \in \mathcal{K}_\infty$ 使得 $(\mathrm{id} + \eta)^{-1} = \mathrm{id} - \rho$。(*ii*) 存在 η_1、$\eta_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 使得 $\mathrm{id} + \eta = (\mathrm{id} + \eta_1) \circ (\mathrm{id} + \eta_2)$。

B.1.2 Sontag 的 $\mathcal{KL}$-引理

关于比较函数，最有用的结果之一是所谓的 Sontag$\mathcal{KL}$-引理。特别是，它对于逆李雅普诺夫定理的证明非常有帮助。

命题 B.1.8 （Sontag 的 $\mathcal{KL}$-引理）。 对于每个 $\beta \in \mathcal{KL}$ 以及任意 $\lambda > 0$，存在α_1、$\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$:

$$\alpha_1(\beta(s,t)) \leq \alpha_2(s)e^{-\lambda t}, \quad t, s \in \mathbb{R}_+. \tag{B.4}$$

我们还需要命题 B.1.8 的一个变体:

推论 B.1.9。 对于每个 $\beta \in \mathcal{KL}$ 以及任意 $\lambda > 0$，存在 $\tilde{\alpha}_1$、$\tilde{\alpha}_2 \in \mathcal{K}_\infty$:

$$\beta(s,t) \leq \tilde{\alpha}_1(\tilde{\alpha}_2(s)e^{-\lambda t}) \quad \forall s, t \geq 0. \tag{B.5}$$

B.1.3 正定函数

在本节中，我们将利用比较函数刻画正定性。

定义 B.1.10. 设 X, Y 为度量空间。

(i) 若映射 $f\colon X \to Y$ 满足任意紧子集在 Y 中的原像都是 X中的紧集，则称其为适当映射。

(ii) 如果对于任意紧集 $S \subset X$，序列 $(x_i)_{i\geq 1}$ 中只有有限个点包含在 S中，我们就称序列 $(x_i)_{i\geq 1}$ 趋于无穷远 。

◁

适当性可由以下方式刻画:

命题 B.1.11. 连续映射 $f\colon X \to Y$ 是适当的，当且仅当对于每个趋于无穷远的点序列$(x_i)_{i\geq 1} \subset X$，序列$(f(x_i))_{i\geq 1}$ 也趋于无穷远。

作为命题 B.1.11的推论，我们得到 $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$的适当性判据。

推论 B.1.12. 设给定 $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ 。以下断言等价 *nt:*

(i) V 是适当的。

(ii) V 是径向无界的，即 $V(x) \to \infty$ 当 $|x| \to \infty$时。

(iii) 存在 $\psi \in \mathcal{K}_\infty$: 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$，均有 $V(x) \geq \psi(|x|)$ 。

我们将正定函数的定义扩展到定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数。

定义 B.1.13. 若映射 $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ 满足 $V(0) = 0$ 且$V(x) > 0$ 对任意 $x \neq 0$均成立，则称其为正定。◁

正定性可以用比较函数来刻画。

命题 B.1.14. 映射 $\rho \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ 是正定的，当且仅当 $\rho(0) = 0$，并且存在 $\omega \in \mathcal{K}_\infty$ 和 $\sigma \in \mathcal{L}$ 使得

$$\rho(x) \geq \omega(|x|)\sigma(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{B.6}$$

我们以正定性和适当性的判据结束本节 ess

命题 B.1.15。 $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ 是正定且适当的 $\Leftrightarrow$ 存在 $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\psi_1(|x|) \leq V(x) \leq \psi_2(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{B.7}$$

B.1.4 近似、上界和下界

最终，我们需要一些条件来确保能够通过一个 $\mathcal{K}$ 函数从上方/下方估计给定函数 $z:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$。此外，通常还需要对 $\mathcal{K}$ 函数进行光滑近似。本节将介绍这类理想条件。

下面的结论将会频繁用到：

命题 B.1.16。设 $z:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是非递减且在零点连续的函数，满足 $z(0)=0$ 和 $z(r)>0$，其中 $r>0$。则：

(i) 存在 $z_1,z_2\in\mathcal{K}\bigcap C^\infty\big((0,+\infty)\big)$，使得

$$z_1(r)\le z(r)\le z_2(r)\quad r\ge 0. \tag{B.8}$$

(ii) 若进一步有 $\lim_{r\to\infty}z(r)=\infty$，则 z_1,z_2 可以选自类 $\mathcal{K}_\infty$。

(iii) 若 $z\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$，则对每个 $\varepsilon>0$，函数 z_1,z_2 都可以选取为满足$\sup_{s\in\mathbb{R}_+}|z_2(s)-z(s)|<\varepsilon$ 且 $\sup_{s\in\mathbb{R}_+}|z_1(s)-z(s)|<\varepsilon$。

接下来，我们给出命题 B.1.16 中关于用函数ψ 进行估计的一个部分的对应结果：$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 由一个 $\mathcal{KL}$-函数给出。

命题 B.1.17。设 $\psi:\ \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是任意一个函数，它关于第一自变量非递减且在 *0* 处连续，关于第二自变量非递增，并且满足$\lim_{t\to\infty}\psi(r,t)=0$，对任意 $r\ge 0$均成立。另设 $\psi(0,t)=0$，对任意 $t\ge 0$均成立。那么存在$\beta\in\mathcal{KL}$：

$$\psi(r,t)\le\beta(r,t)\quad\forall r,t\ge\mathbb{R}_+.$$

以下结果将用于逆李雅普诺夫定理的证明

引理 B.1.18。以下结论成立：

(i) 对任意 $\alpha\in\mathcal{P}$，以及任意 $L>0$，存在 $\rho\in\mathcal{P}$，使得 $\rho(s)\le\alpha(s)$ 对所有 $s\in\mathbb{R}_+$均成立，并且 ρ 是全局利普希茨函数，其利普希茨常数为 L。

其中一个此类 $\rho:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 如下给出

$$\rho(r):=\inf_{y\ge 0}\big\{\alpha(y)+L|y-r|\big\}. \tag{B.9}$$

(*ii*) 若在 (*i*) $\alpha\in\mathcal{K}$中，则 ρ 由（B.9）给出的函数是一个 $\mathcal{K}$-函数。

(*iii*) 若在 (*i*) $\alpha\in\mathcal{K}_\infty$中，则 ρ 由（B.9）给出的函数是一个 $\mathcal{K}_\infty$-函数。

作为引理B.1.18的一个推论，我们得到

引理 B.1.19。对于任意 $\alpha\in\mathcal{K}_\infty$，存在 $\eta\in\mathcal{K}_\infty$ 使得 $\eta(r)\le\alpha(r)$ 对所有 $r\ge 0$均成立，且$\mathrm{id}-\eta\in\mathcal{K}_\infty$。

我们继续介绍一个关于二元函数的有用结果，这些函数关于两个自变量都是 $\mathcal{K}$-函数。

引理 B.1.20。 设 $\gamma \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ 满足 $\gamma(r,\cdot) \in \mathcal{K}$ 对每个 $r > 0$ 以及$\gamma(\cdot, s) \in \mathcal{K}$ 对每个 $s > 0$均成立。则存在 $\sigma \in \mathcal{K}_\infty$，使得

$$\gamma(r,s) \le \sigma(r)\sigma(s), \quad r,s \ge 0. \tag{B.10}$$

We 以一条关于 $\mathcal{K}_\infty$-函数族上界的结果结束本节 .

引理 B.1.21. 设 $(\gamma_M)_{M\in\mathbb{N}}$ 是一个 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数族。那么，存在$\sigma \in \mathcal{K}_\infty$ 使得

$$\gamma_M(r) \le \sigma(M)\sigma(r), \quad M \in \mathbb{N},\ r \ge 0. \tag{B.11}$$

B.2 边缘函数

我们经常会处理在某些区域上取连续函数的上确界或下确界所定义的函数。这类函数有时称为边缘函数。本节陈述关于这类函数的基本结果。我们从以下命题开始:

命题 B.2.1. 设 (S_X, ρ_X) 和 (S_Y, ρ_Y) 是度量分别为 ρ_X 和ρ_Y的度量空间，且 $X \subset S_X$ 是一个紧集， $Y \subset S_Y$ 是局部紧的（即， Y 中的每个点都有一个紧邻域）。设 $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ 在 $X \times Y$上连续。那么，函数 $g\colon y \mapsto \max_{x\in X} f(x,y)$ 在 Y上连续。

我们有如下推论:

推论 B.2.2. 设 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $n,p \in \mathbb{N}$ 是连续函数。那么，由下式定义的 $v, w\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$v(r) := \sup_{|x|=r} |g(x)|, \quad w(r) := \inf_{|x|=r} |g(x)|,$$

是连续函数。

引理 B.2.3. 设 $g:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$ 是连续函数。那么，对于 $r \ge 0$ ，由 $\psi_1(r) := \inf_{x\ge r} |g(x)|$ 和 $\psi_2(r) := \sup_{x\le r} |g(x)|$ 定义的函数是连续且非递减的函数。

现在我们可以陈述命题 B.2.1 和引理 B.2.3的一个推论:

推论 *B.2.4.* 设 $g:\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 是连续函数。那么，由 $\psi_1(r,t) := \inf_{x\ge r} |g(x,t)|$ 和 $\psi_2(r,t) := \sup_{x\le r} |g(x,t)|$ 定义的 $\psi_1, \psi_2 :\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是连续函数，且关于第一自变量非递减。此外，若对所有 $x,t \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ，$g(x,t) \ge 0$ ，并且对每个 $r > 0$, $g(r,\cdot) \in \mathcal{L}$ ，则对所有 $r > 0$，也有 $\psi_2(r,\cdot) \in \mathcal{L}$。

引理 B.2.5。 设 $g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $n,p \in \mathbb{N}$ 是一个连续函数，且 $g(0) = 0$。则由 $\psi_1(r) :=$ 下确界$_{|x|\ge r} |g(x)|$ 和 $\psi_2(r) :=$ 上确界$_{|x|\le r} |g(x)|$ 定义的 $\psi_1, \psi_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是良定义的、连续的、非递减的，并且 $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$。

引理 B.2.6. 设 $\xi \in \mathcal{P}$ 且$\lim_{r\to\infty} \xi(r) > 0$。那么存在 $\psi \in \mathcal{K}$: $\psi(r) \le \xi(r)$，使得 $r \in \mathbb{R}_+$ 且$\lim_{r\to\infty} \psi(r) = \lim_{r\to\infty} \xi(r)$。特别地，若$\lim_{r\to\infty} \xi(r) = \infty$，则$\psi \in \mathcal{K}_\infty$。

B.3 Dini 导数

众所周知，绝对连续函数几乎处处可微。然而，有时我们必须对仅连续的函数进行“求导”。为此，我们利用 Dini 导数。对于连续函数 $y:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，分别定义右上 Dini 导数和右下 Dini 导数如下：

$$D^+y(t):=\varlimsup_{h\to+0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h},\quad D_+y(t):=\varliminf_{h\to+0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}.$$

我们先介绍 Dini 导数的一些简单性质

引理 B.3.1。 *Dini* 导数具有以下性质：

(i) 对所有 $f,g\in C(\mathbb{R})$，均有 $D^+(f+g)\le D^+(f)+D^+(g)$。

(ii) 对任意 $f\in C(\mathbb{R})$，均有 $D^+(-f)=-D_+(f)$。

接下来我们给出链式法则的以下推广：

引理 B.3.2. 设 g 是在有界区间 $[a,b]$ 上的连续函数，并设 t 满足 $f:\ g([a,b])\to\mathbb{R}$ 在 $g(t)$ 处连续可微，且 $\frac{df}{dr}(r)\Big|_{r=g(t)}>0$。则

$$D^+(f\circ g)(t)=\frac{df}{dr}(r)\Big|_{r=g(t)}D^+g(t).$$

证明。 考虑一个函数 $h:\ t\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，它在 $t=c$ 处连续并满足$h(c)>0$。设 $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是任意连续函数。则下列结论成立（允许极限相等于 $\pm\infty$）

$$\varlimsup_{t\to c}\big(h(t)k(t)\big)=\lim_{t\to c}h(t)\cdot\varlimsup_{t\to c}k(t).$$

那么，对于引理陈述中的 f、g 和 t，下列结论成立

$$\begin{aligned}
D^+(f\circ g)(t) &= \varlimsup_{h\to+0}\frac{f\circ g(t+h)-f\circ g(t)}{h}\\
&= \varlimsup_{h\to+0}\frac{f(g(t+h)-g(t)+g(t))-f\circ g(t)}{g(t+h)-g(t)}\cdot\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\\
&= \lim_{h\to+0}\frac{f(g(t+h)-g(t)+g(t))-f\circ g(t)}{g(t+h)-g(t)}\varlimsup_{h\to+0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\\
&= \frac{df}{dr}(r)\Big|_{r=g(t)}D^+g(t).
\end{aligned}$$

□

我们还给出微积分基本定理的以下版本（这是 [196, 定理 7.3（第 204–205], [76, 定理 9], 另见 [214, 定理 2。1]）的一个特例。

命题 B.3.3。 设 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，且 $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 局部勒贝格可积，并且在 $[a,b]$ 上有界。假设

$$D_+f(t)\le g(t),\quad t\in[a,b]. \tag{B.12}$$

那么对于所有的 $t\in[a,b]$，我们有

$$f(t)-f(a)\le\int_a^t g(s)ds. \tag{B.13}$$

我们以一个关于单调函数的导数的引理结束本节。

引理 B.3.4. 设 $b:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 是一个非递增函数。那么对每个 $t\in\mathbb{R}_+$，都有

$$b(t)\ge D^+\int_0^t b(s)ds\ge D_+\int_0^t b(s)ds\ge\lim_{h\to+0}b(t+h). \tag{B.14}$$

证明。 任取 $t\ge0$。根据 Dini 导数的定义，有

$$\begin{aligned}
D^+\int_0^t b(s)ds &= \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\Big(\int_0^{t+h}b(s)ds-\int_0^t b(s)ds\Big)\\
&= \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}b(s)ds\\
&\le \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}b(t)ds=b(t).
\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$D_+\int_0^t b(s)ds\ \ge\ \underline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}b(t+h)ds=\underline{\lim_{h\to+0}}\,b(t+h).$$

不等式 $D^+\int_0^t b(s)ds\ge D_+\int_0^t b(s)ds$ 显然成立。 □

B.4 比较原理

我们希望陈述一个比较原理，为某些微分不等式的解给出一致估计。这一结果可以理解为格朗沃尔不等式的非线性版本（引理D.2.5）。

命题 B.4.1（比较原理）**：** 对于任意 $\alpha\in\mathcal{P}$，存在一个 $\beta\in\mathcal{KL}$，使得对于满足微分不等式的任意 $y\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$

$$D^+y(t)\le-\alpha(y(t))\quad\forall t>0, \tag{B.15}$$

均有

$$y(t)\le\beta(y(0),t)\quad\forall t\ge0. \tag{B.16}$$

我们还给出带输入系统的比较原理：

命题 B.4.2。 对于任意 $\rho \in \mathcal{P}$，存在 $\beta \in \mathcal{KL}$，使得对于任意 $\tilde{t} \in (0, +\infty]$，任意$y \in C([0, \tilde{t}) \ \mathbb{R})$，若 $y(0) \geq 0$且任意 $v \in C([0, \tilde{t}) \ \mathbb{R}_+)$满足

$$D^+ y(t) \leq -\rho(\max\{y(t) + v(t), 0\}) \tag{B.17}$$

对所有 $t \in [0, \tilde{t})$均成立，则记 v_t 为 v 在 $[0, t]$上的限制，我们有 e

$$y(t) \leq \max\{\beta(y(0), t), \|v_t\|_\infty\}, \quad t \in [0, \tilde{t}). \tag{B.18}$$

本节的最后一个结果是

命题 B.4.3。 对于任意 $\rho \in \mathcal{P}$，存在 $\beta \in \mathcal{KL}$，使得对于任意 $\tilde{t} \in (0, +\infty]$，任意$y \in C([0, \tilde{t}) \ \mathbb{R}_+)$ 以及任意 $v \in PC_b([0, \tilde{t}) \ \mathbb{R}_+)$，若

$$D^+ y(t) \leq -\rho(y(t)) + v(t) \tag{B.19}$$

对所有 $t \in [0, \tilde{t})$均成立，则

$$y(t) \leq \beta(y(0), t) + \int_0^t 2v(s)ds, \quad t \in [0, \tilde{t}). \tag{B.20}$$

证明。 我们假设 (B.19) 对所有 $t \in [0, \tilde{t})$ 成立。

根据引理 B.1.18，存在一个全局利普希茨连续的 $\rho_1 \in \mathcal{P}$，使得 $\rho \geq \rho_1$逐点成立。考虑以下初值问题:

$$\dot{w}(t) = -\rho_1(w(t)) + v(t), \quad w(0) = y(0). \tag{B.21}$$

由于 ρ_1 是全局利普希茨的，且 v 是分段连续的，因此存在唯一的分段连续可微解 w（B.21）。取某个 $\hat{t} \in (0, \tilde{t})$，使得 w 在（0, $\hat{t}$）上连续可微。

我们有

$$D^+ y(t) - \dot{w}(t) \leq -\big(\rho_1(y(t)) - \rho_1(w(t))\big), \quad \text{for all } t \in [0, \hat{t}). \tag{B.22}$$

假设存在 $\tau \in [0, \hat{t})$，使得 $y(\tau) > w(\tau)$。在 $[0, \hat{t})$ 中取包含 τ 的极大区间 $(s, s + \varepsilon)$，使得对于所有 $t \in (s, s + \varepsilon)$，都有 $y(t) > w(t)$。根据区间 $(s, s + \varepsilon)$ 的极大性、y, w 的连续性，以及 $y(0) = w(0)$，我们有 $y(s) = w(s)$。

由于 ρ_1 是全局利普希茨的，存在某个 $L > 0$，使得对于所有 $t \in (s, s + \varepsilon)$，都有

$$D^+\big(y(t) - w(t)\big) \leq \big|\rho_1(y(t)) - \rho_1(w(t))\big| \leq L|y(t) - w(t)| = L(y(t) - w(t)).$$

定义 $z(t) := y(t) - w(t)$ 在 $(s, \ s + \varepsilon)$ 上。由命题 B.3.3 可得

$$z(t) - z(s) \leq L \int_s^t z(\tau)d\tau, \quad t \in [s, s + \varepsilon],$$

根据 Gr¨onwall 不等式，可得

$$z(t) \leq z(s)e^{L(t-s)}, \quad t \in [s, s + \varepsilon].$$

由于 $z(s) = 0$，我们得出了与 $z(t) > 0$ for $t \in (s, \ s + \varepsilon)$ 相矛盾的结论。

根据这一事实，并由于 y, w 的连续性，很容易得出，对于所有 $t \in [0, \tilde{t})$, $0 \leq y(t) \leq w(t)$。

定义以下映射： $t \in [0, \tilde{t})$

$$v_1(t) := \int_0^t v(s)ds, \qquad w_1(t) = w(t) - v_1(t).$$

T函数 w、 v_1 和 w_1 均可微，因此对于 $t \in [0, \tilde{t})$，有 t

$$\dot{w}_1(t) = \dot{w}(t) - \dot{v}_1(t) = \dot{w}(t) - v(t) = -\rho_1(w(t)).$$

因此，对于几乎所有 $t \in [0, \tilde{t})$，我们得到

$$\dot{w}_1(t) = -\rho_1(\max\{w_1(t) + v_1(t), 0\}).$$

命题 B.4.2 保证存在 $\beta \in \mathcal{KL}$ 仅取决于 ρ_1 的量，使得对所有$t \in [0, \tilde{t})$

$$w_1(t) \leq \max\{\beta(w_1(0), t), \|v_{1,t}\|_\infty\}.$$

由于 $w_1(0) = w(0) = y(0)$，我们推得对所有 $t \in [0, \tilde{t})$，有

$$\begin{aligned} y(t) \leq w(t) = w_1(t) + v_1(t) &\leq \beta(y(0), t) + \|v_{1,t}\|_\infty + v_1(t) \\ &= \beta(y(0), t) + 2\int_0^t v(s)ds. \end{aligned}$$

结果得证。 □

B.5 总结

本附录是 [160], 中关于比较函数和比较原理的附录的精简版本。在该文中，您可以找到大多数结果的证明、一些进一步的结果，以及若干拓展相关内容的习题。关于比较函数的更多性质，可参见综述 [127], ，它很好地补充了 [160]所述内容。将 $\varepsilon - \delta$ 定义改写为比较函数形式的一些通用方法，见 [190]。

比较函数。比较函数类由 Jose Massera 于 20 世纪 50 年代提出，Wolfgang Hahn 在其著作中广泛使用这些函数 [77]来刻画动力系统的稳定性概念。此类函数在输入到状态稳定性理论及其他领域中的实用价值，使其在系统理论界得到广泛应用。

引理 B.1.7 源自 [192, 引理 1.1.5、引理 1.1.3]。命题 B.1.8 源自 Sontag，参见 [206, 命题 7]。我们采用了源自 [219, 引理 3，第326]页的证明。命题 B.1.14 针对标量正定函数在 [8, 引理 IV.1] 中得到证明，并在 [127, 引理 18]中推广到一般正定函数。命题 B.1.16 推广了 [39, 引理 2.5] （通过无穷次可微的 $\mathcal{K}$函数进行下界／上界估计）和 [192, 引理 1.1.6] （在给定函数的 ε邻域内进行光滑函数逼近），并将这两个特点融为一体。引理 B.1.18 源自[113, 第130]页。引理 B.1.21 在 [7, 引理 3.9]中得到证明。引理 B.2.1 是众所周知的。读者可参阅 [13, 定理 1.4.16] ， 了解这类更一般的结果。

Dini 导数。Dini 在 [62]中引入了连续函数的导数。关于这一理论的更多内容，参见 [76], [39], [27, 第 6], [111, 章 3]。

比较原理。对于绝对连续的 y，命题B.4.1在 [143, 引理 44], 命题 B.4.2 在 [8, 引理 IV2], 和命题 B.4.3 在 [8, 推论 IV3]中得到证明。我们通过使用 Dini 导数形式体系，将其推广到了连续的 y 情形。在时滞领域，与比较原理密切相关的一个重要结果是非线性 Halanay 不等式 [187]。

附录 C

有序巴拿赫空间与正算子

在本附录中，我们回顾有序巴拿赫空间的一些背景知识，这些知识对于我们发展无限网络的小增益定理至关重要。

C.1 有序巴拿赫空间

定义 C.1.1. 设 X 为任意集合。 X 上的偏序是一个二元关系“$\leq$”，满足：

(i) 自反：对所有 $x \in X$， $x \leq x$

(ii) 传递： $x \leq y$ 和 $y \leq z$ 蕴含 $x \leq z$，(iii) 反对称： $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 蕴含 $x = y$。

◁

定义 C.1.2. </style}设 是任意集合。在上的偏预序 是一种自反且具有传递性的二元关系“$\leq$”。◁

考虑实数集 $\mathbb{R}$上的向量空间 X。对于两个集合 A， $B \subset X$，我们定义 $A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$, $-A := \{-a : a \in A\}$，以及 $\mathbb{R}_+ \cdot A := \{r \cdot a : a \in A,\ r \underline{\in} \mathbb{R}_+\}$. 。给定一个拓扑，我们用 int A表示 A 的（拓扑）内部，用 A 表示它的闭包。

定义 C.1.3. 如果 $X^+ \subset X$ 在向量空间 X 中满足以下条件，我们称其为（正）锥：

(i) $X^+ \cap (-X^+) = \{0\}$,

(ii) $\mathbb{R}_+ X^+ \subset X^+$,

(iii) $X^+ + X^+ \subset X^+$.

若 X^+ 满足条件 (ii) 和 (iii)，则称X^+ 为楔子。

楔子（特别是锥） X^+ 在 X 上引入二元关系“$\leq$”，定义为$x \leq y \ \Leftrightarrow\ y - x \in X^+$。◁

命题 C.1.4. 如果 X^+ 是楔子，那么“$\leq$”是偏预序关系；如果 X^+ 是锥，则它是偏序。

证明。设 X^+ 是一个楔子。那么 $0 \in X^+$ 由定义 C.1.3 的公理 (ii) 可知。如 $0 = x - x \in X^+$ 对所有 $x \in X$ 都成立，那么 $x \leq x$ 对所有 $x \in X$ 都成立，且“$\leq$”是自反的。此外，若 $x \leq y$ 且 $y \leq z$，那么 $y - x \in X^+$ 且 $z - y \in X^+$，由公理 (iii) $(y - x) + (z - y) = z - x \in X^+$ 可知。因此，$x \leq z$。

设 X^+ 是一个锥。设 x，$y \in X$ 满足 $x \leq y$ 且 $y \leq x$。那么 $y - x \in X^+$ 且 $y - x \in -X^+$，又因为 X^+ 是一个锥，所以 $x = y$ 成立。 □

定义 C.1.5。 具有线性序的实向量空间称为有序向量空间（*OVS*）。◁

定义 C.1.6。 设 X 是由锥 X^+ 定义序的巴拿赫空间。如果锥 X^+ 是闭的，则 (X, X^+) 称为有序巴拿赫空间（*OBS*）。◁

定义 C.1.7。 对于有序巴拿赫空间中的任意两个向量 x, z，集合 $[x, z] := \{y \in X : x \leq y \leq z\}$ 称为 x 与 z 之间的序区间；当且仅当 $x \leq z$ 时，该序区间非空。◁

C.2 锥的分类

定义 C.2.1。 设 (X, X^+) 是一个 OBS。锥 X^+ 称为

(i) 若 $X^+ + (-X^+) = X$，则称为全的（或空间的）。

(ii) 若 $X^+ + (-X^+) = X$（也就是说，X^+ 张成 X），则称为生成的（或再生的）。

◁

换言之，锥是生成的，当且仅当每个向量 $x \in X$ 都可以分解为 $x = y - z$，其中 y，$z \in X^+$ 是两个向量。总可以通过一种能控制 y 和 z 的范数的方式进行这种分解。事实上，若锥 X^+ 是生成的，则存在 $M > 0$，使得对每个 $x \in X$，都存在 y，$z \in X^+$：

$$x = y - z \qquad \text{and} \qquad \|y\|, \|z\| \leq M \|x\|; \tag{C.1}$$

例如，参见 [1,定理 2.37(1) 和 (3)]。

我们采用 [2, 第 627] 页中的以下术语。

定义 C.2.2。 设 (X, X^+) 是一个有序巴拿赫空间。称 X 中的范数为：

(i) 半单调，若存在 $C > 0$ 使得

$$\|x\| \leq C \|y\| \qquad \text{whenever } 0 \leq x \leq y. \tag{C.2}$$

(ii) 单调，若对任意 x，$y \in X$，由 $0 \leq x \leq y$ 可推出 $\|x\|_X \leq \|y\|_X$。

如果 X 中的范数是半单调的，则称锥 X^+ 为正规。 ◁

锥是正规的，当且仅当在 X [1,定理2.38(1) 和 (2)] 上存在一个等价单调范数。

定义 C.2.3. 如果 int $(X^+) \neq \emptyset$，则称锥 X^+ 具有非空内部。$\triangleleft$

值得回顾一下锥中内点的几个标准刻画，它们总结于 [71,命题 2.11]。

命题 C.2.4. 设(X, X^+) 是一个有序巴拿赫空间，且设 $z \in X^+$。以下断言等价：

(i) 向量 z 属于 X^+的拓扑内部。

(ii) 向量 z 是一个序单位，即，对每个 $y \in X$，都存在 $\varepsilon > 0$ 使得$z \geq \varepsilon y$。

(iii) 锥 X^+ 是生成的，并且对每个 $y \in X^+$，都存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $z \geq \varepsilon y$。*(iv)* 所谓的主理想 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-nz, nz]$ 等于 X。

(v) 存在 $\varepsilon > 0$，使得对于范数为 $\|y\| \leq \varepsilon$ 的每个 $y \in X$，都有 $z \geq y$。

特别是，如果有序巴拿赫空间中的锥具有非空内部，那么它自动就是生成的。我们指出，在命题 X^+ C.2.4 中，我们并未先验地假设锥 C.2.4具有非空内部。

例 C.2.5 (序列空间)。*(i)* 令 $X = \ell_p$，其中 $p \in [1, \infty]$，对于 $p \in [1, +\infty]$

$$\ell_p := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_{\ell_p} < \infty\},$$

并且 ℓ_p 空间中的范数对 $x \in \ell_p$ 定义为 $\|x\|_{\ell_p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ 对于 $p < \infty$，以及定义为 $\|x\|_{\ell_\infty} :=$ 上确界$_{n=1}^{\infty} |x_n|$。

我们赋予 ℓ_p 空间以锥

$$\ell_p^+ = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p : x_n \geq 0 \text{ for all } n \in \mathbb{N}\}.$$

那么 (ℓ_p, ℓ_p^+) 是一个有序巴拿赫空间，事实上甚至是一个巴拿赫格（其中格运算可逐项进行）；特别地，锥 ℓ_p^+ 是生成的且正规的。若 $p = \infty$，则该锥具有非空内部；而对于 $p \in [1, \infty)$，$\text{int}(\ell_p^+) = \emptyset$。

(ii) 令 $X = c$ (表示收敛实数序列的空间）或 $X = c_0$ (表示收敛到 0 的实数序列空间），赋予其上确界范数以及锥X^+，其定义方式与例 *C.2.5(i)* 中相同。则 (X, X^+) 是一个有序巴拿赫空间，甚至是一个巴拿赫格（格运算逐项进行）。因此，锥 X^+ 是生成的且正规的。当 $X = c$ 时，锥的内部非空；当 $X = c_0$时，内部为空。

其他一些有序巴拿赫空间的示例，例如，详见 [12,第 2 小节。3] 以及 [71,第 2 小节。3]。

C.3 巴拿赫格

有序巴拿赫空间中性质尤为良好的一类，是所谓的巴拿赫格 [198, 152]。若一个有序巴拿赫空间（X， X^+）满足任意两个元素 x， $y \in X$ 都有最小上界——即所谓的上确界——属于 X，则称其为 $x \vee y$。由此可以定义向量 $x \in X$ 的正部、负部和模，公式如下：

$$x^+ := x \vee 0, \qquad x^- := (-x) \vee 0, \qquad |x| := x \vee (-x).$$

格序巴拿赫空间中的锥总是生成的，因为对于每个 $x \in X$，我们都有 $x = x^+ - x^-$。

巴拿赫格是满足范数与格运算之间额外相容性假设的格序巴拿赫空间，即

$$|x| \le |y| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \le \|y\| \tag{C.3}$$

对于所有 x， $y \in X$。特别地，这意味着巴拿赫格中的锥总是正规的。

C.4 到锥的距离

回顾一下，对于巴拿赫空间 X 中的子集 S 和向量 x，我们用以下符号表示

$$\operatorname{dist}(x, S) := \inf\{\|x - y\| : y \in S\}$$

从 x 到 S的距离。如果 (X, X^+) 是有序巴拿赫空间，我们通常需要知道点到正锥 X^+ 的距离。由于锥具有特定性质，距离函数 $\operatorname{dist}(\cdot, X^+)$ 的表现相当良好；特别是，不难看出，对于所有 $x, y \in X$ 和所有 $\alpha \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{dist}(x + y, X^+) \le \operatorname{dist}(x, X^+) + \operatorname{dist}(y, X^+), \\ \text{and} \quad &\operatorname{dist}(\alpha x, X^+) = \alpha \operatorname{dist}(x, X^+). \end{aligned}$$

C.5 正算子

设 X 是一个带有偏序 $\le$的有序向量空间。若 $x \le y$ 且$x \ne y$，则称 $x < y$。

在向量空间上定义了序之后，自然会考虑这个集合上的映射，它们以某种意义保持序。

定义 C.5.1. 设 X, Y 是有序向量空间，其正锥分别为 X^+ 和 Y^+。称映射 $f : X \to Y$ 为：

(i) 单调，若 $x \le y$ 蕴含 $f(x) \le f(y)$，对所有 $x, y \in X$均成立。

(ii) 如果对于所有 x， $y \in X$， $x < y$意味着 $f(x) < f(y)$，则称其为严格单调。

(iii) 正当 $f(X^+) \subset Y^+$。

(iv) 严格正 当 $f(X^+ \setminus \{0\}) \subset Y^+ \setminus \{0\}$。

(v) 若 (Y, Y^+) 是 OBS，且 Y^+ 具有非空内部，则称 f 为强正（此时记作 $f \gg 0$），若 $f(X^+ \setminus \{0\}) \subset \operatorname{int} Y^+$。

Not请注意，若 f 是线性的，则正性与单调性是等价性质 s. ◁

我们尤其关注有界的线性算子。有趣的是，如果锥 X^+ 是生成的，那么每个正线性算子 $A\colon X \to Y$ 都会自动有界 [1, 定理 2。32]。

C.6 有序巴拿赫空间的对偶性

设 (X, X^+) 是一个有序巴拿赫空间。子集

$$(X')^+ := \{x' \in X' : \langle x', x\rangle \geq 0 \text{ for all } x \in X^+\}$$

称为对偶空间 X' 的对偶楔。$(X')^+$ 中的元素称为正泛函，定义在 X 上。

对偶楔子也具有闭性（甚至是弱*闭的）、凸性，并且在非负标量乘法下保持不变。当且仅当锥 X^+ 在 X中是全锥时，对偶楔子（X'）$^+$ 才是锥——也就是说，它与 $-$（X'）$^+$ 的交集是 $\{0\}$ 。特别地，若（X， X^+）是具有全锥 X^+的有序巴拿赫空间，则对偶空间（X'， （X'）$^+$）也是有序巴拿赫空间。 X^+ 与（X'）$^+$ 的性质密切相关。当且仅当 X^+ 是正规的，对偶锥（X'）$^+$ 才是生成的，见 [130, 定理 4。5] 或 [1,推论 2。43]。反过来，若 X 是自反的，当且仅当X^+ 是生成的，对偶锥（X'）$^+$ 才是正规的，见 [130, 定理 4。6], [1, 推论 2。43]。

C.7 复化

由于我们将要用到正算子的谱理论，因此有必要简要介绍一下复化。有序巴拿赫空间（X, X^+）的底层标量域是实数，但每个实巴拿赫空间 X 都有一个（通常不唯一的）复化 $X_{\mathbb{C}}$，它是定义在 $\mathbb{C}$上的巴拿赫空间；任意两个实巴拿赫空间 X 和 Y之间的有界线性算子 A ，都可以唯一地延拓为一个有界 $\mathbb{C}$-线性算子 $A_{\mathbb{C}}\colon X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$。此外，这种延拓总满足范数估计 $\|A\| \leq \|A_{\mathbb{C}}\| \leq 2\|A\|$。每当我们讨论 A的谱性质时，默认指的是其复延拓 $A_{\mathbb{C}}$相应的谱性质。关于巴拿赫空间复化的概述，可参见 [175] 以及 [69, 附录 C]。

C.8 单调控制系统

定义 C.8.1. 如果一个控制系统 $\Sigma = (X, \mathcal{U}, \phi)$（如定义 1.1.1 中所述）有序，则 X 和 $\mathcal{U}$ 是具有给定序的赋范向量空间。◁

Mono单调控制系统是控制系统应用中的一个重要子类 :

定义 C.8.2. 有序控制系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 称为单调的，条件是对所有 $t\geq 0$、所有满足 $x_1\leq x_2$ 的 $x_1,x_2\in X$，以及所有满足 $u_1\leq u_2$ 的 $u_1\in\mathcal{U}$, $u_2\in\mathcal{U}$，均有 $\phi(t,x_1,u_1)\leq\phi(t,x_2,u_2)$。$\lhd$

为了处理无法保证关于初始状态单调的情况，下面的定义很有用：

定义 C.8.3。 若有序控制系统 $\Sigma=(X,\mathcal{U},\phi)$ 满足：对于所有 $t\geq 0$、所有 $x\in X$ 和所有 $u_1,u_2\in\mathcal{U}$，只要 $u_1\leq u_2$，就有 $\phi(t,x,u_1)\leq\phi(t,x,u_2)$，则称其为关于输入单调。$\lhd$

C.9 线性单调离散时间系统与小增益条件

设 X 为赋范向量空间。考虑映射 $A:X\to X$，以及相应诱导的离散时间系统

$$x(k+1)=A(x(k)),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{C.4}$$

我们用 $\phi(k,x)\in X$ 表示该系统在时间 $k\in\mathbb{N}$ 的解，其初始条件为 $x\in X$。

我们来定义离散时间系统的稳定性概念。

定义 C.9.1。 离散时间系统（C.4）称为 *一致全局渐近稳定（UGAS）*，如果存在 $\beta\in\mathcal{KL}$ 使得对于每个 $k\geq 0$ 以及所有 $x\in X$ 都有

$$\|\phi(k,x)\|_X\leq\beta(k,\|x\|_X). \tag{C.5}$$

$\lhd$

定义一个更强的概念同样是有益的：

定义 C.9.2。 离散时间系统（C.4）称为 *一致全局指数稳定（UGES）*，如果存在 $a\in$（0，1）和 $M>0$ 使得对于每个 $k\geq 0$ 以及所有 $x\in X$ 都有

$$\|\phi(k,x)\|_X\leq Ma^k\|x\|_X. \tag{C.6}$$

$\lhd$

在本节余下部分，我们考虑具有 $A\in L(X)$ 的离散时间系统（C.4）。我们从不具有任何序关系的系统的一致全局指数稳定（UGES）这一简单判据开始。

命题 C.9.3。 设 X 为一个赋范向量空间，并设 $A\in L(X)$。则以下陈述等价：

(i) $r(A)<1$。

(ii) $A^k\to 0$，对于 $k\to\infty$。

(iii) (C.4)是一致全局指数稳定的。

(iv) (C.4)是一致全局渐近稳定的。

算子 A 的 Positivity 并不会简化命题 C.9.3中所讨论的一致指数稳定性判据。不过，Positivity 能够证明各种性质迥异的刻画，这些刻画通常称为小增益 型条件。下一个结果见 [70, 定理 3。3], ，其中包含若干此类判据。如果 X^+ 具有非空内部，或者 A 是拟紧的，则还可以建立若干额外判据，参见 [70, 定理 3.11、3。14]。

定理 C.9.4。 设(X, X^+) 是一个具有生成的正规锥的有序巴拿赫空间，并设 $A \in \mathcal{L}(X)$ 为正。则以下断言等价：

(i) 一致指数稳定性： 系统 (C.4) 满足命题 *C.9.3*中的等价判据，即有 $r(A) < 1$。

(ii) 预解式在 1 处的正性： 算子 $\mathrm{id} - A : X \to X$ 是双射，其逆算子$(\mathrm{id} - A)^{-1}$ 为正。[1]

(iii) 单调有界可逆性：存在一个数 $c \geq 0$ 使得

$$(\mathrm{id} - A)x \leq y \qquad \Rightarrow \qquad \|x\| \leq c\,\|y\|$$

对所有 $x, y \in X^+$ 均成立。

(iv) 一致小增益条件： 存在一个数 $\eta > 0$ ， 使得对于每个 $x \in X^+$

$$\operatorname{dist}\left((A - \mathrm{id})x, X^+\right) \geq \eta\,\|x\|\,.$$

(v) 鲁棒小增益条件： 存在一个数 $\varepsilon > 0$ ， 使得

$$(A + P)x \not\geq x \tag{C.7}$$

对于每个 $0 \neq x \in X^+$ 以及每个范数为 $\|P\| \leq \varepsilon$ 的正算子 $P \in \mathcal{L}(X)$ 。

(vi) 秩一鲁棒小增益条件： 存在一个数 $\varepsilon > 0$ ， 使得

$$(A + P)x \not\geq x$$

对于每个 $0 \neq x \in X^+$ 以及每个秩为 1 且范数为 $\|P\| \leq \varepsilon$ 的正算子 $P \in \mathcal{L}(X)$。

[1]注意，由于 id $-A$ 可逆且有界，因此 (id $-A$)$^{-1}$ 是闭的；又由于 A 是满射，根据闭图定理，(id $-A$)$^{-1}$ 有界。因此， $1 \in \rho(A)$，且 (id $-A$)$^{-1}$ 确实是一个预解式。

附录 D

索伯列夫空间与不等式

由偏微分方程描述的系统，其自然状态空间是 L^p 类空间和索伯列夫空间。本章将定义这些空间，并回顾它们的主要性质。我们特别关注适用于属于 L^p 类空间和索伯列夫空间的函数的积分不等式。掌握这些不等式的用法，对于将李雅普诺夫方法应用于偏微分方程系统至关重要。

在本附录中，我们用 G 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界开区域（除非另有说明）。这里的可测性始终指勒贝格可测性。

D.1 可积函数空间

定义 D.1.1. 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 是一个非空开集，$p \geq 1$ 是一个固定实数。考虑由满足 $\int_G |x(z)|^p dz < \infty$ 的（勒贝格）可测函数 $x : G \to \mathbb{R}$ 构成的集合配备映射

$$\|x\| := \left(\int_G |x(z)|^p dz \right)^{1/p}.$$

这是一个线性向量空间，其加法和标量乘法定义如下：

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\alpha x)(t) = \alpha x(t).$$

显然，$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ 对所有标量 λ 以及所有 x，三角不等式可由闵可夫斯基不等式（命题D.2.9）推出，这表明 $\|\cdot\|$是一个半范数。然而，$\|\cdot\|$ 不是这个空间上的范数，因为 $\|x\| = 0$只能说明 $x(t) = 0$ 几乎处处成立。

现在考虑由几乎处处相等的函数 $[x]$ 组成的（等价）类空间 x 。这些等价类构成一个线性空间，并且

$$\|[x]\|_{L^p(G)} := \|x_1\|, \quad \text{for any } x_1 \in [x]$$

定义了一个范数；我们称这个赋范向量空间为 $L^p(G)$。

通常，我们写作 x_1 而不是 $[x]$，其中 x_1 是等价类$[x]$中的任意元素。◁

定义 D.1.2。 设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开集。考虑所有满足条件 ess sup $_{z \in G} |x(z)| < \infty$。的可测函数 $x : G \to \mathbb{R}$ 按照例 D.1.1，

我们构造包含函数的等价类 $[x]$，这些函数在 G上几乎处处等于 x。赋予范数

$$\|[x]\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{z\in G} |x_1(z)|, \qquad \text{for any } x_1 \in [x],$$

这个空间是一个赋范向量空间，记作 $L^\infty(G)$。按照标准约定，我们通常写作 x_1 而不是 $[x]$，其中 x_1 是 $[x]$的任意元素。◁

定理 D.1.3。若 $p \in [1,\infty]$，且令 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为一个非空开集，则 $L^p(G)$ 是一个巴拿赫空间。

此外，$L^2(G)$是一个希尔伯特空间，其标量积定义为

$$\langle x, y\rangle_{L^2(G)} := \int_G x(z)y(z)dz, \quad x, y \in L^2(G).$$

证明。例如参见 [67,第 11 页，定理 1。21], [67,第 12 页，命题 1。24]。 □

对于 $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$，我们用 $C_c^k(G)$ 表示由 k 次连续可微函数 $f\colon G \to \mathbb{R}$ 组成的空间，这些函数的支集在 G中紧。属于 $C_c^\infty(G)$ 的函数通常称为测试函数。

当 p有限时，测试函数在 L^p 类空间中稠密。

命题 D.1.4。设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为一个非空开集。$C_c^\infty(G)$ 在 $L^p(G)$ 中关于 $L^p(G)$-范数对 $p \in [1,+\infty)$ 是稠密的。

L^p-空间理论中的一个重要结果是标量控制收敛定理，下面回顾该定理：

定理 D.1.5 (标量值控制收敛定理)。设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为一个非空开集，且 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 G 上的勒贝格可测标量值函数序列，并且在 G 中 $f_n \to f$ 几乎处处收敛；此外，存在 $g \in L^1(G)$，使得

$$|f_n(z)| \le g(z), \quad \text{for a.e. } z \in G.$$

那么 $f \in L^1(G)$ 以及

$$\lim_{n\to\infty} \int_G f_n(z)dz = \int_G f(z)dz. \tag{D.1}$$

证明。参见 [213, 定理 5.6。1]。 □

D.2 初等不等式

本节汇集了若干不等式，它们对于无限维和有限维控制系统的稳定性分析，以及验证函数空间的重要性质都至关重要。

D.2.1 实数集 $\mathbb{R}^n$中的不等式

定义 D.2.1. 若映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为凸的

$$f(ax + (1-a)y) \le af(x) + (1-a)f(y),$$

对所有 x, $y \in \mathbb{R}^n$以及所有 $a \in [0,1]$均成立。 ◁

命题 D.2.2 (杨氏不等式)。 设 $p, q > 1$ 满足$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。则对所有 $a, b \ge 0$，下式成立

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{D.2}$$

证明。 由于 $x \mapsto e^x$ 是一个凸映射，我们有:

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

□

命题 D.2.3 （杨氏不等式的一般形式）。 对所有 a, $b \ge 0$ 以及所有 ω, $p > 0$均成立

$$ab \le \frac{\omega}{p}a^p + \frac{1}{\omega^{\frac{1}{p-1}}}\frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}. \tag{D.3}$$

证明。 令 $ab = \varepsilon^{\frac{1}{p}}a \cdot \frac{b}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$，并对 $q = \frac{p}{p-1}$应用杨氏不等式（D.2）。 □

命题D.2.3 的一个常见特殊情形（也称为带有 ε的柯西不等式）是:

命题 D.2.4 （杨氏不等式的特殊情形）。对于所有 a, $b \in \mathbb{R}$ 以及所有 $\varepsilon > 0$，有

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2. \tag{D.4}$$

We 本节以如下内容收尾（我们采用 [220,引理 2.7，第 4 页中的表述） 2]):

引理 D.2.5 （广义格朗沃尔不等式）。设 ψ, α, $\beta \in C([0,T], \mathbb{R})$ 且不等式成立

$$\psi(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds, \quad t \in [0,T], \tag{D.5}$$

其中 $\alpha(t) \in \mathbb{R}$ 且 $\beta(t) \ge 0$, $t \in [0,T]$。那么:

(i) $\psi(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left\{\left(\int_s^t \beta(r)dr\right)\right\}ds, \quad t \in [0,T].$

(ii) 若进一步对 $\alpha(s) \le \alpha(t)$ 满足 $s \le t$，则有

$$\psi(t) \le \alpha(t)\exp\left\{\left(\int_0^t \beta(s)ds\right)\right\}, \quad t \in [0,T].$$

D.2.2 基本积分不等式

这里汇总了 L^p 空间中的几个基本不等式。

命题 D.2.6 (H¨older 不等式)。 设 G 是 $\mathbb{R}^n$中的一个有界开区域。假设 p、$q \in [1,\infty]$ 和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。那么，如果 $x \in L^p(G)$， $v \in L^q(G)$，则

$$\int_G |x(z)v(z)|dz \le \|x\|_{L^p(G)}\|v\|_{L^q(G)}. \tag{D.6}$$

证明。 首先假设$\|x\|_{L^p(G)}=1$ 且$\|v\|_{L^q(G)}=1$。由杨氏不等式 (D.2)，对于p， q 如命题所述，对几乎处处的 $z \in G$

$$|x(z)v(z)| \le \frac{1}{p}|x(z)|^p + \frac{1}{q}|v(z)|^q. \tag{D.7}$$

函数 xv 是可测的，并且 (D.7) 表明其绝对值被一个可积函数所上界，因此 $xv \in L^1(G)$ 且

$$\int_G |x(z)v(z)|dz \le \frac{1}{p}\int_G |x(z)|^p dz + \frac{1}{q}\int_G |v(z)|^q dz = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 = \|x\|_{L^p(G)}\|v\|_{L^q(G)}.$$

对于一般的 $x \in L^p(G)$、 $v \in L^q(G)$，由齐次性可得结论。 □

迭代使用霍尔德不等式，可得下述不等式:

命题 D.2.7 （广义霍¨尔德不等式）。 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界开区域。设 $p_i \in [1,+\infty]$、 $i=1$、.....、 m 满足 $\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}=1$， 并令 $n \in \mathbb{N}$。
那么，对所有 $x_k \in L^{p_k}(G)$ 、 $k=1$、.....、 m，都有

$$\int_G |x_1(z)\cdots x_m(z)|dz \le \prod_{k=1}^m \|x_k\|_{L^{p_k}(G)}. \tag{D.8}$$

命题 D.2.8 （ $L^2(G)$ 中的柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式）。 对于所有 $x \in L^2(G)$，$v \in L^2(G)$ 均有

$$\int_G |x(z)v(z)|dz \le \|x\|_{L^2(G)}\|v\|_{L^2(G)}. \tag{D.9}$$

证明。 该结论是霍¨尔德不等式（D.6）在 $p=q=2$ 时的特例，也是希尔伯特空间中一般柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式的特例。 □

下述结果构成了 $L^p(G)$-空间中的三角不等式。

命题 D.2.9 (闵可夫斯基不等式)。 假设 $p,q \in [1,\infty]$ 和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。那么，如果 x，$v \in L^p(G)$，则

$$\|x+v\|_{L^p(G)} \le \|x\|_{L^p(G)} + \|v\|_{L^p(G)}. \tag{D.10}$$

证明。 见 [66, 第 707]页。 □

凸函数的一个重要积分不等式是

命题 D.2.10（詹森不等式）。设 G 为开集且有界，$f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 为凸函数。再设 $x:G\to\mathbb{R}^m$ 可求和。那么

$$\frac{1}{|G|}\int_G f(x(z))dz \geq f\Big(\frac{1}{|G|}\int_G x(z)dz\Big). \tag{D.11}$$

证明。参见 [66, 第 705]页。 □

在标量情形下，詹森不等式可简化为

命题 D.2.11（标量詹森不等式）。对于任意凸的 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 以及任意可求和的 $x:\ [0,L]\to\mathbb{R}$，有

$$\int_0^L f(x(z))dz \geq Lf\Big(\frac{1}{L}\int_0^L x(z)dz\Big). \tag{D.12}$$

类似地，对于任意凹的 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 以及任意可求和的 $x:\ [0,L]\to\mathbb{R}$，詹森不等式反向成立：

$$\int_0^L f(x(z))dz \leq Lf\Big(\frac{1}{L}\int_0^L x(z)dz\Big). \tag{D.13}$$

证明。对于凸的 f，结论由一般的詹森不等式得出。为证明第二部分，注意到 f 是凹的，当且仅当 $-f$ 是凸的。将詹森不等式应用于 $-f$，即可得到凹的 f 的情形。 □

D.3 弱导数

任取 $x\in C^1(G)$以及任意的 $\phi\in C_c^\infty(G)$，即 ϕ 是具有紧支集于 G 中的无穷次连续可微函数。由于 ϕ 在 G中具有紧支集，对于每个$i=1$、……、n，分部积分公式表明

$$\int_G x(z)\phi_{z_i}(z)dz = -\int_G x_{z_i}(z)\phi(z)dz. \tag{D.14}$$

任取 $k\in\mathbb{N}$、任意的 $x\in C^k(G)$以及任意的多重指标 $\alpha:=(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_n)$，其序为 $|\alpha|:=\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k$。我们对导数采用如下记号：

$$D^\alpha\phi := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial z_n^{\alpha_n}}\phi.$$

那么，与上面类似，对于所有 $\phi\in C_c^\infty(G)$，有

$$\int_G x(z)D^\alpha\phi(z)dz = (-1)^{|\alpha|}\int_G D^\alpha x(z)\phi(z)dz. \tag{D.15}$$

(D.14) 和 (D.15) 左边的表达式对$x\in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ 已有意义。这促使我们按如下方式放宽微分概念：

定义 D.3.1。设 $x, v \in L^1_{\text{loc}}(G)$，且 α 是一个多重指标。我们称 v 为 x 的 α^{th}-弱偏导数，记作

$$D^\alpha x = v,$$

若对所有测试函数 $\phi \in C_c^\infty(G)$，都有

$$\int_G x(z) D^\alpha \phi(z) dz = (-1)^{|\alpha|} \int_G v(z)\phi(z) dz. \tag{D.16}$$

◁

弱导数的存在性是一种全局性质。我们不谈"函数在 G的某个给定点处的弱导数"。

下一个引理表明，若将仅在零测集上不同的函数视为相同，则弱导数是一个定义良好的概念。

引理 D.3.2. 设 $x \in L^1_{\text{loc}}(G)$，且 α 是一个多重指标。若 x存在一个 α^{th}-弱偏导数，则该弱偏导数在零测集之外唯一确定。

证明。假设存在 v_1, v_2，使得

$$\int_G x(z) D^\alpha \phi(z) dz = (-1)^{|\alpha|} \int_G v_1(z)\phi(z) dz = (-1)^{|\alpha|} \int_G v_2(z)\phi(z) dz,$$

对所有 $\phi \in C_c^\infty(G)$ 都成立。那么对所有 $\phi \in C_c^\infty(G)$，我们也有

$$\int_G (v_1(z) - v_2(z))\phi(z) dz = 0.$$

这意味着 $v_1 - v_2 = 0$ 几乎处处。 □

考虑一个函数的例子：它在区间内某一点处不具有经典意义下的导数，但在整个区间上确实存在弱导数。

例 D.3.3。设 $G = (0,2) \subset \mathbb{R}$，且

$$x(z) := \begin{cases} z, & z \in (0,1), \\ 1, & z \in [1,2). \end{cases} \tag{D.17}$$

我们来证明 x的弱导数等于

$$v(z) := \begin{cases} 1, & z \in (0,1), \\ 0, & z \in [1,2). \end{cases}$$

事实上，对于任意 $\phi \in C_c^\infty(G)$，我们都有

$$\begin{aligned} \int_0^2 x(z)\phi'(z) dz = \int_0^1 z\phi'(z) dz + \int_1^2 \phi'(z) dz &= z\phi(z)|_0^1 - \int_0^1 \phi(z) dz - \phi(1) \\ &= -\int_0^2 v(z)\phi(z) dz. \end{aligned}$$

与此同时，在前一个例子中加入一个不连续点，会导致函数在该区间上不具有弱可微性。

例 D.3.4. 令 $G = (0,2) \subset \mathbb{R}$，并且

$$x(z) := \begin{cases} z, & z \in (0,1], \\ 2, & z \in (1,2). \end{cases} \tag{D.18}$$

我们来证明 x的弱导数不存在。

假设存在 $v = D^1 x \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$。那么对于任意 $\phi \in C_c^\infty(G)$，都有 at

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v(z)\phi(z)dz &= \int_0^2 x(z)\phi'(z)dz \\ &= \int_0^1 z\phi'(z)dz + 2\int_1^2 \phi'(z)dz \\ &= z\phi(z)|_0^1 - \int_0^1 \phi(z)dz - 2\phi(1) = -\int_0^1 \phi(z)dz - \phi(1). \end{aligned}$$

取一列测试函数 (ϕ_m)，使得对于所有 m， $\phi_m(1) = 1$；对于所有 $z \in (0,2)$ 中的 $\phi_m(z)$ $\in [0,1]$ 以及所有 $m \in \mathbb{N}$，并且假设对于所有 $m \in \mathbb{N}$，$\mathrm{supp}(\phi_m) \subset [1 - \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}]$。由于 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$ (G)，对于所有 $m \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned} 1 = \phi_m(1) &= \int_0^2 v(z)\phi_m(z)dz - \int_0^1 \phi_m(z)dz \\ &\le \int_0^2 |v(z)\phi_m(z)|dz - \int_0^1 \phi_m(z)dz. \end{aligned}$$

现在，对于几乎处处的 $z \in (0,2)$，有 $|v(z)\phi_m(z)| \to 0$，因为 $m \to \infty$，并且

$$|v(z)\phi_m(z)| \le |v(z)|,$$

其中 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$。

控制收敛定理表明

$$\begin{aligned} 1 = \phi_m(1) &\le \lim_{m\to\infty} \int_0^2 |v(z)\phi_m(z)|dz - \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \phi_m(z)dz \\ &= \int_0^2 \lim_{m\to\infty} |v(z)\phi_m(z)|dz \\ &= 0, \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。

D.4 H¨older 空间

在本节中，令 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。我们将空间 $C^k(G)$ 定义为所有满足以下条件的函数 $x \in C^k(G)$ 构成的空间：对于所有多重指标 α， $D^\alpha x$ 在 G 的有界子集上一致连续：$|\alpha| \le k$。

特别地，若 $x \in C^k(G)$，则对每个满足 $|\alpha| \le k$ 的多重指标 α， $D^\alpha x$ 都可以连续延拓至 G。

定义 D.4.1. 设 $\gamma \in (0,1]$。映射 $x: G \to \mathbb{R}$ 称为 $H^{\cdot}$指数为 γ 的赫尔德连续映射，如果存在 $C > 0$ 使得

$$|x(z) - x(y)| \leq C|z-y|^{\gamma}, \qquad z, y \in G. \tag{D.19}$$

◁

定义 D.4.2. 设 $\gamma \in (0,1]$.

(i) F or 一个有界连续的 $x: G \to \mathbb{R}$，我们用以下符号表示其标准上确界范数

$$\|x\|_{C(\overline{G})} := \sup_{z \in G} |x(z)|.$$

(ii) γ^{th}-*H¨older* 半范数 of $x: G \to \mathbb{R}$ 定义为

$$[x]_{C^{0,\gamma}(\overline{G})} := \sup_{\substack{z,y \in G \\ z \neq y}} \left\{ \frac{|x(z) - x(y)|}{|z-y|^{\gamma}} \right\},$$

以及 γ^{th}-*H¨older* 范数 为

$$\|x\|_{C^{0,\gamma}(\overline{G})} := \|x\|_{C(\overline{G})} + [x]_{C^{0,\gamma}(\overline{G})}.$$

◁

定义 D.4.3. H¨*older* 空间 $C^{k,\gamma}(G)$ 由所有具有有限范数的映射 $x \in C^k(\overline{G})$ 组成

$$\|x\|_{C^{k,\gamma}(\overline{G})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} x\|_{C(\overline{G})} + \sum_{|\alpha| = k} \left[D^{\alpha} x\right]_{C^{0,\gamma}(\overline{G})}. \tag{D.20}$$

◁

换言之，空间 $C^{k,\gamma}(G)$ 由 k 次连续可微函数 x 组成，其 k^{th}阶偏导数有界且以指数 γ 为 Hölder 连续。

注意，H¨older 连续函数是一致连续的，因此它们可以唯一地延拓到 G，并且具有相同的 H¨older（半）范数。这就是为什么我们（参见 [66,第 5.1 节，第 254] 页）在 H¨older 空间中于 G 上定义半范数和范数。

定理 D.4.4。 空间 $C^{k,\gamma}(G)$ 是一个巴拿赫空间。

证明。 见 [66, 定理 1，第 255] 页。 □

D.5 索伯列夫空间

设 G，$V \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。若 $V \subset \overline{V} \subset G$，且 $\overline{V}$ 为紧集，则称 V 紧包含于 G，记作 $V \subset\subset G$。

具有各种序的弱导数且属于 L^p空间的函数空间，在后续内容中将对我们非常重要。

定义 D.5.1. 设 $p \in [1,\infty]$ 且 $k \in \mathbb{N}$。索伯列夫空间 $W^{k,p}(G)$由函数 $x \in L^p(G)$组成，其中对于每个序为 $\leq k$的多重指标 α，弱导数$D^\alpha x$ 存在且属于 $L^p(G)$。

对于 $p < \infty$ $W^{k,p}(G)$ 中的范数，定义为

$$\|x\|_{W^{k,p}(G)} := \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_G |D^\alpha x(z)|^p \, dz \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{D.21}$$

$W^{k,\infty}(G)$ 中的范数定义为

$$\|x\|_{W^{k,\infty}(G)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha x\|_{L^\infty(G)}. \tag{D.22}$$

用 $W^{k,p}_0(G)$ 表示 $C_c^\infty(G)$ 在 $W^{k,p}(G)$ 的范数下的闭包。

$W^{k,p}_{\text{loc}}(G)$ 是所有满足以下条件的 x 的空间：$G \to \mathbb{R}$，使得对任意 $V \subset\subset G$，映射 x 属于 $W^{k,p}(V)$。

此外，若 $p = 2$我们进一步定义 $H^k(G) := W^{k,2}(G)$，$H^k_0(G) := W^{k,2}_0(G)$。 ◁

下一条命题汇总了弱导数的若干基本性质：

定理 D.5.2（弱导数的性质）。设 x，$v \in W^{k,p}(G)$，$|\alpha| \leq k$。则

(i) $D^\alpha x \in W^{k-|\alpha|,p}(G)$ 且 $D^\beta(D^\alpha x) = D^\alpha(D^\beta x) = D^{\alpha+\beta}x$ 对所有满足 $|\alpha|+|\beta| \leq k$ 的多重指标 α，β均成立。

(ii) 对每个 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda x + \mu v \in W^{k,p}(G)$ 且 $D^\alpha(\lambda x + \mu v) = \lambda D^\alpha x + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$。

(iii) 若 V 是 G 的开子集，则 $x \in W^{k,p}(V)$。

(iv) 莱布尼茨公式：若 $\zeta \in C_c^\infty(G)$，则 $\zeta x \in W^{k,p}(G)$ 且

$$D^\alpha(\zeta x) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} x, \tag{D.23}$$

其中 $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$，多重指标的阶乘定义为 $\alpha! := (|\alpha|)!$。

证明。参见 [66, 定理 1，第 261]。 □

索伯列夫空间具有非常优良的数学结构。

定理 D.5.3。对于每个 $k \in \mathbb{N}$和每个 $p \in [1,+\infty]$，索伯列夫空间 $W^{k,p}(G)$ 都是巴拿赫空间。

证明。参见 [66, 定理 2，第 262]。 □

下一个结果给出了一维区间上索伯列夫空间的一个有用刻画。

命题 D.5.4. 设 $n = 1$ 和 $p \in [1, +\infty)$。索伯列夫空间 $W^{1,\,p}(0,\ 1)$ 与 *(*将仅在零测度集合上不同的函数视为相同后*)* $(0,\ 1)$上的绝对连续函数空间相同；这些函数的经典导数几乎处处存在于$(0,\ 1)$ 上，且属于 $L^p(0,\ 1)$。

证明。 参见 [66, 习题 4，第 306]。 □

索伯列夫空间中的元素可以用光滑函数逼近。
对于一个序列 (x_k)，以及 $x \in W^{k,\,p}(G)$，我们称

- $x_k \to x$ in $W^{k,p}(G)$ if $\|x_k - x\|_{W^{k,p}(G)} \to 0$ as $k \to \infty$.
- $x_k \to x$属于 $W^{k,\,p}{}_{\mathrm{loc}}(G)$，如果对任意 $V \subset\subset G$，都有$\|x_k - x\|_{W^{k,\,p}(V)} \to 0$当 $k \to \infty$时。

如果对每个 $z \in \partial G$，都存在一个球 $B_\delta(z)$，使得存在一个 k 次连续可微函数 ϕ 和一个指标 i，并且对所有 $y \in \partial G \cap B_\delta(z)$，都有 $y_i = \phi(y_1,\ \ldots\ldots,\ y_{i-1},\ y_{i+1},\ \ldots\ldots,\ y_n)$，则称 $\partial G \in C^k$ 对于 $k \in \mathbb{N}$ 成立。

我们有如下结果：

定理 D.5.5 (光滑函数逼近)。 假设 $x \in W^{k,\,p}(G)$ 对于某个$1 \le p < \infty$。那么

(i) 存在 $(x_m) \subset C_c^\infty(G)$，使得 $x_k \to x$ 属于 $W^{k,p}$ *loc* (G)。*(ii)* 如果 G 有界，那么存在 $(x_m) \subset C^\infty(G) \cap W^{k,p}(G)$，使得 $x_k \to x$ 属于$W^{k,p}(G)$。*(ii)* 如果 G 有界且 $\partial G \in C^1$，那么存在 $(x_m) \subset C^\infty(G)$，使得 $x_k \to x$ 属于$W^{k,p}(G)$。

—

证明。 参见 [66, 第 5 节中的定理 1、2、3。3]。 □

接下来，我们讨论如何定义函数 $x \in W^{1,\,p}(G)$ 的边界值，假设 ∂G 是 C^1。这并不简单，因为 ∂G 的勒贝格测度为零维，且 x 仅在零测集意义下定义。迹算子 这一概念解决了这个问题。

定理 D.5.6 (迹定理)。 假设 G 有界，且 ∂G 属于 C^1。进一步设$1 \le p < \infty$。则存在一个有界线性算子

$$T : W^{1,p}(G) \to L^p(\partial G)$$

使得

(i) $Tx = x|_{\partial G}$ 当 $x \in W^{1,\,p}(G) \cap C\left(\overline{G}\right)$。

(ii) 存在一个仅依赖于 p 和 G 的 $C > 0$，使得

$$\|Tx\|_{L^p(\partial G)} \le C\|x\|_{W^{1,p}(G)}, \quad x \in W^{1,p}(G).$$

证明。 参见第 5 节中的 [66, 定理 1。5]。 □

定义 D.5.7. 我们将 Tx 在 ∂G上的 x 称为迹。 ◁

接下来，我们用迹算子来刻画空间 $W^{1,p}_0(G)$。

定理 D.5.8（$W^{1,p}_0(G)$ 的刻画）。假设 G 有界且 ∂G 是 C^1。此外，假设 $x \in W^{1,p}(G)$。那么

$$x \in W^{1,p}_0(G) \quad \textit{if and only if} \quad Tx = 0 \quad \textit{on} \quad \partial G. \tag{D.24}$$

证明。参见 [66, 第 5 节中的定理 2。5]。 □

定义 D.5.9。如果 $1 \le p < n$，则 p 的索об列夫共轭指数

$$p^* := \frac{np}{n-p}. \tag{D.25}$$

注意

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \qquad \text{and} \qquad p^* > p. \tag{D.26}$$

◁

我们先证明，若 $x \in W^{1,p}(G)$，$1 \le p < n$，则 $x \in L^{p^*}(G)$。由于索об列夫共轭指数 p^* 大于 p，这意味着，对于 $L^p(G)$ 空间中的函数，弱导数的存在已能保证其具有更好的可积性。

定理 D.5.10（$W^{1,p}$、$1 \le p < n$的索об列夫嵌入定理）。设 G 是 $\mathbb{R}^n$的有界开子集，且假设 ∂G 是 C^1。假设 $1 \le p < n$，并且 $x \in W^{1,p}(G)$。那么$x \in L^{p^*}(G)$，并且有如下估计

$$\|x\|_{L^{p^*}(G)} \le C\|x\|_{W^{1,p}(G)}, \tag{D.27}$$

常数 C 仅取决于 p、n 和 G。

证明。参见第 5 节中的定理 2 [66, 6]。 □

对于 $W^{1,p}_0(G)$ 中的函数，可以得到更强的结果：

定理 D.5.11 (关于 $W^{1,p}_0$、$1 \le p < n$ 的估计)。假设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界开子集。设 $x \in W^{1,p}_0(G)$，其中某个 $1 \le p < n$。那么我们有如下估计

$$\|x\|_{L^q(G)} \le C\|Dx\|_{L^p(G)}$$

对于每个 $q \in [1, p^*]$，常数 C 仅取决于 p、q、n 和 G。

特别地，对于所有 $1 \le p \le \infty$，我们得到所谓的弗里德里希不等式（有时称为庞加莱不等式）：

$$\|x\|_{L^p(G)} \le C\|Dx\|_{L^p(G)}, \quad x \in W^{1,p}_0(G). \tag{D.28}$$

证明。参见第 5 节中的 [66, 定理 36]。 □

注 D.5.12. 根据弗里德里希不等式，在 $W^{1,p}_0(G)$ 上，范数$\|Dx\|_{L^p(G)}$ 与索伯列夫范数 $x \mapsto \|x\|_{W^{1,p}(G)}$等价，若 G 有界。◁

分析了具有 $p < n$ 的索伯列夫空间 $W^{1,p}(G)$ 后，我们接下来分析具有 $n < p \leq \infty$ 的此类空间。

定义 D.5.13. 如果满足以下条件，我们称 x^* 是给定函数 x 的一个版本

$$x = x^* \text{ a.e.}$$

◁

我们将证明，若 $x \in W^{1,p}(G)$，且 $p > n$，那么只要在一个零测集上重新定义 x，它便是 Hölder 连续的。

定理 D.5.14 (索об列夫嵌入定理，适用于 $W^{1,p}$，$n < p \leq \infty$)**.** 设 G 是 $\mathbb{R}^n$的一个有界开子集，且 ∂G 是 C^1。假设 $n < p \leq \infty$且 $x \in W^{1,p}(G)$。那么 x有一个版本 $x^* \in C^{0,\gamma}(G)$，其中 $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$，并且满足估计

$$\|x^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{G})} \leq C\|x\|_{W^{1,p}(G)}.$$

常数 C 仅依赖于 p、n和 G。

证明. 参见 [66, 第 5 节中的定理 5。6]。 □

根据定理 D.5.14，今后我们总是将函数 $x \in W^{1,p}(G)$ $(p > n)$ 与其连续版本视为同一对象。

注 D.5.15。最后，假设 $p = n$。根据定理 D.5.10，且当 $p \to n$ 时 $p^* = \frac{np}{n-p} \to +\infty$，大们可能会猜想，$x \in W^{1p}(G)$ 蕴含 $x \in L^\infty(G)$。然而，对于 $n > 1$，一般而言这并不成立。例如，若 $G = B^0(0, 1)$，函数 $x\colon z \mapsto \log\log\left(1 + \frac{1}{|z|}\right)$ 属于 $W^{1n}(G)$，但不属于 $L^\infty(G)$，参见 [66,练习 14，第 307] 页。◁

D.6 一维区域上的积分不等式

本节陈述了 $(0, L)$ 上的若干积分不等式。下文中，我们用$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(0, L)$ 上的经典标量积。首先，我们证明著名的弗里德里希不等式（参见例如 [176,附录 A]）。

命题 D.6.1 （弗里德里希不等式）。 对于所有 $x \in H_0^1(0, L)$ 都有

$$\frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 dz \geq \int_0^L x^2(z)dz. \tag{D.29}$$

证明。 定义 $\phi^{<i>}(z)\colon = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{i\pi z}{L}$，$i \in \mathbb{N}$，$z \in (0, L)$。众所周知，$(\phi^{<i>})_{i\in\mathbb{N}}$是 $L^2(0, L)$ 中的一个标准正交函数族。

任取 $x \in C_c^\infty(0, L)$。然后，x 可通过对称性扩展为 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数，因此可以表示为如下形式的傅里叶级数

$$x(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi^{<i>}(z), \quad z \in (0, L),$$

其中 $c_i := \langle x, \phi^{<i>} \rangle, \quad i \in \mathbb{N}$。

我们有

$$\begin{aligned}\int_0^L x_z^2(z)dz &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_z^{<i>}, \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_z^{<j>} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \left\langle \phi_z^{<i>}, \phi_z^{<j>} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi_z^{<i>}(z)\phi_z^{<j>}(z)dz.\end{aligned}$$

利用分部积分，可得

$$\begin{aligned}\int_0^L x_z^2(z)dz &= -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi^{<i>}(z)\phi_{zz}^{<j>}(z)dz \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \int_0^1 \phi^{<i>}(z)\phi^{<j>}(z)dz.\end{aligned}$$

由于 $\{\phi^{<j>} : \quad j \in \mathbb{N}\}$ 是 $L^2(0,1)$ 中的标准正交族，我们继续得到

$$\begin{aligned}\int_0^L x_z^2(z)dz &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \\ &\geq \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \int_0^L x^2(z)dz.\end{aligned}$$

由于 $H_0^1(0, L)$ 是 $H^1(0, L)$ 范数下 $C_c^\infty(0, L)$ 的闭包，最后一个不等式对所有 $x \in H_0^1(0, L)$ 也成立。 □

常数 $\frac{L^2}{\pi^2}$ （见D.29）是最优的。上述弗里德里希不等式证明的要点，是将函数分解为$L^2(0, L)$ 空间中的正交序列。容易看出，函数 $\phi^{<i>}$ 是狄利克雷拉普拉斯算子的特征函数。利用这一思路，可将上述弗里德里希不等式推广到多维有界区域。在这种情况下，需要利用光滑函数关于多维狄利克雷拉普拉斯算子特征函数的级数展开。

研究具有齐次狄利克雷边界条件的抛物型问题时，弗里德里希不等式至关重要。如果仅在边界的一侧给出狄利克雷条件，则无法应用弗里德里希不等式。此时，庞加莱不等式发挥着重要作用。

命题 D.6.2 (庞加莱不等式)。 对于每个 $x \in H^1(0, L)$，若满足 $x(0) = 0$或 $x(L) = 0$，则有

$$\frac{4L^2}{\pi^2} \int_0^L \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 dz \geq \int_0^L x^2(z)dz \tag{D.30}$$

证明。 参见 [81, 第 7.6 节，编号 256]。 □

一个重要的不等式将 L^∞ 范数与 H^1 范数联系起来：

命题 D.6.3 （Agmon不等式）。 对所有 $x \in H^1(0, L)$ 均有

$$\|x\|^2_{L^\infty(0,L)} \le |x(0)|^2 + 2\|x\|_{L^2(0,L)} \left\| \frac{dx}{dz} \right\|_{L^2(0,L)}. \tag{D.31}$$

证明。 见 [133, 引理 2.4.，第 20] 页。 □

我们还陈述一个有用的不等式，见 [234, 引理 1]：

命题 D.6.4。 设 $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$。那么对每个 $c \in [a, b]$，均有

$$x^2(c) \le \frac{2}{b-a}\|x\|^2_{L^2(0,1)} + (b-a)\|x_z\|^2_{L^2(0,1)} \tag{D.32}$$

D.7 Kuramoto-Sivashinskiy 方程的一个不等式

给定 $\lambda \in \mathbb{R}$，考虑一个特征值问题

$$x_{zzzz} + \lambda x_{zz} = \sigma x, \quad z \in (0, 1), \tag{D.33a}$$
$$x(0) = x(1) = x_z(0) = x_z(1) = 0. \tag{D.33b}$$

可以证明，参见 [148], ，存在可数个特征函数序列 $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$，以及相应的特征值 $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$，使得 (ϕ_i, σ_i) 是上述特征值问题的解，并且 $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ 构成 $L^2(0, 1)$ 的标准正交基。还成立 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$。

我们定义

$$\sigma(\lambda) := \min_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n. \tag{D.34}$$

有如下结果，参见 [148, 引理 2.1]：

引理 D.7.1。函数 $\sigma(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递减，且

$$\sigma(4\pi^2) = 0.$$

仿照命题 D.6.1的论证，我们可以证明 [148, 引理 3。1] :

命题 D.7.2. 设 $x \in H^2_0(0, 1)$。那么

$$\int_0^1 x^2_{zz}(z)dz - \lambda \int_0^1 x^2_z(z)dz \ge \sigma(\lambda) \int_0^1 x^2(z)dz. \tag{D.35}$$

证明。 任取 $x \in C_c^\infty(0,1)$。我们将它按标准正交基 $\{\phi_i$ 展开成级数： $i \in \mathbb{N}\}$ 属于 $L^2(0,1)$:

$$x(z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi^{<i>}(z), \quad z \in (0,1),$$

其中 $c_i := \langle x, \phi^{<i>} \rangle$, $i \in \mathbb{N}$。

我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_{zz}^2(z)dz &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_{zz}^{<i>}, \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_{zz}^{<j>} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \left\langle \phi_{zz}^{<i>}, \phi_{zz}^{<j>} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi_{zz}^{<i>}(z)\phi_{zz}^{<j>}(z)dz. \end{aligned}$$

利用两次分部积分，可得

$$\int_0^1 x_{zz}^2(z)dz = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi^{<i>}(z)\phi_{zzzz}^{<j>}(z)dz. \tag{D.36}$$

类似地，我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_z^2(z)dz &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi_z^{<i>}(z)\phi_z^{<j>}(z)dz \\ &= -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi^{<i>}(z)\phi_{zz}^{<j>}(z)dz. \end{aligned} \tag{D.37}$$

利用（D.36）、（D.37），可得

$$\int_0^1 x_{zz}^2(z)dz - \lambda \int_0^1 x_z^2(z)dz = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi^{<i>}(z)\big(\phi_{zzzz}^{<j>}(z) + \lambda \phi_{zz}^{<j>}(z)\big)dz.$$

由于 $\phi^{<j>}$ 满足特征值问题（D.33），因此也有

$$\int_0^1 x_{zz}^2(z)dz - \lambda \int_0^1 x_z^2(z)dz = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_i c_j \int_0^1 \phi^{<i>}(z)\sigma_j \phi^{<j>}(z)dz.$$

由于 $\{\phi^{<j>}$： $j \in \mathbb{N}\}$ 是 $L^2(0,1)$ 的标准正交基，我们继续

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_{zz}^2(z)dz - \lambda \int_0^1 x_z^2(z)dz &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \sigma_i \\ &\geq \sigma(\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \\ &= \sigma(\lambda) \int_0^1 x^2(z)dz. \end{aligned}$$

这里最后一个等式由 c_i 的定义得出。

由于 $H_0^2(0,1)$ 在 $H^2(0,1)$ 范数下是 $C_c^\infty(0,L)$ 的闭包，因此最后一个不等式对所有 $x \in H_0^2(0,1)$ 也成立。 □

D.8 总结

在第 D.5 节中，我们处理弱导数和索伯列夫空间时沿用 [66, 第 5] 章的方法。命题 D.6.1 的证明（可得最优常数）见于许多资料，例如 [176,附录 A]。第 D.7 节的灵感来自 [148]。

参考文献

[1] C. D. Aliprantis 和 R. Tourky。《锥与对偶》。美国数学会，2007年。185, 201, 244, 245, 247[2] H. Amann。有序巴拿赫空间中的不动点方程与非线性特征值问题。《SIAM评论》，18(4):620–709，1976年。244[3] D. Angeli。全局渐近稳定性的内在鲁棒性。《系统与控制快报》，38(4-5):297–307，1999年。41[4] D. Angeli。关于增量输入到状态稳定性的进一步结果。《IEEE自动控制汇刊》，54(6):1386–1391，2009年。41[5] D. Angeli 和 A. Astolfi。适用于不一定具有输入到状态稳定性的系统的紧小增益定理。《系统与控制快报》，56:87–91，2007年。168, 225[6] D. Angeli、B. Ingalls、E. D. Sontag 和 Y. Wang。输入输出稳定性与积分输入到状态稳定性的分离原理。《SIAM 控制与优化杂志》，43(1):256–276，2004年。178[7] D. Angeli、E. Sontag 和 Y. Wang。积分输入到状态稳定性的进一步等价性与半全局版本。《动力学与控制》，10(2):127–149，2000年。178, 241[8] D. Angeli、E. D. Sontag 和 Y. Wang。积分输入到状态稳定性的刻画。《IEEE自动控制汇刊》，45(6):1082–1097，2000年。41, 157, 160, 178, 241, 242[9] M. Arcak、D. Angeli 和 E. Sontag。用于非线性级联系统稳定性的统一积分输入到状态稳定框架。《SIAM 控制与优化杂志》，40(6):1888–1904，2002年。225[10] M. Arcak 和 P. Kokotovi´c。非线性观测器：圆判据设计与鲁棒性分析。《自动化》，37(12):1923–1930，2001年。41[11] W. Arendt、C. J. Batty、M. Hieber 和 F. Neubrander。《向量值拉普拉斯变换与柯西问题》。Springer Science & Business Media，2011年。48, 51, 54, 72, 76, 77, 78[12] W. Arendt 和 R. Nittka。等价完备范数与正性。《数学档案》，92(5):414–427，2009年。245[13] J. Aubin 和 H. Frankowska。《集值分析》。Birkh¨auser Boston，2009年。241

[14] B. Augner。通过耗散边界反馈实现无限维端口哈密顿系统的稳定化。博士论文，Bergische Universit¨at Wuppertal，2016年。90[15] B. Aulbach 和 T. Wanner。巴拿赫空间中 Carath´eodory 型微分方程的积分流形。载于《动力系统六讲》，第45–119页。World Scientific，里弗埃奇，1996年。193[16] G. Avalos 和 I. Lasiecka。由耦合双曲型/抛物型系统产生的半群的强稳定性。《半群论坛》，57(2):278–292，1998年。106[17] A. Balogh 和 M. Krstic。Korteweg-de Vries-Burgers 方程的边界控制：关于稳定化和适定性的进一步结果及数值演示。《IEEE自动控制汇刊》，45(9):1739–1745，2000年。89[18] B. Bamieh、F. Paganini 和 M. A. Dahleh。空间不变系统的分布式控制。《IEEE自动控制汇刊》，47(7):1091–1107，2002年。179[19] B. Bamieh 和 P. G. Voulgaris。具有通信约束的空间不变系统中分布式控制问题的凸刻画。《系统与控制快报》，54(6):575–583，2005年。179[20] A. Bao、T. Liu、Z.-P. Jiang 和 L. Zhang。大规模无限维系统的非线性小增益定理。《系统科学与复杂性杂志》，31(1):188–199，2018年。225[21] V. Barbu。《巴拿赫空间中的单调型非线性微分方程》。Springer Science & Business Media，2010年。89[22] B. Besselink 和 K. H. Johansson。受扰车辆队列的弦稳定性与基于时延的间距策略。《IEEE自动控制汇刊》，62(9):4376–4391，2017年。179[23] N. P. Bhatia。动力系统中的弱吸引子。《墨西哥数学学会通报》，11:56–64，1966年。116[24] N. P. Bhatia 和 G. P. Szeg¨o。《动力系统稳定性理论》。Springer Science & Business Media，2002年。116[25] B. J. Bialy、I. Chakraborty、S. C. Cekic 和 W. E. Dixon。柔性机翼中贮存诱发振荡的自适应边界控制。《自动化》，70:230–238，2016年。90[26] F. Bribiesca Argomedo、E. Witrant 和 C. Prieur。 D^1-时变非齐次扩散方程在边界扰动下的输入到状态稳定性。载于《2012年美国控制会议论文集》，第2978–2983页，2012年。90[27] A. Bruckner 和 J. Leonard。导数。《美国数学月刊》，73(4):24–56，1966年。242[28] C. Bruni、G. Dipillo 和 G. Koch。双线性系统：理论与应用中一类引人注目的“近线性”系统。《IEEE自动控制汇刊》，19(4):334–348，1974年。162

[29] P. Butkovi˘c. 最大线性系统：理论与算法。Springer Science & Business Media，2010年。207[30] C. Cai 和 A. Teel. 混杂系统输入到状态稳定性的刻画。《系统与控制快报》，58(1):47–53，2009年。41, 116[31] C. Cai、A. R. Teel 和 R. Goebel. 混杂系统的光滑李雅普诺夫函数——第一部分：存在性等价于鲁棒性。《IEEE自动控制汇刊》，52(7):1264–1277，2007年。41[32] C. Cai、A. R. Teel 和 R. Goebel. 混杂系统的光滑李雅普诺夫函数——第二部分：（预）渐近稳定紧集。《IEEE自动控制汇刊》，53(3):734–748，2008年。41[33] T. Cazenave 和 A. Haraux. 半线性演化方程导论。牛津大学出版社，纽约，1998年。89[34] A. Chaillet 和 D. Angeli. 级联的积分输入到状态稳定系统。《系统与控制快报》，57(7):519–527，2008年。225[35]A. Chaillet、D. Angeli 和 H. Ito. 结合相对于小输入的积分输入到状态稳定性与输入到状态稳定性：强积分输入到状态稳定性。《IEEE自动控制汇刊》，59(9):2518–2524，2014年。161, 162, 178, 221, 225[36] A. Chaillet、D. Angeli 和 H. Ito. 强积分输入到状态稳定性在级联互联下保持不变。《自动化》，50(9):2424–2427，2014年。161, 178, 225[37] A. Chaillet、I. Karafyllis、P. Pepe 和 Y. Wang. 时滞系统的输入到状态稳定性框架：综述。arXiv 预印本 arXiv:2206.06167，2022年。116[38] W.-H. Chen 和 W. X. Zheng. 带时滞非线性脉冲系统的输入到状态稳定性与积分输入到状态稳定性。《自动化》，45(6):1481–1488，2009年。41[39] F. H. Clarke、Y. Ledyaev 和 R. J. Stern. 渐近稳定性与光滑李雅普诺夫函数。《微分方程杂志》，149(1):69–114，1998年。241, 242[40] J. D. Cole. 关于空气动力学中出现的拟线性抛物方程。《应用数学季刊》，9(3):225–236，1951年。33[41] J.-M. Coron 和 Q. L¨u. Fredholm变换与Kuramoto–Sivashinsky方程的局部快速稳定化。《微分方程杂志》，259(8):3683–3729，2015年。42[42] M. G. Crandall 和 A. Pazy. 非线性压缩映射的半群与耗散集。《泛函分析杂志》，3(3):376–418，1969年。90[43] R. Curtain、O. V. Iftime 和 H. Zwart. 一类空间不变系统的系统理论性质。《自动化》，45(7):1619–1627，2009年。179[44] R. Curtain 和 H. Zwart. 无限维系统理论导论：状态空间方法。施普林格，2020年。72, 89, 145, 147, 154

[45] R. F. Curtain 和 H. Zwart. 无限维线性系统理论导论。施普林格，纽约，1995年。90, 140, 143, 166, 177, 178[46] J. Daleckii 和 M. Krein. 巴拿赫空间中微分方程解的稳定性。美国数学会，1974。89[47] R. D'Andrea 和 G. E. Dullerud. 空间互联系统的分布式控制设计。《IEEE自动控制汇刊》，48(9):1478–1495，2003年。179[48] S. Dashkovskiy、H. Ito 和 F. Wirth. 耗散型李雅普诺夫形式下 ISS 网络的小增益定理。《欧洲控制杂志》，17(4):357–365，2011。226[49] S. Dashkovskiy 和 M. Kosmykov. 互联混杂系统的输入到状态稳定性。《自动化》，49(4):1068–1074，2013。41, 116[50] S. Dashkovskiy、M. Kosmykov、A. Mironchenko 和 L. Naujok. 使用李雅普诺夫方法研究带时滞和不带时滞的互联脉冲系统的稳定性。《非线性分析：混合系统》，6(3):899–915，2012。41, 117[51] S. Dashkovskiy 和 A. Mironchenko. 无限维控制系统的输入到状态稳定性。《控制、信号与系统数学》，25(1):1–35，2013。41, 42, 168, 225[52] S. Dashkovskiy 和 A. Mironchenko. 非线性脉冲系统的输入到状态稳定性。《SIAM 控制与优化杂志》，51(3):1962–1987，2013。41[53] S. Dashkovskiy、A. Mironchenko、J. Schmid 和 F. Wirth. 无限多个互联系统的稳定性。IFAC-PapersOnLine，52(16):550–555，2019年。179, 197, 198, 204, 205, 206, 226[54] S. Dashkovskiy 和 S. Pavlichkov. 非线性系统无限网络的稳定性条件及其在稳定化中的应用。《自动化》，112:108643，2020年。179, 226[55] S. Dashkovskiy、B. R¨uffer 和 F. Wirth. 大规模系统的小增益定理及 ISS 李雅普诺夫函数的构造。《SIAM 控制与优化杂志》，48(6):4089–4118，2010年。197, 224, 225, 226[56] S. Dashkovskiy、B. S. R¨uffer 和 F. R. Wirth. ISS 系统网络的 ISS 李雅普诺夫函数构造。载于：第17届国际网络与系统数学理论研讨会论文集，第77–82页，2006年。204, 224[57] S. Dashkovskiy、B. S. R¨uffer 和 F. R. Wirth. 一般网络的 ISS 小增益定理。《控制、信号与系统数学》，19(2):93–122，2007年。116, 197, 198, 200, 206, 216, 224, 225[58] S. N. Dashkovskiy、D. V. Efimov 和 E. D. Sontag. 输入到状态稳定性及相关系统性质。《自动化与远程控制》，72(8):1579–1614，2011。41, 225

[59] S. N. Dashkovskiy and B. S. R¨uffer. 大规模互联系统的局部输入到状态稳定性及稳定区域的估计。《系统与控制快报》, 59:241–247, 2010年. 41[60]C. A. Desoer and M. Vidyasagar. 《反馈系统：输入输出性质》. 工业与应用数学学会, 费城, PA, 2009年. 224[61] M. Diagne and M. Krstic. 状态相关输入时滞补偿 bang-bang 控制：基于螺杆挤出机的 3D 打印应用. 载于：2015年美国控制会议论文集, 页码 5653–5658, 2015年. 90[62] U. Dini. 《实变量函数理论基础》. T. Nistri e C., 1878. 242[63] Z. Emirsajlow and S. Townley. 从具有边界控制的偏微分方程到带无界输入算子的抽象状态方程：教程. 《欧洲控制杂志》, 6(1):27–49, 2000年. 73, 89, 90[64] T. Endo, F. Matsuno, and Y. Jia. 柔性 Timoshenko 臂的边界协同控制. 《自动化》, 81:377–389, 2017年. 90[65] K.-J. Engel and R. Nagel. 线性演化方程的单参数半群. 施普林格, 纽约, 2000年. 47, 55, 74, 147[66] L. C. Evans. 偏微分方程. 美国数学会, 2010年. 33, 254, 255, 258, 259, 260, 261, 262, 266[67] M. Fabian, P. Habala, P. H´ajek, V. Montesinos, and V. Zizler. 巴拿赫空间理论：线性与非线性分析的基础. Springer Science & Business Media, 2011. 252[68] H. O. Fattorini. 边界控制系统. SIAM 控制杂志, 6(3):349–385, 1968. 90[69] J. Gl¨uck. 算子半群的不变集与长期行为. 博士论文, 乌尔姆大学, 2016. DOI: 10.18725/OPARU-4238. 247[70] J. Gl¨uck and A. Mironchenko. 正线性离散时间系统的稳定性判据. Positivity, 25(5):2029–2059, 2021年. 226, 249[71] J. Gl¨uck and M. R. Weber. 有序巴拿赫空间中的几乎内点与强正算子半群的长期行为. 《数学研究》, 254(3):237–263, 2020年. 245[72] A. Godunov. 巴拿赫空间中的 Peano定理. 泛函分析及其应用, 9(1):53–55, 1975年. 135[73] P. Grabowski. 观测泛函的可容许性. 《国际控制杂志》, 62(5):1161–1173, 1995. 52, 88[74] L. Gr¨une. 输入到状态动力学稳定性及其李雅普诺夫函数刻画. 《IEEE自动控制汇刊》, 47(9):1499–1504, 2002年. 41

[75] M. Haase. 扇形算子的泛函演算. 施普林格, 2006. 74[76] J. W. Hagood and B. S. Thomson. 从 Dini导数恢复函数. 《美国数学月刊》, 113(1):34–46, 2006. 238, 242 [77] W. Hahn. 运动稳定性. 施普林格, 纽约, 1967. 154, 241[78] P. H´ajek and M. Johanis. 关于巴拿赫空间中的 Peano定理. 微分方程杂志, 249(12):3342–3351, 2010 年. 135[79] S. Hansen and G. Weiss. 算子Carleson测度判据的新结果. IMA数学控制与信息期刊, 14(1):3–32, 1997. 155[80] F. M. Hante and M. Sigalotti. 巴拿赫空间和希尔伯特空间中切换系统的逆李雅普诺夫定理. SIAM 控制与优化杂志, 49(2):752–770, 2011. 154[81] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. P´olya. 不等式. 剑桥大学出版社, 1952. 264[82] A. Hastir, F. Califano, and H. Zwart. 带非线性反馈的无穷维线性系统的适定性. 《系统与控制快报》, 128:19–25, 2019年. 90[83] J. Heigel, P. Michaleris, and E. Reutzel. Ti–6Al–4V 定向能量沉积增材制造的热机械模型开发与验证. 增材制造, 5:9–19, 2015年. 90[84] D. Henry. 半线性抛物方程的几何理论. 施普林格, 柏林, 1981. 39, 40, 74, 84, 85, 89, 124, 154, 177, 223[85] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and A. R. Teel. 脉冲系统输入到状态稳定性的 Lyapunov条件. 《自动化》, 44(11):2735–2744, 2008 年 . 23, 41[86] D. J. Hill. 非线性反馈系统小增益定理的推广 . 《自动化》 , 27:1043–1045, 1991. 224[87] E. Hille and R. S. Phillips. 泛函分析与半群. 美国数学会, 普罗维登斯, R. I., 1974. 72[88] R. Hosfeld, B. Jacob, and F. L. Schwenninger. 无界双线性控制系统的积分输入到状态稳定性. 控制、信号与系统数学, 页码 1–23, 2022年. 178[89] K. Huhtala and L. Paunonen. 一类非线性流动的近似局部输出调节. 《欧洲控制杂志》, 62:136–142, 2021年. 89[90] D. Hundertmark, M. Meyries, L. Machinek, and R. Schnaubelt. 算子半群与色散方程. 载于：第 16 届演化方程网络研讨会论文集 , 2013. 72, 147[91] B. Ingalls and E. D. Sontag. 小增益定理及其在输入/输出系统、增量稳定性、可检测性和互联系统中的应用. 《富兰克林研究所杂志》, 339:211–229, 2002年. 41

[92] H. Ito. 状态依赖缩放问题与互联 iISS 系统和 ISS 系统的稳定性。《IEEE自动控制汇刊》，51:1626–1643，2006年。168, 225[93] H. Ito. iISS 在李雅普诺夫函数组合中的效用。载于：第九届 IFAC 非线性控制系统研讨会论文集，第723–730页，2013。225[94] H. Ito 和 Z.-P. Jiang. 积分输入到状态稳定系统的小增益条件：充要条件及李雅普诺夫视角。《IEEE自动控制汇刊》，54(10):2389–2404，2009年。168, 225[95] H. Ito、Z.-P. Jiang、S. Dashkovskiy 和 B. R¨uffer. iISS 系统网络的鲁棒稳定性：和型李雅普诺夫函数的构造。《IEEE自动控制汇刊》，58(5):1192–1207，2013。225[96] B. Jacob、V. Dragan 和 A. J. Pritchard. 具有非线性输出反馈的无限维时变系统。《积分方程与算子理论》，22(4):440–462，1995。90[97] B. Jacob、A. Mironchenko、J. R. Partington 和 F. Wirth. 无限维系统输入到状态稳定性的非强制李雅普诺夫函数。《SIAM 控制与优化杂志》，58(5):2952–2978，2020年。67, 88, 116, 117, 151, 154, 155[98]B. Jacob、R. Nabiullin、J. R. Partington 和 F. L. Schwenninger. 无限维输入到状态稳定性与奥利奇空间。《SIAM 控制与优化杂志》，56(2):868–889，2018年。41, 52, 88, 152, 175, 176, 177, 178[99] B. Jacob 和 J. R. Partington. 半群控制与观测算子的可容许性：综述。载于《算子理论及其应用的当前趋势》，第199–221页。Birkh¨auser Basel，2004年。53, 88[100] B. Jacob、F. L. Schwenninger 和 H. Zwart. 抛物型控制系统解的连续性与输入到状态稳定性。《微分方程杂志》，266:6284–6306，2019年。41, 52, 88, 175, 176, 177, 178[101] B. Jacob 和 S.-A. Wegner. 巴拿赫空间之外的演化方程渐近性。《半群论坛》，第91卷，第347–377页。施普林格，2015年。117[102]B. Jacob 和 H. J. Zwart. 无限维空间上的线性端口哈密顿系统。施普林格，巴塞尔，2012年。48, 49, 54, 70, 72, 89, 90, 166[103] B. Jayawardhana、H. Logemann 和 E. P. Ryan. 微分包含的输入到状态稳定性及其在滞回与量化反馈系统中的应用。《SIAM 控制与优化杂志》，48(2):1031–1054，2009年。117[104] W. Jiang、B. Liu 和 Z. Zhang. 非线性扰动下正则线性系统的鲁棒可观测性。《微分方程电子期刊》，218:1–14，2015年。90[105] Z.-P. Jiang、I. M. Y. Mareels 和 Y. Wang. 互联 ISS 系统非线性小增益定理的李雅普诺夫表述。《自动化》，32(8):1211–1215，1996。117, 224, 225

[106] Z.-P. Jiang、A. R. Teel 和 L. Praly. ISS 系统的小增益定理及其应用。《控制、信号与系统数学》，7(2):95–120，1994。41, 117, 224, 225[107] Z.-P. Jiang 和 Y. Wang. 离散时间非线性系统的输入到状态稳定性。《自动化》，37(6):857–869，2001年。41[108] M. R. Jovanovi´c 和 B. Bamieh. 某些车辆编队控制问题的不适定性。《IEEE自动控制汇刊》，50(9):1307–1321，2005。179[109] R. E. Kalman、P. L. Falb 和 M. A. Arbib. 数学系统理论专题。McGraw-Hill，纽约，1969年。41[110] W. Kang 和 E. Fridman. Kuramoto–Sivashinsky 方程的分布式采样数据控制。《自动化》，95:514–524，2018年。42[111] R. Kannan 和 C. K. Krueger. 高等分析：实直线。Springer Science & Business Media，2012年。242[112] I. Karafyllis. 广泛系统类的系统理论框架 I：在数值分析中的应用。《数学分析与应用杂志》，328(2):876–899，2007年。41[113]I. Karafyllis 和 Z.-P. Jiang. 非线性系统的稳定性与稳定化。施普林格，伦敦，2011。20, 22, 41, 134, 155, 241[114] I. Karafyllis 和 Z.-P. Jiang. 一般非线性控制系统的向量小增益定理。《IMA数学控制与信息期刊》，28:309–344，2011。23, 41, 225[115] I. Karafyllis 和 Z.-P. Jiang. 一种新小增益定理及其在恒化器稳定化中的应用。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，22(14):1602–1630，2012年。168, 225[116] I. Karafyllis 和 M. Krstic. 一维抛物型偏微分方程对边界扰动的输入到状态稳定性。《IEEE自动控制汇刊》，61(12):3712–3724，2016。41, 88, 152[117] I. Karafyllis 和 M. Krstic. 存在边界扰动的一维抛物型偏微分方程在不同范数下的输入到状态稳定性。《SIAM 控制与优化杂志》，55(3):1716–1751，2017年。88[118] I. Karafyllis 和 M. Krstic. 存在边界扰动的一维抛物型偏微分方程的衰减估计。《ESAIM控制、优化与变分法》，24(4):1511–1540，2018年。88[119] I. Karafyllis 和 M. Krstic. 某些双曲–抛物型偏微分方程环路的小增益稳定性分析。《系统与控制快报》，118:52–61，2018年。225[120] I. Karafyllis 和 M. Krstic. 偏微分方程的输入到状态稳定性。施普林格，Cham，2019年。41, 88

[121] I. Karafyllis 和 M. Krstic。基于小增益的边界反馈设计：一维半线性抛物型偏微分方程的全局指数稳定化。《SIAM 控制与优化杂志》，57(3)：2016–2036，2019年。225[122] I. Karafyllis、P. Pepe、A. Chaillet 和 Y. Wang。对于时滞系统，全局渐近稳定性是否必然是一致的？arXiv 预印本 arXiv:2202.11298，2022年。116[123] I. Karafyllis、P. Pepe 和 Z.-P. Jiang。滞后泛函微分方程所描述系统的输入到输出稳定性。《欧洲控制杂志》，14(6)：539–555，2008年。41[124] M. Kardar、G. Parisi 和 Y.-C. Zhang。生长界面的动态标度。《物理评论快报》，56(9)：889，1986 年。33[125] C. Kawan、A. Mironchenko、A. Swikir、N. Noroozi 和 M. Zamani。无限网络的基于李雅普诺夫的小增益定理。《IEEE自动控制汇刊》，66(12)：5830–5844，2021。179, 192, 195, 226[126] C. Kawan、A. Mironchenko 和 M. Zamani。非线性系统无限网络的基于李雅普诺夫函数的 ISS 小增益定理。已在线发表于《IEEE自动控制汇刊》，https://ieeexplore.ieee.org/document/9813386，2022年。206, 226[127] C. M. Kellett。比较函数结果汇编。《控制、信号与系统数学》，26(3)：339–374，2014年。241[128] H. K. Khalil。《非线性系统》。Prentice Hall，纽约，2002年。224[129] A. Y. Khapalov。反应项中乘性控制所支配的半线性抛物型方程的可控性：一种定性方法。《SIAM 控制与优化杂志》，41(6)：1886–1900，2003年。162[130] M. A. Krasnosel’skii、E. A. Lifshits 和 A. V. Sobolev。《正线性系统》——《正算子方法》。柏林：Heldermann-Verlag，1989年。247[131] M. Krichman、E. D. Sontag 和 Y. Wang。输入输出到状态稳定性。《SIAM 控制与优化杂志》，39(6)：1874–1928，2001年。41[132] M. Krstic、I. Kanellakopoulos 和 P. V. Kokotovic。《非线性与自适应控制设计》。Wiley，1995。41, 229[133] M. Krstic 和 A. Smyshlyaev。《偏微分方程的边界控制》：反步设计课程。工业与应用数学学会，费城，PA，2008年。264[134] Y. Kuramoto。反应系统中的扩散诱导混沌。《理论物理进展增刊》，64：346–367，1978年。35[135]Y. Kuramoto 和 T. Tsuzuki。反应扩散系统中耗散结构的形成：约化扰动方法。《理论物理进展》，54(3)：687–699，1975年。35

[136] D. S. Laila 和 D. Ne˘si´c。参数化互联 ISS 系统的离散时间基于李雅普诺夫的小增益定理。《IEEE自动控制汇刊》，48(10)：1783–1788，2003年。41[137] V. Lakshmikantham、S. Leela 和 A. A. Martynyuk。《非线性系统的实用稳定性》。World Scientific，1990。117[138] L. Lef`evre、D. Georges、Z. Emirsjlow 和 S. Townley。关于“从具有边界控制的偏微分方程到带无界输入算子的抽象状态方程：教程”的讨论。《欧洲控制杂志》，6(1)：50–53，2000年。90[139] H. Lhachemi、D. Saussie、G. Zhu 和 R. Shorten。存在分布式扰动和边界扰动时固支-自由阻尼弦的输入到状态稳定性。《IEEE自动控制汇刊》，65(3)：1248–1255，2020年。88, 177, 178[140] H. Lhachemi 和 R. Shorten。一类 Riesz 谱边界控制系统关于边界扰动的 ISS 性质。《自动化》，109：108504，2019年。88, 177, 178[141]H. Li、R. Baier、L. Gr¨une、S. Hafstein 和 F. Wirth。通过线性规划计算具有低增益的局部ISS李雅普诺夫函数。可访问：https://hal.inria.fr/hal-01101284，2015年。126[142] D. Liberzon、D. Nesic 和 A. R. Teel。混杂系统的基于李雅普诺夫的小增益定理。《IEEE自动控制汇刊》，59(6)：1395–1410，2014年。41[143] Y. Lin、E. D. Sontag 和 Y. Wang。鲁棒稳定性的光滑李雅普诺夫逆定理。《 SIAM 控制与优化杂志》，34(1)：124–160，1996。115, 155, 229, 242[144] W. Littman。Datko 和 Pazy 定理的推广。载于《计算与控制进展》，第318–323页。施普林格，1989年。154[145] J. Liu、X. Liu 和 W.-C. Xie。带时滞的脉冲和切换混杂系统的输入到状态稳定性。《自动化》，47(5)：899–908，2011。41[146] T. Liu、Z.-P. Jiang 和 D. J. Hill。混杂动力网络 ISS 循环小增益定理的李雅普诺夫表述。《非线性分析：混合系统》，6(4)：988–1001，2012年。41[147] T. Liu、Z.-P. Jiang 和 D. J. Hill。《动态网络的非线性控制》。CRC Press，2014年。154, 225, 229[148]W.-J. Liu 和 M. Krsti´c。通过边界控制增强 Kuramoto-Sivashinsky 方程的稳定性。《非线性分析：理论、方法与应用》，43(4)：485–507，2001。37, 42, 264, 266[149] A. Lunardi。《抛物型问题中的解析半群与最优正则性》。Springer Science & Business Media，2012年。84

[150] I. M. Y. Mareels 和 D. J. Hill. 非线性反馈系统的单调稳定性。《数学系统、估计与控制期刊》，2:275–291，1992年。224[151] F. Mazenc 和 C. Prieur. 半线性抛物型偏微分方程的严格李雅普诺夫函数。《数学控制与相关领域》，1(2):231–250，2011。141, 168[152] P. Meyer-Nieberg. 巴拿赫格。Springer Science & Business Media, 2012年。246[153] A. Mironchenko. 局部输入到状态稳定性：刻画与反例。《系统与控制快报》，87:23–28，2016。116, 154[154] A. Mironchenko. 一致弱吸引性与实用全局渐近稳定性判据。《系统与控制快报》，105:92–99，2017。96, 116[155] A. Mironchenko. 输入到状态实用稳定性判据。《IEEE自动控制汇刊》，64(1):298–304，2019。106, 117[156]A. Mironchenko. 可积输入下无限维系统输入到状态稳定性的李雅普诺夫函数。载于 IFAC-PapersOnLine，第53卷，第5336–5341页，2020。31[157] A. Mironchenko. 无限网络的非一致ISS小增益定理。《IMA数学控制与信息期刊》，38(4):1029–1045，2021。116[158] A. Mironchenko. 异质无限维系统一般网络的小增益定理。《SIAM 控制与优化杂志》，59(2):1393–1419，2021。116, 190, 198, 225[159] A. Mironchenko. 半线性边界控制系统的适定性及其流的性质。已投稿，2022年。88, 90[160] A. Mironchenko. 输入到状态稳定性。已获 Springer通信与控制工程丛书录用，2023年。17, 41, 59, 95, 178, 211, 216, 225, 229, 230, 233, 241[161] A. Mironchenko 和 H. Ito. 互联系统抛物系统的李雅普诺夫函数构造：iISS方法。《SIAM 控制与优化杂志》，53(6):3364–3382，2015。178, 220, 225[162] A. Mironchenko 和 H. Ito. 无限维双线性系统积分输入到状态稳定性的刻画。《数学控制与相关领域》，6(3):447–466，2016。30, 155, 162, 178[163] A. Mironchenko、I. Karafyllis 和 M. Krstic. 带边界扰动的非线性抛物型偏微分方程输入到状态稳定性的单调性方法。《SIAM 控制与优化杂志》，57(1):510–532，2019。41, 152[164] A. Mironchenko、C. Kawan 和 J. Gl¨uck. 无限互联系统输入到状态稳定性的非线性小增益定理。《控制、信号与系统数学》，33:573–615，2021。179, 206, 208, 225

[165] A. Mironchenko、N. Noroozi、C. Kawan 和 M. Zamani. 具有线性增益函数的无限网络ISS小增益判据。《系统与控制快报》，157:105051，2021。179, 226[166] A. Mironchenko 和 C. Prieur. 无限维系统的输入到状态稳定性：近期成果与开放问题。SIAM评论，62(3):529–614，2020。41, 71, 88, 155, 178[167]A. Mironchenko、C. Prieur 和 F. Wirth. 通过饱和控制对不稳定抛物型方程进行局部稳定化。《IEEE自动控制汇刊》，66(5):2162–2176，2021。90[168] A. Mironchenko 和 F. Wirth. 关于线性和双线性无限维系统输入到状态稳定性的一则注记。载于第54届 IEEE 决策与控制会议论文集，第495–500页，2015。162, 178[169] A. Mironchenko 和 F. Wirth. 时滞系统的输入到状态稳定性：判据与开放问题。载于第56届 IEEE 决策与控制会议论文集，第3719–3724页。IEEE，2017。116[170] A. Mironchenko 和 F. Wirth. 无限维系统输入到状态稳定性的刻画。《IEEE自动控制汇刊》，63(6):1602–1617，2018。41, 67, 116, 117, 155, 225, 229[171] A. Mironchenko 和 F. Wirth. 巴拿赫空间上半线性控制系统输入到状态稳定性的李雅普诺夫刻画。《系统与控制快报》，119:64–70，2018。154, 155[172] A. Mironchenko 和 F. Wirth. 非强制李雅普诺夫函数的存在等价于积分一致全局渐近稳定性。《控制、信号与系统数学》，31(4):1–26，2019。101, 116, 154, 182[173]A. Mironchenko 和 F. Wirth. 无限维系统的非强制李雅普诺夫函数。《微分方程杂志》，105:7038–7072，2019。31, 116, 154[174] A. Mironchenko、G. Yang 和 D. Liberzon. 不一定具有ISS性质的混杂系统网络的李雅普诺夫小增益定理。《自动化》，88:10–20，2018。41[175] G. A. Mu˜noz、Y. Sarantopoulos 和 A. Tonge. 实巴拿赫空间的复化、多项式与多重线性映射。《数学研究》，134(1):1–33，1999。247[176] J. D. Murray. 数学生物学：II 空间模型与生物医学应用。施普林格，纽约，第三版，2003。262, 266[177] R. Nabiullin 和 F. L. Schwenninger. 无限维线性系统的强输入到状态稳定性。《控制、信号与系统数学》，30(1):4，2018。116

[178] V. Natarajan 和 J. Bentsman。非线性分布参数系统的近似局部输出调节。《控制、信号与系统数学》，28(3):1–44，2016。89[179] V. Natarajan、H.-C. Zhou、G. Weiss 和 E. Fridman。利用往返迭代实现一类非线性分布参数系统的精确能控性。《国际控制杂志》，92(1):145–162，2019。89[180] B. Nicolaenko、B. Scheurer 和 R. Temam。Kuramoto-Sivashinsky 方程的一些全局动力学性质：非线性稳定性与吸引子。《物理学 D：非线性现象》，16(2):155–183，1985。35[181] N. Noroozi、A. Khayatian 和 H. R. Karimi。具有参数化离散时间互联系统的一族系统的半全局实用积分型输入到状态稳定性及其在采样数据控制系统中的应用。《非线性分析：混合系统》，17:10–24，2015。117[182] N. Noroozi、A. Mironchenko、C. Kawan 和 M. Zamani。无限网络集合稳定性的小增益定理：时变网络的分布式观测与输入到状态稳定性。《欧洲控制杂志》，67:100634，2022。226[183] J. Oostveen。《强可稳定分布参数系统》。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，2000。106[184] A. A. Paranjape、J. Guan、S. J. Chung 和 M. Krstic。机器人飞机柔性铰接机翼的偏微分方程边界控制。《IEEE机器人学汇刊》，29(3):625–640，2013。90[185] P. M. Pardalos 和 V. Yatsenko。《双线性系统的优化与控制》。施普林格，波士顿，马萨诸塞州，2008。162[186] A. Pazy。《线性算子半群及其在偏微分方程中的应用》。施普林格，纽约，1983。71，74，80，84，89，143，147[187] P. Pepe。关于一致收敛到原点的 Halanay 不等式的一个非线性版本。《数学控制与相关领域》，2021。242[188] C. Prieur、S. Tarbouriech 和 J. M. G. da Silva。具有锥有界控制律的波动方程。《IEEE自动控制汇刊》，61(11):3452–3463，2016。90[189] H. Ramirez、H. Zwart 和 Y. Le Gorrec。通过非线性动态边界控制实现无限维端口哈密顿系统的稳定化。《自动化》，85:61–69，2017。90[190] J. Rawlings 和 M. Risbeck。关于采用 epsilon-delta 表述的命题与 K 函数之间的等价性。技术报告，2015。241[191] H. Royden 和 P. Fitzpatrick。《实分析》。Prentice Hall，2010。55[192] B. R¨uffer。《单调动力系统、图与大规模互联系统的稳定性》。博士论文，不来梅大学数学与信息学系第3系，2007。241

[193] B. S. R¨uffer。欧几里得 n维空间正正交象限中的单调不等式、动力系统与路径。Positivity，14(2):257–283，2010。200[194] B. S. R¨uffer。最大值保持映射的非线性左右特征向量。载于《正系统》，控制与信息科学讲义第471卷，第227–237页。施普林格，Cham，2017。207[195] P. L. Sachdev。《非线性扩散波》。剑桥大学出版社，1987。33[196] S. Saks。《积分理论》。Courier Corporation，1947年。238[197] D. Salamon。具有无界控制和观测的无限维线性系统：一种泛函分析方法。美国数学会汇刊，300(2):383–431，1987。90[198] H. H. Schaefer。《巴拿赫格与正算子》。施普林格，柏林，1974。246[199] J. Schmid。非自治半线性输入输出系统的适定性与稳定性。演化方程与控制理论，2022年。90[200] J. Schmid 和 H. Zwart。在存在扰动的情况下通过非线性边界控制实现端口哈密顿系统的稳定化。ESAIM：《控制、优化与变分法》，27，2021年。90[201] F. L. Schwenninger。抛物型边界控制的输入到状态稳定性：线性与半线性系统。载于《无限维系统控制理论》，第83–116页。施普林格，2020年。41，42，70，71，72，73，79，86，89，90[202] Y. Sharon 和 D. Liberzon。适用于粗量化系统的输入到状态稳定控制器。《IEEE自动控制汇刊》，57(4):830–844，2012。117[203] S. Singh、G. Weiss 和 M. Tucsnak。一类增量散射无源非线性系统。《自动化》，142:110369，2022年。90[204] G. Sivashinsky。层流火焰中流体动力学不稳定性的非线性分析——I. 基本方程的推导。Acta Astronautica，4:1177–1206，1977年。35[205] E. D. Sontag。光滑稳定化蕴含互素因子分解。《IEEE自动控制汇刊》，34(4):435–443，1989。41，111，225[206] E. D. Sontag。关于 ISS 积分变体的评述。《系统与控制快报》，34(1-2):93–100，1998年。41，116，117，157，162，178，231，241[207] E. D. Sontag。输入到状态稳定性：基本概念与结果。载于《非线性与最优控制理论》，第3章，第163–220页。施普林格，海德堡，2008年。41，178[208] E. D. Sontag 和 M. Krichman。一个可被可积扰动去稳定化的全局渐近稳定系统的例子。《IEEE自动控制汇刊》，48(6):1046–1049，2003年。41

[209] E. D. Sontag 和 Y. Wang. 输入到状态稳定性特性的刻画。《系统与控制快报》，24(5):351–359，1995。30, 116, 131, 135, 155, 231[210] E. D. Sontag 和 Y. Wang. 输入到状态稳定性的新刻画。《IEEE自动控制汇刊》，41(9):1283–1294，1996。116, 117, 154, 225, 229, 230[211] E. D. Sontag 和 Y. Wang. 非线性系统的输出到状态稳定性与可检测性。《系统与控制快报》，29(5):279–290，1997。41[212] O. Staffans. 适定线性系统。剑桥大学出版社，2005。89[213] S. Sternberg. 实变量函数理论。哈佛大学，电子版可获取，2005。252[214] J. Szarski. 微分不等式。波兰科学出版社 PWN，波兰华沙，1965。238[215] A. Tanwani、S. Marx 和 C. Prieur. 有界反馈下的一维线性反应扩散方程的局部输入到状态稳定化。载于：第23届国际网络与系统数学理论研讨会论文集，第576–581页，2018。90[216] A. Tanwani、C. Prieur 和 S. Tarbouriech. 边界控制线性双曲型偏微分方程在 h^1 范数下的输入到状态稳定化及其在量化控制中的应用。载于：第55届 IEEE 决策与控制会议论文集，第3112–3117页，2016。33[217] A. Tanwani、C. Prieur 和 S. Tarbouriech. 存在测量误差的线性双曲型平衡律系统的稳定化。载于《计算与通信约束下的控制》，第357–374页。施普林格，2018。155[218] A. R. Teel. Razumikhin 型定理与 ISS 非线性小增益定理之间的联系。《IEEE自动控制汇刊》，43(7):960–964，1998。116, 117[219] A. R. Teel 和 L. Praly. 由涉及两个正半定函数的类函数估计构造光滑李雅普诺夫函数。ESAIM：《控制、优化与变分法》，5:313–367，2000。241[220] G. Teschl. 常微分方程与动力系统。美国数学会，2012。253[221] S. Tiwari、Y. Wang 和 Z. P. Jiang. 大规模时滞系统的非线性小增益定理。《连续、离散与脉冲系统动力学》A辑：数学分析，19(1):27–63，2012。225[222]M. Tucsnak 和 G. Weiss. 算子半群的观测与控制。Birkh¨auser Basel，2009。43, 53, 73, 86, 88, 89, 90, 176

[223] M. Tucsnak 和 G. Weiss. 适定系统——线性时不变情形及其拓展。《自动化》，50(7):1757–1779，2014。89, 90[224] A. van der Schaft 和 D. Jeltsema. 端口哈密顿系统理论：入门概述。《系统与控制基础与趋势》，1(2-3):173–378，2014。90[225] J. van Neerven. 线性算子半群的渐近行为。Birkh¨auser Basel，1996。154[226] J. L. V´azquez. 多孔介质方程：数学理论。牛津大学出版社，2007。89[227] L. Vu、D. Chatterjee 和 D. Liberzon. 切换系统的输入到状态稳定性与切换自适应控制。《自动化》，43(4):639–646，2007。41[228] G. Weiss. 无界控制算子的可容许性。《SIAM 控制与优化杂志》，27(3):527–545，1989。43, 52, 54, 80, 88[229] J. C. Willems. 耗散动力系统第一部分：一般理论。《理性力学与分析档案》，45(5):321–351，1972。31, 41[230] J. C. Willems. 耗散动力系统第二部分：具有二次供给率的线性系统。《理性力学与分析档案》，45(5):352–393，1972。31, 41[231] S. Yang、B. Shi 和 S. Hao. 时滞离散时间非线性脉冲系统的输入到状态稳定性。《国际鲁棒与非线性控制杂志》，23(4):400–418，2013。41[232] C.-R. Zhao 和 X.-J. Xie. 利用小增益方法和降阶观测器对随机非线性系统进行输出反馈镇定。《IEEE自动控制汇刊》，58(2):523–529，2013。117[233] J. Zheng 和 G. Zhu. 基于 De Giorgi 迭代的方法：建立存在边界和域内扰动的 Burgers方程的 ISS 特性。《IEEE自动控制汇刊》，64(8):3476–3483，2018。41[234] J. Zheng 和 G. Zhu. 一类半线性抛物方程相对于边界扰动的输入到状态稳定性。《自动化》，97:271–277，2018。39, 41, 42, 264[235] J. Zheng 和 G. Zhu. 基于弱极大值原理的非线性抛物型偏微分方程边界扰动输入到状态稳定性分析方法。《控制、信号与系统数学》，32:157–176，2020。41

索引

L^p，251$\mathcal{K}_\infty$-不等式，
234Ω路径，212q-
黎斯基，
1770-GAS，
920-GATT，
91LIM，910-
UAS，920-UGAS，
230-UGATT，
920-UGS，
910-ULS，91

渐近增益，94零点全局吸引
性的一致吸引性，92零点全
局吸引性，91一致全局，
133

巴拿赫格，246BECS，
158BIC，22有界可达集，
21有界可达集，21bUAG，
94bULIM，95

因果性，20类$\mathcal{K}$，
233$\mathcal{KL}$，233$\mathcal{K}_\infty$，
233$\mathcal{L}$，233$\mathcal{P}$，
233比较函数，
233原理，239锥

生成的，244 正规，244
全的，244 具有非空内部，
245 控制系统，19 抽象线性，
44 单调，248 关于输入单调，
248 有序，247 Dini 导数，
238 Lie，26 弱，256 Dini 导
数，238 直接 Lyapunov 定理，
27 对偶楔，247 指数输入到状
态稳定性，23 指数输入到状态
稳定性 Lyapunov 函数，26
方程 Burgers’，33
Kuramoto-Sivashinskiy，
35 反应扩散，37 输运，32 平
衡点，27 平衡点，27 反馈互
联，180 流映射，61 前向完备
性，21 鲁棒，133 凸函数，
253 指数输入到状态稳定性
Lyapunov，26 输入到状态稳
定性 Lyapunov，26 利普希茨
连续，55 局部输入到状态稳定
性 Lyapunov，26

单调，246单调聚合，210
正，246正定，233，235适
当，235径向无界，235严
格单调，246严格为正，
246强正，246

积分输入到状态稳定性，157 不等式：
Agmon 不等式，264；
Cauchy-Schwarz 不等式，254；
Friedrichs 不等式，262；广义
Gronwall 不等式，253；广义 H¨
older 不等式（积分形式），254；H¨
older 不等式（积分形式），254；
Jensen 不等式（积分形式），255；
Minkowski 不等式（积分形式），
254；Poincare 不等式，263；弱三角
不等式，234；Young 不等式，253 输
入空间，19 输入到状态稳定性，22 指
数，23；积分，157；积分到积分，
102；局部，23；范数到积分，102；
实用，106；半最大值表述，181；强，
106；强积分，161；求和形式，183；
关于小输入，161 输入到状态实用稳定
性，106 输入到状态稳定性，22 ISS 李
雅普诺夫函数，26 ISS小增益定理：线
性，190；半最大值表述，186、187；
求和形式，191；轨迹形式，186

LIM，95零点极限性质，
91

局部输入到状态稳定性，23 LISS李
雅普诺夫函数，26 李雅普诺夫函数
积分输入到状态稳定性，160 非强制
的输入到状态稳定性，119 单调聚合
函数，210 最大存在时间，61
MBI，185 MLIM，185 单调聚合函
数，210 无共同递增条件，195 范数
单调，244 半单调，244 OBS，244
算子q-可容许，50 增益，211 一次齐
次，200 无限时间 q-可容许，52
Kleene星，207 Riesz谱，177 次可
加，200 迹，260 序区间，244 有序
巴拿赫空间，244 有序向量空间，
244 OVS，244 偏序，243 偏预序，
243 Picard-Lindel¨of 定理，56 正
锥，243 性质 一致渐近增益，94 渐
近增益，94 有界能量收敛状态，
158 有界输入一致渐近

c
增益，94有界性蕴含延续
，
22CEP，67余循环，20收敛
输入—一致收敛状态 (CIUCS)，
24

恒等映射，20极限，95单调有界可逆性，185单调极限，185强渐近增益，94强极限，95一致极限，95有界集上一致极限，95

RFC，133

sAG，94 半群非线性，20 sISS，106 sLIM，95 小增益条件，195 鲁棒，197 鲁棒强，197 强，197 一致，195 常微分方程系统的李雅普诺夫表述中的小增益定理，212，216 索об列夫共轭指数，261 解延拓，61 全局的，61 极大的，61 温和的，55，76 Sontag 的 $\mathcal{KL}$-引理，235 空间 H¨older，258 索об列夫，259 输入值空间，19 稳定性

零点一致，91 零点一致全局吸引性，91 指数输入到状态稳定性，23 零点全局渐近吸引性，92 全局李雅普诺夫，133 输入到状态稳定性，22 局部输入到状态稳定性，23 零点一致渐近吸引性，92 一致全局，92 一致全局渐近稳定，133 零点一致全局渐近吸引性，23 一致局部，92 弱一致鲁棒渐近，134 状态空间，19 强传递闭包，207 对角系统，151 离散时间，248 适定，61 直接李雅普诺夫定理，27 ISS 叠加，96 Picard-Lind¨of，56 一致渐近增益，94 一致全局渐近稳定，133 一致全局吸引，133 一致全局有界，92 一致全局稳定，92 ULIM，95 一致局部稳定，92 一致全局有界性，92 楔子，243 WURS，134