# 加权团队可定义性的参数化复杂度

**Juha Kontinen**
赫尔辛基大学数学与统计学系，芬兰
**Yasir Mahmood**
理论计算机科学研究所，汉诺威莱布尼茨大学，德国
**ArneMeier** !
理论计算机科学研究所，汉诺威莱布尼茨大学，德国
**Heribert Vollmer**
理论计算机科学研究所，汉诺威莱布尼茨大学，德国

arXiv:2302.00541v1 [cs.LO] 1 Feb 2023

**摘要**

本文研究了具有团队语义的逻辑中加权团队可定义性的复杂性。这个问题是参数化复杂性中研究最广泛的问题之一——加权Fagin可定义性——的自然类比；后者是通过满足含有自由关系变量的一阶公式来表述的。我们关注固定公式 $\varphi$ 在核心基于团队的逻辑中的加权团队可定义性的参数化复杂度。给定一个一阶结构$\mathcal{A}$ 和作为输入的参数值 $k \in \mathbb{N}$，问题是要确定是否存在一个大小为 $k$的团队 $T$，使得$\mathcal{A}$ $T \models \varphi$。我们针对依赖逻辑、独立逻辑和包含逻辑公式，给出了这一问题复杂性的若干结果。此外，我们还将加权团队可定义性的复杂性与著名的 W-层级中的复杂性类以及 paraNP 联系起来。

**2012年 ACM主题分类** 计算理论 → 问题、归约与完备性；计算理论 → 数据建模

**关键词与短语** 参数化复杂性、描述复杂性、加权可定义性、团队语义、依赖逻辑、独立逻辑、包含逻辑

**资助** *Juha Kontinen*：部分由芬兰科学院资助，资助项目编号为 338259*Arne Meier*：部分由德国科学基金会资助，资助项目编号为 ME 4279/3-1*Heribert Vollmer*：部分由德国学术交流中心资助，项目编号为 57570031

## 1 引言

本文研究团队语义下逻辑的加权团队可定义性的参数化复杂性。团队可定义性是 Fagin可定义性概念的一种自然类比，其加权版本可用于刻画参数化复杂性中的 W-层级 [2]。我们给出了依赖逻辑、独立逻辑和包含逻辑公式这一问题复杂性的若干结果。

如今已确立的依赖逻辑和独立逻辑，其起源可追溯至 2007 [24]依赖逻辑的引入。在团队语义中，公式由赋值集合（团队）解释，而非像一阶逻辑的塔斯基语义那样由单个赋值解释。在句法上，依赖逻辑通过新的依赖原子公式（依赖原子）$\mathrm{dep}(\mathbf{x}; y)$扩展一阶逻辑，表达变量 $\mathbf{x}$ 的值在所考虑的团队中函数决定变量 $y$ 的值。独立逻辑和包含逻辑则通过独立原子 $\mathbf{x} \perp_{\mathbf{z}} \mathbf{y}$ 和包含原子 $\mathbf{x} \subseteq \mathbf{y}$ 进一步扩展一阶逻辑，它们本质上分别对应数据库理论中的嵌入式多值依赖和包含依赖 [9, 7]。

对于这些应用，理解基于团队的逻辑在复杂性理论方面的特征非常重要。在过去十年中，关于一阶（也包括命题{v1}模态{v2}时态{v3}和概率{v4}）团队语义中逻辑的表达力和复杂性理论方面的

研究一直十分广泛（例如参见 [14, 19, 13, 4]）。这些研究的基础是众所周知的结果：依赖逻辑和独立逻辑的句子等价于存在二阶逻辑，而包含逻辑对应于正向最大不动点逻辑，因此在有限（有序）结构上捕获**P** [8]。在团队语义中，关于该逻辑句子的结果并不能立即推广到开放公式。特别地，依赖逻辑的开放公式在表达力上对应于带有一个额外关系的$\mathcal{ESO}$句子，该关系编码句子中仅以否定方式出现的团队 [18]。对于独立逻辑，可以取消这一否定性要求 [7]。对于包含逻辑，类似的结果表明，任意真值在 $R$-并集下保持不变的一阶句子 $\varphi$（$R$）都可以由一个包含逻辑公式 $\varphi^*$（$\mathbf{x}$）表示。换言之，对于所有$\mathcal{A}$ 和团队 $T \neq \emptyset$:

$$\mathcal{A}, T \models \varphi^*(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi(\mathrm{rel}(T)/R),$$

其中 rel($T$) 是一个对团队 $T$ [8] 进行编码的关系。这些结果可用于将加权团队可定义性与加权 Fagin 可定义性联系起来。不过，值得注意的是，由于本文所讨论的逻辑具有更强的表达能力，公式的句法复杂度通常并不与该公式的模型检验复杂度相关。具体而言，任何依赖与独立逻辑公式在逻辑上都等价于一个具有 $\forall\exists$量词前缀的公式 [24, 定理 6.15] [18, 定理 4.9]。

参数化复杂性框架 [1] 为深入理解计算问题固有的难处理性提供了一种形式化方法。在这一框架中，目标是找到与实际应用相关的参数，使得问题能够通过运行时间为 $f(k) \cdot n^{O(1)}$ 的算法求解，其中 $f$ 是某个可计算函数，$k$ 是参数值，$n$ 是输入长度。运行时间具有这种形式的问题称为固定参数可处理（FPT），对应于参数化情形下的高效计算。能够由非确定性机器在运行时间为 $f(k) \cdot n^{O(1)}$ 的范围内求解的问题属于复杂性类 paraNP $\supseteq$ FPT。此外，通过限制非确定性的数量，可以研究一个子类 W[P] $\subseteq$ paraNP。复杂性类 W[P] 由这样的非确定性机器定义：其非确定性步骤至多为 $h(k) \cdot \log n$ 次，其中 $h$ 是一个可计算函数。FPT 与 W[P], 之间包含一个据推测无限的 W-层级：FPT $\subseteq$ W[1] $\subseteq$ W[2] $\subseteq \cdots \subseteq$ W[P]。目前尚不清楚这些包含关系中是否有任何一个是严格的。直观而言，证明一个问题具有 W[1]-困难性，就相当于表明它在参数化领域中难以处理。

**我们的贡献** 我们定义并研究了关于若干种基于团队的逻辑公式的加权团队可定义性的参数化复杂度。此外，我们还确立了该框架与加权 Fagin 可定义性问题之间的关系。更具体地说，我们探讨了参数化情形下依赖逻辑、独立逻辑和包含逻辑公式及句子的加权团队可定义性的复杂性。由此，我们为上述核心参数化复杂性类，即 **W**-层次、**W**[**P**],以及 **paraNP**，证明并获得了新的逻辑刻画和新的完全问题。表 1 概述了我们关于加权团队可定义性的部分结果。

**相关工作** 此前已有研究探讨基于团队的逻辑中固定一阶公式的满足团队计数与枚举问题的复杂性 [11, 12]。此外，近期也有关于命题团队逻辑和

| 逻辑 | $\exists\varphi_t$ 使得 p-WT$\varphi_t$ 是 | 条件 | 结果 |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{FO}$ | 在 TC$^0$ | 无参数化，所有公式 | 定理 9 |
| 一阶逻辑 ($\subseteq$) | 属于 固定参数可处理/W[P] | 所有句子 / 所有公式 | 定理 10/定理 16 |
| | **W**[1]-困难， $\in$**W**[2] | 任意无量词公式，不含 $\vee$ | 推论 12 |
| | **W**[$t$]-完全 | 对于所有偶数 $t \in \mathbb{N}$ | 推论 15 |
| 一阶逻辑(依赖) | **W**[$t$]-完全 | 对于所有奇数 $t \in \mathbb{N}$ | 推论 21 |
| | **paraNP**-完全 | 句子 / 公式 | 定理 17/定理 22 |
| 一阶逻辑 ($\perp$) | **W**[$t$]-完全 | 对所有 $t \in \mathbb{N}$ | 定理 23 (1.) |
| | **W**[**P**]-完全 | 公式 | 定理 23 (2.) |
| | **paraNP**-完全 | 句子 / 公式 | 定理 23 (3.) / (4.) |

**表 1** 关于加权团队可定义性结果的部分概述，并附有相应定理或推论的指引。

一阶团队逻辑的参数化复杂性、模型检验与可满足性的研究 [22, 20, 21, 17]。在描述复杂性方面，Downey 等人 [2] 探讨了**W**-层级中各复杂性类的逻辑刻画。

## 2 预备知识

我们要求读者对经典复杂性理论中的标准概念有基本了解 [23]。本文主要涉及的经典复杂性类是 **P** 和 **NP** ，以及它们各自的完备性概念，并采用多项式时间多对一归约（$\leq_m^{\mathbf{P}}$）。此外，我们假设读者熟悉基本的一阶（谓词）逻辑 [5]。下面，我们定义几个与本文结果相关的重要一阶公式类。

**一阶公式类** 所有一阶公式组成的类记为 一阶逻辑。设 $\tau$ 是一个关系词汇表， $R \in \tau$ 是一个元数为 $r$ 的关系符号。原子公式是形如 $x = y$ 或 $R(x_1, \ldots\ldots, x_r)$ 的公式。文字是原子公式或原子公式的否定。无量词公式是不含量词的公式；若否定符号只出现在原子公式之前，则公式处于否定范式（NNF）。公式 $\varphi$ 处于前束范式，当且仅当 $\varphi$ 的形式为 $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$，其中 $\psi$ 是无量词公式，且 $Q_1, \ldots\ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$。类 $\Sigma_0$ 和 $\Pi_0$ 都由无量词公式构成。于是，对于 $t \geq 0$，类 $\Sigma_{t+1}$ 包含所有形如 $\exists x_1 \ldots \exists x_\ell \varphi$ 的公式，其中 $\varphi \in \Pi_t$。类似地， $\Pi_{t+1}$ 包含所有形如 $\forall x_1 \ldots \forall x_\ell \varphi$ 的公式，其中 $\varphi \in \Sigma_t$。

**Fagin 可定义性** 一阶变量的取值范围是论域中的个体元素。在二阶逻辑中，我们还可以对关系变量进行量化，其取值范围是论域上的关系。现在我们引入一阶公式，同时也允许使用关系变量。设$\tau$为一个词汇表， $X_i$ 为 $i \leq n$ 个自由关系变量，其元数为 $s_i$，且 $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$是 $\tau$中的一个一阶逻辑公式。此外，设$\mathcal{A}$为一个 $\tau$-结构， $S_i \subseteq A^{s_i}$为$\mathcal{A}$上的关系，其中 $i \leq n$。那么，如果$\mathcal{A} \models \varphi(S)$，我们就称元组 $S = (S_1, \ldots, S_n)$是$\mathcal{A}$中 $\varphi$ 的一个解。我们将以下判定问题称为由 $\varphi$*Fagin* 定义的的问题。

| | |
|---|---|
| **问题:** | FD$_\varphi$ —固定 $\varphi \in$一阶逻辑下的 Fagin 可定义性 |
| **输入:** | 一个 $\tau$-结构 $\mathcal{A}$。 |
| **问题:** | $\varphi$ 在$\mathcal{A}$中有解吗? |

设 $\Theta \subseteq$一阶逻辑为一个公式类，则用 FD-$\Theta$ 表示所有满足 $\varphi \in \Theta$的 FD$_\varphi$ 问题所组成的类。关于一阶逻辑，以下结果已为人所知。

▶ **命题 1** ([6, 推论 4。35])。**NP** $=$ FD-一阶逻辑 $=$ FD-$\Pi_2$。

接下来，我们介绍 Fagin 可定义性的以下加权 版本，其中我们将解限制为具有特定大小的单个自由关系符号 $S$，其元数为 $s$。

| | |
|---|---|
| **问题:** | WD$_\varphi$ —固定 $\varphi \in$一阶逻辑的加权 Fagin 可定义性 |
| **输入:** | 一个 $\tau$-结构 $\mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。 |
| **问题:** | 是否存在一个基数为 $k$ 的 $\varphi$ 解? |

如前所述，对于一类 $\Theta \subseteq$一阶逻辑 公式，我们将 WD-$\Theta$ 定义为所有满足 $\varphi \in \Theta$ 的 WD$_\varphi$ 问题所构成的类。

▶ **例 2.** Clique 问题定义如下。给定一个图 $\mathcal{G} := (V, E)$ 和$k \in \mathbb{N}$。是否存在一个集合 $S \subseteq V$，使得 $|S| = k$，并且对于每个 $x, y \in S$，$(u, v) \in E$? 那么 Clique 是 WD$_{\varphi_c}$，其中

$$\varphi_c(X) := \forall x \forall y \big((X(x) \wedge X(y) \wedge x \neq y) \rightarrow E(xy)\big).$$

因此，Clique 属于 WD-$\Pi_1$。

此外，令支配集问题为：判断图 $\mathcal{G}$ 是否包含一个集合$S \subseteq V$，使得 $|S| = k$，并且 $V \setminus S$ 中的每个顶点都与某个顶点 $S$相邻? 那么，支配集属于 WD-$\Pi_2$，因为该问题是 WD$_{\varphi_d}$，其中

$$\varphi_d(X) := \forall x \exists y \big(X(y) \wedge (E(x, y) \vee x = y)\big).$$

参数化复杂性理论 参数化问题（PP） $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 是字母表与自然数集的笛卡尔积的一个子集。对于一个实例 $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$，$k$ 称为（取值为）参数。参数化函数是一个可在多项式时间内计算的函数，它将 $x \in \Sigma^*$ 中的一个值映射到其对应的 $k \in \mathbb{N}$。如果存在一个确定性算法 A 和一个可计算函数 $f$，使得对于所有 $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$，算法 A 都能正确判定 $(x, k) \in P$的归属性，且运行时间为 $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$，则称问题 $P$ 是固定参数可处理的（或属于固定参数可处理类 FPT）。如果算法 A 在确定性图灵机上以时间 $|x|^{f(k)}$ 运行，则问题 $P$属于 XP 类。稍微滥用一下记号，我们用 C-图灵机表示判定复杂性类 C 中语言的图灵机类型；如果一个函数 $f$ 可由一台受复杂性类 C 的资源界约束的图灵机计算，我们就称它是 C-可计算的。paraNP 类包含由非确定性算法 A 判定的问题，其中 A 的运行时间为 $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$，其中 $f$是某个可计算函数。可以通过对参数进行预计算，定义与复杂性类 C 对应的参数化复杂性类 paraC。

▶**定义 3**。 设 $C$ 是任意复杂性类。那么 para$C$ 是由所有满足以下条件的 $PP$ $P \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 构成的类：存在一个可计算函数 $\pi$： $\mathbb{N} \rightarrow \Delta^*$ 以及一个语言 $L \in C$，满足$L \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$ 对于所有 $(x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$，都有 $(x, k) \in P \Leftrightarrow (x, \pi(k)) \in L$。

注意，**paraP** =**固定参数可处理**，而 **paraNP** 的两种定义是等价的。

若一个问题 $P$ 属于复杂性类 $\mathbf{W}[\mathbf{P}]$, ，则它可以由一台非确定性图灵机在时间 $f(k)\cdot|x|^{O(1)}$ 步内判定，且非确定性步骤至多为 $g(k)$ 步，其中 $f$，$g$ 是可计算函数。此外，$\mathbf{W}[\mathbf{P}]$ 包含于 paraNP 和 **paraNP** 与**XP** 的交集中（详情参见 Flum 和 Grohe 的教材 [6]）。

设 $c\in\mathbb{N}$ 和 $P\subseteq\Sigma^*\times\mathbb{N}$ 为一个参数化问题（PP），则其 $c$-切片 $P$（记作 $P_c$）定义为$P_c:=\{(x,\ k)\in\Sigma^*\times\mathbb{N}\mid k=c\}$。注意，$P_c$ 此时是一个经典问题。

▶ 定义 *4.* 设 $P\subseteq\Sigma^*\times\mathbb{N}, Q\subseteq\Gamma^*$ 为两个参数化问题（*PP*）。若存在一个固定参数可计算函数 $f\colon\Sigma^*\times\mathbb{N}\to\Gamma^*\times\mathbb{N}$，使得对所有 $(x,k)\in\Sigma^*\times\mathbb{N}$，都有 $(x,k)\in P\Leftrightarrow f(x,k)\in Q$，并且存在一个可计算函数 $g\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对所有 $(x,k)\in\Sigma^*\times\mathbb{N}$ 以及$f(x,k)=(x',k')$，都有 $k'\le g(k)$，则称 $P$固定参数可归约到$Q$, $P\le^{\mathbf{FPT}}Q$。

最后，为了证明一个问题 $P$ 是**para**$\mathcal{C}$-困难的（对于某个复杂性类$\mathcal{C}$），只需证明对于某个 $c\in\mathbb{N}$，切片 $P_c$ 在经典设定下是$\mathcal{C}$-困难的。

为了定义$\mathbf{W}$-层级中的复杂性类，现在将问题 WD$_\varphi$ 的参数化版本定义如下。

| | |
|---|---|
| **问题:** | p-WD$_\varphi$ ——固定 $\varphi\in\mathcal{FO}$ 下的参数化加权 Fagin 可定义性 |
| **输入:** | 一个 $\tau$-结构 $\mathcal{A}$ 和 $k\in\mathbb{N}$。 |
| **参数:** | $k$. |
| **问题:** | 是否存在一个基数为 $k$ 的 $\varphi$ 解? |

通过以下定义刻画 $\mathbf{W}$ 层级的复杂性类。

▶ **定义5** ([6, 定义51])。 对于每个 $t\ge1$，我们令 $\mathbf{W}[t]:=[\text{p-WD-}\Pi_t]^{\mathbf{FPT}}$。类$\mathbf{W}[t]$构成 $\mathbf{W}$ 层级的第 $t$ 层。

或者，也可以通过命题公式的加权可满足性问题来定义 $\mathbf{W}$ 层级。令 $I$ 为一个非空指标集，且 $d\in\mathbb{N}$。考虑以下命题公式的特殊子类:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{0,d}&=\{\ell_1\wedge\cdots\wedge\ell_c\mid \ell_1,\dots,\ell_c \text{ are literals and } c\le d\},\\
\Delta_{0,d}&=\{\ell_1\vee\cdots\vee\ell_c\mid \ell_1,\dots,\ell_c \text{ are literals and } c\le d\},\\
\Gamma_{t,d}&=\left\{\bigwedge_{i\in I}\alpha_i\;\middle|\;\alpha_i\in\Delta_{t-1,d}\text{ for }i\in I\right\},\\
\Delta_{t,d}&=\left\{\bigvee_{i\in I}\alpha_i\;\middle|\;\alpha_i\in\Gamma_{t-1,d}\text{ for }i\in I\right\}.
\end{aligned}
$$

最后，$\Gamma_{t,d}^{+}$（分别地，$\Gamma_{t,d}^{-}$）表示 $\Gamma_{t,d}$ 中所有正公式（负公式）的类。

命题公式的参数化加权可满足性问题（WSAT）定义如下。

| | |
|---|---|
| **问题:** | p-WSAT($\Gamma_{t,d}$) — 参数化加权可满足性 |
| **输入:** | 一个 $\Gamma_{t,d}$-公式 $\alpha$，其中有 $t,d\ge1$ 和 $k\in\mathbb{N}$。 |
| **参数:** | $k$. |
| **问题:** | 是否存在一个满足赋值，使得 $\alpha$ 的权重为 $k$? |

这些问题也可以用来等价地定义$\mathbf{W}$-层级中的各个复杂性类。

▶ **命题 6** ([6, 定理 7.1])。 对于每个 $t\ge1$，以下问题在 ***fpt***-归约下均为$\mathbf{W}[t]$-完全。

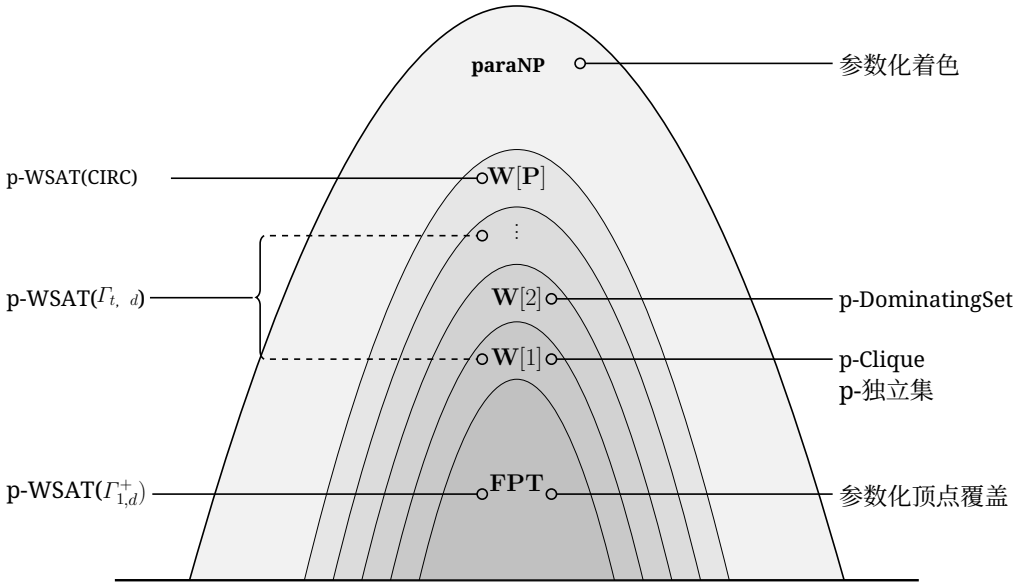


**图1** 参数化复杂性中相关参数化复杂性类及其完全问题的概览。相关证明中提到了其中若干完全问题的定义。

- $p$-WSAT($\Gamma^{+}_{t,\ 1}$) 如果 $t$ 是偶数；如果 $t$ 是奇数，则为
- $p$-WSAT($\Gamma^{-}_{t,\ 1}$)。 p-WSAT($\Gamma_{t,\ d}$) 对于每个 $t$、$d \geq 1$。

图1展示了参数化复杂性中相关的完全问题所构成的复杂性图景。

**基于团队的逻辑**我们假设读者熟悉谓词逻辑 [5]。我们考虑一阶词汇 $\tau$，它们是由函数符号和关系符号以及一个等号符号 $=$组成的集合。设 VAR 为一个可数无限的一阶变量集合。上的项按通常方式定义，一阶逻辑（一阶逻辑）的良构公式集合由以下 EBNF 定义：

$$\psi ::= t_1 = t_2 \mid R(t_1, \ldots, t_k) \mid \neg R(t_1, \ldots, t_k) \mid \psi \wedge \psi \mid \psi \vee \psi \mid \exists x \psi \mid \forall x \psi,$$

其中 $t_i$ 是项，$1 \leq i \leq k$，$R$ 是来自 $\sigma$ 的 $k$ 元关系符号，$k \in \mathbb{N}$，且 $x \in$ VAR。若 $\psi$ 是一个公式，则用 VAR($\psi$) 表示其变量集合，用 Fr($\psi$) 表示其自由变量集合。我们在 $\tau$-结构中对一阶逻辑公式求值；这类结构是形如 $\mathbf{A} = (A, \tau^{\mathcal{A}})$ 的有序对，其中 $A$ 是 $\mathbf{A}$ 的定义域（上下文明确时，我们用 $A$ 代替 dom($\mathbf{A}$)），而 $\tau^{\mathcal{A}}$ 按通常方式解释函数符号和关系符号（例如，$t^{\mathcal{A}}\langle s \rangle = s(x)$，如果 $t = x \in$ VAR）。若 $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ 是关于 $n \in \mathbb{N}$ 的项元组，则记 $\mathbf{t}^{\mathcal{A}}\langle s \rangle$ 为 $(t_1^{\mathcal{A}}\langle s \rangle \ldots, t_n^{\mathcal{A}}\langle s \rangle)$。

依赖逻辑 一阶逻辑(dep) 通过添加形如 dep($\mathbf{t}; u$) 的依赖原子扩展了 一阶逻辑，其中$\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{u}$ 是项元组。包含逻辑 一阶逻辑($\subseteq$) 是通过向 一阶逻辑 添加形如 $\mathbf{t} \subseteq \mathbf{u}$ 的包含原子得到的，其中 $\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{u}$ 是项元组。最后，独立逻辑 一阶逻辑($\perp$) 通过添加形如 $\mathbf{t} \perp_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ 的独立原子扩展了 一阶逻辑，其中 $\mathbf{t}$,$\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是项元组。我们将形如 $t_1 = t_2, R(\mathbf{t}), \mathrm{dep}(\mathbf{t}; u), \mathbf{t} \subseteq \mathbf{u}$ 和 $\mathbf{t} \perp_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$ 的表达式称为原子公式。

语义通过团队这一概念来定义。设$\mathcal{A}$ 是一个结构，且$X \subseteq$ VAR，那么一个赋值 $s$ 是一个映射 $s\colon X \to A$。

▶ **定义 7.** 设 $X \subseteq \mathrm{VAR}$。一个团队 $T$ 在 $A$ 定义域为 $X$ 是一个赋值集合$s\colon X \to A$。

对于定义域为 $X \supseteq Y$ 的团队 $T$，将其限制到 $Y$ 上定义为 $T{\restriction}Y := \{ s{\restriction}Y \mid s \in T\}$。如果 $s\colon X \to A$ 是一个赋值，且 $x \in \mathrm{VAR}$ 是一个变量，那么 $s^x_a\colon X \cup \{x\} \to A$ 是将 $x$ 映射到 $a$，并将 $y \in X \setminus \{x\}$ 映射到 $s(y)$ 的赋值。设 $T$ 是 A 中定义域为 $X$ 的团队。那么，任何函数 $f\colon T \to \mathrm{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ 都可以用作 $T$ 的补充函数，以扩展或修改 $T$，使其成为补充团队 $T^x_f := \{ s^x_a \mid s \in T, a \in f(s) \}$。当 $f(s) = A$ 是常函数时，我们将 $T^x$A 简写为 $T^x_f$。公式的语义定义如下。

▶ **定义 8. </style}令 为一个词汇表，A 为一个 -结构，且 是定义域为 VAR、基于 $A$ 的团队。那么，**

$A\ T \models t_1 = t_2$ 当且仅当 $\forall s \in T\colon\ t_1^{\mathcal{A}}\langle s\rangle = t_2^{\mathcal{A}}\langle s\rangle$，$A\ T \models t_1 \neq t_2$ 当且仅当 $\forall s \in T\colon\ t_1^{\mathcal{A}}\langle s\rangle \neq t_2^{\mathcal{A}}\langle s\rangle$，$A\ T \models R(t_1, \ldots, t_n)$ 当且仅当 $\forall s \in T\colon (t_1^{\mathcal{A}}\langle s\rangle \ldots, t_n^{\mathcal{A}}\langle s\rangle) \in R^{\mathcal{A}}$，$A\ T \models \neg R(t_1, \ldots, t_n)$ 当且仅当 $\forall s \in T\colon (t_1^{\mathcal{A}}\langle s\rangle \ldots, t_n^{\mathcal{A}}\langle s\rangle) \notin R^{\mathcal{A}}$，$A\ T \models dep(t; u)$ 当且仅当 $\forall s_1, s_2 \in T\colon t^{\mathcal{A}}\langle s_1\rangle = t^{\mathcal{A}}\langle s_2\rangle \implies u^{\mathcal{A}}\langle s_1\rangle = u^{\mathcal{A}}\langle s_2\rangle$，$A\ T \models t \subseteq u$ 当且仅当 $\forall s_1 \in T, \exists s_2 \in T\colon t^{\mathcal{A}}\langle s_1\rangle = u^{\mathcal{A}}\langle s_2\rangle$，$A\ T \models t \perp_v u$ 当且仅当 $\forall s_1, s_2 \in T\colon v^{\mathcal{A}}\langle s_1\rangle = v^{\mathcal{A}}\langle s_2\rangle$ *then* $\exists s_3 \in T\colon v t^{\mathcal{A}}\langle s_3\rangle = v t^{\mathcal{A}}\langle s_1\rangle$ *and* $u^{\mathcal{A}}\langle s_3\rangle = u^{\mathcal{A}}\langle s_2\rangle$，$A\ T \models \varphi_0 \wedge \varphi_1$ 当且仅当 $A\ T \models \varphi_0$ 且 $A\ T \models \varphi_1$，$A\ T \models \varphi_0 \vee \varphi_1$ 当且仅当 $\exists T_0 \exists T_1\colon\ T_0 \cup T_1 = T$ 且 $A\ T_i \models \varphi_i$ 对于 $i = 0, 1$，$A\ T \models \exists x\varphi$ 当且仅当 $A\ T^x_f \models \varphi$ 对于某个 $f\colon\ T \to P(A) \setminus \{\emptyset\}$，$A\ T \models \forall x\varphi$ 当且仅当 $A\ T^x_{\mathcal{A}} \models \varphi$.

对于结构 A 和 A 中的团队 $T$ over $X$，令 rel($T$) 表示由 $T$ 定义的关系。也就是说，rel($T$) := { a | $s$(x) = a $s \in T$}。此外，如果对于任意定义在 Fr($\varphi$) 上的团队 $T$，我们都有 A $T \models \varphi$ 当且仅当 A, {$s$} $\models \varphi$ 对每个 $s \in T$ 都成立，那么就称公式 $\varphi$ 是平坦的。FO 公式满足这一平坦性。请注意，对于 FO 公式，根据单元素等价，团队语义与经典塔斯基语义一致，即 A, {$s$} $\models \varphi$ 当且仅当 A $\models_s \varphi$。此外，注意当 $T = \emptyset$ 时，对于所有 $\varphi$，都有 A $T \models \varphi$ （这也称为空团队性质）。最后，对于每个 C $\in$ {FO(dep), FO($\subseteq$), FO($\perp$)}，C 公式都具有局部性；也就是说，对于定义域为 $X$、属于 A 的团队 $T$ 以及一个 FO(dep) 公式 $\varphi$，我们有 A $T \models \varphi$ 当且仅当 A $T{\restriction}$Fr($\varphi$) $\models \varphi$。

现在，我们将公式类（$\Sigma_t$ 和 $\Pi_t$）扩展到所考虑的逻辑中。为此，FO(dep)-$\Pi_t \subseteq$ FO(dep)（分别为 FO(dep)-$\Sigma_t$）表示由以下形式的公式$\varphi$组成的集合：$\varphi :=$ $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_t x_t \psi$，其中 $\psi$ 是一个无量词的 FO(dep) 公式，$Q_i \in \{\forall, \exists\}$，且 $Q_1 = \forall$（$Q_1 = \exists$）。换言之，$\varphi$ 是一个以$\forall$量词（分别为 $\exists$）开头、且量词交替次数为 $t$ 的 FO(dep) 公式。对于 FO($\subseteq$)，FO($\subseteq$)-$\Pi_t \subseteq$FO($\subseteq$)（分别为 FO($\subseteq$)-$\Sigma_t$）；对于 FO($\perp$)，FO($\perp$)-$\Pi_t \subseteq$FO(dep)（分别为 FO($\perp$)-$\Sigma_t$），也以类似方式定义。

**加权团队可定义性** 现在，我们为基于团队的逻辑中的公式引入一种新型的加权可定义性问题。设 $\mathcal{C} \in \{\mathcal{FO}(\mathrm{dep}), \mathcal{FO}(\subseteq), \mathcal{FO}(\perp)\}$，$\varphi$ 是一个关于自由变量 Fr($\varphi$) 且 $k \in \mathbb{N}$ 的固定$\mathcal{C}$-公式。给定一个结构 $\mathcal{A}$，加权团队可定义问题 WT$\varphi$ 要求判断：在 $\mathcal{A}$ 中，是否存在一个大小为 $k$、针对 $\varphi$ 且定义在 Fr($\varphi$) 上的团队。

| | |
|---|---|
| **问题:** | WT$_\varphi$ —固定 $\varphi$ 下的加权团队可定义性 |
| **输入:** | 一个 $\tau$-结构 $\mathcal{A}$ 以及 $k \in \mathbb{N}$。 |
| **问题:** | 是否存在一个 $T$ 上的团队，使得 $\lvert T\rvert = k$ 且 $\mathcal{A}\ T \models \varphi$? |

接下来，WT$_\varphi$ 的对应参数化版本定义如下。

| | |
|---|---|
| **问题:** | p-WT$_\varphi$ —固定 $\varphi$ 的参数化加权团队可定义性 |
| **输入:** | 一个 $\tau$-结构 $\mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。 |
| **参数:** | $k$. |
| **问题:** | 是否存在一个定义在 Fr($\varphi$) 上的团队 $T$，使得 $\lvert T\rvert = k$ 且 $\mathcal{A}\ T \models \varphi$? |

注意，问题 WT$_\varphi$ 涉及公式 $\varphi$ 的自由变量集合 Fr($\varphi$)。因此，对于句子而言，我们的参数化函数是平凡的，因为在空团队域上只有两个团队$\emptyset$ 和 $\{\emptyset\}$。与之前一样，对于公式集合 $\Theta \subseteq \mathcal{C}$，我们用 WT-$\Theta$ 表示满足 $\varphi \in \Theta$ 的问题 WT$_\varphi$ 类。

# 3 加权团队可定义性的复杂性结果

## 3.1 一阶公式

我们首先研究在团队语义下，当 $\varphi$ 是纯一阶逻辑公式时，p-WT$_\varphi$ 的复杂性。需要注意的是，在 $\varphi$ 中不允许出现自由关系变量，这导致 p-WT$_\varphi$ 与加权 Fagin 可定义性 p-WD$_\varphi$ 不同。下面的定理表明，从经典复杂性理论的角度来看，这两个问题也有所不同。这里我们假设读者对电路复杂性类 TC$^0$ 和 AC$^0$ 有基本了解（关于这一领域的介绍，参见 Vollmer 的教科书 [25]）。

►**定理 9.** 对于任意一阶逻辑公式 $\varphi$，问题 WT$_\varphi$ 属于 *DLOGTIME*-一致的 TC$^0$ .

**证明。** 证明利用了一阶逻辑公式在团队语义下的平坦性:

$$\mathcal{A}, T \models \varphi \Leftrightarrow \forall s \in T:\ \mathcal{A} \models_s \varphi.$$

众所周知，$\mathcal{A} \models_s \varphi$ 可由 AC$^0$-电路判定，因此原问题可归约为计算 $\varphi$ 的满足赋值数量 $t$，并检查是否满足 $t \geq k$。由于可以将所有可能的赋值硬编码到电路中，因此很容易用 DLOGTIME-一致的 TC$^0$ 电路模拟这一过程。这里注意到 $\varphi$ 是固定的，因此自由变量的数量也是固定的某个常数 $c \in \mathbb{N}$。于是，输入是大小为 $n$ 的结构 $\mathcal{A}$，产生 $O(n^c)$ 个赋值。◄

## 3.2 包含逻辑

本节将**W**-层级和**W**[**P**] 与包含逻辑公式的加权团队可定义性联系起来。首先注意，若 $\varphi$ 是一个一阶逻辑($\subseteq$)-句子，那么问题 p-WT$_\varphi$ 属于**固定参数可处理**。这是因为固定一阶逻辑($\subseteq$)-句子的数据复杂度属于**P** [8]。

►**定理 10。** 设 $\varphi$ 是一个一阶逻辑($\subseteq$)-句子，则 *p*-WT$_\varphi$ 属于 **固定参数可处理。**

**证明。** 回顾一下，一个 一阶逻辑($\subseteq$)-句子 $\varphi$ 在 $T$ 中 $\mathcal{A}$ 当且仅当$\mathcal{A}$, $\{\emptyset\} \models \varphi$。于是 $\varphi$ 在 $\mathcal{A}$ 中为真，当且仅当存在一个团队 $T$使得 $\lvert T\rvert = 1$ 且$\mathcal{A}\ T \models \varphi$。 ◄

现在我们证明，当 $\varphi$ 是一个带自由变量的无量词一阶逻辑$(\subseteq)$公式时，p-WT$\varphi$ 已经可以是$\mathbf{W}[1]$-困难的。

▶**定理 11.** 存在一个无量词的一阶逻辑$(\subseteq)$公式 $\varphi$，使得问题 $p$-WT$\varphi$是$\mathbf{W}[1]$-困难的，且属于$\mathbf{W}[2]$。

证明。我们给出从 W[1]-完全问题 p-Clique 到 p-WT$\varphi$ 的一个归约，使得 $\varphi$ 是一个无量词的一阶逻辑$(\subseteq)$公式。设 $G := (V, E)$ 是一个图，且 $k \in \mathbb{N}$。然后，我们令 $\varphi := E(x, y) \wedge x \neq y \wedge y \subseteq x \wedge x \subseteq y$。我们声称，$G$ 有一个大小为 $k$ 的团，当且仅当对于一个大小为 $(k^2 - k)$ 的团队 $T$，$G, T \models \varphi$。容易验证，存在一个 $k$- 团，等价于 $\varphi$ 有一个基数为 $k(k-1)$ 的满足团队，且 $x$ 和 $y$ 的取值完全相同。

要证明其属于 $\mathbf{W}[2]$, ，只需注意到，公式 $\varphi$ 可以表示为一个一阶逻辑句子 $\psi(S)$，其量词前缀为 $\forall\exists$，其中辅助二元谓词 $S$ 编码了团队 $T$。由此可得 p-WT$\varphi$ 到 p-WD$\psi$ 的一个**固定参数可处理**归约。由于 $\mathbf{W}[2] := [\text{p-WD-}\Pi_2]$，结果即得。◀

如下推论表明，这一结果可以推广到更一般的公式。

▶**推论 12.** 对于任意不含 $\vee$ 的无量词一阶逻辑$(\subseteq)$公式 $\varphi$，问题 $p$-WT$\varphi$ 是$\mathbf{W}[1]$-困难的，且属于 $\mathbf{W}[2]$。

**证明。** 要证明其属于 $\mathbf{W}[2]$, ，只需注意到，任意不含析取的无量词公式都可以表示为一个一阶逻辑句子 $\psi(S)$，其量词前缀为 $\forall\exists$，其中辅助二元谓词 $S$ 编码了团队 $T$。◀

▶**定理 13.** 存在一个 $FO(\subseteq)$公式 $\varphi$，其量词前缀为 $\forall\exists$，使得问题 $p$-WT$\varphi$ 是$\mathbf{W}[2]$-完全的。

证明。我们给出从 W[2]-完全问题 p-DominatingSet 到 p-WT$\varphi$ 的一个归约，使得 $\varphi$ 是一个 FO$(\subseteq)$公式，其量词前缀为 $\forall\exists$。设 $G := (V, E)$ 是一个图，且 $k \in \mathbb{N}$。那么我们令 $\varphi := \forall x \exists y(y \subseteq z \wedge (E(x, y) \vee x = y))$。容易验证，$G$ 存在大小为 $k$ 的支配集，当且仅当 $G, T \models \varphi$ 对于一个定义域为 $\{z\}$ 且大小为 $k$ 的团队 $T$ 成立。

对于 $\mathbf{W}[2]$-归属性，注意，对于所有图 $G$ 和团队 $T$:

$$G, \ T \models \varphi \Leftrightarrow (G, \ \text{rel}(T)) \ \models \varphi_d(X),$$

其中 $\varphi_d(X)$ 是编码支配集问题的一阶句子（参见例 2）。上述等价关系的形式化证明与定理 18 中给出的证明类似。◀

下一个引理为将前两个定理推广到 $\mathbf{W}$ 层次结构的任意层级奠定基础。为表述这一结果，我们假设使用公式$\psi \in \Gamma_t^+{}_{,d}$（以及一个真值赋值）的语法电路 $A_\psi = (A, E, I, o)$ 对其进行编码，其中 $A$ 是 $\psi$ 的子公式集合，$E$ 是直接子公式关系，$I \subseteq A$ 是 $\psi$ 的变量，$o$是一个由 $\psi$ 解释的常量符号。最后，可以使用一个自由关系变量 $S \subseteq I$ 来表示这些变量的真值赋值。请注意，我们对 $\psi$ 的编码适用于任意$t \in \mathbb{N}$，但对于下面的可定义性结果，$t$ 必须是固定的。

▶ **引理 14。** 设 $t \in \mathbb{N}$。那么存在一个固定公式 $\varphi_t \in$ 一阶逻辑$(\subseteq)$，它有一个自由变量 $z$，使得对于所有 $\psi \in \Gamma_t^+{}_{,d}$ 和 $k \geq 1$: $\psi$ 存在一个权重为 $k$ 的满足赋值，当且仅当 $A_\psi, T \models \varphi_t$，对于某个基数为 $k$ 的团队 $T$。

**证明**。 不失一般性，假设 $d = 1$。对于更大的 $d$ 值，所给出的证明可通过合取/析取的元数为 $d$ 轻松推广。根据 Galliani 和 Hella 的结果 [8], ，只需证明所需公式可以表示为一个一阶句子 $\theta(S)$，其中关系符号 $S$ 只以正面形式出现。然后，存在 $\varphi_t(z)$ 满足

$$A_\psi, T \models \varphi_t \Leftrightarrow A_\psi \models \theta(S), \tag{1}$$

对于所有非空的 $T$ 以及 rel($T$)， $= S$ 均成立。注意，在将所有变量都赋值为假的赋值下， $\theta(S)$ 并不成立；但另一方面，根据空团队性质， $\varphi_t$ 对于 $T = \emptyset$ 总是成立。容易验证， $\theta(S)$ 可以表示如下：

$$\theta(S) \coloneqq \forall x_1\big(\neg E(o, x_1) \vee \exists x_2(E(x_1, x_2) \wedge \cdots Qx_t(E(x_{t-1}, x_t) \wedge I(x_t) \wedge S(x_t)) \cdots\big).$$

关系符号 $S$ 在公式中只出现一次，且为正出现。现在，根据 [8], 的命题 20，存在一个公式 $\varphi_t$ ，使得对于句子 $\forall\vec{x}(S(\vec{x}) \to \theta(S))$，对所有 $\mathcal{A}$ 以及所有 $T$，条件（ 1 ）均成立。容易看出，除去 $S = \emptyset$的情形外， $\theta(S)$ 与 $\forall\vec{x}(S(\vec{x}) \to \theta(S))$ 等价。事实上，直接可以证明，只需将 $S(x_t)$ 替换为包含原子 $x_t \subseteq z$，即可由$\theta(S)$得到 $\varphi_t$ 。证明与定理 18 的证明类似。◀

进一步注意，将公式 $\theta$ 翻译为一个一阶逻辑(⊆)-公式时，只会引入包含原子，特别是无需进一步量化。因此，以下推论可直接由引理 14 的证明得出。

▶ **推论 15**。 设 $t \geq 2$ 为偶数。那么存在一个 $FO(\subseteq)$-$\Pi_t$-公式 $\varphi_t$ ，使得问题 $p$-WT$_{\varphi_t}$ 是 $\mathbf{W}[t]$-完全的。此外，对于所有偶数$t \geq 1$ ，$\mathbf{W}[t] \subseteq [\text{p-WT-}FO(\subseteq)\text{-}\Pi_t]^{\mathbf{FPT}}$ ，并且 $\bigcup_{t\geq 1}\mathbf{W}[t] \subseteq [\text{p-WT-}FO(\subseteq)]^{\mathbf{FPT}}$。

证明。关于 p-WT$_{\varphi_t}$的 W[$t$]-归属性，注意到引理 14 的证明中， $\theta$ 与 FO(⊆)-公式 $\varphi_t$ 之间的翻译在 $\theta$ 的解 $S$ 与 $\varphi_t$的满足团队 $T$ 之间保持一一对应。换言之， $\theta$ 存在一个大小为 $k$ 的解，当且仅当 $\varphi_t$ 存在一个大小为 $k$的满足团队。由此可得 W[$t$]-归属性，因为对于每个 $t \geq 1$ 都有 $\theta \in \Pi_t$ （见定义 5）。W[$t$]-困难性以及对所有偶数 $t \geq 1$ 都有 W[$t$] $\subseteq [\text{p-WT-FO}(\subseteq)\text{-}\Pi_t]^{\mathbf{FPT}}$ ，均由命题 6 得出。◀

本节最后，我们给出当 $\varphi$ 是任意 一阶逻辑(⊆)-公式时 WT$_\varphi$ 的上界。

▶ **定理 16**。 $[p\text{-WT-一阶逻辑}(\subseteq)]^{\mathbf{FPT}} \subseteq \mathbf{W}[\mathbf{P}]$。

证明。我们通过与 FO 公式 [6,命题 5.3] 的证明类似的方式，利用复杂性类 W[P], 的机器刻画来证明这一点。设 $\varphi$ 是一个含有 $s$ 个自由变量的 FO(⊆) 公式。问题 p-WT$_\varphi$ 的算法如下：给定一个结构 A 和一个 $k$，非确定性地猜测 $k$ 次赋值（即 A 中元素组成的一个 $s$ 元组），然后确定性地验证团队 $T$ 的基数为 $k$ ，且 A $T \models \varphi$。猜测 $T$ 需要 $s \cdot k \cdot \log |A|$ 个非确定性比特，而验证 A $T \models \varphi$ 可在关于 $|A|$ [8] 的确定性多项式时间内完成。因此，p-WT$_\varphi$ 属于 W[P] ，因为公式 $\varphi$ 是固定的，且 $s$ 是常数。此外，由于对于任意但固定的 FO(⊆) 公式 $\varphi$，p-WT$_\varphi \in$ 属于 W[P] ，因此包含关系 $[\text{p-WT-FO}(\subseteq)]^{\mathbf{FPT}} \subseteq$W[P] 成立。◀

### 3.3 依赖逻辑

首先注意，如果 $\varphi$ 是一个 一阶逻辑(dep) 句子，那么问题 p-WT$\varphi$ 是 **paraNP**-完全的。这是因为固定的一阶逻辑(dep)句子的数据复杂度已经是**NP**-完全的 [24]。

▶**定理 17**。 存在一个 *FO*(dep)句子 $\varphi$，使得问题 $p$-WT$\varphi$ 是 **paraNP**-完全问题。

证明。回想一下，FO(dep)句子 $\varphi$ 有满足团队 $T$，当且仅当 $\{\emptyset\} \models \varphi$。对于困难性，考虑 FO(dep) 句子模型检验的数据复杂度。该问题询问输入结构 A 是否满足一个固定的 FO(dep)句子 $\varphi$。那么$\varphi$ 在 A 中为真，当且仅当 A，$\{\emptyset\} \models \varphi$，当且仅当存在一个团队 $T$ 使得 $|T| = 1$且 A $T \models \varphi$。◀

现在，我们将**W**层级与依赖逻辑的加权可定义性联系起来。这也确定了 FO(dep)公式的 p-WT 的复杂性。接下来，我们证明，在$\mathcal{FO}$(dep)中，仅一个全称量词就足以定义**W**[1]-完全问题。

▶**定理 18.** 存在一个 *FO*(dep)公式 $\varphi$，它仅含一个全称量词，并且问题 $p$-WT$\varphi$ 是 **W**[1]-完全的。

证明。我们给出从 W[1]-完全问题 p-独立集到 p-WT$\varphi$ 的一个归约，使得 $\varphi$ 是仅含一个全称量词的 FO(dep) 公式。独立集问题的输入是一个图 G := $(V, E)$ 和一个数 $k \in \mathbb{N}$。问题是，G 中是否存在一个大小为 $k$ 的集合 $S$，使得对于每个 $a, b \in S$，都有 $(a, b) \notin E$。我们令 $\tau$: $=\{N^1, P^1, I^2\}$ 作为词汇表，其中 $N, P$ 是一元关系， $I$ 是二元关系符号。此外，$\tau$-结构 A 满足：dom(A) := $V \cup E$, $N^{\mathcal{A}}$:= $V$, $P$A := $E$，并且 $I^{\mathcal{A}}$ 模拟边关系 $E^{\mathcal{G}}$。也就是说， $I$: $=\{ (a, b), (c, b) \mid a, c \in V$，而 $b \in P$ 表示边 $(a, c) \in E\}$。最后，我们定义一个以单个自由变量 $x$ 为变量的 FO(dep) 公式 $\varphi$，如下所示。

$$\varphi(x) := \forall y\big(N(x) \wedge (\neg P(y) \vee \neg I(x, y) \vee \mathsf{dep}(y; x))\big)$$

我们的归约的正确性通过以下断言得到证明，同时也表明公式 $\varphi$ 实际上等价于通过一个$\Pi_1$-公式对独立集的熟知定义；因此，p-WT$\varphi$ 是**W**[1]-完全的。

▷ 断言 19：存在一个关于 $x$ 的团队 $T$，满足于$\mathcal{A}$ 中 $|T| = k$ 且$\mathcal{A}$ $T \models \varphi$，当且仅当$\mathcal{G}$ 中存在大小为 $k$的独立集。

下面证明该断言。设 $T = \{ s_i \mid i \leq k\}$是关于 $x$ 的团队，满足 $\varphi$中的 $s_i(x) = a_i$ for $a_i \in A$。此外，令 $T' = \{ s_{i,j} \mid i \leq k, j \leq |\mathrm{A}|\}$表示补充团队，即，对于每个 $a_j \in$ A，$s_{i,j}$ $(x) = a_i$ and $s_{i,j}(y) = a_j$。我们证明$S = \{a_i \mid \exists s \in T, s(x) = a_i\}$构成G中的独立集。令 $a_i$, $a_j \in S$，则存在 $s_i, s_j \in T$，使得 $s_i(x) = a_i$, $s_j(x) = a_j$。进一步假设$(a_i, a_j) = e \in E^{\mathcal{G}}$。那么，$T' \models P(e) \wedge E(a_i, e)$且 $T' \models E(a_j, e)$，但 $T' \not\models \mathsf{dep}(y; x)$，因为存在$s_{i,j}, s_{j,j} \in T'$，使得 $s_{i,j}(xy) = a_i a_j$ and $s_{j,j} = a_j a_j$。换言之，$s_{i,j}(y) = s_{j,j}(y)$，但$s_{i,j}(x) \neq s_{j,j}(x)$。因此， $T' \not\models (\neg P(y) \vee \neg I(x, y) \vee \mathsf{dep}(y; x))$且 $T \not\models \varphi$，这就产生了矛盾。

反之，若 $\mathcal{G}$ 中存在大小为 $k$ 的独立集 $S$，则我们证明，对于 $T = \{s_i \mid i \leq k, s_i(x) \in S\}$，有 $T \models \varphi(x)$。显然，补充团队 $T'(x, y)$ 具有如下作用：对于每个对应于元素 $a_i, a_j \in A$ 之间的一条边的 $y$，其端点 $a_i$ 和 $a_j$ 中至多有一个属于 $T(x)$；当且仅当 $S$ 属于独立集时，情况才是如此。◀

## 12 加权团队可定义性的参数化复杂性

我们再次证明下面的引理，该引理将前述定理推广到 **W**-层次结构的任意层级。

▶ **引理 20.** 设 $t \in \mathbb{N}$。那么存在一个固定的公式 $\varphi_t \in$ 一阶逻辑(dep)，它有一个自由变量 $z$，使得对于所有 $\psi \in \Gamma_{t,d}^{-}$ 和 $k \geq 1$: $\psi$ 存在一个权重为 $k$ 的满足赋值，当且仅当对于某个基数为 $k$ 的团队 $T$，$A_\psi, T \models \varphi_t$。

**证明**。不失一般性，我们假设 $d = 1$。否则，只需通过一个元数为 $d$ 的析取/合取，就能轻易将所给证明推广到更大的 $d$。根据 [18], 的结果，只需证明所需公式可以表示为一个一阶句子 $\theta(S)$，其中关系符号 $S$ 只以否定形式出现。于是，对于所有$\varphi_t(z)$，满足

$$A_\psi, T \models \varphi_t \Leftrightarrow A_\psi \models \theta(S), \tag{2}$$

对于所有非空的 $T$，$\mathbf{rel}(T) = S$ 均成立。现在很容易验证，$\theta(S)$ 可以表示如下:

$$\theta(S) := \forall x_1 \big(\neg E(o, x_1) \vee \exists x_2 (E(x_1, x_2) \wedge \cdots Q x_t (E(x_{t-1}, x_t) \wedge I(x_t) \wedge \neg S(x_t)) \cdots \big).$$

关系符号 $S$ 在公式中只出现一次，且这次出现是负的。◀

还需注意，将公式 $\theta$ 翻译为 一阶逻辑(dep)-公式时，只会引入依赖原子，尤其不需要进一步量化。因此，以下推论（证明与推论 15 类似）成立。回想一下，每个依赖逻辑公式都可以写成 $\forall\exists$-范式。因此，追踪引理 20 中的量词前缀并无助益；我们可以得到更强的结论: 整个 **W**-层级已经包含在 一阶逻辑(dep)-$\Pi_2$ 中。

▶ **推论 21**。设 $t \geq 1$ 为奇数。则存在一个 *FO*(dep)-$\Pi_2$-公式 $\varphi_t$，使得问题 $p$-WT$_{\varphi_t}$ 是 $\mathbf{W}[t]$-完全的。此外，$\bigcup_{t\geq 1} \mathbf{W}[t] \subseteq [\text{p-WT-}FO(\text{dep})\text{-}\Pi_2]^{\mathbf{FPT}}$。

最后，如下文所述，一阶逻辑(dep) 刻画了**paraNP** 类。

▶ **定理 22.** $[p\text{-WT-一阶逻辑(dep)}]^{\mathbf{FPT}} = \mathbf{paraNP}$.

**证明**。困难性由定理 17 得出。对于归属性，我们给出以下非确定性算法，该算法的运行时间关于$\mathcal{A}$的大小为多项式时间。注意，由于公式是固定的，许多联结词也随之固定，包括分裂和存在量词。该算法的思路是猜测一个大小为 $T$ 的团队 $k$，以及一个序列 $T_i$，该序列由$i \in \mathbb{N}$ 个团队组成，对应于根据公式 $\varphi$执行的复制／补充和分裂操作。换言之，令 $\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_\ell x_\ell \psi$，其中 $Q \in \{\forall, \exists\}$，且 $\psi$ 是一个无量词一阶逻辑(dep)公式。然后，算法执行以下步骤。

- 猜测一个大小为 $k$、定义在 Fr($\varphi$) 上的团队 $T_0$。对于每个 $i \leq \ell$，猜测一个定义在
- Fr($\varphi$) 上的团队 $T_i \cup \{x_1, \ldots\ldots, x_i\}$，使得：若 $Q_i = \forall$，则$T_i = P_{\mathcal{A}}^x$；若 $Q_i = \exists$，则 $T_i = P_f^x$，其中 $f: P \to \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset$，且 $P = T_{i-1}$。注意，如果 $Q_i = \exists$，则 $|T_i| = |T_{i-1}|$（因为 一阶逻辑(dep) 向下封闭），而 $|T_i| = |T_{i-1}| \cdot |A|$则不然。因此，我们有 $|T_i| \leq k \cdot |A|^i$。猜出团队 $T_\ell$ 后，接下来需要判定 $T_\ell \models \psi$ 是否成立。由于 一阶逻辑(dep) 的数据复杂度即使对于无量词公式仍然是 **NP**-完全的，这一步并非易事。尽管如此，我们可以根据语法树递归地列出 $\psi$ 的所有子公式。这有助于按照 $\psi$ 的联结词，为 $T_\ell$ 的子团队标注。

- 猜测 $\psi$ 的子公式对应的子团队，使得： $T_\psi = T_\ell$。对于 $\psi$ 的每个子公式 $\alpha = \beta \wedge \gamma$，以及每个 $\alpha = \beta \vee \gamma$，都有 $T_\beta \cup T_\gamma = T_\alpha$。显然，对于每个 $\alpha$，子团队 $T_\alpha$ 的大小至多为 $k \cdot |A|^\ell$。

请注意，对于原子公式，真值评估 $T_\alpha \models \alpha$ 可以在多项式时间内完成。此外，包括验证团队复制和补充在内的中间步骤也可以在多项式时间内完成。因此，对于公式 $\varphi$，WT$\varphi$ 属于**paraNP**。◀

## 3.4 独立逻辑

本节将转向独立逻辑。根据前几节的结果，以及任意$\mathcal{ESO}$句子 $\psi(S)$（其中包含一个用于编码团队的额外关系）都可以表示为独立逻辑公式 [7]这一事实，可得以下定理。

▶定理 *23*。*1.* 对所有 $t \in \mathbb{N}$，都存在一个 *FO(⊥)* 公式 $\varphi_t$，使得 *p-WT*$\varphi_t$ 是 *W*[$t$]-完全的。*2.* 存在一个 *FO(⊥)* 公式 $\varphi_w$，使得 *p-WT*$\varphi_w$ 是 *W*[*P*]-完全的。*3.* 存在一个 *FO(⊥)* 句子 $\varphi$，使得问题 *p-WT*$\varphi$ 是 *paraNP*-完全的。*4.* [*p-WT-FO(⊥)*]$^{\mathbf{FPT}}$ =*paraNP*。

**证明**。 第一个和第三个断言可直接由以下事实推出：逻辑 一阶逻辑(依赖)和 一阶逻辑(⊆) 都是以下逻辑的子逻辑：一阶逻辑(⊥) [7] 以及定理 22。

对于第二个断言，我们利用 p-WSAT(CIRC) 是**W**[**P**]-完全的这一事实，其中 CIRC 是所有编码为布尔电路的命题公式所构成的类。注意，电路值问题可以很容易地用一个存在二阶句子 $\psi(S)$ 表示，其中 $S$ 表示电路的一个输入。更准确地说，假设我们给定一个编码布尔电路的有向无环图 $(A, E, D, K, I, o)$。这里，$A$ 是节点/门的集合，$E$ 是边关系，$I \subseteq A$ 是电路的输入门，$o$ 是唯一的输出，$D \subseteq A$ 是或门的集合，$K \subseteq A$是与门的集合。电路的一个布尔输入由子集 $S \subseteq I$表示，即，当且仅当 $g \in S$时，门 $g$ 获得输入 1。现在，在存在二阶 逻辑中，我们可以对一个证明树进行存在量化，以证明电路接受输入 $S$。换言之，我们对一个子集$P \subseteq A$ 进行量化，使得

- $o \in A$,$P \cap I = S$，对于所有 $g \in P \cap D$，都至少存在一个 $g' \in P$，使得 $E(g', g)$；对于所有 $g \in P \cap K$ 和所有 $g'$，如果 $E(g', g)$，那么 $g' \in P$。不难验证，上述条件可以用一阶逻辑表达。

最后，第三个论断中的困难性部分同样由以下事实得出：一阶逻辑(dep) 是 一阶逻辑(⊥) 的子逻辑，且包含关系的证明与定理 22 的证明类似。◀

# 4 结论

我们定义并研究了若干种基于团队的逻辑中，加权团队可定义性相对于公式的参数化复杂度。我们的结果表明，对于普通的一阶公式，加权团队可定义性与加权 Fagin 可定义性大不相同；前者在计算上简单得多。对于依赖逻辑、独立逻辑和包含逻辑公式，加权团队可定义性的复杂度介于**W**[$t$]与**paraNP**之间。如今，这些结果为上述复杂性类提供了范围广泛的自然完全问题，以一种非平凡的方式丰富了这一领域。有趣的是，

所考察逻辑中的句子呈现出不同的复杂度：具体而言，$\mathcal{FO}(\subseteq)$属于$\mathbf{FPT}$，而$\mathcal{FO}(\mathrm{dep})$和$\mathcal{FO}(\perp)$则是$\mathbf{paraNP}$完全的。主要的未解问题是，能否证明推论 15 或定理 16 的反向结论，即包含关系 $\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\mathbf{W}[t] \subseteq [\text{p-WT-}\mathcal{FO}(\subseteq)]^{\mathbf{FPT}} \subseteq \mathbf{W}[\mathbf{P}]$ 中的某一个实际上是等式。

## 参考文献

1 Rodney G. Downey和Michael R. Fellows。《参数化复杂性基础》。计算机科学丛书。施普林格，2013年。 doi:10.1007/978-1-4471-5559-1。2 Rodney G. Downey、Michael R. Fellows和Kenneth W. Regan。描述复杂性与W层级。载于《DIMACS离散数学与理论计算机科学系列》第39卷，第119–134页。美国数学学会，1998年。3 Arnaud Durand、Miika Hannula、Juha Kontinen、Arne Meier和Jonni Virtema。概率团队语义。载于Flavio Ferrarotti和Stefan Woltran（编），《信息与知识系统基础——第十届国际研讨会，FoIKS 2018》，匈牙利布达佩斯，2018年5月14日至18日，论文集，《计算机科学讲义》第10833卷，第186–206页。施普林格，2018年。 doi:10.1007/978-3-319-90050-6_11。4 Arnaud Durand、Juha Kontinen、Nicolas de Rugy-Altherre和Jouko Väänänen。团队语义中数据复杂性的可处理性边界。《ACM计算逻辑汇刊》，23(1):3:1–3:21，2022年。 doi:10.1145/3471618。5 Heinz-Dieter Ebbinghaus和Jörg Flum。《有限模型理论》。数理逻辑展望。施普林格，1995年。6 Jörg Flum和Martin Grohe。《参数化复杂性理论》。理论计算机科学丛书。EATCS系列。施普林格，2006年。 doi:10.1007/3-540-29953-X。7 Pietro Galliani。团队语义中的包含依赖与排斥依赖：关于若干不完备信息逻辑。《纯粹与应用逻辑年刊》，163(1):68–84，2012年。 doi:10.1016/j.apal.2011.08.005。8 Pietro Galliani和Lauri Hella。包含逻辑与不动点逻辑。载于Simona Ronchi Della Rocca（编），《计算机科学逻辑 2013（CSL 2013）》，《莱布尼茨国际信息学会议录》第23卷，第281–295页，德国达格施图尔，2013年。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心。网址： http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2013/4203, doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2013.281。9 Erich Grädel和Jouko Väänänen。依赖与独立。《逻辑研究》，101(2):399–410，2013年。 doi:10.1007/s11225-013-9479-2。10 Jens Oliver Gutsfeld、Arne Meier、Christoph Ohrem和Jonni Virtema。重新审视时态团队语义。载于Christel Baier和Dana Fisman（编），《LICS '22：第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会》，以色列海法，2022年8月2日至5日，第44:1–44:13页。美国计算机协会，2022年。 doi:10.1145/3531130.3533360。11 Anselm Haak、Juha Kontinen、Fabian Müller、Heribert Vollmer和Fan Yang。一阶团队逻辑中的团队计数。载于MFCS，《LIPIcs》第138卷，第19:1–19:15页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2019年。12 Anselm Haak、Arne Meier、Fabian Müller和Heribert Vollmer。一阶团队逻辑中的团队枚举。《纯粹与应用逻辑年刊》，173(10):103163，2022年。13 Miika Hannula、Juha Kontinen、Jan Van den Bussche和Jonni Virtema。实数计算的描述复杂性与概率独立逻辑。载于LICS，第550–563页。美国计算机协会，2020年。14 Miika Hannula、Juha Kontinen、Jonni Virtema和Heribert Vollmer。团队语义中命题逻辑的复杂性。《ACM计算逻辑汇刊》，19(1):2:1–2:14，2018年。15 Lauri Hella、Antti Kuusisto、Arne Meier和Jonni Virtema。命题包含逻辑与模态包含逻辑中的模型检验和有效性。《逻辑与计算期刊》，29(5):605–630，2019年。 doi:10.1093/logcom/exz008。

16 Lauri Hella、Antti Kuusisto、Arne Meier和Heribert Vollmer。模态包含逻辑的可满足性：宽松与严格语义。《ACM计算逻辑汇刊》，21(1):7:1–7:18，2020年。doi:10.1145/3356043。17 Juha Kontinen、Arne Meier和Yasir Mahmood。依赖逻辑与独立逻辑复杂性的参数化视角。《逻辑与计算期刊》，32(8):1624–1644，2022年。 doi:10.1093/logcom/exac070。18 Juha Kontinen和Jouko A. Väänänen。依赖逻辑中的可定义性。《逻辑、语言与信息期刊》，18(3):317–332，2009年。 doi:10.1007/s10849-009-9082-0。19 Martin Lück。典范模型与模态团队逻辑的复杂性。《计算机科学逻辑方法》，15(2)，2019年。 doi:10.23638/LMCS-15(2:2)2019。20 Yasir Mahmood和Arne Meier。命题依赖逻辑中模型检验与可满足性的参数化复杂性。《数学、人工智能与应用年刊》，90(2-3):271–296，2022年。21 Yasir Mahmood和Jonni Virtema。团队语义中命题逻辑的参数化复杂性。CoRR，abs/2105.14887，2021年。22 Arne Meier和Christian Reinbold。简化命题依赖逻辑的枚举复杂性。载于FoIKS，《计算机科学讲义》第10833卷，第303–321页。施普林格，2018年。23 Christos H. Papadimitriou。《计算复杂性》。Addison-Wesley，1994年。24 Jouko A. Väänänen。《依赖逻辑：独立友好逻辑的新方法》，伦敦数学学会学生丛书第70卷。剑桥大学出版社，2007年。网址：http://www.cambridge.org/de/knowledge/isbn/item1164246/?site_locale=de_DE。25 Heribert Vollmer。《电路复杂性导论：一种统一方法》。理论计算机科学丛书。EATCS系列。施普林格，1999年。 doi:10.1007/978-3-662-03927-4。26 Fan Yang和Jouko Väänänen。命题团队逻辑。《纯粹与应用逻辑年刊》，168(7):1406–1441，2017年。 doi:10.1016/j.apal.2017.01.007。