arXiv:2302.00542v1 [math.FA] 1 Feb 2023

h^1 局部化算子与 bmo、lmo 交换子的有界性

Galia Dafni，Chun Ho Lau *

摘要

我们首先考察卷积型奇异积分算子的两种局部化，并证明在辅助函数满足温和的衰减与光滑性条件时，它们在局部 Hardy 空间 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性等价。随后，我们研究非齐次奇异积分算子的交换子 $[b,T]$ 在 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性，其中 b 属于 bmo($\mathbb{R}^n$)，即有界平均振荡函数的非齐次空间。我们定义了原子空间 $H^1_b(\mathbb{R}^n)$ 的局部类似空间。该原子空间由 P´erez 针对齐次 Hardy 空间与 BMO 引入，其中还包括一种涉及满足近似消去条件的原子的变体。对于这类原子 a，我们证明了相应交换子极大函数及 $[b,T]$(a) 的可积性。当 b属于 lmo($\mathbb{R}^n$) 时，这便给出了 $[b,T]$的 h^1 至 L^1 有界性。最后，在 T 上附加近似消去条件后，我们证明了有界性到h^1。

1 引言

实 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 是一类函数空间，50 多年来一直是调和分析领域广泛研究的对象。特别是，虽然奇异积分算子在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性对 $1<p<\infty$ 成立，但并不适用于 $0<p\leq 1$；不过，在满足充分的光滑性和消去条件时，这类算子在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的， $0<p\leq 1$。在尺度的另一端， $p=\infty$，由 John 和 Nirenberg [32] 引入的有界平均振荡函数空间 BMO($\mathbb{R}^n$)取代了 L^∞，并且是 H^1 的对偶空间——参见 Fefferman 和 Stein 的奠基性论文 [20] 以及文献 [46] 中较新的论述。

本文关注的是这些空间的一个非齐次版本，该版本由 Goldberg [23, 24] 以“局部 Hardy 空间”之名引入，记作h^p($\mathbb{R}^n$)。属于 $h^p(\mathbb{R}^n)$ 并不要求 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ 所必需的全局矩条件，因此，与 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的情形不同，施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 等重要的光滑函数类包含于（且在其中稠密） $h^p(\mathbb{R}^n)$ 中。此外， $h^p(\mathbb{R}^n)$ 在与光滑截断函数作乘法后仍保持不变，这也是它们有时被称为“可局部化” Hardy 空间的原因，并且它们更适合于不同背景下的分析，例如

*作者部分得到了加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）以及数学研究中心（CRM）的资助´

区域、流形和齐次型空间，以及偏微分方程和伪微分算子的研究。

我们将讨论范围限定在 $h^1(\mathbb{R}^n)$，它满足 $H^1(\mathbb{R}^n) \subsetneq h^1(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^1(\mathbb{R}^n)$，以及 BMO($\mathbb{R}^n$) 的非齐次版本，记作 bmo($\mathbb{R}^n$)。Goldberg 将其刻画为 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间。除了通过极大函数和原子分解进行刻画外，Goldberg 还将 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 确定为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中一类函数所构成的空间：这些函数的“局部 Riesz 变换” r_j、$j = 1$、.....、n 均属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$。这些局部 Riesz 变换是通过在傅里叶变换一侧，将 Riesz 变换 R_j 的乘子与一个在原点附近为零的 Schwartz 函数相乘，从而对其进行局部化而得到的。我们研究 Calder´on–Zygmund 卷积型奇异积分算子更一般的局部化方式，这些方式可以通过将核乘以适当的函数（如 [23] 中定义的“截断”Hilbert 变换）来实现，也可以在傅里叶变换一侧进行局部化。我们证明，在对辅助函数的衰减和光滑性作出温和假设的条件下，同一核的不同局部化在 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性彼此等价（定理 3.2），由此可以通过更广泛的一类局部化 Riesz 变换来刻画 h^1 （推论 3.1）。

接下来，我们转向另一类重要的算子，即奇异积分算子与乘法算子的交换子：$[b,T]f := bT(f) - T(bf)$。Coifman、Rochberg 和 Weiss [10] 证明了，对于所有 $1 < p < \infty$，若 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 且 T 是 Calder´on–Zygmund 算子，则 $[b,T]$在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界。他们还证明了一个逆命题：对于 Riesz 变换 R_j，若 $[b,R_j]$、$j = 1$、.....、n对某个 $1 < p < \infty$均在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界，则 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$。随后，Uchiyama [49] 证明了，当且仅当 $b \in$ CMO($\mathbb{R}^n$) 时，$[b,T]$ 在$L^p(\mathbb{R}^n)$上是紧算子，其中 $1 < p < \infty$；CMO($\mathbb{R}^n$) 是 BMO($\mathbb{R}^n$) 中 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$的闭包。Janson [31] 将交换子的有界性推广到了 Orlicz 型空间。最近，Hyt¨onen [30] 完全刻画了 $L^p \mapsto L^q$ 的有界性。

上述结果都是针对具有 $1 < p < \infty$ 的 L^p 空间。我们关注端点情形 $p = 1$。对于 Calder´on–Zygmund 算子 T，它具有弱型 (1,1) 有界性，也具有从 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界性。交换子 $[b,T]$ 是否也满足这种有界性？答案是否定的。Harboure、Segovia 和 Torrea [26] 证明，除非 b 是常函数，否则不可能得到 $[b,H]$ 从 $H^1(\mathbb{R})$ 到 $L^1(\mathbb{R})$ 的有界性；当 H 为 Hilbert 变换时，这一结论成立。对于 $[b,H]$ 从 $L_c^\infty(\mathbb{R})$ 到 $BMO(\mathbb{R})$ 的有界性，情况也一样。

这意味着我们需要寻找 H^1 的一个更小子空间，以确保交换子的可积性。除了证明 $L \log L$ 到交换子 $[b,T]$ 的弱-L^1 有界性之外，P´erez [39] 还引入了一种特殊类型的 H^1 原子，它对 b 具有额外的消去性质，并证明对于所有此类 a，交换子 $[b,T](a) \in L^1(\mathbb{R}^n)$。随后，他通过原子分解定义了空间 $H_b^1(\mathbb{R}^n)$。然而，原子的无限线性组合上的有界性并不能由单个原子上的有界性推出（参见 [7]），因此还需要对该空间作另一种刻画。

Ky [34] 通过一种特殊定义的交换子极大函数引入了另一个空间 $H_b^1(\mathbb{R}^n)$，并证明它是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的最大子空间，使得交换子 $[b,T]$ 从该空间到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界。由于 P´erez 的原子空间连续包含于 Ky 的空间，因此可以将原子上的有界性推广为整个原子空间上的有界性。反向包含，即 Ky 的极大 $H_b^1(\mathbb{R}^n)$ 中的每个函数是否

空间都能分解为 P´erez 原子之和，尚未得到证明。Ky 还证明，在适当的假设下，$[b,T]$ 从 H^1 到 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 以及到 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 都是有界的；Fu、D. Yang 和 S. Yang [21]将这些结果推广到了齐次型度量测度空间。

与 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的情形不同，$[b,T]$ 与非恒定b 构成的交换子可以在 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 上有界。Hung 和 Ky [28] 证明了，当b 具有对数消失平均振荡且 T 属于一类伪微分算子时，这种有界性成立。

本文介绍了 P´erez 原子空间的一个 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 版本，以及另一个包含该空间的原子空间，我们称之为 $h^1_{\mathrm{atom},\,b}(\mathbb{R}^n)$。该空间由新的$h^1_b$ 原子定义，这些原子仅满足近似消去条件。随后，我们研究了对于 $b\in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$ 和 T非齐次奇异积分算子，$[b,T]$ 的有界性，并证明这类交换子将 h^1_b 原子映射到$L^1(\mathbb{R}^n)$（定理 5.1 ）。此外，通过考察 T^*1 和 T^*b，在 T 上施加非齐次消去条件，我们得以证明其到$h^1(\mathbb{R}^n)$的有界性（定理 5.3）。然而，与 P´erez 原子空间 H^1_b的情形一样，若不对该空间作不同的刻画，就无法将这种有界性推广到整个 $h^1_{\mathrm{atom},\,b}(\mathbb{R}^n)$。虽然我们尚无极大刻画，但确实证明了 Ky 的交换子极大函数的一个局部类比可将 h^1_b 原子映射到 $L^1(\mathbb{R}^n)$。

最后，将 b 限制在 $\mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$（即 $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$ 中具有对数消失平均振荡的函数）上，我们能够将空间 $h^1_{\mathrm{atom},\,b}(\mathbb{R}^n)$ 识别为 $h^1(\mathbb{R}^n)$（定理 4.6），从而得出交换子在全空间上的有界性，推广了 Hung 和 Ky [28] 的结果。

第 2 节介绍 h^1 的一些背景，重点讨论原子分解和近似消去条件，以及 bmo 和 lmo。第 3 节讨论卷积型 Calder´on–Zygmund 算子的各种局部化及其在 h^1 上的有界性，并以非齐次奇异积分算子的定义作结。第 4 节介绍非齐次情形下的交换子极大函数和原子空间，并证明它们之间的关系。最后，第 5 节给出交换子在原子上的有界性结果。

2 预备知识

集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的勒贝格测度记为 $|A|$，可积函数 f 在正有限测度集合 E 上的平均值记为

$$f_E := \fint_E f := \frac{1}{|E|}\int_E f(x)dx.$$

球记为 $B(x_0,r)$，球 B 的半径记为 $r(B)$。膨胀球 $B(x_0,\delta r)$，$\delta>0$，记为 δB。

不等式中使用的常数 C 可能因行而异。若存在常数 C（它可能依赖于其他因素，但不依赖于 α 和 β），使得 $\alpha\le C\beta$，则记作$\alpha\lesssim\beta$；若 $\alpha\lesssim\beta$ 且 $\beta\lesssim\alpha$，则记作 $\alpha\approx\beta$。

我们用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 表示施瓦茨空间，并将定义其拓扑的半范数表示为

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial_x^\beta\varphi(x)|,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n.$$

其对偶 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是缓增分布空间。

2.1 局部 Hardy 空间

Goldberg [23,24] 引入了实 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的非齐次版本，称为“局部 Hardy 空间”，记作 $h^p(\mathbb{R}^n)$，并通过极大函数和原子分解对其进行了刻画。

定义 2.1（[23]）。对于 $0 < p \le 1$，一个（归一化的）Goldberg h^p 原子 a 是一个支集包含于立方体 Q 中的函数，并且满足

(i) $\|a\|_{L^\infty} \le |Q|^{-1}$;

(ii) if $|Q| < 1$, $\int a(x)x^\alpha dx = 0$ for $|\alpha| \le \lfloor n(1/p-1)\rfloor$.

允许原子仅满足近似矩条件的 h^p 原子分解，最早由 [12] 引入，后来在更一般的齐次型空间设定下，针对情形 $p=1$ 由 [17,18] 进一步完善（另见 [14,15,33]关于 $p<1$的讨论）。

定义 2.2（[18]）。固定 $R>0$、$1<q\le\infty$。若 a 是一个 R-近似 $(1,q)$ 原子，则称之为

- $\mathrm{supp}(a) \subset B(x_0,r)$，其中某个 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $r>0$满足;
- $\|a\|_{L^q} \le |B(x_0,r)|^{\frac{1}{q}-1}$;
- $|\int a| \le [\log(1+\frac{R}{r})]^{-1}$.

以下任一等价刻画都可以作为 $h^1(\mathbb{R}^n)$的定义。

命题 2.1. 设 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$。则以下各项等价:

1. 对于一个固定的 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，且满足 $\int\psi\neq 0$,

$$\|f\|_{h^1,\psi} := \|M_\psi(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

其中

$$M_\psi(f)(x) = \sup_{0<t<T} |f*\psi_t(x)|, \quad \psi_t(y) = t^{-n}\psi(t^{-1}y).$$

2. 对于固定的 $T>0$,

$$\|f\|_{h^1,T} := \|\mathcal{M}(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

其中

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{\phi} |\langle f,\phi\rangle|,$$

并且上确界取遍所有满足 $\mathrm{supp}(\phi)\subset B(x,t)$,$0<t<T$, $\|\phi\|_{L^\infty}\le|B(x,t)|^{-1}$ 和 $\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\le[t|B(x,t)|]^{-1}$ 的 $\phi\in C^1(\mathbb{R}^n)$。

3. 对于 N 充分大的情形

$$\|f\|_{h^1,\max} := \|\mathfrak{M}(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

其中

$$\mathfrak{M}f(x) := \sup\{|f * \varphi_t(x)| : 0 < t < 1, \varphi \in \mathcal{F}_N\}$$

and

$$\mathcal{F}_N = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \le 1 \ \forall\ |\alpha|, |\beta| \le N\}.$$

4.

$$\|f\|_{h^1,\text{atom}} := \inf \sum |\lambda_j| < \infty,$$

其中，下确界取遍所有满足 $\{\lambda_j\} \in \ell^1$ 的 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的分解 $f = \sum \lambda_j a_j$，且其中的 a_j 是如定义 2.1 所述的 Goldberg h^1 原子。

5. 对于固定的 $R > 0$、$1 < q \le \infty$,

$$\|f\|_{h^1,R} := \inf \sum |\lambda_j| < \infty,$$

其中，下确界取遍所有满足 $\{\lambda_j\} \in \ell^1$ 的 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的分解 $f = \sum \lambda_j a_j$，且其中的 a_j 是定义 2.2 中的 R-近似 $(1, q)$ 原子。

若这些条件成立，则有

$$\|f\|_{h^1,\psi} \approx \|f\|_{h^1,T} \approx \|f\|_{h^1,\max} \approx \|f\|_{h^1,\text{atom}} \approx \|f\|_{h^1,R},$$

其中，常数取决于 T、R 和 N 的选择。

命题 2.1 中条件 (1)、(3) 和 (4) 的等价性包含在 [23, 定理 1 和引理 5]中。条件 (2)、(4) 和 (5) 的等价性见 [18, 第 7] 节，其中在倍增度量测度空间上以 Lipschitz 函数替代 C^1，适用于任意的 T、R 和 q（另见 [14, 引理 1]，其中证明了在更一般的所有 $p \le 1$ 情形下 (4) 蕴含 (2)）。极大函数$\mathcal{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 通常称为大极大函数。也可以定义它们的非切向版本（对于 H^1 的情形，见下文定义 4.1），并得到 h^1（分别为 H^1）的等价刻画——这是 Goldberg 定理的一部分（齐次 Hardy 空间的情形见 [46, 第 III.1] 节）。[27] 给出了齐次型空间上局部 Hardy 空间的其他刻画。

在下文中，我们主要使用条件 (2) 和 $T = 1$，并将 $\|f\|_{h^1,1}$ 简记为 $\|f\|_{h^1}$；对于条件 (5)，我们使用 $R = 1$ 和 $q = 2$。在这种情况下，我们将 1 近似 (1,2) 原子简称为 h^1 原子。

我们还需要分子的概念，它是原子的推广，不要求具有紧支撑。分子有助于证明算子在 h^p 上的有界性，因为奇异积分算子通常会将原子映射为分子。如果我们知道分子属于 h^p 且范数有界，那么就证明了该算子在原子上的有界性。

定义 2.3（[14]）。设 $1 < s < \infty, \lambda > n\,(s-1)$。如果存在一个球 $B = B\,(x_0, r)$，使得.....那么称 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 M为一个 (s, λ) 分子（对应于 $h^1\,(\mathbb{R}^n)$）

M1. $\|M\|_{L^s(B)} \le r^{n\left(\frac{1}{s}-1\right)}$

M2. $\|M\,|\cdot - x_0|^{\frac{\lambda}{s}}\|_{L^s(B^c)} \le r^{\frac{\lambda}{s}+n\left(\frac{1}{s}-1\right)}$

M3. $\left|\int M\right| \le [\ln(1+r^{-1})]^{-1}$.

命题 2.2（[14]）。存在一个常数 $C_{n,\ s,\ \lambda}$，使得 $\|M\|_{h^1} \le C_{n,\ s,\ \lambda}$ 每个（s,λ）分子 M。

反过来，对于任意 $f \in h^1(\mathbb{R}^n)$，都存在一个序列 $\{\lambda_j\} \in \ell^1$ 和一个由 h^1 分子 $\{M_j\}$ 构成的序列，使得

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j M_j \quad in\ h^1(\mathbb{R}^n).$$

此外，

$$\|f\|_{h^1} \approx \inf \sum |\lambda_j| < \infty,$$

其中，下确界取遍所有此类分解。

下面的命题（ [15, 命题 1]的情形 $p=1$ ）表明，定义 2.2 中对原子所要求的消去条件不仅是充分的，也是必要的。

命题 2.3（[15]）。设 $g \in h^1(\mathbb{R}^n)$，且 $\operatorname{supp}(g) \subset B(x_0, r)$。那么

$$\left|\int g\right| \lesssim \frac{\|g\|_{h^1}}{\log(1+r^{-1})}.$$

2.2 非齐次 BMO

Goldberg [24, 推论1]指出， $h^1(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间是 $\operatorname{bmo}(\mathbb{R}^n)$，后者是有界平均振荡函数的 John-Nirenberg 空间 $\operatorname{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的一个非齐次版本。关于 $\operatorname{bmo}(\mathbb{R}^n)$ 的性质，参见 Bourdaud [6] 。在下述定义中，我们采用[18], 中引入的记号；该处证明了此定义与用于区分大球和小球的尺度选择无关。请注意，与 $\operatorname{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 不同，为了使其成为 Banach 空间，我们无需对常数取商。

定义 2.4. 设 $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。若 $b \in \operatorname{bmo}(\mathbb{R}^n)$，则称

$$\|b\|_{\mathrm{bmo}} := \sup_B \fint_B |b(x) - c_B| dx < \infty,$$

其中，上确界取遍所有球；对于每个球 B，我们定义

$$c_B := \begin{cases} b_B := \fint_B b, & \text{if } r(B) < 1, \\ 0, & \text{if } r(B) \ge 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

由于在任何时刻讨论的 bmo 函数都只有一个，因此本文后续部分将继续使用式（2.1）中定义的记号 c_B 。于是，我们可以陈述一个相应的 John–Nirenberg

不等式版本，适用于 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$（参见 [18, 定理 3.1]）：存在 $C, c > 0$，使得对于任意球 B,

$$|\{x \in B : |b(x) - c_B| > \lambda\}| \leq C|B|e^{-\lambda c/\|b\|_{\mathrm{bmo}}}$$

对所有 $\lambda > 0$。因此可得

$$\|b\|_{\mathrm{bmo}} \approx \|b\|_{\mathrm{bmo},p} := \left(\sup_B \fint_B |b(x) - c_B|^p dx\right)^{1/p} \tag{2.2}$$

对于 $1 \leq p < \infty$，其中常数取决于 p。

这给出了以下有用的不等式（参见 [10, 引理 2.4]，对于 $\delta = 1$ 和 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的情形）。

引理 2.1. 设 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$。那么对任意 $\delta > 0$、$p \geq 1$，存在$C_{n,p,\delta} > 0$，它们与 b、x_0 和 r 无关，使得

$$r^\delta \int_{|x-x_0|>r} \frac{|b(x) - c_{B(x_0,r)}|^p}{|x - x_0|^{n+\delta}} \leq C_{n,p,\delta}\|b\|^p_{\mathrm{bmo}}. \tag{2.3}$$

证明. 由 $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$ 的平移不变性，不妨设 $x_0 = 0$。将$B(0, 2^k r)$ 记为 B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. 然后利用 (2.2) 以及对于 $2^j r < 1$ 的事实

$$|c_{B_j} - c_{B_{j-1}}| = |b_{B_j} - b_{B_{j-1}}| \leq 2^n\|b\|_{\mathrm{bmo}} \tag{2.4}$$

以及 $c_B \lesssim \frac{1}{\log(1+r^{-1})}$（参见 [18, 引理 6.1]），可得

$$\begin{aligned} r^\delta \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0} \frac{|b(x) - c_{B_0}|^p}{|x|^{n+\delta}} &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta}|B_k|^{-1} \int_{B_{k+1}\setminus B_k} |b(x) - c_{B_{k+1}}|^p + |c_{B_{k+1}} - c_{B_0}|^p dx \\ &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta}\|b\|^p_{\mathrm{bmo}}(1 + (\min\{k+1, \log_+ r^{-1}\})^p)dx \\ &\lesssim \|b\|^p_{\mathrm{bmo}}. \end{aligned}$$

□

虽然 bmo 是局部 Hardy 空间 h^1 的对偶，但称其为“局部有界平均振荡”并不恰当，因为它实际上严格更小。更合适的做法是将这个名称用于由满足以下条件的局部可积函数 b 所构成的空间：

$$\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{r(B)<R} \fint_B |b(x) - b_B|dx < \infty,$$

其中 R 是某个固定常数（见 [48]）。这个空间严格大于 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$，因为它包含所有 Lipschitz 函数，例如，而且与 $R < \infty$的选择无关。对 $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$ 中满足 $\sup_{r(B)\geq R} \fint |b| < \infty$ 的元素取子空间，便得到 $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$（文献 [6] 中证明，只需取 $\sup_{r(B)=R} \fint |b| < \infty$即可）。特别地，当$1 \leq p < \infty$时，$\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$。

消失平均振荡指的是满足以下性质:

$$\lim_{R\to 0}\sup_{r(B)<R}\fint_B |b(x)-b_B|dx=0. \tag{2.5}$$

对于 $b\in$ BMO($\mathbb{R}^n$)，当且仅当 $b\in$ VMO($\mathbb{R}^n$) 时，这一结论成立；后者是 BMO($\mathbb{R}^n$) 中一致连续函数的闭包，正如 Sarason [40] 为$n=1$所证明的那样。类似地，我们可以用 vmo($\mathbb{R}^n$) 表示 bmo($\mathbb{R}^n$) 中具有消失平均振荡的函数空间；或者，也可以将其定义为 bmo($\mathbb{R}^n$) 中有界一致连续函数的闭包。最后，我们用 cmo($\mathbb{R}^n$) 表示 bmo($\mathbb{R}^n$) 中具有紧支撑的连续（或光滑）函数的闭包。关于这些空间的更多内容可见 [6] 和[13] （其中 vmo 这一记号用于表示 cmo）。文中还证明了 h^1($\mathbb{R}^n$) 可视为 cmo($\mathbb{R}^n$) 的对偶，并且 $b\in$cmo($\mathbb{R}^n$) 当且仅当 (2.5) 成立，且此外

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{|B|\geq 1\\ B\subset(B(0,R))^c}}\fint_B |b|=0. \tag{2.6}$$

可以具体刻画振荡在半径趋于零时于 (2.5) 中消失的速率（见 [40, 第 5], [43]章）。其中一类特殊函数具有对数平均振荡，通常记作 LMO（不要与有界下振荡空间混淆，后者记作 BLO）。这一类中的有界函数已被证明是 H^1 以及圆 [44]、球面 [35] 和齐次型空间 [9]上 BMO 的逐点乘子。对于 bmo， [5] 也证明了类似结果。这些空间在偏微分方程的研究中也很有用。在 [47] 中，抛物型方程的系数满足对数平均振荡条件；而在 [3,4] 中，针对 Euler 方程和纳维–斯托克斯方程的初始涡量，则施加了一系列此类条件。需要注意的是，后面这些文章使用的记号略有不同（例如，其中的 bmo 指“局部有界平均振荡”，而不是 Goldberg 非齐次空间），并且采用了一种 L^2 振荡；根据这些空间的 John–Nirenberg 不等式，该振荡与 L^1 振荡等价（见 [43]）。在 [28], 中引入了一种称为 LMO$_\infty$ 的空间，它由 BMO$_{\rm loc}$ 中在小球上具有对数消失平均振荡、而在大球上的平均振荡可随半径呈幂次增长的函数组成。该空间包含于 LMO$_{\rm loc}$($\mathbb{R}^n$)，后者定义如下。

定义 2.5. 设 $b\in L^1_{\rm loc}$($\mathbb{R}^n$)。如果 $b\in$ LMO$_{\rm loc}$($\mathbb{R}^n$)，则称其为

$$\|b\|_{{\rm LMO}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)}:=\sup_{r(B)<1}\frac{[\log(1+r(B)^{-1})]}{|B|}\int_B |b(x)-b_B|dx<\infty.$$

我们还定义 lmo($\mathbb{R}^n$) := LMO$_{\rm loc}$($\mathbb{R}^n$) ∩bmo($\mathbb{R}^n$)，并且

$$\|b\|_{{\rm lmo}(\mathbb{R}^n)}:=\|b\|_{{\rm LMO}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)}+\sup_{r(B)\geq 1}|b|_B<\infty.$$

由于 $[\log(1+r(B)^{-1})]^{-1}\to 0$ as $r\to 0$，我们知道 LMO$_{\rm loc}$($\mathbb{R}^n$) 中的函数满足消失平均振荡条件 (2.5)，因此 lmo($\mathbb{R}^n$) ⊂vmo($\mathbb{R}^n$)。若取 $b\in$ LMO$_{\rm loc}$($\mathbb{R}^n$) $\cap L^p(\mathbb{R}^n)$， $1\leq p<\infty$，那么 b 也满足条件 (2.6)，因为若 $|B|\geq 1$ 且 $B\subset\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)\subset\mathbb{R}^n$，那么 ffl $_B|b|\leq\|b\|_{L^p(B(0,R)^c)}\to 0$ as $R\to\infty$。因此 LMO$_{\rm loc}$($\mathbb{R}^n$)∩L^p($\mathbb{R}^n$) ⊂ 小 BMO 空间($\mathbb{R}^n$)。

3 局部化卷积核

除了通过极大函数和原子分解进行刻画（如命题 2.1 所示）之外，Goldberg 还以类似于通过$\widehat{\ }$Riesz 变换 R_j, $j=1,\dots,n$刻画 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的方式，利用奇异积分算子刻画了 $h^1(\mathbb{R}^n)$；这些 Riesz 变换由其乘子 $R_j f(\xi) = i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$ 给出。

定理 3.1. [24, 定理 2] 设函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在原点的某个邻域内满足 $\varphi \equiv 1$ 。那么，分布 f 属于 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $r_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$、$j=1$、.....、$n$，其中 r_j 定义为

$$\widehat{r_j f}(\xi) = (1-\varphi(\xi))i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi).$$

参见 [38]，其中使用紧支撑的 φ，将这一结果推广到 $0<p\leq 1$的情形。

对于 $n=1$，在 [23], 中，Goldberg 还通过局部 Hilbert 变换刻画了 $h^1(\mathbb{R})$。这也可以描述为一种“截断”Hilbert 变换（不要与用于定义柯西主值积分的通常截断相混淆）。我们设

$$\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}(f)(x) := p.v.\int_{\mathbb{R}} \frac{\eta(x-y)f(y)}{x-y}dy, \tag{3.1}$$

其中 $\eta \equiv 1$ 在 (−1,1) 上，且支集包含于 $[-2,2]$。在 [16] 中证明了，对于光滑的 η，局部 Hilbert 变换 $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ 刻画 $h^1(\mathbb{R})$。

请注意，这两种局部化方式并不相同： $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ 是通过在 0 附近局部化 Hilbert 变换的核得到的，而 r_j 则是通过在远离 0 的位置局部化 R_j 的傅里叶变换得到的。这可能会造成一些混淆。例如，为了刻画加权局部 Hardy 空间，文献 [48, 第 8] 节采用记号 R_j定义了局部 Hilbert 变换的高维类似物，即“截断”版本的 Riesz 变换，其核乘以一个支集紧的光滑函数。然而，被称为 [48, 定理 A], 的结果（即 [8, 定理 3. 的推论1],）实际上使用的与定理 3.1 中相同的 r_j，是在傅里叶变换一侧进行局部化的。

本节中，我们将针对更一般的卷积核考察这两种局部化方式；对用于局部化的辅助函数，仅要求其满足最小的光滑性和衰减条件，并证明相关奇异积分算子在 $h^1(\mathbb{R}^n)$上的有界性与所选的局部化方式无关。

3.1 Calder´on–Zygmund 卷积型奇异积分算子

我们假设核是 δ-核，即 K 是$\mathbb{R}^n$上的可测函数，并且存在 $\delta \in (0,1]$ 和 $C>0$，使得

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \tag{3.2}$$

and

$$|K(x-y)-K(x)| \le C\frac{|y|^{\delta}}{|x|^{n+\delta}} \quad \text{for } 2|y| \le |x|. \tag{3.3}$$

我们还假设满足如下形式的消去条件:

$$\exists A < \infty \quad \sup_{0<r<R} \left| \int_{r<|x|<R} K(x)dx \right| \le A. \tag{3.4}$$

随后，我们通过柯西主值积分定义相应的卷积算子 T： $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|\ge\varepsilon} K(x-y)f(y)dy.$$

该算子可延拓为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子（参见 [46, 第 VII.3] 节）。此外， T 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$、 $1 < p < \infty$ 上有界，并且可从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 映射到 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$。关于卷积型 Calder´on–Zygmund 算子的经典理论，参见 [45, 第 2] 章；关于更一般的核，参见 [25, 第 4] 章。一般的 Calder´on–Zygmund 算子可以表示为一个此类算子与一个由有界函数乘法给出的算子之和（参见 [46, 第 I.7.4],[25, 节，命题 4.111]），但由于有界函数乘法通常不是 h^1 上的有界算子，因此这里我们只考虑奇异积分部分。

我们通过对核 K 进行局部化来定义两类算子。一方面，我们考察如下形式的算子

$$T^{\psi}(f) := T(f - \psi * f)$$

其中函数 ψ 满足适当条件。这些算子以定理 3.1 中 Goldberg 的局部化 Riesz 变换为模型，其中 $\psi = \check{\varphi}$。

另一方面，基于局部 Hilbert 变换 (3.1) 的定义，对于一类函数 η，我们考察与核 $K\eta$ 相关联的算子 T_{η}。

3.2 算子 T_{η}

现在我们证明，在对 η 施加某些弱光滑性和衰减条件时，核 $K\eta$ 满足与 K 相同的条件，因此我们可以像将 T 与 K 相关联那样，将一个算子 T_{η} 与之相关联；该算子具有与 T 相同的有界性。

引理 3.1. 假设 η 是有界函数，且存在一个常数 C ，使得

$$|\eta(x-y)-\eta(x)| \le C\frac{|y|^{\delta}}{|x|^{\delta}} \quad \textit{for } 0 < 2|y| \le |x|. \tag{3.5}$$

那么， $K\eta$ 满足条件 (3.2) 和 (3.3)。

证明。我们有 $|K\eta| \le \|\eta\|_{L^\infty}|x|^{-n}$，对于 $0 < 2|y| \le |x|$，由于这

意味着 $|x-y| \geq |x|/2$，因此我们得到

$$\begin{aligned}
&|K(x-y)\eta(x-y) - K(x)\eta(x)| \\
&\leq |K(x-y)||\eta(x-y)-\eta(x)| + |K(x-y)-K(x)||\eta(x)| \\
&\lesssim \frac{1}{|x-y|^n}\frac{|y|^\delta}{|x|^\delta} + \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}} \\
&\lesssim \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}.
\end{aligned}$$

□

对 η 的条件是一个局部的 δ-Lipschitz 条件，使得 $B(x,|x|/2)$ 中的 Lipschitz 常数按 $|x|^{-\delta}$衰减。特别地，如果 η 具有紧支撑，那么只需要求 $\eta \in$Lip$_\delta$。

接下来我们证明 $K\eta$ 满足 (3.4)。为此，我们需要对 η 作进一步假设，以保证 η 在无穷远处具有某种衰减，且 $\eta - 1$ 在原点处足够快地趋于零。注意，我们不要求 $\eta \equiv 1$ 在原点的某个邻域内成立。例如，如果 $\eta \in$ Lip$_\delta$，那么只需 $\eta(0) = 1$。

引理 3.2. 如果 η 满足，

$$\int_{0<|x|<1} \frac{|\eta(x)-1|}{|x|^n}dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{|\eta(x)|}{|x|^n}dx < \infty, \tag{3.6}$$

那么 (3.4) 对 $K\eta$成立。

证明. 对于 $0 < r < R$，根据关于 K 和 η的假设，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{r<|y|<R} K(y)\eta(y)dy\right| \\
&\leq \left|\int_{r<|y|<1} K(y)[\eta(y)-1]dy\right| + A + \left|\int_{1\leq|y|<R} K(y)\eta(y)dy\right| \\
&\lesssim \int_{0<|y|<1}\frac{|\eta(y)-1|}{|y|^n}dy + \int_{|y|\geq 1}\frac{|\eta(y)|}{|y|^n}dy + 1 \leq A',
\end{aligned}$$

其中常数 A' 与 r 和 R无关。 □

如果 η 满足两个引理的假设，我们就能得到 T_η在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性。一旦得到 L^2-有界性，我们就可以证明 T_η 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上对 $1 < p < \infty$ 有界，并且从 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到弱-$L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界。

T_η 和 T^ψ的等价有界性

对于 ψ的良好选取，可以将局部化算子 T^ψ 视为伪微分算子来研究其有界性。或者，也可以证明 T^ψ 的核足够良好。特别是，假设 $\psi \in L^1$，则 T^ψ 从 T 继承了在 L^p 上对 $1 < p < \infty$ 的有界性以及弱 (1, 1) 有界性。我们关注的是在 h^1上的有界性。

我们不直接研究 T^ψ，而是给出关于 ψ 的充分条件，以便从 T_η 的有界性推出 T^ψ 在 h^1 上的有界性。

作为下面这个等价关系的推论，只需证明某个合适的 η （例如一个具有紧支撑的 Lip_δ 函数）的有界性，即可将其推广到 η 和 ψ 的整个类别。

定理 3.2. 假设 η 满足引理 3.1 和 3.2 的假设，且ψ 满足

$$\psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n), \quad \int \psi = 1,$$

$$\int_{|x|\geq 1} \left[\frac{1}{|x|^n} \int_{|y|\geq |x|/2} |\psi(y)|dy + \frac{1}{|x|^{n+\delta}} \int_{|y|\leq |x|/2} |y|^\delta |\psi(y)|dy \right] dx < \infty \quad (3.7)$$

and

$$\int_{|x|\geq 1} \left[\int_{|y|\leq |x|/2} \frac{|\psi(x-y)-\psi(x)|}{|y|^n} dy \right] dx < \infty. \quad (3.8)$$

那么，算子 T_η 在 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 上有界，当且仅当 T^ψ 在$h^1(\mathbb{R}^n)$ 上有界。

注意，例如，若函数 $|x|^\eta \psi(x)$ 对某个 $\eta > 0$可积，则条件 (3.7) 成立；而若 $\psi \in \mathrm{Lip}_\alpha$ 对 $0 < \alpha \leq 1$ 和$|x|^\alpha \|\psi\|_{\mathrm{Lip}_\alpha(B(x,|x|/2))}$ 可积，则条件 (3.8) 成立。

证明. 我们将证明算子 $T_E := T_\eta - T^\psi$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上有界，并由此推出 T_E 在 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 上有界。

对于 $0 < \varepsilon < 1/2$，令 $K_\varepsilon(x) = \chi_{|x|>\varepsilon} K(x)$ 为核的通常截断。对 $K\eta$作同样处理，我们考虑 $(K\eta)_\varepsilon - K_\varepsilon + K_\varepsilon * \psi$。设

$$K_*(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(K\eta)_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x) + K_\varepsilon * \psi(x)|.$$

我们断言 $K_* \in L^1(\mathbb{R}^n)$。

对于局部估计，我们写作

$$K_*(x) \leq |K(x)(\eta(x)-1)| + T_*(\psi)(x),$$

其中 $T_*(\psi)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon * \psi(x)|$。回顾一下，极大算子 T_* 与 T 具有相同的有界性（见 [46, 第 I 节7],[25, 第 4.2 节2]）。因此我们有

$$\int_{|x|<1} K_*(x)dx \lesssim \int_{|x|<1} \frac{|\eta(x)-1|}{|x|^n} dx + \|\psi\|_{L^2} < \infty$$

对于 $|x| \geq 1$，我们可以写成

$$K_*(x) \leq |K\eta(x)| + \sup_{\varepsilon>0} |K(x) - K_\varepsilon * \psi(x)|.$$

根据关于 η 的条件 (3.6)，第一项在 $|x| \geq 1$ 上可积，因此只需对第二项的积分进行估计。为此，我们固定 ε，并得到关于 ψ 的 $|K(x) - K_\varepsilon * \psi(x)|$ 逐点估计。

利用关于 ψ 的假设，对于 $|x| \geq 1$ 和 $\varepsilon < 1/2$，我们可以写成：

$$\begin{aligned}\left|K(x) - \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x)\psi(y)dy\right| &\leq |K(x)| \int_{|x-y|\leq\varepsilon} |\psi(y)|dy \\ &\lesssim |x|^{-n} \int_{|y|\geq|x|/2} |\psi(y)|dy. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

因此，剩下需要考虑

$$\begin{aligned}&\int_{|x-y|>\varepsilon} [K(x) - K(x-y)]\psi(y)dy \\ &= \int_{\left\{\begin{smallmatrix}|y|\leq|x|/2\\ |x-y|\geq|x|/2\end{smallmatrix}\right\}} + \int_{\left\{\begin{smallmatrix}|y|\geq|x|/2\\ |x-y|\geq|x|/2\end{smallmatrix}\right\}} + \int_{\varepsilon<|x-y|\leq|x|/2} [K(x) - K(x-y)]\psi(y)dy \\ &=: I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

为了估计 I_1，注意到 $B(0, |x|/2) \subset B(x, |x|/2)^c$，因此我们可以对 K 使用光滑性条件 (3.3)，得到

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq \int_{|y|\leq|x|/2} |K(x) - K(x-y)||\psi(y)|dy \\ &\lesssim \frac{1}{|x|^{n+\delta}} \int_{|y|\leq|x|/2} |y|^\delta |\psi(y)|dy.\end{aligned}$$

对于 I_2，我们对 K 使用衰减界 (3.2)，如同 (3.9) 中那样，得到

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \int_{\left\{\begin{smallmatrix}|y|\geq|x|/2\\ |x-y|\geq|x|/2\end{smallmatrix}\right\}} (|K(x)||\psi(y)| + |K(x-y)||\psi(y)|)dy \\ &\lesssim \frac{1}{|x|^n} \int_{|y|\geq|x|/2} |\psi(y)|dy.\end{aligned}$$

最后，对于 I_3，我们再次使用衰减界 (3.2)，以及 K 上的消去条件 (3.4)，从而得到

$$\begin{aligned}|I_3| &\leq \left| \int_{\varepsilon<|x-y|\leq|x|/2} [K(x)\psi(y) - K(x-y)(\psi(y) - \psi(x))]\, dy \right| \\ &\qquad + \left| \int_{\varepsilon<|x-y|\leq|x|/2} K(x-y)\psi(x)dy \right| \\ &\lesssim \int_{|y|\geq|x|/2} \frac{|\psi(y)|}{|x|^n} dy + \int_{|x-y|\leq|x|/2} \frac{|\psi(y) - \psi(x)|}{|x-y|^n} dy + |\psi(x)| \\ &\lesssim \frac{1}{|x|^n} \int_{|y|\geq|x|/2} |\psi(y)|dy + \int_{|y'|\leq|x|/2} \frac{|\psi(x-y') - \psi(x)|}{|y'|^n} dy + |\psi(x)|.\end{aligned}$$

由于所有这些估计都与 ε无关，我们可以结合 (3.9)、关于 I_1、 I_2 和 I_3的界，以及关于 ψ的可积性条件 (3.7) 和 (3.8)，得到

$$\int_{|x|\geq1} \sup_{\varepsilon>0} |K(x) - K_\varepsilon * \psi(x)| < \infty$$

因此， $K_* \in L^1(\mathbb{R}^n)$。令

$$K_E(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}((K\eta)_\varepsilon - K_\varepsilon + K_\varepsilon * \psi)(x) = K\eta(x) - K(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon * \psi(x).$$

根据 T_* 的性质（见 [45, 第 45] 页），此极限对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都存在。由控制收敛定理， $K_E \in L^1(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}((K\eta)_\varepsilon - K_\varepsilon + K_\varepsilon * \psi) * f = K_E * f \quad \text{for } f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

令 $f \in h^1(\mathbb{R}^n)$。则 $T_E f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，其中

$$\|T_E f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|K_E\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

此外，Goldberg 的局部化 Riesz 变换 r_j、 $j = 1$、.....、 n （见定理 3.1）与函数 K_E 的卷积可交换，因此

$$r_j(T_E(f)) = T_E(r_j(f)).$$

由于 $r_j(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$，因此 $T_E(r_j(f)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\begin{aligned}\|T_E f\|_{h^1(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|T_E f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|r_j(T_E(f))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \|K_E\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}(\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \sum_{j=1}^n \|r_j(f)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}) \\ &\lesssim \|f\|_{h^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

□

从 Riesz 变换的核 R_j、 $j = 1$、.....、 n 出发，它们满足条件 (3.2) 和 (3.3)，其中 $\delta = 1$ ，以及条件 (3.4)，其中 $A = 0$。注意，对于定理 3.1 中的 φ ，函数 $\psi = \check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足定理 3.2 的假设，因此可结合这两个定理得到如下结论。

推论 3.1. 假设 η 和 ψ 满足定理 3.2中的假设。对于$j = 1, \dots, n$，定义，对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{R}_{j,\eta} f(x) := c_n \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|\ge\varepsilon} \frac{(x_j - y_j)\eta(x-y)}{|x-y|^{n+1}} f(y)dy$$

$$and$$

$$\mathcal{R}_j^{\psi} f(x) := R_j(f - \psi * f).$$

Then

1. $\mathcal{R}_{j,\eta}$ 和 $\mathcal{R}_j^{\psi}$ 都将 $h^1(\mathbb{R}^n)$映射到 $L^1(\mathbb{R}^n)$;

2. 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$、 $f \in h^1(\mathbb{R}^n) \iff \mathcal{R}_{j,\eta}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $j = 1$, ..., $n \iff \mathcal{R}_j^{\psi}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $j = 1$, ..., n.

如上所述，由于卷积算子与 r_j 可交换，从 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界性意味着在 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性，因此无需对核施加额外的消去条件（另见定理 4] [24, 的证明之后的注释）。

3.4 非齐次奇异积分算子

我们以介绍一类不一定是卷积型的算子来结束本节。然而，从定义可以看出，对于一个卷积 δ-核 K，若 η 在无穷远处衰减得足够快，则局部化核 $K\eta$ 属于这一类。

令 $\Delta := \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$中的对角线。

定义 3.3. 设 $\delta \in (0,1]$。我们称 T 是一个与非齐次 δ-核 K 相关联的非齐次奇异积分算子，如果 K 是 $\mathbb{R}^{2n} \setminus \Delta$ 上的局部可积函数，并且存在 $\varepsilon > 0$ 和 C 使得

1. $|K(x,y)| \le C \min\{|x-y|^{-n}, |x-y|^{-n-\varepsilon}\}$ for all $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \Delta$;
2. $|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)| \le C|y-z|^{\delta}|x-y|^{-n-\delta}$ for $2|y-z| \le |x-y|$.

此外，我们假设由 $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy$定义的算子 T，对于 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$且 $x \notin \operatorname{supp}(f)$，可以扩张为 $L^2(\mathbb{R}^n)$上的有界算子。

这类算子最初在 [19] 中引入，其推广形式在 [14], 中进行了研究；其中证明了，若对 T施加某些消去条件，则它是从 $h^p(\mathbb{R}^n)$到 $h^p(\mathbb{R}^n)$的有界算子，$0 < p \le 1$。即使不施加消去条件，我们仍可得到从 $h^1(\mathbb{R}^n)$到$L^1(\mathbb{R}^n)$的有界性；注意到 h^1 原子会映射为在 $L^1(\mathbb{R}^n)$中有界的“预分子”即可看出这一点（参见 [15, 定义 3]）。由于 T是奇异积分算子，对于 $1 < p < \infty$， T 也是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$到其自身的有界算子。我们将在第 5 节讨论这些算子与 bmo 函数的交换子。

4 与 bmo 函数的交换子相关的局部 Hardy 空间

本节介绍在 [34], 中定义的交换子极大函数以及 [39], 中原子的一些“局部”对应概念，并考察它们之间的关系。

4.1 一些极大函数

回顾一下，对 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$（$\mathbb{R}^n$）定义的 Hardy–Littlewood 极大函数为

$$Mf(x) := \sup_{B \ni x} |f|_B$$

它在 L^p（$\mathbb{R}^n$）上有界（$1 < p \le \infty$），并且也将 L^1（$\mathbb{R}^n$）有界地映射到 $L^{1,\infty}$（$\mathbb{R}^n$）。

在研究交换子时，以下两个极大函数是在 [10, Section 6] 中针对一维情形引入的。令

$$M(b,f)(x) := \sup_{I \ni x} \big|(b(x)-b_I)f_I\big|,$$

在 [10,Theorem IX] 中证明了， $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$ 当且仅当 $f \mapsto M(b,f)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界。证明使用了 [10, Theorem X] ，该定理指出，对于另一个极大函数，

$$N(b,f)(x) := \sup_{I \ni x} |(bf)_I - b(x) f_I|,$$

$f \mapsto M(b,f)$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界，其中 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R})$。

M 与乘以 b 的乘法算子所对应的交换子，即

$$[M,b](f)(x) := M(bf)(x) - b(x) Mf(x),$$

在 [1,2,37] 中进行了研究，并证明当且仅当 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 且 b 有下界时，它在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上对 $1 < p < \infty$ 有界。

最后，有如下极大函数，

$$M_b f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |b(x) - b(y)||f(y)|dy,$$

该函数在 [1,22,42] 中进行了研究，有时记作 C_b。与 [10], 中的情形一样，当且仅当 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 时， M_b 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上对 $1 < p < \infty$ 有界。此外，对于 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, [1,推论 1.11] 给出了逐点控制关系 $M_b f(x) \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}} M^2 f(x)$，其中 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，因此

$$\|M_b\|_{L^p \mapsto L^p} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{4.1}$$

Ky [34] 引入了空间 H^1_b 的如下交换子极大函数定义。

定义 4.1（[34], 定义 2.2）。设 $b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 非平凡。空间 $H^1_b(\mathbb{R}^n)$ 由满足以下条件的 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 组成： $[b,\mathfrak{M}_{\mathrm{nt}}]f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，其中 $[b,\mathfrak{M}_{\mathrm{nt}}]f(x) := \mathfrak{M}_{\mathrm{nt}}[b(x)f(\cdot) - b(\cdot)f(\cdot)](x)$，而 $\mathfrak{M}_{\mathrm{nt}}$ 是如下定义的非切向整体极大函数

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{nt}} f(x) := \sup\{|f * \phi_t(y)| : |y - x| < t, \varphi \in \mathcal{A}\}$$

with

$$\mathcal{A} = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|\phi\|_\infty + \|\nabla\phi\|_\infty \le (1 + |x|^2)^{-n-1}\}.$$

H^1_b 上的范数定义为

$$\|f\|_{H^1_b} := \|f\|_{H^1} \|b\|_{\mathrm{BMO}} + \|[b,\mathfrak{M}_{\mathrm{nt}}]f\|_{L^1}.$$

Ky 还通过将 t 限制在 $(0,1)$ 上，定义了非切向整体极大函数 $\mathfrak{M}_{\mathrm{nt}}$ 的一个“局部”版本。正如命题 2.1 后所指出的，就刻画 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 而言，这等价于极大函数 $\mathcal{M}$ 和 $\mathfrak{M}$。不过， h^1_b 在 [34] 中并无定义。

我们选取大极大函数 $\mathcal{M}$，并使用紧支撑测试函数，来给出 Ky 定义在局部情形下的对应形式。

定义 4.2. 给定 $b \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$，我们将 $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 的极大交换子函数定义为

$$\mathcal{M}_b f(x) := [b,\mathcal{M}](x) := \mathcal{M}[b(x)f(\cdot) - b(\cdot)f(\cdot)](x).$$

回顾一下，在命题 2.1（针对 $T=1$）中，我们对 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 定义了

$$\mathcal{M}(f)(x):=\sup_{\phi}|\langle f,\phi\rangle|,$$

其中，上确界取遍所有满足 $\operatorname{supp}(\phi)\subset B(x,t)$ 的 $\phi\in C^1(\mathbb{R}^n)$，其中存在某个 $0<t<1$, $\|\phi\|_{L^\infty}\le|B(x,t)|^{-1}$ 和 $\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\le[t|B(x,t)|]^{-1}$。因此，对于 $b,f\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$，我们有，

$$\mathcal{M}_bf(x)=\sup_{\phi}\big|\langle b(x)f(\cdot)-b(\cdot)f(\cdot),\phi\rangle\big|=\sup_{\phi}\left|\int_{\mathbb{R}^n}[b(x)-b(y)]f(y)\phi(y)dy\right|.$$

由于对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^n$，$(b(x)-b)f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，因此该积分几乎处处有定义；并且根据 ϕ 的大小与支集条件，

$$\mathcal{M}_bf(x)\lesssim M_bf(x). \tag{4.2}$$

将此定义从 $f\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 推广到一般的 $f\in h^1(\mathbb{R}^n)$ 并不显而易见，除非在 b 有界这一特殊情形下。事实上，Ky 的定义（定义 4.1）也是如此，在那里还需要进行额外工作，例如次线性分解 [34, 定理 3.1], 。

4.2 原子交换子 Hardy 空间

在 [39], P´erez 中，定义了一种受限的原子概念，其消去条件针对一个 $b\in$BMO 函数。

定义 4.3（[39], 定义 1.3）。对于 $b\in\operatorname{BMO}(\mathbb{R}^n)$，一个 b-原子 a，使得对于某个立方体 Q

(i) $\operatorname{supp}(a)\subset Q$;

(ii) $\|a\|_{L^\infty}\le|Q|^{-1}$;

(iii) $\int a=0$ and $\int ab=0$.

随后，P´erez 定义了一个原子空间，他称之为 H^1_b（Ky[34] uses $\mathcal{H}^1_b$ 对该空间的称呼），其元素为所有可写成 $f=\sum_{j=1}^\infty\lambda_ja_j$ 的 $f\in L^1$，其中 a_j 是 b-原子，且 $\{\lambda_j\}\in\ell^1$。注意，由于 b-原子也是 H^1 原子，这样的分解将在 H^1 范数下收敛，其中$\|f\|_{H^1}\le\sum|\lambda_j|$；因此，P´erez 的空间包含于 H^1。

我们将 P´erez 的定义直接推广到局部情形如下。

定义 4.4. 固定 $b\in\operatorname{bmo}(\mathbb{R}^n)$。如果存在某个球$B(x_0,r)$使得以下条件成立，则称 a 为 P´erez h^1_b 原子：

1. $\operatorname{supp}(a)\subset B(x_0,r)$

2. $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\le|B(x_0,r)|^{-\frac12}$

3. $\int a=0$ and $\int ab=0$ whenever $r<1$.

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，若 $f \in h^1_{\mathrm{Perez},b}(\mathbb{R}^n)$，则称之为……，如果 f 可以写成 $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$，其中 a_j 是 P´erez h^1_b 原子，且 $\{\lambda_j\} \in \ell^1$。对于这类函数，我们定义

$$\|f\|_{h^1_{\mathrm{Perez},b}} := \inf \sum_j |\lambda_j|,$$

下确界取遍所有此类分解。

与齐次情形一样，我们注意到，P´erez h^1_b 原子是h^1 中的一个 (1, 2) 原子，因此该分解在 h^1 中收敛，且有 $\|f\|_{h^1} \le \sum |\lambda_j|$。此外，支集在球 $B = B(x_0, r)$ 中的每个 P´erez h^1_b 原子还满足 $a(b - c_B) \in h^1$，其中 c_B 与 (2.1) 中相同。事实上，我们有 $a(b - c_B)$ 的支集也包含于 B，当 $r < 1$时其积分为零，并且由 (2.2)

$$\begin{aligned}\|a(b - c_B)\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} &\le \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|b - c_B\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le |B(x_0, r)|^{-\frac{1}{2}} \|b\|_{\mathrm{bmo},p} |B(x_0, r)|^{\frac{1}{p}} = \|b\|_{\mathrm{bmo},p} |B(x_0, r)|^{\frac{1}{s}-1}\end{aligned} \tag{4.3}$$

对于 $1 \le s < 2$ 和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{s}$；取 $s > 1$ 后，$a(b - c_B)$ 是一个 $(1, s)$ 原子的倍数，且有

$$\|a(b - c_B)\|_{h^1} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo},p}.$$

现在我们给出此定义的一种变体，其中涉及近似消去条件。

定义 4.5。固定 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$，并令 $C_b = \|b\|_{\mathrm{bmo},\,2}$ 如（2.2）中所定义。若存在球 $B(x_0, r)$，使得满足以下条件，则称 a 为近似 h^1_b 原子

1. $\mathrm{supp}(a) \subset B(x_0, r)$;

2. $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le |B(x_0,\ r)|^{-\frac{1}{2}}$;

3. $\left| \int a \right| \le \dfrac{1}{[\log(1 + r^{-1})]^2}$ and $\left| \int a(b - c_B) \right| \le \dfrac{C_b}{\log(1 + r^{-1})}$.

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，若 f 可写为 $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$，其中 a_j 是近似 h^1_b 原子，且 $\{\lambda_j\} \in \ell^1$，则称 $f \in h^1_{\mathrm{atom},\,b}(\mathbb{R}^n)$。对于这类函数，我们定义

$$\|f\|_{h^1_{\mathrm{atom},b}} := \inf \sum_j |\lambda_j|,$$

其中，下确界取遍所有此类分解。

选择 $C_b = \|b\|_{\mathrm{bmo},\,2}$ 可保证，根据柯西-施瓦茨不等式，当 $r \ge 1$时，条件（2）蕴含条件（3）。因此，每个 P´erez h^1_b 原子都是近似 h^1_b 原子，并且

$$h^1_{\mathrm{Perez},b}(\mathbb{R}^n) \subset h^1_{\mathrm{atom},b}(\mathbb{R}^n).$$

此外，将 $R = 1$ 和 $q = 2$ 的情形与定义 2.2 比较可知，如 (4.3) 中所示，不仅每个近似 h^1_b 原子 a 都是一个近似 (1, 2) 原子（相差一个 log 2 的因子），而且 $a(b - c_B)$ 对于 $1 < s < 2$ 和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{s}$ 而言，也是一个近似 $(1, s)$ 原子的倍数，其中

$$\|a(b - c_B)\|_{h^1} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo},p}. \tag{4.4}$$

回想一下，在 h^1 （或 h^p）中，每个满足近似消去条件的原子（或分子）都可以写成满足精确消去条件的原子的无穷线性组合——参见 [14, 18]。能否将一个近似 h^1_b原子分解为满足精确消去条件的 P´erez h^1_b 原子?

在下面的命题中，我们给出一个部分逆命题，说明每个近似 h^1_b 原子都可以写成有限个积分为零的原子之和，但我们无法实现相对于 b的精确消去，而且也不清楚能否做到这一点。

命题 4.1. 假设 A 是相对于球 $B(x_0, r)$的一个近似 h^1_b 原子，且 $r < 1$。则 $A = \sum \lambda_j a_j$，其中求和为有限和，a_j 分别是支集于球 B_j中的近似 h^1_b 原子；此外，当$r(B_j) < 1$时，

$$\int a_j = 0.$$

此外，存在某个仅依赖于 n, $\sum |\lambda_j| \le C_n$的常数。

证明. 令 $\alpha = \int A \neq 0$ （否则结论显然成立）。将 $B(0, 2^j r)$记为 B_j,$j = 0, 1, 2, \ldots, k$，其中 $2^{k-1} r < 1 \le 2^k r$，并令 $\eta_j = \frac{\chi_{B_j}}{|B_j|}$为 B_j的归一化示性函数。于是

$$A = A - \alpha\eta_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha(\eta_{j-1} - \eta_j) + \alpha\eta_k = \sum_{i=0}^{k+1} A_j$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &:= A - \alpha\eta_0 \\ A_j &:= \alpha(\eta_{j-1} - \eta_j), \quad j = 1, \ldots, k, \quad \text{and} \\ A_{k+1} &:= \alpha\eta_k. \end{aligned}$$

首先注意到，对于 $j = 1, ..., k$，$\mathrm{supp}(A_j) \subset B_j$，且 $\mathrm{supp}(A_{k+1}) \subset B_k$。此外，由于对所有 j 都有 $\int \eta_j = 1$，因此对于 $j = 0, ..., k$，有 $\int A_j = 0$。

记 $A_j = \lambda_j a_j$，其中

$$a_0 := \frac{1}{2} A_0, \quad \lambda_0 := 2, \quad a_{k+1} := \alpha^{-1} A_{k+1}, \quad \lambda_{k+1} := \alpha,$$

and

$$a_j := \frac{A_j}{\alpha 2^n \log(1 + [2^j r]^{-1})}, \quad \lambda_j := \alpha 2^n \log(1 + [2^j r]^{-1}), \quad j = 1, \ldots, k.$$

由于对于$j = 1, \ldots, k$，有$|\alpha| \le \|A\|_{L^1} \le 1$，$\|\eta_j\|_{L^\infty} \le |B_j|^{-1}$，且 $2^n \log(1 + [2^j r]^{-1}) > 1$，因此对于 $j = 1, ..., k$，有$\|a_0\|_{L^2} \le |B_0|^{-\frac{1}{2}}$，$\|a_j\|_{L^\infty} \le |B_j|^{-1}$，并且 $\|a_{k+1}\|_{L^\infty} \le |B_k|^{-1}$。于是，所有的 a_j 都满足定义 4.5 中的条件 (1) 和 (2)，此外对于 $j = 0, ..., k$，还有 $\int a_j = 0$。由于 $r(B_k) = 2^k r \ge 1$，对于 a_{k+1}不要求满足后一条件。

为验证定义 4.5 中的条件 (3)，我们需要检查 a_j 是否满足相对于 b 的近似消去条件。对于 $j = 0$，我们可由 A 的近似消去得到 a_0 的近似消去：

$$\left| \int a_0 b \right| = \frac{1}{2} \left| \int Ab - \alpha \int b\eta_0 \right| = \frac{1}{2} \left| \int A[b - b_B] \right| \le \frac{C_b}{\log(1 + r^{-1})}.$$

对于 $j=1$，...，k，利用 (2.4)，我们有：

$$\begin{aligned}\left|\int a_j b\right| &= \frac{1}{2^n \log(1+[2^j r]^{-1})}\left|\int b(\eta_{j-1}-\eta_j)\right| \\ &= \frac{1}{2^n \log(1+[2^j r]^{-1})}|b_{2^{j-1}B}-b_{2^j B}| \\ &\le \frac{\|b\|_{\mathrm{bmo}}}{\log(1+[2^j r]^{-1})},\end{aligned}$$

并且对于 $j=k+1$，由于 $r(B_k)=2^k r\ge 1$，

$$\left|\int a_{k+1} b\right| = |b_{B_k}| \le \frac{\|b\|_{\mathrm{bmo}}}{\log(1+(2^k r)^{-1})}.$$

如果如定义 4.5 后所述，我们取 $C_b=\|b\|_{\mathrm{bmo},\ 2}\ge\|b\|_{\mathrm{bmo}}$，那么可以得出结论：$a_j$ 对于 $j=0$，...，$k+1$ 都是近似的 h_b^1 原子。

最后，我们有

$$\begin{aligned}\sum|\lambda_j| &= 2+\alpha 2^n\sum_{j=1}^{k}\log(1+[2^j r]^{-1}+\alpha \\ &\le 3+\frac{2^n}{[\log(1+r^{-1})]^2}\sum_{j=1}^{k}\log(1+[2^j r]^{-1}) \\ &\le 3+\frac{2^n k\log(1+r^{-1})}{[\log(1+r^{-1})]^2} \\ &\le 3+\frac{2^n(\log_2 r^{-1}+1)}{[\log(1+r^{-1})]} \\ &\le C_n.\end{aligned}$$

□

4.3 这些空间之间的关系

对于齐次情形，Ky 证明（见 [34, 定理 5.2]）

$$\mathcal{H}_b^1(\mathbb{R}^n)\subset H_b^1(\mathbb{R}^n)\subset H^1(\mathbb{R}^n),$$

其中 $\mathcal{H}_b^1$ 是 P´érez 原子空间，H_b^1 是极大交换子空间，但没有讨论该包含关系是否为真包含。[26] 的结果表明，最后一个包含关系是真包含，至少在一维情形下如此，除非 b 是常数。

对于非齐次情形，上一节在定义原子空间之后的讨论给出了以下包含关系

$$h^1_{\mathrm{Perez},b}(\mathbb{R}^n)\subset h^1_{\mathrm{atom},b}(\mathbb{R}^n)\subset h^1(\mathbb{R}^n).$$

在 b 为常函数的平凡情形下，相对于 b 的消去条件可化为关于原子积分的条件。因此，每个具有精确消去性质的 h^1 原子都是 P´erez h_b^1 原子，所以

$$h^1_{\mathrm{Perez},b}(\mathbb{R}^n)=h^1_{\mathrm{atom},b}(\mathbb{R}^n)=h^1(\mathbb{R}^n). \tag{4.5}$$

我们将在下一节看到，第二个等式对于 bmo 的一个非平凡子空间中的 b 可以成立。

虽然我们尚未定义极大空间，但可以考虑交换子极大函数 $\mathcal{M}_b$ 在原子上的作用。

命题 4.2. 设 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$。则对于每个 h_b^1 原子 a,

$$\|\mathcal{M}_b a\|_{L^1} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}.$$

证明. 设 a 是一个支集包含于 $B = B(x_0, r)$ 中的近似 h_b^1 原子。我们希望估计 $\mathcal{M}_b(a)$。

对于局部估计，利用（4.2），我们可以应用第 4.1 节中定义的 L^p 极大交换子算子 $M_b f$ 的有界性，其估计为（4.1）。因此，利用 a 上的 L^2 大小条件，我们得到

$$\int_{2B} \mathcal{M}_b(a) \le |2B|^{1/2} \|M_b a\|_{L^2(2B)} \lesssim |B|^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L^2} \|M_b\|_{L^2 \mapsto L^2} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}.$$

接下来我们处理 $(2B)^c$ 上的积分。注意到

$$\left| \int_{B(x,t)} \phi(y)[b(x) - b(y)]a(y)dy \right| \neq 0$$

这意味着存在 $y \in B(x,t) \cap B(x_0, r)$，进而意味着

$$r \le \frac{|x - x_0|}{2} \le |x - x_0| - |x_0 - y| \le |x - y| \le t < 1. \tag{4.6}$$

当 $r \ge 1$ 时，这种情况不会发生，因此在这种情况下，对于 $(2B)^c$ 上的所有测试函数 ϕ 和 $\mathcal{M}_b(a) = 0$，积分都为零。

对于 $r < 1$，根据命题 4.1，我们可以假设 $\int a = 0$。因此，对于几乎所有的 $x \in (2B)^c$，我们有：

$$\begin{aligned}
&\left| \int [b(x) - b(y)]a(y)\phi(y)dy \right| \\
&\le \left| \int [b(x) - b(y)]a(y)[\phi(y) - \phi(x_0)]dy \right| + \left| \phi(x_0) \int b(y)a(y)dy \right| \\
&\le |b(x) - b_B| \|\nabla\phi\|_{L^\infty} r \int |a(y)|dy + \|\nabla\phi\|_{L^\infty} r \int |b(y) - b_B||a(y)|dy \\
&\qquad + \|\phi\|_{L^\infty} \left| \int b(y)a(y)dy \right| \\
&\lesssim \frac{|b(x) - b_B| r}{|x - x_0|^{n+1}} + \frac{r\|b\|_{\mathrm{bmo},2}}{|x - x_0|^{n+1}} + \frac{C_b}{|x - x_0|^n \log(1 + r^{-1})},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中在最后一步中，我们使用了关于 ϕ 的条件、(4.6)、L^1 在 $a(b - b_B)$ 上的估计（参见 (4.3)，其中 $s = 1$、$p = 2$），以及定义 4.5 中的条件 (3)。由于上述估计与 ϕ 无关，因此它对 $\mathcal{M}_b(a)(x)$ 也成立，从而，

再次利用 (4.6),

$$\begin{aligned}\int_{(2B)^c} \mathcal{M}_b(a)(x)dx &= \int_{2r<|x-x_0|<2} \mathcal{M}_b(a)(x)dx \\ &\lesssim \int_{(2B)^c} \frac{|b(x)-b_B|r}{|x-x_0|^{n+1}} + \int_{(2B)^c} \frac{r\|b\|_{\mathrm{bmo},2}}{|x-x_0|^{n+1}} \\ &\qquad + \int_{2r<|x-x_0|<2} \frac{C_b}{|x-x_0|^n \log(1+r^{-1})} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

这里我们用到了 (2.3)、(2.2)，以及 $C_b = \|b\|_{\mathrm{bmo},2}$ 这一事实。 □

若取一个 h^1 原子 a，但不假设其满足关于 b的任何消去条件，则极大函数 $\mathcal{M}_b$ 的有界性等价于$a(b-c_B)$ 是否属于 h^1，其中 B 是包含 a支集的球。这种有界性会自动保证关于 b的近似消去。

命题 4.3. 设 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$，$b$ 非平凡。假设 a 是一个 h^1 原子，其支集包含于球 $B = B(x_0, r)$ 中，并且当 $r < 1$ 时积分为零。那么

$$\|\mathcal{M}_b a\|_{L^1} \lesssim \|a(b-c_B)\|_{h^1} + \|b\|_{\mathrm{bmo}} \lesssim \|\mathcal{M}_b a\|_{L^1} + \|b\|_{\mathrm{bmo}}.$$

此外,

$$\left|\int ab\right| \lesssim \min\left\{\frac{\|\mathcal{M}_b a\|_{L^1} + \|b\|_{\mathrm{bmo}}}{\log(1+r^{-1})}, \|b\|_{\mathrm{bmo}}\right\}.$$

证明。我们假设 a 满足一个 L^2 大小条件。首先注意，由 (4.3) 可知，对于 $1 < s < 2$, $a(b-c_B) \in L^s(\mathbb{R}^n)$，且其具有紧支撑，因此 $a(b-c_B)$ 属于$h^1(\mathbb{R}^n)$。由定义 4.2，对于几乎处处的 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{M}_b(a)(x) = \mathcal{M}([b(x)-b]a)(x) \le |b(x)-c_B|\mathcal{M}(a)(x) + \mathcal{M}([b-c_B]a)(x),$$

因此

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}_b(a)\|_{L^1} &\le \int |b(x)-c_B|\mathcal{M}(a)(x)dx + \|\mathcal{M}([b-c_B]a)\|_{L^1} \\ &\lesssim \int |b(x)-c_B|\mathcal{M}(a)(x)dx + \|a(b-c_B)\|_{h^1}.\end{aligned}$$

反之,

$$\mathcal{M}([b-c_B]a)(x) \le \mathcal{M}_b(a)(x) + |b(x)-c_B|\mathcal{M}(a)(x),$$

so

$$\|a(b-c_B)\|_{h^1} \le \|\mathcal{M}_b(a)\|_{L^1} + \int |b(x)-c_B|\mathcal{M}(a)(x)dx.$$

因此，剩下要证明的是，$|b-c_B|\mathcal{M}(a)$ 的积分受 $\|b\|_{\mathrm{bmo}}$ 控制。论证与命题 4.2 的证明类似。首先，我们有

$$\int_{2B} |b-c_B|\mathcal{M}(a) \le \|b-c_B\|_{L^2(2B)}\|Ma\|_{L^2(2B)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}|B|^{\frac{1}{2}}\|a\|_{L^2} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}.$$

此外，(4.6) 表明，如果 $r \geq 1$, $\mathcal{M}(a)$ 在 $2B$ 之外为零。对于 $r < 1$，我们可以像 (4.7) 那样利用 a 上的消去条件来写出：对每个测试函数 ϕ，且对几乎处处的 $x \in (2B)^c$,

$$|b(x) - c_B| \left| \int a(y)\phi(y)dy \right| \leq |b(x) - b_B| \|\nabla\phi\|_{L^\infty} r \int |a(y)|dy$$
$$\lesssim \frac{|b(x) - b_B| r}{|x - x_0|^{n+1}}.$$

因此，$(2B)^c$ 上的积分可按 (4.8) 中第一项的方式进行估计。

将命题 2.3 应用于 $a(b - c_B) \in h^1(\mathbb{R}^n)$，再结合上述估计，可得

$$\left| \int ab \right| = \left| \int a(b - c_B) \right| \lesssim \frac{\|a(b - c_B)\|_{h^1}}{\log(1 + r^{-1})} \lesssim \frac{(\|\mathcal{M}_b a\|_{L^1} + \|b\|_{\mathrm{bmo}})}{\log(1 + r^{-1})}.$$

另一个上界可由 bmo 与 h^1 的对偶性得到，也可通过柯西－施瓦茨不等式得到。 □

值得注意的是，若在命题 4.3 的假设中，当 $r < 1$ 时没有要求 a 上满足精确消去，我们就必须额外估计一个如下形式的项

$$\int_{2r<|x-x_0|<2} \frac{|b(x) - b_B|}{|x - x_0|^n} dx \left| \int a \right|.$$

由 (2.3) 的证明可知，若 $\delta = 0$ 且 $p = 1$，则 x 中的积分可用 $\|b\|_{\mathrm{bmo}} (\log \frac{1}{r})^2$ 估计。因此，我们需要一个形如 $|\int a| \leq [\log(1 + r^{-1})]^{-2}$ 的消去条件，如定义 4.5 的条件 (3) 所示。

结合命题 4.1、4.2 和 4.3，可得如下结论。

推论 4.1. 设 $f \in h^1(\mathbb{R}^n)$。则以下条件等价。

1. 函数 $f \in h^1_{\mathrm{atom},\ b}(\mathbb{R}^n)$。

2. 存在一个序列 $\{\lambda_j\} \in \ell^1$ 和一组 h^1 原子 $\{a_j\}$，其中 B_j 表示包含 a_j 支集的球，并且当 $r(B_j) < 1$ 时，a_j 的积分为零，从而 $f = \sum_j \lambda_j a_j$ 和 $\mathcal{M}_b a_j$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中一致有界。

3. 存在一个序列 $\{\lambda_j\} \in \ell^1$ 和一组 h^1 原子 $\{a_j\}$，其中 B_j 表示包含 a_j 支集的球，并且当 $r(B_j) < 1$ 时，a_j 的积分为零，从而 $f = \sum_j \lambda_j a_j$ 和

$$\sum_j \lambda_j a_j (b - c_{B_j}) \ \textit{converges absolutely in } h^1(\mathbb{R}^n).$$

4.4 b 属于 lmo 的情形

现在我们来介绍所承诺的结果：即使 b 不是常数，它也给出了 (4.5) 中的第二个等式。回想一下，$\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$ 的逐点乘子，因此也是 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 的逐点乘子，已在 [5] 中被确定为 $L^\infty \cap \mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$ 的元素。因此，下面的结果并不令人意外。

定理 4.6. 设 $b \in \mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$。那么 $h^1_{\mathrm{atom},b}(\mathbb{R}^n) = h^1(\mathbb{R}^n)$。此外，

$$\|f\|_{h^1} \le \|f\|_{h^1_{\mathrm{atom},b}} \lesssim \frac{\|b\|_{\mathrm{LMO}_{loc}}}{\|b\|_{\mathrm{BMO}_{loc}}} \|f\|_{h^1}.$$

证明。我们在定义 4.5 后已指出，对于 $b \in \mathrm{bmo}$， h^1_b原子是近似 h^1 原子（相差一个 log 2 因子），因此 $h^1_b(\mathbb{R}^n) \subset h^1(\mathbb{R}^n)$，其中 $\|f\|_{h^1} \lesssim \|f\|_{h^1_{\mathrm{atom},\ b}}$。反向包含只需满足 lmo 条件。

设 a 是一个 h^1 原子，其支集包含于球 $B = B(x_0, r)$ 中，满足 L^2 大小条件，且使得 $\int a = 0$。这意味着定义 4.5 中的条件 (1)、(2) 以及 (3) 的第一部分均已满足，我们只需检验相对于 b 的近似消去。由于这对 $r \ge 1$ 自动成立，我们假设 $r < 1$。根据 a 上的 L^2 大小条件，

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^n} a(x)[b(x) - b_B]dx \right| &\le \frac{1}{\log(1+r^{-1})} \frac{\log(1+r^{-1})}{|B|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_B |b(x) - b_B|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{\|b\|_{\mathrm{LMO}_{\mathrm{loc},2}}}{\log(1+r^{-1})},\end{aligned}$$

其中

$$\|b\|_{\mathrm{LMO}_{\mathrm{loc},2}} := \sup_{r(B)<1} \log(1+r(B)^{-1}) \left(\fint_B |b(x) - b_B|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于

$$\gamma := \frac{\log 2 \|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},2}}}{\|b\|_{\mathrm{LMO}_{\mathrm{loc},2}}} \le 1$$

并且 $\log 2 \|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc},\ 2}} \le \|b\|_{\mathrm{bmo},\ 2} = C_b$，我们有 γa 是一个 h^1_b 原子。

最后，对于具有原子分解 $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$ 的 $f \in h^1$，我们可以将其视为由乘以 γ^{-1} 的 h^1_b 原子构成的分解，因此 $f \in h^1_{\mathrm{atom},\ b}(\mathbb{R}^n)$，其中

$$\|f\|_{h^1_{\mathrm{atom},b}} \le \gamma^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|.$$

对所有此类分解取下确界，得到 $\|f\|_{h^1_{\mathrm{atom},\ b}} \le \gamma^{-1} \|f\|_{h^1}$。定理中的不等式可通过对 LMO 应用 John-Nirenberg 不等式得到，参见 [43]。 □

我们给出该定理的一个部分逆命题。

命题 4.4. 设 $b \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。假设存在一个常数 C_b，使得每个 h^1 原子 a 都满足

$$\left| \int ab \right| \le \min \left\{ C_b, \frac{C_b \log(2)}{\log(1+r^{-1})} \right\},$$

其中， r 是包含 a支集的球 B 的半径。于是 $b \in \mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$。

证明。我们先处理半径为 $r<1$的球 B 。定义 $s(x)$: $=$ 符号函数$[b(x)-b_B]$ ，以及 $a(x)$: $=$ $^{s}(x)\frac{-s_B}{|B|}\chi_B(x)$。于是 a 是一个 h^1 原子。此外，我们可以写成

$$\begin{aligned}\log(1+r^{-1})\fint_B|b(x)-b_B|dx &= \log(1+r^{-1})\fint_B s(x)(b(x)-b_B)dx\\ &= \frac{\log(1+r^{-1})}{|B|}\int_B(s(x)-s_B)(b(x)-b_B)dx\\ &= \log(1+r^{-1})\int_B a(x)b(x)dx\\ &= \log(1+r^{-1})\left|\int_B ab\right|\\ &\le C_b.\end{aligned}$$

若 $r\ge 1$，定义 $a(x):=$ 符号函数$\frac{[b\ x]}{|B|}\chi_B()(x)$。类似的论证表明

$$\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)|dx=\left|\int_B a(x)b(x)dx\right|\le C_b.$$

因此，我们可以得出 $b\in$ lmo$(\mathbb{R}^n)$，其中 $\|b\|_{\mathrm{lmo}}\le C_b$。 □

类似地，我们给出命题 4.2 的一个部分逆命题

命题 4.5。设 $b\in$bmo$(\mathbb{R}^n)$。假设存在常数 κ_b ，使得每个 h^1 原子 a 都满足

$$\|\mathcal{M}_b a\|_{L^1}\le\kappa_b.$$

那么 b 满足

$$\sup_{r(B)<1}\frac{1}{|B|}\||b-b_B|\chi_B\|_{h^1}+\sup_{r(B)\ge 1}\frac{1}{|B|}\||b|\chi_B\|_{h^1}<\infty.$$

证明。取一个半径为 $r<1$的球 B 。与前一个证明中一样，令 $s(x)$:=sgn$[b(x)-b_B]$ ，并令 $a(x):=$ $^{s}(x)\frac{-s_B}{|B|}\chi_B(x)$。于是 a 是一个 h^1 原子，由命题 4.3,

$$\begin{aligned}\||b-b_B|\frac{\chi_B}{|B|}\|_{h^1} &= \|(b-b_B)s(x)\frac{\chi_B}{|B|}\|_{h^1}\\ &\le \|a(b-b_B)\|_{h^1}+|s_B|\left\|\frac{(b-b_B)\chi_B}{|B|}\right\|_{h^1}\\ &\lesssim \|\mathcal{M}_b(a)\|_{L^1}+\|b\|_{\mathrm{bmo}}+|s_B|\left\|\frac{(b-b_B)\chi_B}{|B|}\right\|_{h^1}\\ &\lesssim \|\mathcal{M}_b(a)\|_{L^1}+\|b\|_{\mathrm{bmo}}.\end{aligned}$$

在最后一步中，我们用到了 $|s_B|\le 1$ 和 $(b-b_B)\frac{\chi_B}{|B|\|b\|_{\mathrm{bmo}}}$, $_2$ 是一个 (1, 2) 原子这一事实。

对于半径为 $r\ge 1$的 B ，我们再次定义 $a(x)$ $=$ 符号函数$(b(x))\chi_B(x)$ $|B|$ ，并使用命题 4.3:

$$\||b|\frac{\chi_B}{|B|}\|_{h^1}=\|a(b-c_B)\|_{h^1}\lesssim\|\mathcal{M}_b(a)\|_{L^1}+\|b\|_{\mathrm{bmo}}.$$

□

命题 4.2 和 4.5 的一个有趣推论如下。

推论 4.2. 设 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$。则以下条件等价。

1. 函数 b属于 $\mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$。
2. 函数 b满足

$$A_b := \sup_{r(B)<1} \frac{1}{|B|} \| |b - b_B| \chi_B \|_{h^1} + \sup_{r(B)\geq 1} \frac{1}{|B|} \| |b| \chi_B \|_{h^1} < \infty.$$

证明. 设 $b \in \mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$。那么根据定理 4.6 的证明，对于一个 h^1原子 a， γa 是一个 h^1_b 原子，因此由命题 4.2

$$\|\mathcal{M}_b a\|_{L^1} \lesssim \gamma^{-1} \|b\|_{\mathrm{bmo}} \approx \kappa_b := \frac{\|b\|_{\mathrm{LMO}_{\mathrm{loc}}}}{\|b\|_{\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}}} \|b\|_{\mathrm{bmo}},$$

这正是命题 4.5 的假设。

反过来，设 $A_b < \infty$。注意，由命题 2.3，我们可以估计

$$\sup_{r(B)<1} \frac{\log(1 + [r(B)]^{-1})}{|B|} \int_B |b(x) - b_B| dx \lesssim \sup_{r(B)<1} \frac{1}{|B|} \| |b - b_B| \chi_B \|_{h^1}.$$

同时，利用 $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{h^1(\mathbb{R}^n)}$ 这一事实，我们有

$$\sup_{r(B)\geq 1} \frac{1}{|B|} \int_B |b(x)| dx \leq \sup_{r(B)\geq 1} \frac{1}{|B|} \| |b| \chi_B \|_{h^1}.$$

因此 $\|b\|_{\mathrm{lmo}} \lesssim A_b < \infty$。 □

5 bmo 函数与非齐次奇异积分算子交换子的有界性

在第 3 节末尾，我们引入了一类 Calder´on-Zygmund 算子，其核在远离对角线处具有更好的衰减（见定义 3.3）。现在我们将证明，这些算子与 bmo 函数的交换子将 h^1_b 原子映射到 L^1。

定理 5.1. 设 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$，且 T 是一个非齐次奇异积分算子。那么 $[b, T](a) \in L^1(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\|[b, T]a\|_{L^1} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}$$

对所有 h^1_b 原子 a 均成立。因此 $[b, T] : h^1_{\mathrm{finite},b}(\mathbb{R}^n) \mapsto L^1(\mathbb{R}^n)$，其中 $h^1_{\mathrm{finite},b}(\mathbb{R}^n)$ 表示由 h^1_b 原子构成的有限线性组合空间。

证明。设 a 是一个 h^1_b 原子，其支集 $\mathrm{supp}(a) \subset B = B(x_0, r)$。注意，我们可以将作用于 a 上的交换子写为 $[b, T](a) = (b - c_B)T(a) - T(a(b - c_B))$。

我们首先证明 $T(a(b-c_B)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$。由 T对$p=\frac{3}{2}$的 L^p有界性可得

$$\begin{aligned}\|T(a(b-c_B))\|_{L^1(2B)} &\le |2B|^{\frac{1}{3}}\|T(a(b-c_B))\|_{L^{\frac{3}{2}}(2B)}\\ &\lesssim |B|^{\frac{1}{3}}\|T\|_{L^{\frac{3}{2}}\mapsto L^{\frac{3}{2}}}\|a(b-c_B)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \|T\|_{L^{\frac{3}{2}}\mapsto L^{\frac{3}{2}}}|B|^{\frac{1}{3}}\|b-c_B\|_{L^6(B)}\|a\|_{L^2(B)}\\ &\lesssim \|T\|_{L^{\frac{3}{2}}\mapsto L^{\frac{3}{2}}}|B|^{-\frac{1}{6}}\|b-c_B\|_{L^6(B)} \lesssim \|T\|_{L^{\frac{3}{2}}\mapsto L^{\frac{3}{2}}}\|b\|_{\mathrm{bmo},6}.\end{aligned}$$

考察 $x\in(2B)^c$，首先考虑 $r<1$的情形。根据命题 4.1，我们可以假设 $\int a = 0$。由于 $x\notin \mathrm{supp}(a(b-b_B))$，我们可以利用核表示写出

$$\begin{aligned}&\|T(a(b-b_B))\|_{L^1((2B)^c)}\\ &\le \int_{(2B)^c}\left|\int_B K(x,y)a(y)(b(y)-b_B)dy\right|dx\\ &\le \int_{(2B)^c}\left|\int_B [K(x,y)-K(x,x_0)]a(y)(b(y)-b_B)dy\right|dx + \int_{(2B)^c}|K(x,x_0)|\left|\int ab\right|dx\\ &=: I+II.\end{aligned}$$

由于 $2|y-x_0|<2r\le|x-x_0|$，我们可以利用 K 的光滑性（定义 3.3 中的条件 (2)）进行估计

$$\begin{aligned}I &\lesssim \int_{(2B)^c}\int_B \frac{|y-x_0|^\delta}{|x-x_0|^{n+\delta}}|a(y)||b(y)-b_B|dydx\\ &\lesssim \int_{(2B)^c}\frac{r^\delta}{|x-x_0|^{n+\delta}}\int_B |a(y)||b(y)-b_B|dydx\\ &\le \int_{(2B)^c}\frac{Cr^\delta}{|x-x_0|^{n+\delta}}dx\|b\|_{\mathrm{bmo},2}\\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}.\end{aligned}$$

利用 K 的衰减性质（定义 3.3 中的条件 (2)）以及 a 对 b的消去性，并回想我们选取了$C_b=\|b\|_{\mathrm{bmo},\ 2}$，可得

$$\begin{aligned}II &\le \int_{(2B)^c}|K(x,x_0)|\left|\int ab\right|dx\\ &\lesssim \left(\int_{2r\le|x-x_0|\le 1}\frac{1}{|x-x_0|^n}dx + \int_{|x-x_0|\ge 1}\frac{1}{|x-x_0|^{n+\varepsilon}}dx\right)\frac{C_b}{\ln(1+r^{-1})}\\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo},2}\frac{\ln(1+r^{-1})+1}{\ln(1+r^{-1})} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}.\end{aligned}$$

当 $r\ge 1$时，利用 $2|y-x_0|\le|x-x_0|$ 蕴含$|x-y|\ge\frac{1}{2}|x-x_0|$这一事实，

K 的衰减再次给出

$$\begin{aligned}\|T(a(b-c_B))\|_{L^1((2B)^c)} &\le \int_{(2B)^c}\left|\int_B K(x,y)a(y)b(y)dy\right|dx\\ &\lesssim \int_{|x-x_0|\ge 2r}\frac{1}{|x-x_0|^{n+\varepsilon}}\|b\|_{\mathrm{bmo},2}\\ &\lesssim \int_{|x-x_0|\ge 2}\frac{1}{|x-x_0|^{n+\varepsilon}}\|b\|_{\mathrm{bmo},2}\lesssim\|b\|_{\mathrm{bmo}}.\end{aligned}$$

现在我们可以处理项 $(b-c_B)T(a)$。利用 T 在 L^2 上的有界性，我们得到

$$\begin{aligned}\|(b-c_B)T(a)\|_{L^1(2B)} &\le \|b-c_B\|_{L^2(2B)}\|T(a)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo},2}|B|^{\frac12}\|T\|_{L^2\mapsto L^2}\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}\|T\|_{L^2\mapsto L^2}.\end{aligned}$$

当 $r<1$ 时，我们利用 a 的消去性质、 K 的光滑性以及 (2.3)，得到

$$\begin{aligned}\|(b-b_B)T(a)\|_{L^1((2B)^c)} &\le \int_{(2B)^c}|b(x)-b_B|\left|\int_B[K(x,y)-K(x,x_0)]a(y)dy\right|dx\\ &\le \int_{(2B)^c}|b(x)-b_B|\frac{r^\delta}{|x-x_0|^{n+\delta}}dx\lesssim\|b\|_{\mathrm{bmo}}. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

当 $r\ge 1$ 时，类似于对 $\|T(a(b-c_B))\|_{L^1((2B)^c)}$ 的估计，再由 (2.3)，我们有

$$\begin{aligned}\|(b-c_B)T(a)\|_{L^1((2B)^c)} &\le \int_{(2B)^c}|b(x)|\left|\int_B K(x,y)a(y)dy\right|dx\\ &\le \int_{(2B)^c}\frac{|b(x)|}{|x-x_0|^{n+\varepsilon}}dx\\ &\le \int_{(2B)^c} r^\varepsilon\frac{|b(x)-c_B|}{|x-x_0|^{n+\varepsilon}}dx\lesssim\|b\|_{\mathrm{bmo}}. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

因此我们已经证明，对所有 h^1_b 原子 a，都有 $\|[b,T]a\|_{L^1}\lesssim\|b\|_{\mathrm{bmo}}$。最后，$f\in h^1_{\mathrm{finite},b}(\mathbb{R}^n)$ 意味着它可以写成 $\sum_k\gamma_k a_k$ 个 h^1_b 原子的有限线性组合，因此由线性性，并对所有此类分解取下确界，我们得到

$$\|[b,T]f\|\lesssim\|b\|_{\mathrm{bmo}}\inf\sum_k|\gamma_k|.$$

□

我们无法将结论推广到所有 $h^1_{\mathrm{atom},b}(\mathbb{R}^n)$，因为我们不知道对于 $f\in h^1_{\mathrm{finite},b}(\mathbb{R}^n)$，在所有原子的有限线性组合上取下确界的 $\inf\sum_k|\gamma_k|$，是否与 $\|f\|_{h^1_{\mathrm{atom},b}}$ 相当；后者是在所有可能的原子分解上取下确界。

当 $h^1_{\mathrm{atom},\,b}(\mathbb{R}^n)=h^1(\mathbb{R}^n)$ 时，原子有限线性组合上的下确界与 h^1 范数可比较，因此只需

验证算子在一个 h^1 原子上的有界性，即可得到到全空间的有界延拓（参见 [36, 定理 3.1，推论 3.4]（针对 H^1 和 [27, 的情形），以及齐次型空间上 h^1 的情形对应的命题 7.1]）。由此得到以下推论。

推论 5.1. 设 $b \in \mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$，且 T 是一个非齐次奇异积分算子。那么存在 $[b,T]$ 的唯一延拓 L_b，使其从 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界。

特别地，对于 $b \in \mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$，我们可以应用此推论来证明推论 3.1 中定义的交换子 $[b,\mathcal{R}_{j,\eta}]$ 和 $[b,\mathcal{R}_j^{\psi}]$ 的有界性，前提是所得的局部化卷积核在远离原点处具有额外的衰减。这除了定理 3.2 中的假设外，还要求对 η 和 ψ 作出一些额外假设。

我们还可以将此推论与 [28]的结果进行比较。虽然我们的假设 $b \in$lmo 比他们的假设 $b \in \mathrm{LMO}_\infty$更强，后者允许振荡在大球上增长，而且他们得到了 h^1 到 h^1 的有界性，但他们所研究的算子是伪微分算子，其核具有好得多的衰减和光滑性（见 [28, 命题 2.1]）。

为了得到 h^1到 h^1的有界性，我们需要施加一些近似消去条件。我们沿用 [14, 定义 5.1]中的思路。

定义 5.2. 设 T 是一个非齐次奇异积分算子。给定一个球 B，用 $L_0^2(\mathbb{R}^n)$表示满足 $\int g = 0$的那些 $g \in L^2(B)$。对于 $b \in \mathrm{bmo}$，在分布意义下，相对于此球 B定义 $T_B^*(b)$ 如下：

$$\langle T_B^*(b), g\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} (b - b_B) T g(x)\,dx, \qquad \forall\, g \in L_0^2(B). \tag{5.3}$$

与 (5.1) 中一样，核的条件以及 g的积分为零保证了 (5.3) 右端的积分绝对收敛，并且 $T_B^*(b)$是 $L_0^2(B)$上的有界线性泛函，其范数由 $\|b\|_{\mathrm{bmo}}|B|^{1/2}$的某个常数倍控制。因此，我们可以将 $T_B^*(b)$视为 $L^2(B)$中函数模常数构成的等价类（类似于 $p=1$属于 [14, 注 5.4]的情形）。特别地，我们可以施加以下条件，记 $f := T_B^*(b)$，且不会产生歧义：

$$\left(\fint_B |f - f_B|^2 \right)^{1/2} \le \log(1 + r(B)^{-1}). \tag{5.4}$$

与针对 $T^*((\cdot - x_B)^\alpha)$情形在 [14, 注 5.4] 中指出的情况类似，这个条件并不等同于要求 $T^*(b) \in \mathrm{LMO}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，因为$T_B^*(b)$是相对于特定的球 B定义的，使用的是 L^2 配对，而不是 bmo 与 h^1的配对；并且我们只对该球施加条件 (5.4)。

虽然 [14, 定理 5.3] 中用于保证非齐次奇异积分算子在 $h^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界的局部 Campanato 型条件也用单个球来表述，但在 $p=1$ 的情形下，由于单项式的次数为 $\alpha = 0$，我们无需减去任何常数。因此，条件变为 $T^*1 \in \mathrm{LMO}_{\mathrm{loc}}($ $\mathbb{R}^n)$，其中 T^* 可以按照 bmo 与 h^1 的对偶性来理解。一般而言，当 b 有界时，bmo 与 h^1 之间的配对可以通过积分给出；但对于任意的 $b \in$bmo，除非满足 $\int Tg = 0$，否则我们需要在 (5.3) 的积分中减去 b_B。当 T

是一个卷积算子，因为 Tg 继承了 g 的消去性质（另见推论 3.1 后的注释）。

定理 5.3. 设 $b \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^n)$。假设 T 是一个非齐次奇异积分算子。若 $T^*(1) \in \mathrm{LMO}_{loc}(\mathbb{R}^n)$，且对于任意满足 $r(B) < 1$ 的球 B，$f := T_B^*(b)$ 满足 (5.4)，则

$$\|[b,T](a)\|_{h^1} \le C(1+\|b\|_{\mathrm{bmo}})$$

对所有 h_b^1 原子 a，均有此结论。

证明. 设 a 是一个支集包含于球 $B = B(x_0, r)$ 中的 h_b^1 原子；如上所述，我们可以假设当 $r < 1$ 时，$\int a = 0$。再次写作 $[b,T](a) = (b-c_B)T(a) - T(a(b-c_B))$。

如定理陈述之前所述，假设 $T^*(1) \in \mathrm{LMO}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 使我们能够应用 [14, 定理 5.3]，得到 T 在 h^1 上的有界性；因此由 (4.4) 可得

$$\|T(a(b-c_B))\|_{h^1} \lesssim \|a(b-c_B)\|_{h^1} \lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}.$$

剩下需要估计的项是 $\|(b-c_B)T(a)\|_{h^1}$。我们将证明 $M = (b-c_B)T(a)$ 是一个与球 $2B$ 相关的 (s,λ) 分子的倍数（见定义 2.3），其中我们取

$$s = \frac{3}{2}, \quad \lambda = \frac{n}{2} + \mu, \quad 0 < \mu < \frac{3}{2}\min(\delta, \varepsilon).$$

我们先验证条件 M1。按照 (4.3) 中的方法，并利用 T 在 L^2 上的有界性，可得

$$\begin{aligned}\|(b-b_B)T(a)\|_{L^{\frac{3}{2}}(2B)} &\lesssim \|(b-b_B)\|_{L^6(2B)}\|T(a)\|_{L^2} \\ &\lesssim \|b-b_B\|_{L^6(2B)}\|a\|_{L^2} \\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo},6} r^{-\frac{n}{3}}.\end{aligned}$$

接下来，我们需要证明条件 M2：$\int_{(2B)^c} |M(x)|^{\frac{3}{2}}|x-x_0|^{\lambda}dx \lesssim r^{\mu}$。假设 $r < 1$。如同 (5.1) 中那样，利用 a 上的消去性质以及核的光滑性来估计 $T(a)$，再结合 (2.3)，可得

$$\begin{aligned}&\int_{(2B)^c} |(b(x)-b_B)T(a)(x)|^{\frac{3}{2}}|x-x_0|^{\lambda}dx \\ &\lesssim \int_{(2B)^c} |b(x)-b_B|^{\frac{3}{2}} \frac{r^{\frac{3}{2}\delta}}{|x-x_0|^{\frac{3n}{2}+\frac{3\delta}{2}}}|x-x_0|^{\lambda}dx = r^{\frac{3}{2}\delta}\int_{(2B)^c}\frac{|b(x)-b_B|^{\frac{3}{2}}}{|x-x_0|^{n+\frac{3}{2}\delta-\mu}}dx \\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}^{\frac{3}{2}} r^{\mu}.\end{aligned}$$

最后，关于 $f = T_B^*(b)$ 的条件 (5.4) 给出

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n}[b(x)-b_B]T(a)(x)dx\right| = \left|\langle T_B^*(b), a\rangle\right| &\le \left(\int_B |f-f_B|^2\right)^{1/2}\|a\|_{L^2(B)} \\ &\le \log(1+r(B)^{-1}).\end{aligned}$$

现在考察 $r \geq 1$ 的情形，我们可以按照 (5.2) 的方法写出

$$\begin{aligned}
&\int_{(2B)^c} |(b(x)-c_B)T(a)(x)|^{\frac{3}{2}}|x-x_0|^{\lambda}dx \\
&\lesssim \int_{(2B)^c} \frac{|b(x)-c_B|^{\frac{3}{2}}}{|x-x_0|^{\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}\varepsilon}}|x-x_0|^{\lambda}dx \\
&\leq r^{\frac{3}{2}\varepsilon}\int_{(2B)^c} \frac{|b(x)-c_B|^{\frac{3}{2}}}{|x-x_0|^{n+\frac{3}{2}\varepsilon-\mu}}dx \\
&\lesssim \|b\|_{\mathrm{bmo}}^{\frac{3}{2}} r^{\mu}.
\end{aligned}$$

这里我们用到了 (2.3)，以及 $r \geq 1, \mu < \frac{3}{2}\varepsilon$ 这一事实。 □

与推论 5.1 类似，当 $h_b^1 = h^1$ 时，有界性可从一个原子扩展到空间中的所有函数。

推论 5.2. 假设定理 5.3 的条件成立，若另外 $b \in \mathrm{lmo}(\mathbb{R}^n)$，则 $[b,T]$ 是从 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $h^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界映射。

参考文献

[1] Mujdat Agcayazi、Amiran Gogatishvili、Kerim Koca 和 Rza Mustafayev, *A note on maximal commutators and commutators of maximal functions* **67**，《日本数学会杂志》(2015)，第2期，581–593，DOI 10.2969/jmsj/06720581。[2] Jes´us Bastero、Mario Milman 和 Francisco J. Ruiz，，《美国数学会会刊》（），第–期，DOI 10.1090/S0002-9939-00-05763-4。[3] Fr´ed´eric Bernicot、Tarek Elgindi 和 Sahbi Keraani, *On the inviscid limit of the 2D Navier-Stokes equations with vorticity belonging to BMO-type spaces*，《Ann. Inst. H. Poincar´e C Anal. Non Lin´eaire》33 (2016)，第2期，597–619，DOI 10.1016/j.anihpc.2014.12.001。[4] Fr´ed´eric Bernicot 和 Taoufik Hmidi，，《动力系统与偏微分方程》（），第–期，DOI 10.4310/DPDE.2015.v12.n2.a3。[5] Aline Bonami 和 Justin Feuto，*Products of functions in Hardy and Lipschitz or BMO spaces*，《实分析与调和分析新进展》，《应用数值调和分析》，Birkh¨auser Boston，Boston, MA，2010，第57–71页，DOI 10.1007/978-0-8176-4588- 5 4。MR2603175[6] G´erard Bourdaud, *Remarques sur certains sous-espaces de* BMO($\mathbb{R}^n$) *et de* bmo($\mathbb{R}^n$)，《傅里叶研究所年刊》(Grenoble) 52 (2002)，第4期，1187–1218。[7] Marcin Bownik, *Boundedness of operators on Hardy spaces via atomic decompositions*，《美国数学会会刊》133 (2005)，第12期，3535–3542，DOI 10.1090/S0002-9939-05- 07892-5。[8] Huy Qui Bui, *Weighted Hardy spaces*，《数学通讯》103 (1981)，45–62，DOI 10.1002/mana.19811030106。[9] Der-Chen Chang 和 Song-Ying Li, *On the boundedness of multipliers commutators*，，《比萨高等师范学院科学类年刊》(4) 28 (1999)，第2期，341–356。[10] Ronald R. Coifman，Richard Rochberg 和 Guido Weiss, *Hardy spaces in several variables* *Factorization theorems for* 2 **103** 1976 3, 611 635，，《数学年刊》（）（），第–期，DOI 10.2307/1970954，MR412724[11] Ronald R. Coifman 和 Guido Weiss, *analysis* *Extensions of Hardy spaces and their use in* **83** 1977 4, 569 645，10 1090 0002 9904，《Bull. Amer. Math. Soc.》（），第–期，DOI . /S - - 1977-14325-5。

[12] Galia Dafni, *Hardy spaces on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ and domains of finite type in $\mathbb{C}^2$* 1993 , 。博士论文–普林斯顿大学。[13] ,

——— *Local VMO and weak convergence in h^1* **45** 2002 1, , 《Canad. 46 10 4153 2002 005 2 Math. Bull.》 （） , 第–59期, DOI . /CMB- - -。[14] Galia Dafni、Chun Ho Lau、Tiago Picon 和 Claudio Vasconcelos, *Inhomogeneous cancellation conditions and Calderón-Zygmund type operators on h^p* **225** , 《Nonlinear Anal.》(2022) 论文编号113110, 22, DOI 10.1016/j.na.2022.113110。[15] *Necessary cancellation conditions for the boundedness of operators on local Hardy spaces* 2022, 10 48550 2210 05786 , 发布于 DOI . / ARXIV. . .[16] Galia Dafni 和 Elijah Liflyand, *A local Hilbert transform Hardy's inequality and molecular characterization of Goldberg's local Hardy space* **5** 2019 , , 《Complex Anal. Synerg.》 （） , 第1期, 论文编号10, 9, DOI 10.1007/s40627-019-0036-2。[17] Galia Dafni、Ethan Mombourquette 和 Hong Yue, *Some characterizations of local bmo and h^1 on spaces of homogeneous type*, 《调和分析与非线性偏微分方程》, 2016, 第187–215页。[18] Galia Dafni 和 Hong Yue, *Some characterizations of local and h^1 on metric measure spaces* bmo, 《Anal. **2** 2012 3, 285 318, 10 1007 13324 012 0034 5 Math. Phys.》 （） , 第–期, DOI . /s - - -。[19] Wei Ding , YongSheng Han 和 YuePing Zhu, *Boundedness of singular integral operators on local Hardy spaces and dual spaces* **55** 2021 3, 419 441, , 《Potential Anal.》 （） , 第–期, DOI 10.1007/s11118-020-09863-3。[20] Charles Fefferman 和 Elias M. Stein, *H^p spaces of several variables*, 《Acta Math.》129 (1972), 第3-4期, 137–193, DOI 10.1007/BF02392215。[21] Xing Fu、Dachun Yang 和 Sibei Yang, *Endpoint boundedness of linear commutators on local Hardy spaces over metric measure spaces of homogeneous type* , 《J. Geom. Anal.》31 (2021), 第4期, 4092–4164, DOI 10.1007/s12220-020-00429-8。MR4236554[22]Jos´e Garc´ıa-Cuerva、Eleonor O. Harboure、Carlos Segovia 和 Jos´e Luis Torrea, *Weighted norm inequalities for commutators of strongly singular integrals*, 《Indiana Univ. Math. J.》40 (1991), 第4期, 1397–1420, DOI 10.1512/iumj.1991.40.40063。[23] David Goldberg, *Local Hardy spaces*, 《欧几里得空间中的调和分析》（纯数学专题讨论会论文集, Williams College, Williamstown, Mass., 1978）, 《纯数学专题讨论会论文集》, XXXV, Part, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, 第245–248页。MR545262[24] , *A local version of real Hardy spaces*, 《Duke Math. J.》46 (1979), 第1期, 27–42。MR523600[25] Loukas Grafakos, *Modern Fourier analysis*, 第3版, 《数学研究生教材》, 第250卷, Springer, New York, 2014。MR3243741[26] Eleonor Harboure、Carlos Segovia 和 Jos´e L. Torrea, *Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p* **41** 1997 , 《Illinois J. Math.》 （） , 第4期, 676–709。MR1468874[27] Ziyi He、Dachun Yang 和 Wen Yuan, *Real-variable characterizations of local Hardy spaces on spaces of homogeneous type* **294** 2021 5, 900 955, , 《数学通讯》 （） , 第–期, DOI 10.1002/mana.201900320。[28] Ha Duy Hung 和 Luong Dang Ky, *An H^1–L^1 estimate for commutators of pseudo-differential operators* **19** 2015 4, 1097 1109, , 《Taiwanese J. Math.》 （） , 第–期, DOI 10.11650/tjm.19.2015.5003。MR3384681[29] Duong Quoc Huy 和 Luong Dang Ky, *Weighted Hardy space estimates for commutators of Calderón-Zygmund operators* **49** 2021 4, 1065 1077, , 《Vietnam J. Math.》 （） , 第–期, DOI 10.1007/s10013-020-00406-2。[30]Tuomas P. Hytönen, *The L^p-to-L^q boundedness of commutators with applications to the Jacobian operator* 9 **156** 2021 351 391, , 《J. Math. Pures Appl.》 （） （） , –, DOI 10.1016/j.matpur.2021.10.007（英文, 附英文和法文摘要）。MR4338459[31] Svante Janson, *Mean oscillation and commutators of singular integral operators*, 《Ark. Mat.》16 (1978), 第2期, 263–270, DOI 10.1007/BF02386000。MR524754[32] F. John 和 L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, 《Comm. Pure Appl. Math.》14 (1961), 415–426, DOI 10.1002/cpa.3160140317。

[33] Yasuo Komori, *Calderón-Zygmund operators on $H^p(\mathbb{R}^n)$*, Sci. Math. Jpn. 53 (2001), 第1期, 65–73页。[34] Luong Dang Ky, *Bilinear decompositions and commutators of singular integral operators* **365** 2013 10 1090 0002 9947 , Trans. Amer. Math. Soc.（）, 第6期, 2931–2958页, DOI . /S - - 2012-05727-8。MR3034454[35] Song-Ying Li, *Toeplitz operators on Hardy space $H^p(S)$ with $0 < p \leq 1$*, Integral Equa- tions Operator Theory 15 (1992), 第5期, 807–824页, DOI 10.1007/BF01200702。[36] Stefano Meda、Peter Sj ¨ ogren 和 Maria Vallarino, , 美国数学会会刊（）, 第8期, 2921–2931页, DOI . /S - - 08-09365-9。[37] Mario Milman 和 Tomas Schonbek, *On the H^1-L^1 boundedness of operators* **136** 2008 10 1090 0002 9939 , *Second order estimates in interpolation theory and applications* **110** 1990 4, 961 969, 10 2307 2047743 , 美国数学会会刊（）, 第–期, DOI . /。[38] Marco M. Peloso 和 Silvia Secco, *Local Riesz transforms characterization of local Hardy spaces* **59** 2008 3, 299 320, 10 1007 03191189 , Collect. Math.（）, 第–期, DOI . /BF。[39] Carlos P´erez, *Endpoint estimates for commutators of singular integral operators*, J. Funct. Anal. 128 (1995), 第1期, 163–185页, DOI 10.1006/jfan.1995.1027。MR1317714[40] Donald Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 391–405页, DOI 10.2307/1997184。[41] , *Function theory on the unit circle*, 弗吉尼亚理工学院暨州立大学数学系, 布莱克斯堡, 弗吉尼亚州, 1978年。弗吉尼亚理工学院暨州立大学布莱克斯堡分校会议讲座笔记, 1978年6月19日至23日。[42] Carlos Segovia 和 Jos ´ e L. Torrea, , Publ. Mat.（）, 第–期, DOI . /PUB- LMAT 35191 09。数学分析会议（埃斯科里亚尔, 1989年）。[43] Xian Liang Shi 和 Alberto Torchinsky, *Functions of vanishing mean oscillation*, 数学通讯 133 (1987), 289–296页, DOI 10.1002/mana.19871330119。[44] David A. Stegenga, *Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation* **98** 1976 , Amer. J. Math.（）, 第3期, 573–589页, DOI 10.2307/2373807。[45] Elias M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions (PMS-30)* 1970 , 普林斯顿大学出版社, 。[46] , ———, *Harmonic analysis: real-variable methods orthogonality and oscillatory integrals* 43, , , 普林斯顿数学丛书, 第卷。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1993年。在Timothy S. Murphy协助下编写, 《调和分析专著》第三卷。[47] Lin Tang, *Interior h^1 estimates for parabolic equations with LMO coefficients*, Canad. J. Math. 62 (2010), 第1期, 202–217页, DOI 10.4153/CJM-2010-011-1。[48] , *Weighted local Hardy spaces and their applications*, Illinois J. Math. 56 (2012), 第2期, 453–495页。[49] Akihito Uchiyama, *On the compactness of operators of Hankel type*, Tohoku Math. J. (2) 30 (1978), 第1期, 163–171页, DOI 10.2748/tmj/1178230105。MR467384

G. Dafni, Concordia University, Department of Mathematics and Statistics, Montréal, Québec, H3G-1M8, Canada

C. H. Lau, Concordia University, Department of Mathematics and Statistics, Montréal, Québec, H3G-1M8, Canada