arXiv:2302.00544v1 [physics.flu-dyn] 1 Feb 2023

水平通道中绝热浮力流的黏性加热与不稳定性

A. Barletta*；M. Celli

意大利博洛尼亚大学工业工程系，Viale Risorgimento 2，40136 博洛尼亚

D. A. S. Rees

英国巴斯大学机械工程系，巴斯 BA2 7AY

2023年2月2日

摘要

本文研究了绝热壁水平平行平板通道内黏性流体在混合对流状态下发生的浮力流动的稳定性。基本流在稳态条件下具有平行速度场。对于通道横截面上给定的每一个质量流率，由黏性耗散与浮力的共同作用，均存在流动二重性。正如先前研究所指出的，双解中只有主分支符合Oberbeck-Boussinesq近似。因此，稳定性分析将聚焦于此类流动的稳定性。假设普朗特数非常大（这等价于处于爬行流状态），研究基本流受到小振幅扰动时热不稳定性的起始。通过数值方法确定了中性稳定性曲线以及不稳定性起始的临界参数条件。

关键词：黏性加热、混合对流、双重流、线性稳定性、牛顿流体、绝热壁。

*通讯作者：antonio.barletta@unibo.it

1 引言

平面通道中定常充分发展流动的不稳定性，是流体力学众多教科书讨论的经典课题。其中不乏 Drazin 和 Reid [1]以及 Kundu 等人 [2]。当边界条件未对流动施加热强制时，这种不稳定性源于流体动力学；线性不稳定性的临界条件则通过求解 Orr-Sommerfeld特征值问题确定 [1, 2]。然而，即使平面边界壁之间不存在外部温差，若将黏性流动伴随的摩擦生热考虑在内，也会得出不同的结论。在这种情况下，热诱导不稳定性通过局部动量平衡方程中的温度耦合项发挥作用。当流体黏度随温度变化时，该项可以是黏性力 [3, 4]。另一种情形是浮力效应：此时动量平衡方程中的温度耦合项为重力，而流体密度随温度变化，并根据 Oberbeck-Boussinesq近似进行建模 [5–15]。

浮力与黏性加热的综合作用，可能使通道或管道中的定常流出现双解；这些流动由给定的动力输入所驱动，动力输入可以是指定的压力梯度，也可以是指定的质量流率。这种双重性通常伴随着解分支的合并，从而产生压力梯度或质量流率的最大参数条件；超过该条件后，定常流便不可能存在。文献中对此现象已有广泛记载 [8–10，12，16–18]。需要指出的是，双解或更一般的多重解是浮力流动非线性的结果；它们的存在并不一定意味着局部能量平衡方程中包含黏性耗散项 [19, 20]。

本文旨在分析 Barletta 等人 [18] 所发现的双解主分支的稳定性。事实上，这些作者指出，次分支对应的条件很难与其研究所依据的 Oberbeck-Boussinesq近似相容。本分析所采用的流动条件为水平通道内充分发展流动，通道壁面绝热。浮力与通道流动中的黏性加热相互作用，形成混合对流情形；此时速度偏离 Poiseuille速度分布，且对于每一个指定的通道质量流率，都存在双解。尽管 Barletta 等人 [18]，已对双重流的主要特征作了详尽描述，为使本文内容完整，并明确说明在检验向不稳定性转变时所采用的基本流，本文也将概述这些特征。我们的稳定性分析与数年前发表的一项相关研究相似，该研究针对流体饱和多孔介质中的 Darcy流 [21]。由于我们关注能量平衡中黏性耗散项的 destabilising作用，因此假设流体具有高黏度和低扩散率，即具有非常大的普朗特数。该假设简化了基本解的扰动控制方程：方程按照爬行流方案建立，动量平衡中的惯性项可忽略不计。Barletta和Nield [5] 以及 Barletta 等人 [6] 也采用了类似方法。由于聚焦于蠕动流状态，我们的分析与基于 Orr-Sommerfeld特征值问题的泊肃叶流流体动力学稳定性分析截然不同。事实上，流体动力学不稳定性对应于动量平衡中的惯性项对流动不稳定性的产生至关重要的情形，因此在这种情况下，爬行流方案并不适用 [1, 2]。

一个重要的 g　后续分析中的主控参数是 Gebhart数 G　e.

在研究浮力流动并考虑黏性耗散效应的文献中，常会用到这一参数，不过有几位作者更倾向于将其称为耗散数 Di。事实上，Ge 和 Di 的定义相同。前者的符号是为了纪念 Gebhart 的开创性研究 [22], ，而后者仍广泛用于地球物理流动领域的文献中。在众多关于黏性加热影响下自然对流传热的地球物理应用研究中，我们提及 Kincaid 和 Silver [23] 以及 van den Berg 和 Yuen [24]发表的有趣论文。Kincaid 和 Silver [23] 的论文提出了一种模型，将造山作用期间地幔上部产生的过剩热量归因于黏性耗散的贡献，并设想 Di 可高达 6 的情况。在 van den Berg 和 Yuen [24] 的研究中， $= 0.7$ 他们在研究地幔中的浮力流动时，考虑了黏性耗散效应，并将其与放射性引起的内部加热以及压缩/膨胀过程所产生的绝热功相结合。

2 数学模型

考虑一种牛顿流体，在由位于 $z = 0$和 $z = H$处的壁面围成的平行平板通道中流动。水平方向 x 和 y 无限延伸，均匀重力加速度为 $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_z$，其中 g 为 $\mathbf{g}$ 的大小，$\hat{\mathbf{e}}_z$ 为 z轴的单位向量。边界壁面均为刚性壁面，且完全绝热。

2.1 控制方程

采用 Oberbeck-Boussinesq近似后，控制方程可写为:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla} p + g\beta(T - T_0)\,\hat{\mathbf{e}}_z + \nu\,\nabla^2\mathbf{u}, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,T = \alpha\,\nabla^2 T + \frac{\nu}{c}\,\Phi, \tag{1c}$$

其中 ρ、 β、 ν、 α 和 c 分别为在恒定参考温度 T_0下取值的流体密度、热膨胀系数、运动黏度、热扩散率和比热容。在方程（1）中，$\mathbf{u}$ 为速度， p 为压力与静水压力之差， T 为温度， t 为时间。下文为简便起见，将 p 称为压力场。符号Φ表示耗散函数，根据爱因斯坦求和约定，对重复指标隐式求和，可表示为

$$\Phi = \frac{1}{2}\,\gamma_{ij}\gamma_{ij} \quad \text{using} \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{2}$$

在式（2）中，γ_{ij} 为剪切速率张量，而 u_i 和 x_i 分别表示速度向量 i和位置向量 $\mathbf{x} = (u, v, w)$ 的第$\mathbf{u} = (x, y, z)$ 个笛卡尔分量。

在 $z = 0, H$ 处施加的边界条件体现了不可渗透性、无滑移和绝热性，

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, H. \tag{3}$$

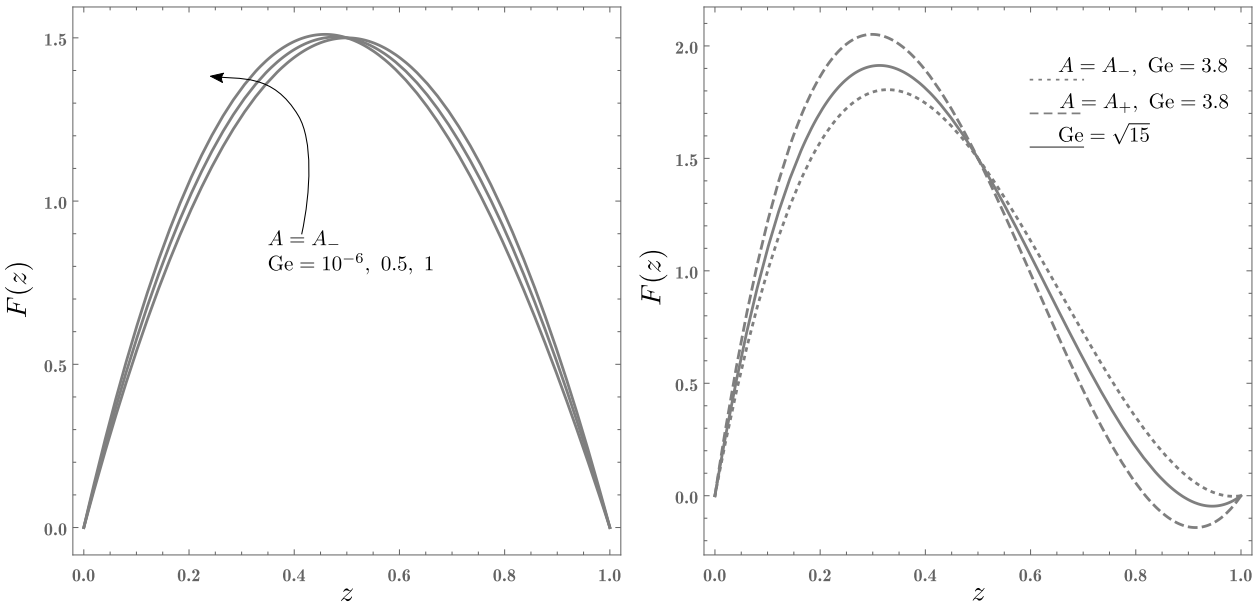


图 1：不同 Gebhart数值下 $A = A_-$ 或 $A = A_+$ 的 $F(z)$ 图

2.2 无量纲表述

可通过以下标度定义无量纲量

$$\frac{\mathbf{x}}{H} \to \mathbf{x}, \quad \frac{t}{H^2/\alpha} \to t, \quad \frac{\mathbf{u}}{\alpha/H} \to \mathbf{u}, \quad \frac{p}{\rho\alpha\nu/H^2} \to p$$
$$\frac{T - T_0}{\Delta T} \to T, \quad \frac{\Phi}{\alpha^2/H^4} \to \Phi \quad \text{using} \quad \Delta T = \frac{\alpha\nu}{g\beta H^3}. \tag{4}$$

根据式（4），式（1）和（3）可改写为无量纲形式:

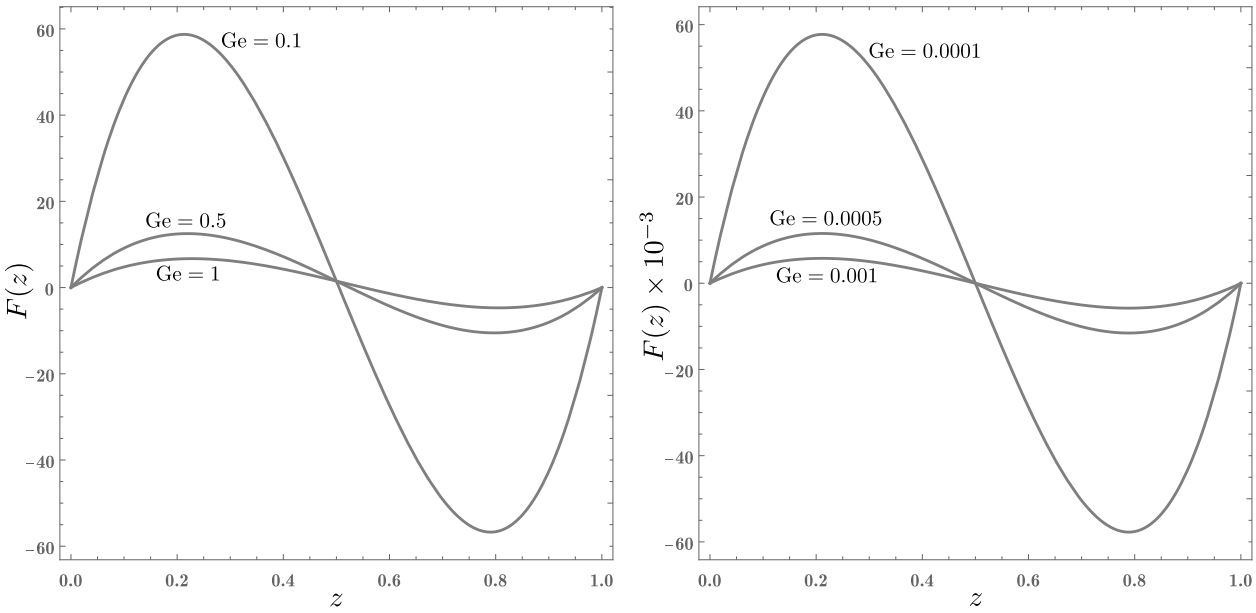
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{5a}$$
$$\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla} p + T\,\hat{\mathbf{e}}_z + \nabla^2 \mathbf{u}, \tag{5b}$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\,T = \nabla^2 T + \mathrm{Ge}\,\Phi, \tag{5c}$$

with

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{6}$$

在式（5b）中 和（5c），普朗特数 Pr 和 Gebhart数 Ge 定义为

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \mathrm{Ge} = \frac{g\beta H}{c}. \tag{7}$$



$F(z)$ 关于 $A = A_+$ 在不同 Gebhart数取值下的图

3 基本双重流

本节依据先前研究 [18]所传达的结果，综述双重绝热流动的主要特征。具有平行速度场的方程（5）和（6）的定常解可表示为

$$
\begin{aligned}
&u_b = \mathrm{Pe}\, F(z)\, \cos\varphi, \quad v_b = \mathrm{Pe}\, F(z)\, \sin\varphi, \quad w_b = 0,\\
&T_b = \mathrm{Pe}\, F'''(z)\, (x\, \cos\varphi + y\, \sin\varphi) + \mathrm{Pe}^2\, G(z),\\
&\boldsymbol{\nabla} p_b = \Big(\mathrm{Pe}\, F''(z)\, \cos\varphi,\ \mathrm{Pe}\, F''(z)\, \sin\varphi,\ T_b\Big),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中，下标 b 表示“基态解”，Pe 为佩克莱数，撇号表示对 z求导，而函数 $F(z)$ 和 $G(z)$ 是由下式给出的多项式

$$
\begin{aligned}
F(z) &= z\,(1-z)\,[A - 2\,(A-6)\,z],\\
G(z) &= \frac{z^2}{10}\Big\{ -5\,A^2\,\mathrm{Ge} + 20\,A\,[(A-4)\,\mathrm{Ge} + A - 6]\,z\\
&\qquad - 10\,\big[A^2\,(4\,\mathrm{Ge}+3) - 30\,A\,(\mathrm{Ge}+1) + 48\,\mathrm{Ge} + 72\big]\,z^2\\
&\qquad + 12\,(A-6)\,[3\,(A-4)\,\mathrm{Ge} + A - 6]\,z^3 - 12\,(A-6)^2\,\mathrm{Ge}\,z^4\Big\}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

常数 A 可以等于 A_- 或 A_+，其中

$$
A_- = 2\,\frac{3\,\mathrm{Ge} + 15 - \sqrt{15\,(15 - \mathrm{Ge}^2)}}{\mathrm{Ge}}, \quad A_+ = 2\,\frac{3\,\mathrm{Ge} + 15 + \sqrt{15\,(15 - \mathrm{Ge}^2)}}{\mathrm{Ge}}.
\tag{10}
$$

方程（8）-（10）描述了 xy 平面内的水平平行流，其速度场相对于 φ 轴倾斜 x 角。 $A = A_\pm$ 的双重表达意味着存在双重

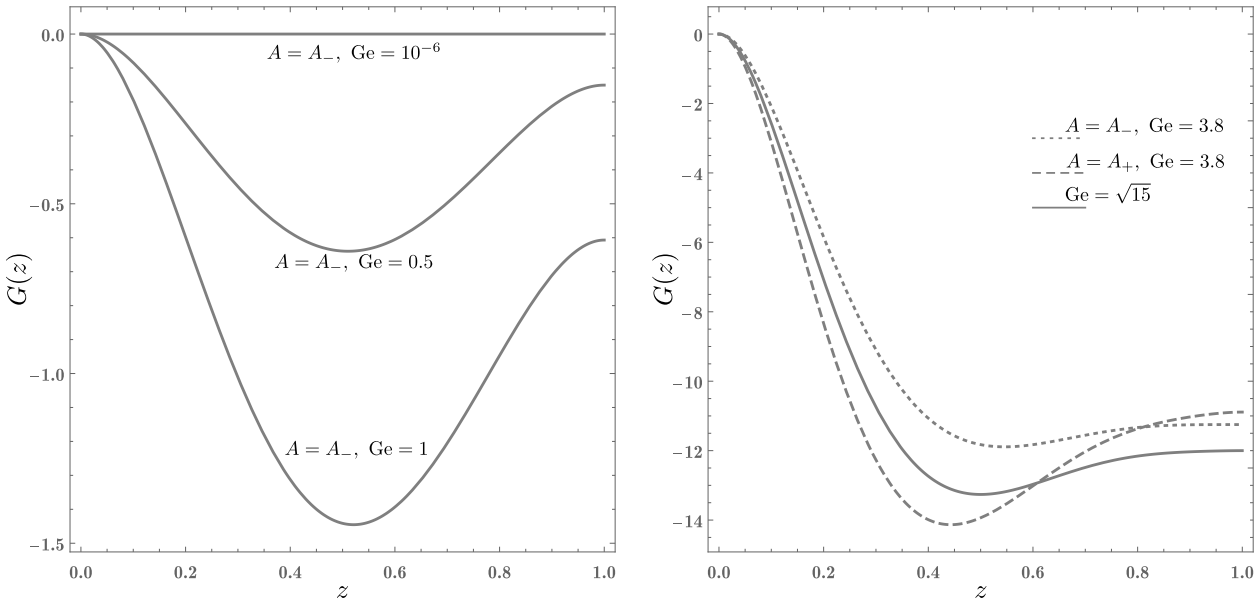


图3：不同 Ge 值下 $A = A_-$ 或 $A = A_+$ 的 $G(z)$ 曲线

流动，对应于相同给定佩克莱数 P´和 Gebhart数。若 $\mathrm{Ge} \le \sqrt{15} \approx 3.87298$，则存在此类双重流；仅当 $\mathrm{Ge} = \sqrt{15}$时，它们才重合。我们注意到，在实际情况下，Ge 的这种上限值极大 [18]。佩克´莱数用有量纲量定义如下：

$$\mathrm{Pe} = \frac{U_0 H}{\alpha}, \tag{11}$$

其中，参考有量纲速度 U_0 表示水平流动方向上的基本平均速度，该方向由单位向量 $(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)$ 定义。实际上，式 (9) 给出

$$\int_0^1 F(z)\,\mathrm{d}z = 1, \tag{12}$$

这意味着，沿流动方向的平均无量纲速度等于佩克莱数。

需要指出的是，函数 $G(z)$ 仅在相差一个任意加性常数的意义下定义。在方程 (9) 中，该常数已被选定，使得 $G(0) = 0$。这是由于温度满足诺伊曼边界条件，因而无法确定该常数。温度出现在方程 (5b) 右端的 ∇p 项旁边。因此，将温度改变一个加性常数，在物理上意味着改变用于建立 Oberbeck-Boussinesq近似的参考温度值。这一改变会导致静水压力重新确定，并相应地改变有量纲场 p；根据定义，该场是压力与静水压力之差。事实上，静水压力为 $-\rho g z$，其中 ρ 是取参考温度下的流体密度 T_0。显然，改变 $G(z$中的任意加性常数，只会通过整体加上一个常数来改变局部的 T_b

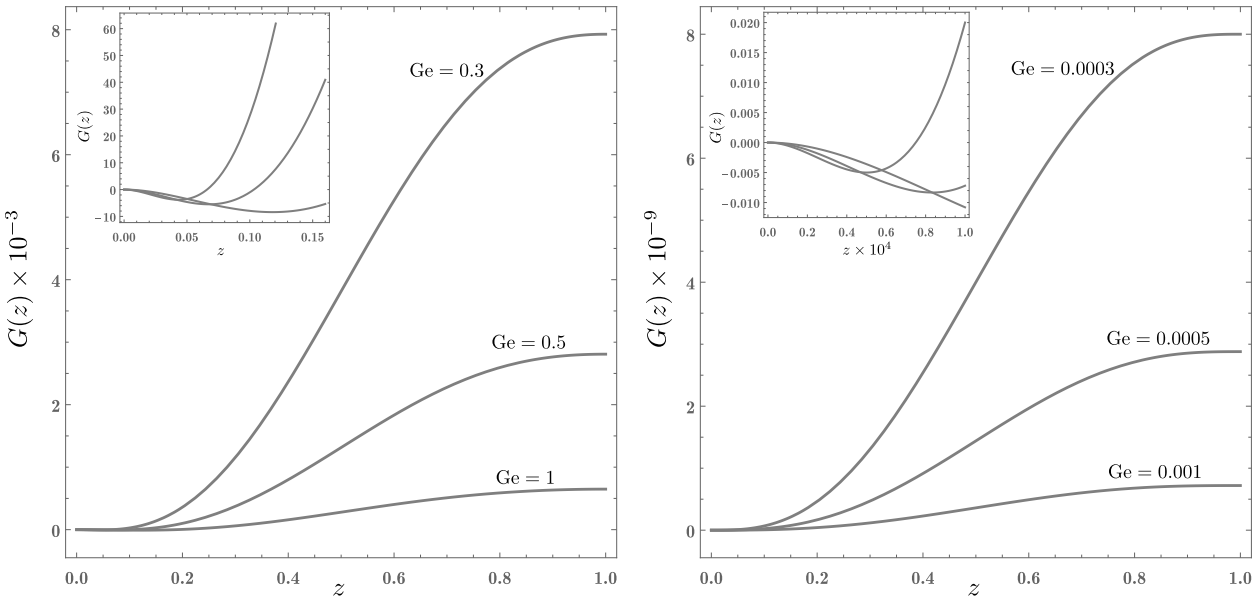


图 4：不同 Gebhart数 下 $G(z)$ 随 $A = A_+$ 变化的曲线

因此，根据方程 (9)， $\partial p_b/\partial z$也会随之改变。另一方面，稍后将讨论的双重基本流稳定性，不会受到 $G(z)$ 表达式中任意加性常数取值的影响。事实上，我们将证明，扰动动力学由偏微分方程支配，其中不含 $\boldsymbol{\nabla} p_b$ ，而 T_b 仅通过其梯度出现。

对偶基本解的物理成因是：施加的水平流量引起黏性加热，而由此产生的温度梯度则诱发浮力。这些效应在 Ge $\to 0$时不再起作用，如方程（5c）所示，此时基态解变为等温泊肃叶流。对 A_+ 和 A_- 在 Ge 较小时进行幂级数展开，即可清楚地得出这一结论：

$$A_- = 6 + \mathrm{Ge} + \mathcal{O}(\mathrm{Ge}^2), \quad A_+ = \frac{60}{\mathrm{Ge}} + 6 - \mathrm{Ge} + \mathcal{O}(\mathrm{Ge}^2). \tag{13}$$

由方程（13）可得 $A_- = 6$，当 Ge $\to 0$时，而 A_+ 则变为奇异。因此，双重流的 A_+-分支在 Ge $\to 0$ 时发散，而 A_--分支给出

$$\begin{aligned} &u_b = 6\,\mathrm{Pe}\, z\,(1-z)\,\cos\varphi, \quad v_b = 6\,\mathrm{Pe}\, z\,(1-z)\,\sin\varphi, \quad w_b = 0, \\ &T_b = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} p_b = \Big(-12\,\mathrm{Pe}\,\cos\varphi,\ -12\,\mathrm{Pe}\,\sin\varphi,\ 0 \Big). \end{aligned} \tag{14}$$

方程（14）表示沿单位向量（cos φ，sin φ，0）所定义方向的等温泊肃叶流。

注意，在所有 Ge $\neq 0$的情形下，基本温度梯度均相对于水平方向倾斜，且在 x 和 y 方向上的水平分量为常数。从方程（9）可轻易看出这一特征，因为 $F'''(z) = 12\,(A-6)$。

图 1 和 2 展示了不同 Gebhart 数下两种分支 $F(z)$ 和 $A = A_-$ 的速度剖面图。 $A = A_+$分支的 $A = A_-$ 速度剖面偏离 Poiseuille 速度分布的程度很小

除非 Gebhart 数变得极大，即接近其上限 Ge $=\sqrt{15}$。这一特征在图 1中清晰可见，而图 2 显示 $A=A_{+}$分支尤其在 Gebhart 数较小时明显偏离 Poiseuille 速度分布。 $A=A_{+}$ 速度剖面的特征表明，流动具有双向性；这种现象也会出现在 $A=A_{-}$ 速度剖面中，尽管程度很轻微，但仅当 Ge 非常接近其上限 $\sqrt{15}$时才会出现。图 2 还显示，在 Gebhart 数较小时， $F(z)$ 对于 $A=A_{+}$ 分支近似与 Ge 成正比$^{-1}$。比较图 2的左图和右图即可清楚看出这一特征；将 $F(z)$ 按 Ge 展开为幂级数 $A=A_{+}$即可证明这一点，

$$F(z)=\frac{60\,z\,(1-z)\,(1-2z)}{\mathrm{Ge}}+6\,(1-z)\,z+\mathcal{O}(\mathrm{Ge}). \tag{15}$$

基本温度场的垂直变化如图 3 和 4 所示，图中绘出了函数$G(z)$，对应于不同 Gebhart数 的 $A=A_{-}$ 和 $A=A_{+}$ 分支。图 3 表明，$A=A_{-}$ 分支的温度剖面对 Gebhart数 有显著依赖，尽管 Gebhart数 对速度剖面的影响很弱，这一点在评论图 1时已经指出。图 4表明，当 Gebhart数 较小时，对于 $A=A_{+}$ 分支，函数 $G(z)$ 大致与 Gebhart数 成正比。这一行为可通过对 $G(z)$ 在 $A=A_{+}$处作幂级数展开来说明，

$$\begin{aligned}G(z)=&\frac{720\,z^{3}\left(6\,z^{2}-15\,z+10\right)}{\mathrm{Ge}^{2}}-\frac{360\,z^{2}\,(1-z)^{2}\left(12\,z^{2}-12\,z+5\right)}{\mathrm{Ge}}\\&+72\,z^{2}\left(4\,z^{3}-10\,z^{2}+10\,z-5\right)+\mathcal{O}(\mathrm{Ge}).\end{aligned} \tag{16}$$

图 3 揭示的一个显著特征是，$\partial T_b/\partial z<0$）热分层不稳定，出现在$A=A_{-}$ 分支的通道下部。对于 $A=A_{+}$ 分支，所有 Gebhart 数 下也会出现这种不稳定热分层，不过在图 4 中，只有通过 z 取值较小时的局部放大图才能看清。解析上，可通过计算 $G''(0)$ 在 $A=A_{+}$处的值推得这一结论，

$$G''(0)=-\frac{24\left[(\mathrm{Ge}+5)\sqrt{15\left(15-\mathrm{Ge}^{2}\right)}+\mathrm{Ge}\,(15-\mathrm{Ge})+75\right]}{\mathrm{Ge}}. \tag{17}$$

方程（17）右侧对于每一个 Ge $\leq\sqrt{15}$显然都是负值。因此，在靠近 $z=0$ 的位置总是存在一些区域，使得 $G'(z)<0$。

对于双重基本流，无论是 $A=A_{-}$ 分支还是 $A=A_{+}$ 分支，通道内部都存在某个区域，其基本温度梯度的 z 分量为负，这表明可能发生瑞利-贝纳德型热不稳定性（底部加热）。这一现象将在后文探讨。需要指出的是，基本温度梯度的垂直分量并非可能引发热不稳定性的唯一来源。事实上， $\boldsymbol{\nabla}T_b$ 的恒定水平分量也可能导致哈德莱型热不稳定性。

已有研究指出， $A=A_{+}$ 分支很难被认为与双解 [18]存在所依据的奥伯贝克-布辛涅斯克近似模型相容。原因在于，该近似模型要求热膨胀系数 β 与流动区域内最大温差的乘积远小于

1。正如 Barletta 等人 [18], 所指出的，考虑双解的 $A = A_+$ 分支时，这一条件无法满足。因此，接下来的稳定性分析将仅关注 $A = A_-$ 分支。

4 小振幅扰动的动力学

令基本双重流受到扰动,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ p_b \\ T_b \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \\ \Theta \end{pmatrix}, \tag{18}$$

其中 ε 为扰动参数，且（$\mathbf{U}$ P， Θ）分别表示速度、压力和温度的扰动。 $\mathbf{U}$ 的笛卡尔分量记为（U， V， W）。利用方程（18）和（5）、（6），并结合方程（2）和（8），将方程（18）代入方程（5）和（6），即

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{U} = 0, \tag{19a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}} \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{u}_b \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{u}_b \right] = -\boldsymbol{\nabla} P + \Theta \, \hat{\mathbf{e}}_z + \nabla^2 \mathbf{U}, \tag{19b}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{u}_b \cdot \boldsymbol{\nabla}) \Theta + (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla}) T_b = \nabla^2 \Theta + 2 \, \mathrm{Ge} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) u_b' + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) v_b' \right], \tag{19c}$$

$$\mathbf{U} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1, \tag{19d}$$

其中，为了考虑小振幅扰动，省略了项 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$。

由于基本流动方向与 x 方向的夹角为 φ，因此 x 轴定义了任意水平方向，从而扰动的正规模态可以表示为沿 x方向传播的平面波。通过允许角度在范围 $0 \le \varphi \le \pi/2$内变化，可以检验任意斜向模态的影响。取值 $\varphi = 0$ 和 $\varphi = \pi/2$ 分别得到横向模态和纵向模态。因此，我们写为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ P \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{U}}(z) \\ \hat{P}(z) \\ \hat{\Theta}(z) \end{pmatrix} e^{i k x} \, e^{\lambda t}, \tag{20}$$

其中 k 为实数波数，而 λ 为复数参数。 λ 的实部和虚部分别记为 $\lambda = \eta - i\,\omega$，其中 η 表示增长率， ω 表示角频率。线性不稳定性的判据为 $\eta > 0$，而 $\eta = 0$ 表示中性稳定性的临界情形。将式（20）代入式（19），可得

$$i \, k \, \hat{U} + W' = 0, \tag{21a}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}} \left(\lambda \hat{U} + i \, k \, u_b \hat{U} + \hat{W} \, u_b' \right) = -i \, k \, \hat{P} + \hat{U}'' - k^2 \hat{U}, \tag{21b}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}} \left(\lambda \hat{V} + i \, k \, u_b \hat{V} + \hat{W} \, v_b' \right) = \hat{V}'' - k^2 \hat{V}, \tag{21c}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Pr}} \left(\lambda \hat{W} + i \, k \, u_b \hat{W} \right) = -\hat{P}' + \hat{\Theta} + \hat{W}'' - k^2 \hat{W}, \tag{21d}$$

$$\lambda\,\hat{\Theta} + i\,k\,u_b\,\hat{\Theta} + \hat{U}\,\frac{\partial T_b}{\partial x} + \hat{V}\,\frac{\partial T_b}{\partial y} + \hat{W}\,\frac{\partial T_b}{\partial z}$$
$$= \hat{\Theta}'' - k^2\,\hat{\Theta} + 2\,\mathrm{Ge}\left[\left(\hat{U}' + i\,k\,\hat{W}\right)u_b' + \hat{V}'\,v_b'\right], \tag{21e}$$
$$\hat{U} = 0, \quad \hat{V} = 0, \quad \hat{W} = 0, \quad \hat{\Theta}' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1, \tag{21f}$$

ˆ ˆ ˆ ˆ 其中 (U, V, W) 是 U 的笛卡尔分量。

黏性耗散效应预计会导致不稳定性的物理重要情形，是流体具有较大的运动黏度，同时热扩散率较小。粗略来说，这类流体易受摩擦生热的显著影响，而对这类内部产生的热量，其扩散效率较低。当普朗特数极大时，通常会出现这种情形。

4.1 爬行流

当动量平衡中的惯性项可忽略时，便会出现爬行流状态。对方程（ $\to \infty$ 19b）取极限 Pr 即可得到这种情况。如上所述，这一极限对应于采用热扩散率较小的极黏性流体。在此极限下，方程（21）可简化为

$$i\,k\,\hat{U} + \hat{W}' = 0, \tag{22a}$$
$$-i\,k\,\hat{P} + \hat{U}'' - k^2\,\hat{U} = 0, \tag{22b}$$
$$\hat{V}'' - k^2\,\hat{V} = 0, \tag{22c}$$
$$-\hat{P}' + \hat{\Theta} + \hat{W}'' - k^2\,\hat{W} = 0, \tag{22d}$$
$$\lambda\,\hat{\Theta} + i\,k\,u_b\,\hat{\Theta} + \hat{U}\,\frac{\partial T_b}{\partial x} + \hat{V}\,\frac{\partial T_b}{\partial y} + \hat{W}\,\frac{\partial T_b}{\partial z}$$
$$= \hat{\Theta}'' - k^2\,\hat{\Theta} + 2\,\mathrm{Ge}\left[\left(\hat{U}' + i\,k\,\hat{W}\right)u_b' + \hat{V}'\,v_b'\right], \tag{22e}$$
$$\hat{U} = 0, \quad \hat{V} = 0, \quad \hat{W} = 0, \quad \hat{\Theta}' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{22f}$$

ˆ 由方程（22c）和（22f）可立即得出，在整个范围 $V = 0$ 内， $0 \le z \le 1$。ˆ ˆ ˆ 此外，利用方程（22a）和（22b），可将 U 和 P 表示为 W 及其ˆ导数的形式。因此，可将方程（22）改写为仅包含未知量 W 和 ˆΘ的形式，

$$\hat{W}'''' - 2\,k^2\,\hat{W}'' + k^4\,\hat{W} - k^2\,\hat{\Theta} = 0, \tag{23a}$$
$$\hat{\Theta}'' - \left[k^2 + \lambda + i\,k\,\mathrm{Pe}\,F(z)\cos\varphi\right]\hat{\Theta} + \frac{2\,i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\,F'(z)\cos\varphi}{k}\left(\hat{W}'' + k^2\,\hat{W}\right)$$
$$- \frac{i\,\mathrm{Pe}\,F'''(z)\cos\varphi}{k}\,\hat{W}' - \mathrm{Pe}^2\,G'(z)\,\hat{W} = 0, \tag{23b}$$
$$\hat{W} = 0, \quad \hat{W}' = 0, \quad \hat{\Theta}' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{23c}$$

爬行流通常对应于雷诺数极小的情形， $\mathrm{Re} = \mathrm{Pe}/\mathrm{Pr}$。从数学角度来看，爬行流指的是 $\mathrm{Re} \to 0$ 趋于极限的同时 $\mathrm{Pr} \to \infty$ 也趋于极限的情形。在保持 $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} \sim \mathrm{O}(1)$ 的条件下，可以取这些极限。在

下文中，我们将研究由有限佩克莱数下的爬行流所描述的扰动动力学。

通过数值求解特征值问题（8）-（10），对方程定义的基本流的不稳定性进行线性分析（23）。求解时固定输入参数（φ，Gebhart数），并确定佩克莱数的中性稳定性阈值随波数 k的变化关系。同时还确定中性稳定模态的角频率 ω。

中性稳定性阈值对应于零增长率， η。此外，为方便起见，将基本平均速度纳入考虑，并在随动参考系中重新定义角频率，即

$$\hat{\omega} = \omega - k\,\mathrm{Pe}\,\cos\varphi. \tag{24}$$

因此，方程（23）可改写为

$$\hat{W}'''' - 2\,k^2\,\hat{W}'' + k^4\,\hat{W} - k^2\,\hat{\Theta} = 0, \tag{25a}$$

$$\hat{\Theta}'' - \left[k^2 - i\,\hat{\omega} + i\,k\,\mathrm{Pe}\,\hat{F}(z)\cos\varphi\right]\hat{\Theta} + \frac{2\,i\,\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}\,\hat{F}'(z)\cos\varphi}{k}\left(\hat{W}'' + k^2\,\hat{W}\right) - \frac{i\,\mathrm{Pe}\,\hat{F}'''(z)\cos\varphi}{k}\,\hat{W}' - \mathrm{Pe}^2\,G'(z)\,\hat{W} = 0, \tag{25b}$$

$$\hat{W} = 0, \quad \hat{W}' = 0, \quad \hat{\Theta}' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1, \tag{25c}$$

其中 $F(z) = F(z) - 1$是在区间 $0 \le z \le 1$上零平均值的函数，这是方程（12）的结果。将 φ 指定为求解方程（25）的输入数据，实际上就定义了扰动流动的斜向模态类型，而横向模态（$\varphi = 0$）和纵向模态（$\varphi = \pi/2$）则是其极限情形。

5 结果讨论

我们在第3 节指出，线性稳定性分析针对的是双重流的 $A = A_-$ 分支。稳定性特征值问题（25）的数值解采用打靶法求得。鉴于该数值技术用于求解流动稳定性特征值问题的情况已在其他文献中得到广泛讨论，本文不再详述 [25, 26]。

实际用于实现打靶法的软件工具是*Mathematica* （© Wol- fram Research, Inc.），其函数包括`NDSolve`和`FindRoot`。前一个函数用于求解基于方程（25）的初值问题，起始于 $z = 0$；后一个函数则在 $z = 1$处求解目标条件（25c），从而得到中性稳定性输出数据（$\hat{\omega}$，佩克莱数 Pe）。中性稳定条件由参数（k，Pe）平面中的曲线表示，曲线上 Pe 的最小值点给出了不稳定性起始的临界条件。该临界条件表示为 $k = k_c$ 和 Pe $= \mathrm{Pe}_c$，其中下标 c 表示临界值。考察不同情形下 Pe_c 对扰动模态倾斜角 φ 的依赖关系，可以确定在不稳定性起始时哪些模态最有效。随后，稳定性分析便可集中于这些模态。

5.1 最不稳定的扰动

我们从较大的 Gebhart数值开始进行稳定性分析，即 Ge $= \sqrt{15}$ 和 Ge $= 2$。图 k、Pe 平面上的中性稳定性曲线绘于图 5 ，分别对应横向模态和纵向模态

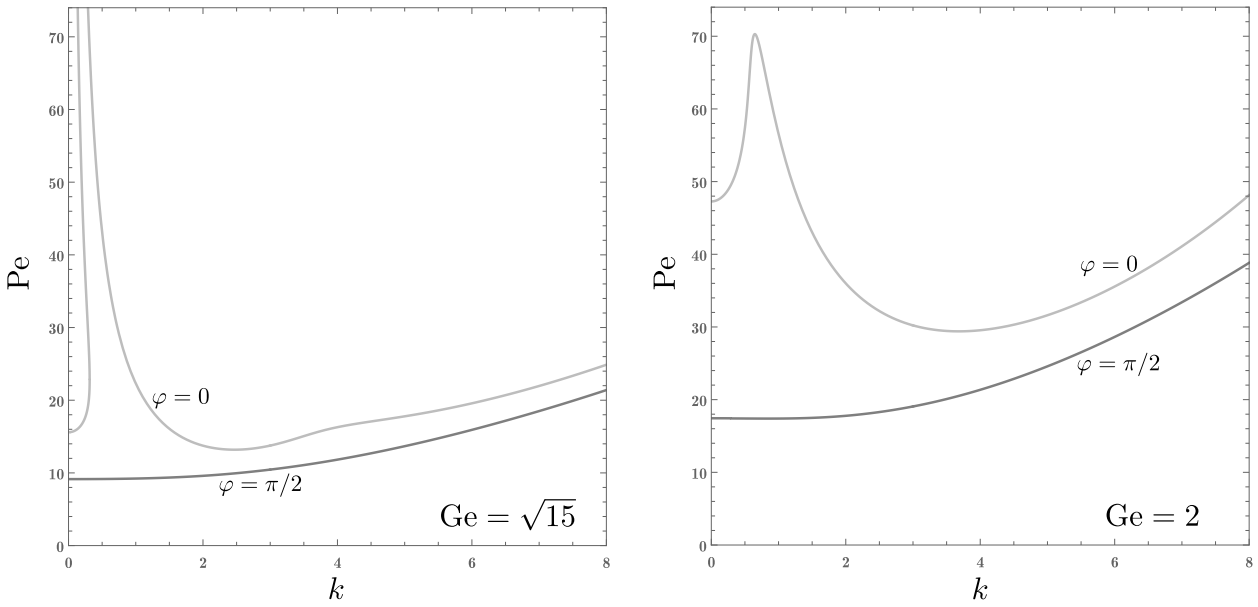


图 5：横向（浅灰线，$\varphi = 0$）和纵向（深灰线，$\varphi = \pi/2$）模态在 (k,佩克莱数) 平面上的中性稳定曲线

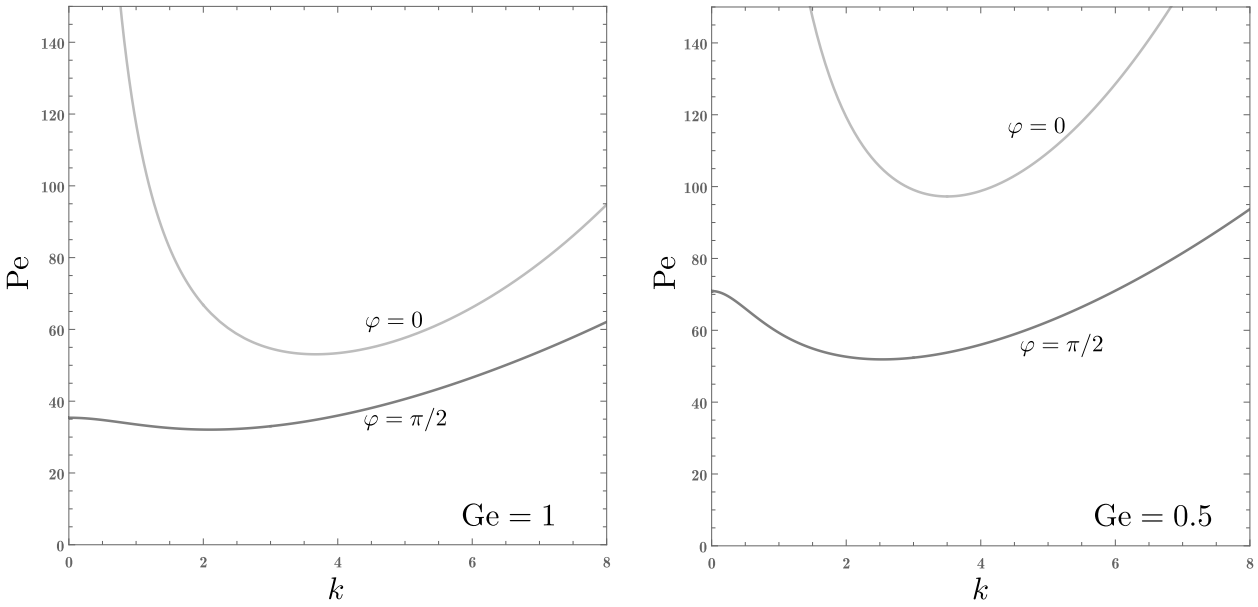


图 6：横向（浅灰线，$\varphi = 0$）和纵向（深灰线，$\varphi = \pi/2$）模态在 (k,佩克莱数) 平面上的中性稳定曲线

。我们指出，$\mathrm{Ge} = \sqrt{15}$ 是 Gebhart数可能达到的最大值。事实上，根据双解的数学定义，该值确实是可能达到的最大值，但我们强调，对于物理系统而言，这个值极大。图 5 表明，对于 $\mathrm{Ge} = \sqrt{15}$ 和 $\mathrm{Ge} = 2$，纵向模态更不稳定，因为它们会导致转变

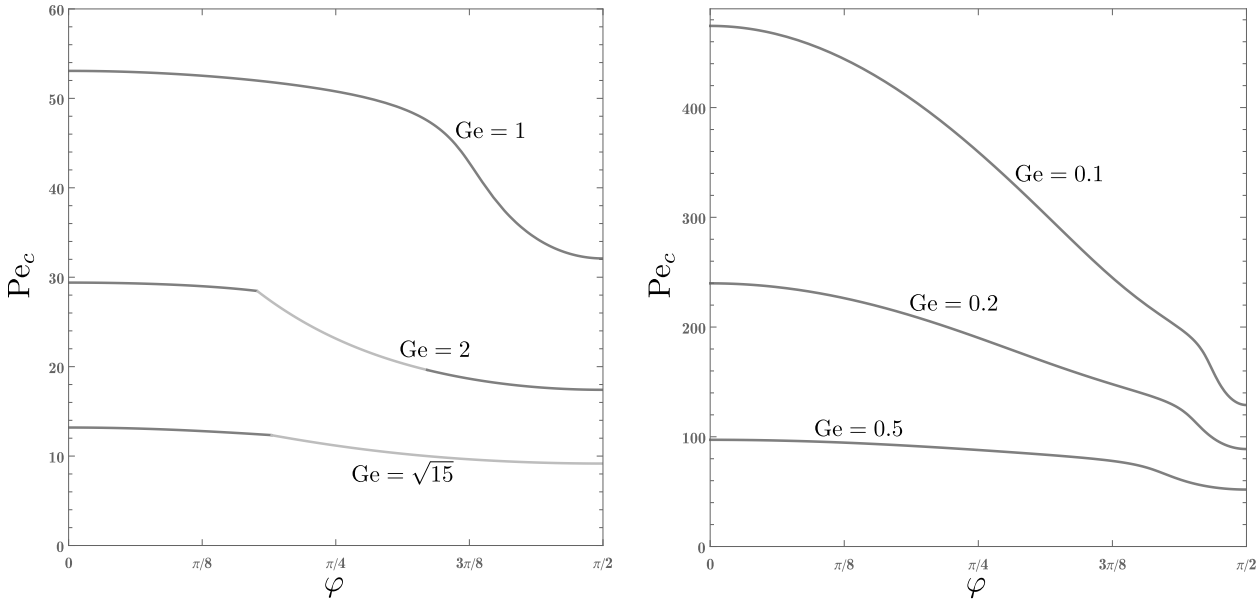


图7：斜向模态的 Pe 临界值随 φ 的变化。浅灰线表示 $k_c = 0$ 临界条件，深灰线表示 $k_c \neq 0$ 临界条件

在较低的 Pe 值下发生不稳定性 k_c。纵向模态的中性稳定性曲线还表明，当 $k \to 0$ 时，Pe 会达到一个有限值。在采用诺伊曼温度边界条件，而非通常的狄利克雷温度条件时，瑞利-贝 ́纳德不稳定性研究中也观察到了这一特征 [27]。我们指出，在 Ge $= \sqrt{15}$ 时，纵向模态的 Pe 临界值出现在 $k \to 0$；但当 Ge $= 2$ 时，则出现在非零 k，尽管在图 5 中并不明显。更准确地说，可得

$$k_c = 0.842235, \quad \mathrm{Pe}_c = 17.4116, \qquad \text{for} \quad \mathrm{Ge} = 2. \tag{26}$$

我们还注意到，当 Ge $= \sqrt{15}$ 时，横向模态的中性稳定性曲线分为互不相连的两部分。当 Ge $= 2$ 时，这两部分连接成一条曲线，从而形成 Pe 随 k 变化的局部最大值。

图 6 展示了 Gebhart数 $= 1$ 和 Gebhart数 $= 0.5$对应的结果，证实了纵向模态最不稳定。对于这两个 Gebhart数值，临界条件 Pe $= \mathrm{Pe}_c$ 对应于具有非零 k_c的纵向模态。与 Gebhart数 $= 1$ 和 Gebhart数 $= 0.5$ 的情形相比，Gebhart数 $= 2$ 时的横向模态中性稳定性曲线形状明显不同（图 5）。这种差异是由于在极限 $k \to 0$下，当 Gebhart数降至 2 以下时，中性稳定性对应的佩克莱数急剧增大。

通过测试临界 P φeclet 数对该倾斜角的依赖关系，开展了更系统的研究，以考察倾斜角 ′对不稳定性阈值的影响。除了图 5和6中考察的极大 Gebhart 数外，图 7还考察了较小且逐渐更接近实际的 Gebhart 数。该图展示了斜向模态下 Pe_c 随 φ 的变化。变化是单调的，而 $\varphi = \pi/2$（纵向模态）对应的 Pe_c在所有考察的情形中均为最小值。这意味着，可以普遍认为纵向模态是在不稳定性起始时被选中的模态。图7 显示，随着 Gebhart 数减小，Pe_c对 φ 的敏感性增强。另一个重要事实是，Pe 的临界值会

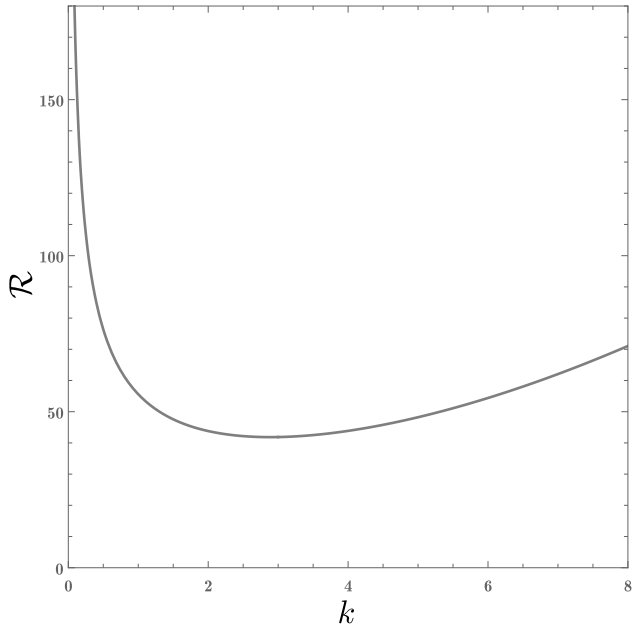


图 8：纵向模态：渐近条件 Ge $\to 0$ 下 $(k, \mathcal{R})$ 平面中的中性稳定性曲线

在不同范围的 $k_c = 0$ 或 $k_c \neq 0$ 下达到 φ。事实上，这种复杂的变化趋势是 Gebhart 数极大时的特有现象，$\sqrt{15}$ 或者在图7所考察的数值中为 2。对于较小的 Gebhart 数，所有 $k_c \neq 0$ 对应的 φ临界条件始终与之相关。

5.2 纵向模态

既然我们已经确定纵向模态表明了不稳定性的开始，现在就将注意力限定在这些模态上。这样，稳定性特征值问题（25）便大为简化，

$$\hat{W}'''' - 2k^2\hat{W}'' + k^4\hat{W} - k^2\hat{\Theta} = 0, \tag{27a}$$

$$\hat{\Theta}'' - (k^2 - i\hat{\omega})\hat{\Theta} - \text{佩克莱数}^2\, G'(z)\hat{W} = 0, \tag{27b}$$

$$\hat{W} = 0, \quad \hat{W}' = 0, \quad \hat{\Theta}' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{27c}$$

方程（27）最重要的特征是，纵向模态的中性稳定性发生于 $\hat{\omega} = \omega = 0$，其中等式 $\hat{\omega} = \omega$ 是定义（24）的结果。这一特征可称为稳定性交换原理，尽管无法对其作出严格证明，但从数值数据中可以清楚地推断出这一点。

5.2.1 小 Gebhart数的极限

一个具有物理意义的渐近条件与双重极限 Ge $\to 0$ 和 Pe $\to\infty$ 相关，同时保持 $\text{GePe}^2 \sim \mathcal{O}(1)$。除了数学上的表述之外，这种渐近行为还意味着，当 Ge 较小时，Pe 的中性稳定性阈值与 $\text{Ge}^{-1/2}$成正比。

将 $G'(z)$ 按 Ge 的幂级数展开，根据方程 (9) 和 (10) 以及所作的选择$A = A_-$，可得

$$G'(z) = -36\,\mathrm{Ge}\left(2z^3 - 3z^2 + z\right) + \mathcal{O}\left(\mathrm{Ge}^2\right). \tag{28}$$

我们还引入参数

$$\mathcal{R} = \mathrm{Pe}\sqrt{\mathrm{Ge}}. \tag{29}$$

因此，对于 Ge $\to 0$ 和 $\mathcal{R} \sim \mathcal{O}(1)$，方程（27）和（28）给出

$$\hat{W}'''' - 2\,k^2\,\hat{W}'' + k^4\,\hat{W} - k^2\,\hat{\Theta} = 0, \tag{30a}$$

$$\hat{\Theta}'' - \left(k^2 - i\,\hat{\omega}\right)\hat{\Theta} + 36\,\mathcal{R}^2\left(2z^3 - 3z^2 + z\right)\hat{W} = 0, \tag{30b}$$

$$\hat{W} = 0, \quad \hat{W}' = 0, \quad \hat{\Theta}' = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, 1. \tag{30c}$$

注意，在方程（30）中，Ge 和 Pe 并非分别出现，而是仅通过参数$\mathcal{R}$出现。因此，Ge $\to 0$ 时的极限中性稳定性可表述为参数 $\mathcal{R}$的阈值条件。还应指出， $\mathcal{R}^2$ 可解释为基于黏性耗散的瑞利数

$$\mathcal{R}^2 = \frac{g\,\beta\,\Delta T_{vd}\,H^3}{\nu\alpha}, \quad \text{where} \quad \Delta T_{vd} = \frac{\mu\,U_0^2}{\chi}, \tag{31}$$

并使用了方程（7）和（11）。这里， μ 是流体的动力黏度， χ 是其热导率，而 ΔT_{vd} 是表征黏性耗散效应的有量纲温差。

对方程（30）进行数值求解，可得到小 Ge 极限情形下（$k, \mathcal{R}$）平面上的中性稳定性曲线，如图 8所示。一个重要特征是，与图 5和 6所示的非零有限 Ge 值对应的中性稳定曲线不同，纵坐标轴$k = 0$ 是图 8所示中性稳定性曲线的一条垂直渐近线。事实上，小 Ge 渐近解的临界数据为

$$k_c = 2.88872, \quad \mathcal{R}_c = 41.8534 \tag{32}$$

方程（32）是确定 Ge 较小时 Pe_c 随 Ge 变化趋势的依据。具体而言，方程（29）和（32）表明，$\mathrm{Pe}_c \sim \mathcal{O}(\mathrm{Ge}^{-1/2})$。这一结果颇为有趣，因为它与多孔介质中绝热达西流 [21]的表现显著不同。对于后一种情况，Barletta 和 Rees [21] 已证明，Ge 较小时 Pe_c 的变化趋势为 $\mathrm{Pe}_c \sim \mathcal{O}(\mathrm{Ge}^{-1})$。换言之，对于多孔介质中的 Darcy流，$\mathrm{Pe}_c$在 Ge $\to 0$ 时趋于无穷，其增长速度显著快于牛顿流体流动。造成这种差异的原因在于导数 $\partial T_b/\partial z$，它驱动了纵向模态的不稳定性。当 Ge $\to 0$时，根据方程（8）、（9）和（10），令 $A = A_-$，可推得$\partial T_b/\partial z \sim \mathcal{O}(\mathrm{Ge}\,\mathrm{Pe}^2)$。Barletta 和 Rees [21] 证明，达西流对应的结果为 $\partial T_b/\partial z \sim \mathcal{O}(\mathrm{Ge}^2\,\mathrm{Pe}^2)$。

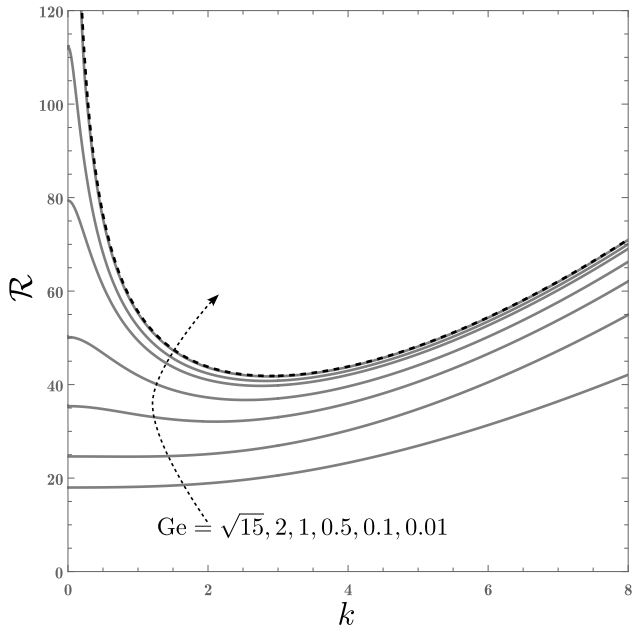


图9：纵向模态：在（k，$\mathcal{R}$）平面上，不同 Ge 值对应的中性稳定曲线。虚线中性稳定性曲线表示渐近条件 $\mathrm{Ge} \to 0$

5.2.2 $k \to 0$趋于0时的中性稳定条件

已有研究指出，对于任意 $\mathrm{Ge} \neq 0$，纵向模态的中性稳定条件表明，无限波长模态对应有限的 Pe 值，即，在极限 $k \to 0$下。这一推测的趋势可通过对特征值问题（27）采用幂级数解进行解析验证。令 $\hat{}\omega = 0$，并采用关于 k 的偶次幂展开，形式如下：

$$\begin{aligned}
&\hat{W}(z) = \hat{W}_0(z) + \hat{W}_2(z)\,k^2 + \hat{W}_4(z)\,k^4 + \mathcal{O}\big(k^6\big),\\
&\hat{\Theta}(z) = \hat{\Theta}_0(z) + \hat{\Theta}_2(z)\,k^2 + \hat{\Theta}_4(z)\,k^4 + \mathcal{O}\big(k^6\big),\\
&\mathrm{Pe} = \mathrm{Pe}_0 + \mathrm{Pe}_2\,k^2 + \mathrm{Pe}_4\,k^4 + \mathcal{O}\big(k^6\big).
\end{aligned} \tag{33}$$

将方程（33）代入方程（27），在 k 的零阶近似下，得到

$$\hat{W}_0'''' = 0, \tag{34a}$$

$$\hat{\Theta}_0'' - \mathrm{Pe}_0^2\,G'(z)\,\hat{W}_0 = 0, \tag{34b}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{W}_0(0) = 0, \quad \hat{W}_0'(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_0'(0) = 0,\\
&\hat{W}_0(1) = 0, \quad \hat{W}_0'(1) = 0, \quad \hat{\Theta}_0'(1) = 0.
\end{aligned} \tag{34c}$$

方程（34）的解为

$$\hat{W}_0(z) = 0, \quad \hat{\Theta}_0(z) = 1, \tag{35}$$

而佩克莱数 Pe_0 仍未确定。

ˆ确实，$\Theta_0(z)$ 可以等于任意常数，因为原问题（27）是齐次的。在式（35）中将常数取为 1，意味着通过隐式施加附加条件 $\Theta(0) = 1$，消除了特征函数的尺度不变性。直接的结果是

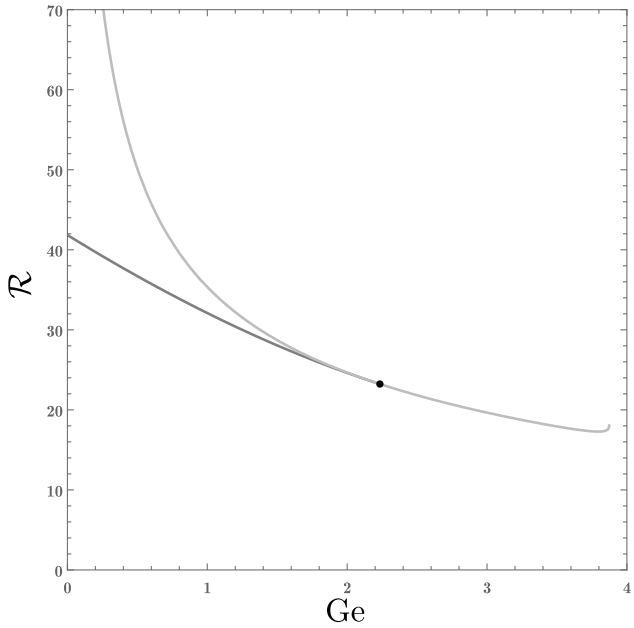


图10：纵向模态： $\mathcal{R}_c$ 随 Ge 变化（深灰线），与 $\mathcal{R}_0$ 随 Ge 变化（浅灰线）进行比较。黑点表示从 $k_c \neq 0$ 转变为 $k_c = 0$ 的转变，此时 Ge 由方程（40）给出

$\hat{}\Theta_n(0) = 0$ 对每个正整数 n，因此，将式（27）按 k 展开至二阶后得到的系统为

$$\hat{W}_2'''' - 1 = 0, \tag{36a}$$

$$\hat{\Theta}_2'' - 1 - \mathrm{Pe}_0^2\, G'(z)\, \hat{W}_2 = 0, \tag{36b}$$

$$\hat{W}_2(0) = 0, \quad \hat{W}_2'(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_2(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_2'(0) = 0,$$
$$\hat{W}_2(1) = 0, \quad \hat{W}_2'(1) = 0. \tag{36c}$$

还应有一个附加条件 $\hat{}\,\Theta_2'(1) = 0$，但确定方程（36的解$\hat{}$时并不需要它。为简洁起见，我们不报告这类解。这里只说明， $W_2(z)$ 是关于 z的四次多项式，而 $\Theta_2(z)$ 是关于 z的十一阶多项式。

强制施加 附加条件 $\hat{\Theta}_2'(1) = 0$ 得出佩克莱数$_0$ 与 Gebhart数之间的关系，具体来说 ly

$$\mathrm{Pe}_0 = 2\sqrt{\frac{105\,\mathrm{Ge}^2}{\left(20 - \mathrm{Ge}^2\right)\sqrt{15\left(15 - \mathrm{Ge}^2\right)} + 25\,\mathrm{Ge}^2 - 300}}. \tag{37}$$

方程（37）的一个特征是，在极限 Ge $Pe_0 \sim \mathcal{O}\left(\mathrm{Ge}^{-2}\right)$ 时 $\to 0$。这一特征支持我们在第 5.2.1 节中的说法：当 Ge $k = 0$ 时，纵坐标轴 $\to 0$是中性稳定性曲线的垂直渐近线。方程 37 还严格给出了最大Ge情形下的临界佩克莱数 P′，也就是，当 Ge $= \sqrt{15}$时。事实上， $k_c = 0$ 在这种情况下，且

$$\mathrm{Pe}_c = \mathrm{Pe}_0 = 2\sqrt{21} \approx 9.16515. \tag{38}$$

将这一结果与中性稳定性曲线上的 Pe 数值（见图 5）在 $k = 0.01$时进行比较，我们估计相对偏差小于 0.01%。鉴于用于特征值问题（27）的数值射击法求解器在 k 接近 0 时精度最低，这样的偏差极其令人满意。

考虑由方程（27）得到的系统关于 k展开至四阶，可得

$$\hat{W}_4'''' - 2\hat{W}_2'' - \hat{\Theta}_2 = 0, \tag{39a}$$

$$\hat{\Theta}_4'' - \hat{\Theta}_2 - \left(\mathrm{Pe}_0^2\hat{W}_4 + 2\,\mathrm{Pe}_0\,\mathrm{Pe}_2\,\hat{W}_2\right) G'(z) = 0, \tag{39b}$$

$$\hat{W}_4(0) = 0, \quad \hat{W}_4'(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_4(0) = 0, \quad \hat{\Theta}_4'(0) = 0,$$
$$\hat{W}_4(1) = 0, \quad \hat{W}_4'(1) = 0. \tag{39c}$$

附加条件 $\hat{}\ \Theta_4'(1) = 0$ 建立了 Pe_2 与 Gebhart数之间的关系。我们不报告 Pe_2, 的解析表达式，只指出它可用于检测随着 Gebhart数增加， k_c从零变为非零的阈值。我们已经指出，对于 Gebhart数为 $= 2$ 的纵向模态，其中性稳定性曲线具有 $k_c \neq 0$；而对于 Gebhart数为 $= \sqrt{15}$ 的情形，则具有 $k_c = 0$。当 k_c 从非零值变为零值时，其对应的 Gebhart数阈值可通过中性稳定性曲线在 $k = 0$处凹性的变化来确定。这种凹性变化对应于 Pe_2符号的改变。事实上，条件 $\mathrm{Pe}_2 = 0$ 给出

$$\mathrm{Ge} = 2.23397. \tag{40}$$

5.2.3 中性稳定性曲线与临界值

图中给出了纵向模态的中性稳定性曲线在（k， $\mathcal{R}$）平面上的分布。图9 展示了 Gebhart数从其最大值 $\sqrt{15}$逐渐减小至 0。01 时的中性稳定性曲线。为便于比较，图中还绘出了渐近情形 Gebhart数 $\to 0$（虚线）对应的中性稳定性曲线。初步看来，Gebhart数 $= 0.01$ 对应的中性稳定性曲线与 Gebhart数 $\to 0$对应的曲线几乎完全重合。然而，根据式（37），应注意，Gebhart数 $= 0.01$对应的中性稳定性曲线在极限 $\mathcal{R}$ 下取有限但非常大的值 $k \to 0$，即 $\mathcal{R} = 354.967$；而渐近情形 Gebhart数 $\to 0$ 对应的中性稳定性曲线在 $k = 0$处有一条垂直渐近线。

图10 比较了 $\mathcal{R}$ 的临界值与 $k \to 0$ 相对于 Gebhart数的 $\mathcal{R}$ 极限值。事实上，对于给定的 Gebhart数，我们定义

$$\mathcal{R}_c = \mathrm{Pe}_c\sqrt{\mathrm{Ge}}, \quad \mathcal{R}_0 = \mathrm{Pe}_0\sqrt{\mathrm{Ge}}. \tag{41}$$

采用深灰色线表示 $\mathcal{R}_c$ ，浅灰色线表示 $\mathcal{R}_0$。当 Ge 大于 2 时，后者几乎与前者重合；当 Ge 超过式（40）给出的阈值，并在图 10 中以黑点标出时，两条线则完全重合。原因是当 Ge 很大时， $\mathcal{R}_c$ 与 $\mathcal{R}_0$ 之间的差异变得非常小。当 Ge $\to 0$时，$\mathcal{R}_c$ 的值与式（32）给出的值一致。当 Ge $= \sqrt{15} \approx 3.87298$时，两条线均终止，因为该 Ge 值是基态存在的最大可能值。尽管对于物理系统而言，这一区间几乎无关紧要，但当 Ge 接近其最大值时， $\mathcal{R}_c$ 和 $\mathcal{R}_0$ 随 Ge 增大而总体递减的趋势会出现偏离，并呈现一个极小值；对于 $\mathcal{R}_0$ ，可利用式（37）准确求得该极小值，

$$\mathcal{R}_{0,\min} = 3\sqrt{21\sqrt{\frac{5}{2}}} \approx 17.2869, \quad \mathrm{Ge}_{\min} = 6\sqrt{\frac{2}{5}} \approx 3.79473. \tag{42}$$

Ge	k_c	Pe_c	$\mathcal{R}_c$	Pe_0	$\mathcal{R}_0$
0	2.88872	∞	41.8534	∞	∞
0.01	2.88237	417.4493	41.7449	3549.6464	354.9646
0.1	2.82398	128.9560	40.7795	354.9500	112.2450
0.2	2.75634	88.8359	39.7286	177.4528	79.3593
0.3	2.68571	70.6563	38.7001	118.2772	64.7831
0.4	2.61199	59.5981	37.6932	88.6819	56.0874
0.5	2.53508	51.9123	36.7076	70.9188	50.1472
0.8	2.28435	37.8763	33.8776	44.2515	39.5797
1	2.09952	32.0986	32.0986	35.3470	35.3470
1.2	1.89924	27.7601	30.4097	29.4002	32.2063
1.5	1.56474	22.9062	28.0543	23.4372	28.7045
1.8	1.17077	19.3205	25.9212	19.4448	26.0879
2	0.84224	17.4116	24.6237	17.4397	24.6634
2.2	0.31397	15.7919	23.4232	15.7924	23.4239
2.23397	0	15.5412	23.2286	15.5412	23.2286
$\sqrt{15}$	0	9.1652	18.0369	9.1652	18.0369

表1： k_c、Pe_c、 $\mathcal{R}_c$、Pe_0、 $\mathcal{R}_0$ 随Gebhart数的变化

表 1 列出了若干 Gebhart数下参数 k、Pe 和 $\mathcal{R}$ 的临界数据，以及采用 $k \to 0$ 渐近解式（37）得到的相应 Pe 和 $\mathcal{R}$ 值。该表第一行对应 Ge $= 0$时的情形，即第 5.2.1 节讨论的渐近解。值得注意的是，渐近情形 Ge $\to 0$ 与 Ge $= 0.01$ 时的情形之间的差异，在 .3 % 以下，无论是就 k_c 还是 $\mathcal{R}_c$ 而言都是如此。这意味着，在实际应用中，Ge $\to 0$ 时的渐近解可安全地用于所有 Ge ≤ 0.01 的情形。表 1中还列出了由式（40）定义的 Ge 阈值；超过该值时， $k_c = 0$。

尽管我们声明稳定性分析的重点是 $A = A_-$ 分支，但对于给定的Gebhart数，比较双重流的稳定性特征可能会很有意义。因此，我们选择了一个Ge $= 3.8$的情形，它非常接近最大值Ge $= \sqrt{15}$，从而使双分支之间不会相差太大。我们回顾一下，Ge $= 3.8$时的基本双重流如图1 和3 所示，并已在第3节中进行了讨论。Ge $= 3.8$ 时两个双分支对应的中性稳定曲线分别针对横向模态和纵向模态展示于图11 中。在两个双分支中，纵向模态最不稳定。然而， $A = A_-$ 分支的佩克莱数临界值小于 $A = A_+$ 分支的临界值。因此，在这种情况下， $A = A_-$ 比 $A = A_+$ 分支更不稳定。这一结果并不令人意外，因为在先前一项关于多孔通道中Darcy流的类似研究中观察到了相似的行为 [21]。图11 中清晰可见的一个次要特征是，对于 $A = A_+$ 分支，纵向模态的不稳定性起始发生在非零波数模态下；另一方面， $k_c = 0$ 对于 $A = A_-$ 分支则相反。

6 结论

研究了具有绝热壁的水平平面通道中浮力平行流的对流不稳定性起始。浮力作用和不稳定行为是由

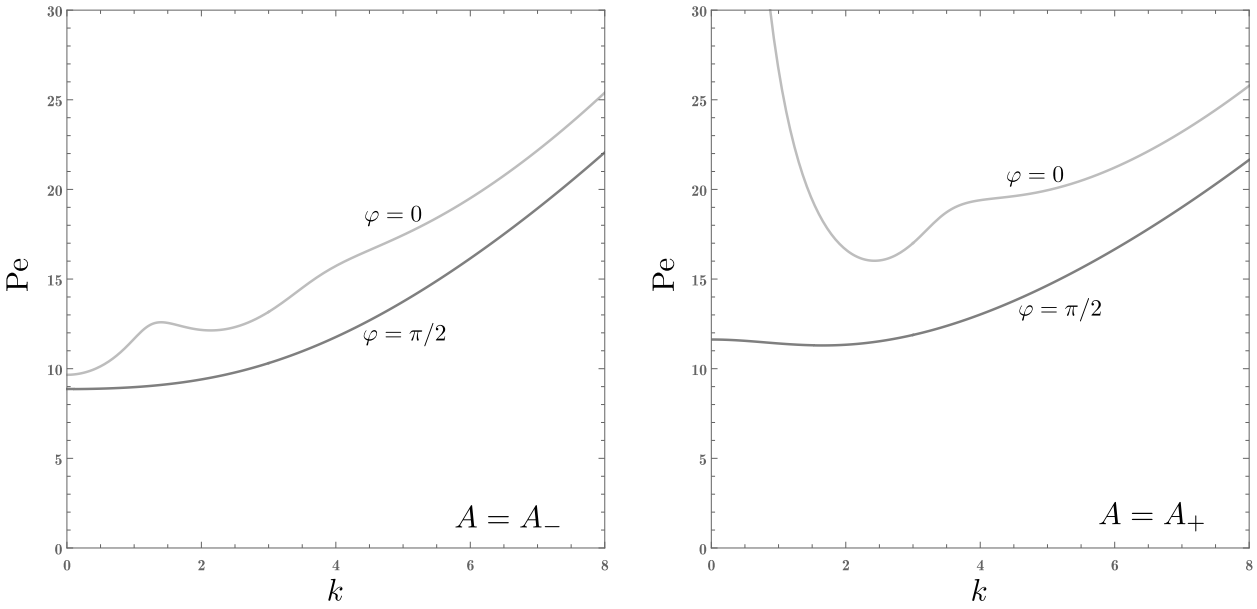


图 11：在（k, Pe）平面上 Ge $= 3.8$ 的中性稳定性曲线，其中横向模式（浅灰线，$\varphi = 0$）和纵向模式（深灰线，$\varphi = \pi/2$）。两条双分支 $A = A_-$ 和 $A = A_+$均纳入考量

给定质量流率下流动的黏性耗散所引起的。

本文概述了基本平行流的主要特征，尤其是其双重性。稳定性分析聚焦于双重流的下分支，因为结果表明，上分支呈现的特征与 Oberbeck-Boussinesq近似完全不相容。双重流的控制无量纲参数为 Gebhart数 Ge（亦称耗散数）和佩克莱数 Pe。

稳定性分析通过求取给定 Ge 下的中性稳定 Pe 值来进行。由于双重流仅在 Ge $\leq \sqrt{15}$条件下具有数学定义，因此本文考察了整个参数范围。不过，文中也提到，即便在具有地球物理意义的长度尺度下，Ge 取其最大值这样大的数值对于任何实际应用而言都很难具有意义（Barletta 等人[18]）。

线性稳定性分析是在假设流动为爬行流的条件下建立的，这意味着普朗特数为无穷大。该分析通过数值求解采用打靶法得到的稳定性特征值问题来完成。稳定性分析的主要结果可概括如下：

- 对于任何 Gebhart数，导致转变为不稳定状态的首选扰动模态都是纵向模态。通过定义基流方向与斜向模态对应的波矢之间的倾斜角 φ，检验了基流对任意斜向扰动模态的响应。随后，将倾斜角在范围 $0 \leq \varphi \leq \pi/2$内变化，其中 $\varphi = 0$ 表示横向模态，$\varphi = \pi/2$ 表示纵向模态。取值 $\varphi = \pi/2$ 时始终对应最不稳定的状态。

- 对纵向模态中性稳定条件的分析表明，这类模态不会传播，因为它们的角频率以及相速度始终

为零。Pe 或参数 $\mathcal{R}$ =Pe$\sqrt{}$Ge 的临界值通常随 Ge 增大而降低，但在接近最大 Ge $= \sqrt{15}$ 的一个极窄范围内除外。对于任意非零 Ge，波数为零（即波长无限大）的纵向模态都具有有限的中性稳定 Pe 值。研究人员通过解析渐近解研究了这一状态。

- 一种具有重要物理意义的情形是：Gebhart数可以忽略不计，佩克莱数非常大，但参数 $\mathcal{R}$ 保持有限。对于这一极限情形，不稳定性发生的临界条件已计算为 $\mathcal{R}_c = 41.8534$。

本文通过假设爬行流条件，研究了黏性耗散诱发的不稳定性；在此条件下，普朗特数取极大值，同时佩克莱数保持有限。在这一情形下，黏性耗散不稳定性会在极小雷诺数下出现，因此可能与通过求解奥尔–索末菲问题分析的流体动力学不稳定性毫无关联。未来研究可以将本研究扩展至混合参数域，并假设普朗特数为有限值，这可能是一项挑战。这样的进展有望提供机会，检验平行平面通道中黏性耗散不稳定性与奥尔–索末菲流体动力学不稳定性之间的相互作用。

致谢
作者感谢意大利教育、大学与研究部（MIUR）提供的资助，项目编号为PRIN 2017F7KZWS。

参考文献

[1] P. G. Drazin, W. H. Reid，《流体动力学稳定性》，第2版，剑桥大学出版社，2004。[2] P. K. Kundu, I. M. Cohen, D. R. Dowling，《流体力学》，第6版，学术出版社，2016。[3] D. D. Joseph，黏度变化对通道和管道内流动及其稳定性的影响，《流体物理学》7（1964）1761–1771。[4] D. D. Joseph，摩擦生热流动的稳定性，《流体物理学》8（1965）2195–2200。[5] A. Barletta, D. A. Nield，高黏性流体水平平面库埃特流中的对流-耗散不稳定性，《流体力学杂志》662（2010）475–492。[6] A. Barletta, M. Celli, D. A. Nield，高黏性流体在水平通道中的泊肃叶流，其耗散热不稳定性的起始，《流体力学杂志》681（2011）499–514。[7] A. Barletta，黏性耗散诱发的热不稳定性，《国际热科学杂志》88（2015）238–247。

[8] M. Miklavˇciˇc，垂直通道中若干充分发展混合对流流动的稳定性分析，ZAMM《应用数学与力学杂志》/《应用数学与力学》95（2015）982–986。¨A. Barletta, M. Miklavˇciˇc，垂直通道中考虑黏性耗散的充分发展混合对流及其稳定性，ZAMM《应用数学与力学杂志》/《应用数学与力学》96（2016）1457–1466。[9] L. A. Lund, Z. Omar, I. Khan, S. Kadry, S. Rho, I. A. Mari, K. S. Nisar，部分滑移条件下黏性耗散对磁流体动力学微极流体传热的影响：双解与稳定性分析，《能源》12（24）（2019）4617。¨Y. Requil[10] e, S. C. Hirata, M. N. Ouarzazi, A. Barletta，平面泊肃叶流和平面库埃特流中黏性耗散热不稳定性的弱非线性分析，《流体力学杂志》886。[11] L. A. Lund, Z. Omar, J. Raza, I. Khan，考虑黏性耗散影响的Cu-Fe3O4/H2O混合纳米流体磁流体动力学流动：双重相似解，《热分析与量热学杂志》143（2021）915–927。´E. V. M. Reis, L. S. de B. Alves，贯流条件下热毛细对流中由黏性耗散诱发的对流不稳定性和绝对不稳定性，美国机械工程师学会《传热杂志》143（2021）052601。[12] A. Barletta, G. Mulone，考虑黏性耗散的达西-贝纳德问题的能量法分析，《连续介质力学与热力学》33（2021）25–33。[13] K. Ali Amar, S. C. Hirata, M. N. Ouarzazi，二元混合物中泊肃叶流的黏性耗散热不稳定性起始的索雷效应，《流体物理学》34（2022）114101。[14] D. L. Turcotte, D. A. Spence, H. H. Bau，具有黏性耗散和压力功的内热垂直通道自然对流流动的多重解，《国际传热与传质杂志》25（1982）699–706。´A. Barletta, E. Magyari, B. Keller，垂直通道中的双混合对流流动，《国际传热与传质杂志》48（2005）4835–4845。[15] A. Barletta, M. Celli, P. V. Brand[16] ao，水平通道中的混合对流、黏性耗散和流动对偶性，《流体》7（5）（2022）170。[17] G. Wilks, J. S. Bramley，混合对流中的双解，《爱丁堡皇家学会会刊：A辑 数学》87（1981）349–358。[18] K. Naganthran, M. Mustafa, A. Mushtaq, R. Nazar，可变流体性质条件下伸展/收缩旋转圆盘上流体流动的双解，《物理学A：统计力学及其应用》556（2020）124773。˜A. Barletta, D. A. S. Rees，水平多孔层中双重绝热流的稳定性分析，《国际传热与传质杂志》52（2009）2300–2310。

[22] B. Gebhart, 《自然对流中黏性耗散的影响》, 《流体力学杂志》14 (1962) 225–232。[23] C. Kincaid、P. Silver, 《黏性耗散在造山过程中的作用》, 《地球与行星科学通讯》142 (1996) 271–288。[24] A. P. van den Berg、D. A. Yuen, 《剪切加热在润滑地幔流中的作用》, 《地球与行星科学通讯》151 (1997) 33–42。[25] B. Straughan, 《能量法、稳定性与非线性对流》, Springer，2013。[26] A. Barletta, 《多孔介质中通向绝对不稳定性的途径》, Springer, 2019。[27] H. Park、L. Sirovich, 《具有恒定热通量边界条件的瑞利–贝纳德对流的流体动力学稳定性》, 《应用数学季刊》49 (1991) 313–332。