arXiv:2302.00555v1 [math.AG] 1 Feb 2023

正交格拉斯曼簇中舒伯特簇的环面商——II

Arpita Nayek 和 Pinakinath Saha

Abstract. 设 $G = SO(8n+4,\mathbb{C})$ $(n \geq 1)$。设 B 是 G. 的 Borel 子群，包含 G. 的极大环面 T。令 $P(\supset B)$表示 G 中对应于单根 α_{4n+2}的极大抛物子群。本文证明，关于适当的 T-线性化非常 ample 线丛的下降，正交格拉斯曼簇 G/P 中某些舒伯特簇的几何不变理论商具有射影正规性。

1. 引言

设 $G = SO(8n+4,\mathbb{C})$。设 B 是 G.的 Borel 子群，包含 G.的极大环面 T。设 G 相对于 T. 的韦伊群为 W。令 $P(\supset B)$表示 G 中对应于单根 α_{4n+2}的极大抛物子群。设 α_{4n+2}. 是对应于单根 α_{4n+2}. 的基本权。设 P. 的韦伊群为 W_P。令 W/W_P. 表示 W/W_P. 的最小陪集代表元集合。用“ $\leq$ ”表示 W^P. 上的布鲁哈-切瓦利序。对于 $w \in W^P$，令 $X(w) := \overline{BwP/P}$表示 G/P中对应于 w.的舒伯特簇。

为了陈述本文的主要结果，我们先引入一些记号。

对于 $1 \leq i \leq 2n$，令 $\tau_{2i-1} := \begin{cases} s_{2i-1}s_{2i}\cdots s_{4n-1}s_{4n}s_{4n+1} \\ s_{2i-1}s_{2i}\cdots s_{4n-1}s_{4n}s_{4n+2} \end{cases}$，其中 i 为偶数时取值， i 为奇数时取值； s_i 表示与单根 α_i. 对应的单反射。

设 $\lambda = \varpi_{4n+2}$. 设 $v_1 = s_{4n+2}\prod_{i=2n}^{1}\tau_{2i-1}$. 则 v_1 是 W^P 中唯一的极小元，使得 $v_1(\lambda) \leq 0$. 考虑满足以下条件的 v_i: 对所有 $2 \leq i \leq 6$ ，均有 $v_1 \leq v_i$:

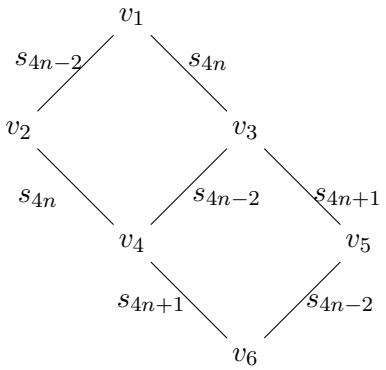

图 1: 布鲁哈格 W^P 的子格

2010 *Mathematics Subject Classification.* 14M15.*Key words and phrases.* 正交格拉斯曼簇、GIT 商、线丛、半稳定点。

$v_2 = s_{4n-2}v_1, v_3 = s_{4n}v_1, v_4 = s_{4n-2}s_{4n}v_1, v_5 = s_{4n+1}s_{4n}v_1, v_6 = s_{4n-2}s_{4n+1}s_{4n}v_1$. 由于 $v_1 \leq v_i$ 且 $v_1(\lambda) \leq 0$, 因此对所有 $2 \leq i \leq 6.$, 均有 $v_i(\lambda) \leq 0$ 。于是，根据 [8, 引理 2.1, 第 470] 页，$X(v_i)_T^{ss}(\mathcal{L}(2\lambda)) \neq \emptyset$, 对所有 $1 \leq i \leq 6.$ 均成立

本文的主要结果如下。

定理 1.1。几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_6))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 关于 T 线性化的非常 ample 线丛 $\mathcal{L}(4\lambda)$ 的下降是射影正规 的。

命题 1.2。（i）几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_1))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 是一个点 .

（ii）几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_2))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 作为极化簇与 $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ 同构。（iii）几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_3))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 作为极化簇与 $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ 同构。（iv）几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_4))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 作为极化簇与 $(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$ 同构。（v）几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_5))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 作为极化簇与 $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ 同构。

当 $G = SO(8n, \mathbb{C})(n \geq 1)$ 时， [15] 中证明了定理 1.1 和命题 1.2 的类似结论。

本文的结构安排如下。在第 2 节中，我们介绍一些记号并回顾若干预备知识。在第 3 节中，我们证明定理 1.1 和命题 1.2。

2. Notation and Preliminaries

关于代数群、李代数、标准单项式理论和几何不变理论的预备知识，请参阅 [5], [6], [7], [11] 和 [13] 。

2.1. 射影正规性。若极化簇 $(X, \mathcal{L})$ 满足以下条件，则称其为射影正规：其中 $\mathcal{L}$ 是射影簇 X 上的一个非常 ample 线丛，其齐次坐标环 $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k})$ 是整闭的，并且由 $H^0(X, \mathcal{L})$ 作为 $\mathbb{C}$-代数生成（见 [4, 第二章，习题 5.14，第 126] 页）。

2.2. 几何不变理论。设 G、P 和 T 如上一节所述。

设 $\mathcal{L}$ 是 $G/P.$ 上的一个 T-线性化非常 ample 线丛。我们也将线丛 $\mathcal{L}$ 在 $X(w)$ 上的限制记为 $\mathcal{L}$。

若存在正整数 m，使得对某个 T-不变截面 $s \in H^0(X(w)\ \mathcal{L}^{\otimes m})$ 有 $s(p) \neq 0.$, 则称点 $p \in X(w)$ 是关于 T-线性化线丛 $\mathcal{L}$ 的半稳定点。我们将 $X(w)$ 关于 $\mathcal{L}$ 的所有半稳定点构成的集合记为 $X(w)_T^{ss}(\mathcal{L})$。

若点 p 属于 $X(w)_T^{ss}(\mathcal{L})$，且 p 的 T-轨道在 $X(w)_T^{ss}(\mathcal{L})$ 中是闭的，并且 p 在 T 中的稳定子有限，则称 p 为稳定点。我们将 $X(w)$ 关于 $\mathcal{L}$ 的所有稳定点构成的集合记为 $X(w)_T^{s}(\mathcal{L})$。

2.3. 关于 $SO(8n+4, \mathbb{C})$ 的记号与预备知识。让我们回顾一下 $SO(8n+4, \mathbb{C})$ 的一些众所周知的性质（参见 [11]）。设 $V = \mathbb{C}^{8n+4}$，并配备一个非退化对称双线性形式（$-, -$）。令 $\{v_1, \ldots, v_{8n+4}\}$ 为 $V.$ 的标准基。令 $E = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$ 为矩阵

相对于标准基 $\{v_1,\dots,v_{8n+4}\}$ 的形式（–, –），其中 J 表示一个大小为 $4n+2\times 4n+2$ 且所有元素均为 1 的反对角矩阵。

令 $H=SL(V)$。令 $\sigma:\ H\longrightarrow H$ 为由 $\sigma(A)=E(A^t)^{-1}E$ 定义的对合，其中$A\in H$和 A^t 表示 $A.$的转置。令 $G=H^\sigma.$。于是 $G=SO(V)$。令 T_H（分别为 B_H）为 H 中的极大环面，由对角矩阵组成（分别为 H 中的 Borel 子群，由上三角矩阵组成）。令 $T=T_H^\sigma$和 $B=B_H^\sigma.$。于是 B是 G的 Borel 子群，包含作为 $G.$的极大环面的 T。令 $N_G(T)$（分别为 $N_H(T_H)$）为 G（分别为H）中 T（分别为 T_H）的正规化子。于是有 $N_G(T)\subseteq N_H(T_H)$。因此，我们得到一个同态

$$W\longrightarrow W_H,$$

其中 W、 W_H 分别表示 G、 H 关于 T、 T_H 的韦伊群。

2.3.1. 韦伊群。韦伊群 W_H 可识别为 S_{8n+4}，即作用在$8n+4$ 个字母 $\{1,2,\dots,8n+4\}.$上的对称群。此外， σ 诱导出一个对合 $W_H\longrightarrow W_H$，其定义如下:

$$w=(a_1,\dots,a_{8n+4})\mapsto\sigma(w)=(c_1,\dots,c_{8n+4}),$$

其中， $w=(a_1,\dots,a_{8n+4})$采用该置换的单行记法，而 $c_i=8n+5-a_{8n+5-i}.$。因此，我们有 $W=\{w\in W_H^\sigma:\ \ w$是 $W_H\}.$中的一个偶置换。采用单行记法，我们有 $W=\{(a_1,\dots,a_{8n+4})\in S_{8n+4}:\ a_i=8n+5-a_{8n+5-i},1\le i\le 8n+4$，且 m_w为偶数$\}$，其中 $m_w=\#\{i\in\{1,\dots,4n+2\}:\ \ a_i>4n+2\}.$。因此，一旦已知$(a_1,\dots,a_{4n+2})$，就可确定 $w=(a_1,\dots,a_{8n+4})\in W$。

2.3.2. 根系及其他一些性质。令 $X(T_H)$（分别为 $X(T)$）表示 T_H（分别为 T）的特征群。对于 $1\le i\le 8n+4$，元素 $\epsilon_i\in X(T_H)$ 定义为

$$\epsilon_i(t)=t_i,$$

其中 $t=diag(t_1,t_2,\dots,t_{8n+4})\in T_H.$

那么，集合 $R_H=\{\epsilon_i-\epsilon_j:\ i\neq j\}$ 可以视为 H 相对于 T_H 的根集，而 $R_H^+=\{\epsilon_i-\epsilon_j:\ 1\le i<j\le 8n+4\}$ 是相对于$B_H.$的正根集。对于 $1\le i\le 8n+3$，记作 $\beta_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}.$。那么 $S_H=\{\beta_i:\ 1\le i\le 8n+3\}$ 是 $R_H.$的单根集

注意， σ 诱导出一个对合 $\sigma:\ X(T_H)\longrightarrow X(T_H)$，其作用于 $X(T_H)$，定义为 $\chi\mapsto\sigma(\chi)$，其中 $\sigma(\chi)(t)=\chi(\sigma(t))$，对于 $t\in T_H.$。于是我们有 $\sigma(\epsilon_i)=-\epsilon_{8n+5-i}$，对于 $1\le i\le 8n+4.$。由于$T\subset T_H$，存在一个满射 $\varphi:\ X(T_H)\longrightarrow X(T)$，定义为 $\varphi(\epsilon_i)=-\varphi(\epsilon_{8n+5-i})$，对于$1\le i\le 8n+4.$

于是 σ 使 R_H（分别为 R_H^+）保持稳定。令 R（分别为 R^+）表示 G相对于 T（分别为 B）的根（分别为正根）集合。由 G在 $\mathfrak{g}$（ G的李代数）上的伴随表示具有显式形式可知， $R=\varphi(R_H\setminus R_H^\sigma)$ 和 $R^+=\varphi(R_H^+\setminus R_H^{+\sigma})$。特别地，我们有 R（分别为 R^+）可识别为 R_H（分别为 R_H^+）在 σ 作用下的轨道空间，去掉其在 $\sigma.$ 下的不动点集。现在我们看到， R^+ 可通过 $\varphi.$ 识别为 $X(H)$ 中的子集 $\{\epsilon_i-\epsilon_j:\ 1\le i<j\le 4n+2\}\cup\{\epsilon_i+\epsilon_j:\ 1\le i<j\le 4n+2\}$。对于 $1\le i\le 4n+1$，记 $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}$ 和 $\alpha_{4n+2}=\epsilon_{4n+1}+\epsilon_{4n+2}.$。那么 $S=\{\alpha_i:\ 1\le i\le 4n+2\}$ 是 $R.$的单根集合

令 Q（分别地， P）表示 H（分别地， G）中对应于单根 β_{4n+2}（分别地， α_{4n+2}）的极大抛物子群。令 W_Q（分别地， W_P）表示 Q（分别地，P）的韦伊群。那么， H/Q（分别地， G/P）中的舒伯特簇由最小陪集

代表元 W_H/W_Q（分别地， W/W_P）参数化。我们用 W^Q（分别地， W^P）表示 W_H/W_Q（分别地， W/W_P）的所有最小陪集代表元组成的集合。

设 ϖ'_{4n+2}（分别为 ϖ_{4n+2}）是 H（分别为 G）中与单根 β_{4n+2}（分别为 α_{4n+2}）对应的基本权。注意，H/Q（分别为 G/P）的皮卡群的非常 ample 生成元是线丛 $\mathcal{L}(\varpi'_{4n+2})$（分别为 $\mathcal{L}(\varpi_{4n+2})$）。此外，非常 ample 线丛 $\mathcal{L}(\varpi'_{4n+2})$ 在包含映射 $G/P \subset H/Q$ 下的限制是非常 ample 线丛 $\mathcal{L}(2\varpi_{4n+2})$。

注意， W^P 上的布鲁哈-切瓦利序“ $\leq$ ”是由 W^Q. 上的布鲁哈-切瓦利序“ $\leq$ ”诱导的。定义 $I_{4n+2,8n+4} := \{\underline{i} = (i_1, \ldots, i_{4n+2}) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_{4n+2} \leq 8n+4\}$.。注意， $I_{4n+2,8n+4}$ 上有一个自然的偏序“ $\leq$ ”，定义为：当且仅当对所有 $1 \leq t \leq 4n+2.$， $i_t \leq j_t$ 时， $\underline{i} \leq \underline{j}$。于是，($W^Q, \leq$) 与 ($I_{4n+2,8n+4}, \leq$) 之间存在自然的保序同构。设 $\underline{i} := (i_1, ..., i_{4n+2}) \in I_{4n+2,8n+4}$， 且 $p_{\underline{i}}$ 是 $G_{4n+2,8n+4}(\simeq H/Q)$ 上对应的普吕克坐标。令 $f_{\underline{i}}$ 表示将 $p_{\underline{i}}$ 限制到集合 M_{4n+2} 所得的映射，其中该集合由大小为 $4n+2 \times 4n+2$ 的矩阵组成，并与 $H/Q.$ 的反大胞腔 O_H^- 相对应。于是 $f_{\underline{i}}(Y) = p(\underline{i}(A)\ \underline{i}(B))$，其中 $\underline{i}(A)\ \underline{i}(B)$ 如下给出：取满足 $i_r \leq 4n+2, i_{r+1} > 4n+2.$ 的 r。令 $s = 4n+2-r$.。则 $\underline{i}(A)$ 是由 $(8n+5-i_{4n+2}, ..., 8n+5-i_{r+1})$ 给出的 s 元组，而 $\underline{i}(B)$ 是由 $(1, ..., 4n+2)$ 中 $(i_1, ..., i_r)$ 的补集给出的 s 元组。于是，$(\underline{i}(A)\ \underline{i}(B))$ 是与 $\underline{i}.$ 相关联的典范对偶对。

注意， $\mathcal{L}(\varpi'_{4n+2})$ 是 $H/Q(\simeq G_{4n+2,8n+4}$，即 V 中 $4n+2$ 维子空间的格拉斯曼流形) 上的典范线丛。于是， $H^0(H/Q, \mathcal{L}(\varpi'_{4n+2}))$ 是具有最高权 $\varpi'_{4n+2}.$ 的不可约H模。令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{L}(\varpi'_{4n+2})$ 在 $G/P.$ 上的限制。对于 $\underline{i} \in I_{4n+2,8n+4}$， 令 $p'_{\underline{i}}$为 $p_{\underline{i}}$ 在 $G/P.$ 上的限制。注意， $p'_{\underline{i}} \in H^0(G/P, \mathcal{L})$。令 $p(\underline{i}(A)\ \underline{i}(B))$ 为在上述同一化下 $p_{\underline{i}}$ 到 M_{4n+2} 的限制。令 $p'(\underline{i}(A)\ \underline{i}(B))$ 为 $p(\underline{i}(A)\ \underline{i}(B))$ 到集合 SkM_{4n+2} 的限制，其中 SkM_{4n+2} 是大小为 $4n+2 \times 4n+2$ 的反对称矩阵集合（与 G/P 的反大胞腔 O^- 相对应）。令 $Y \in SkM_{4n+2}.$。取 $\underline{i} \in I_{4n+2,8n+4}$，使得$\underline{i}(A) = \underline{i}(B)$。那么， $p'(\underline{i}(A)\ \underline{i}(A))(Y)$ 是 $Y.$ 的一个主子式。因此， $p'(\underline{i}(A)\ \underline{i}(A))(Y)$ 是一个平方，表示$q_{\underline{i}}(Y)$相应的 Pfaffian（即 $q_{\underline{i}}^2(Y) = p'(\underline{i}(A)\ \underline{i}(A))(Y)$）。由此我们得到一个正则函数 $q_{\underline{i}} : SkM_{4n+2} \longrightarrow \mathbb{C}.$ 令 $r = \#\underline{i}(A)$。于是， $q_{\underline{i}}$ 非零当且仅当 r 为偶数（因为反对称 $r \times r$ 矩阵的行列式在 r 为奇数时为零）。此外，我们有 $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}(\varpi'_{4n+2})$。

2.4. 下降为线丛。现在，我们回顾 Shrawan Kumar 的以下定理。

定理 2.1（[10], 定理 3.10，第 764 页）。设 $G = Spin(8n+4, \mathbb{C})$。那么，线丛 $\mathcal{L}(\lambda)$ 下降为几何不变理论商 $T\backslash\backslash(G/P)^{ss}_T(\mathcal{L}(\lambda))$ 上的线丛，当且仅当 $\lambda = 4m\varpi_{4n+2}$对某个正整数 $m.$

2.5. $Spin(8n+4, \mathbb{C})$ 的杨表。现在，我们给出与权重 $\lambda = 2m\varpi_{4n+2}$ 相关的 $Spin(8n+4, \mathbb{C})$ 的杨表和标准杨表定义的简化版本，其中 m 是一个正整数（更一般的情形见 [12, 附录第 363 页至365]）。

2.5.1. $\lambda = 2m\varpi_{4n+2}$的杨表，其中 $m \in \mathbb{N}$。对于 $1 \leq i \leq 4n+2.$，定义 $p_i = 2m$。与 λ 相关联的分拆 $p(\lambda)$ 定义为：$= (p_1, p_2, \ldots, p_{4n+2})$。于是，与 λ 相关联的形状为 $p(\lambda) = (p_1, \ldots, p_{4n+2})$ 的杨图记作 Γ，它由第一列中的 p_1 个方格、第二列中的 p_2 个方格等组成。

一个杨表 形状为 λ 的杨表是一个杨图，其中填有介于 1 和 $8n+4$ 之间的整数 .

若杨表的每一列中，元素从上到下非递减，且每一行中，元素从左到右严格递增，则称其为标准杨表。

若形状为 $p(\lambda)$ 的杨表 Γ 满足： Γ 是标准的；并且 $r=(i_1,i_2,\ldots,i_{4n+2})$ 是长度为 $4n+2$ 的一行，若 i_j 是该行中的一个元素，则 $8n+5-i_j$ 不是该行中的元素，则称其为 $Spin(8n+4,\mathbb{C})$-标准。Γ 的一行中大于 $4n+2$ 的整数个数为偶数。

给定一个形状为 λ 的 $Spin(8n+4,\mathbb{C})$-标准杨表 Γ，我们关联一个截面 $p_\Gamma \in H^0(G/P,\mathcal{L}^{\otimes m}(2\varpi_{4n+2}))^T$，称其为次数为 $m.$ 的标准单项式。众所周知，形状为 λ 的标准单项式构成 $H^0(G/P,\mathcal{L}^{\otimes m}(2\varpi_{4n+2}))^T$ 的一组基。

注 2.2（[14] 引理 3.2，第 5 页）。固定一个整数 $1\leq t\leq 8n+4.$。设 $c_\Gamma(t)$ 表示 t 在 $\Gamma.$ 中出现的次数。单项式 $p_\Gamma\in H^0(G/P,\mathcal{L}(\lambda))$ 是 T-不变的，当且仅当对于所有 $1\leq t\leq 8n+4.$，$c_\Gamma(t)=c_\Gamma(8n+5-t)$。

2.6. Pfaffian 的性质。为进一步讨论，我们回顾文献 [2] 中关于斜对称矩阵的 Pfaffian 的一些结果，并将用它们来确定标准化定律。

系数取自 $\mathbb{C}$ 的斜对称 $4n+2\times 4n+2$ 矩阵 $A=(a_{ij})$（即，对于 $i\neq j,\ \ a_{ii}=0$ 且 $a_{ij}=-a_{ji}$ ）的 Pfaffian $\mathrm{Pf}(A)$ 定义为 $\mathrm{Pf}(A)^2=\det(A)$。Pfaffian 也可以等价地描述为一个多项式

$$\mathrm{Pf}(X_{12},X_{13},\ldots,X_{14n+2},X_{23},\ldots,X_{24n+2},\ldots,X_{4n+14n+2})\in\mathbb{Z}[X_{12},X_{13},\ldots,X_{4n+14n+2}]$$

使得对每个 $A=(a_{ij})\in SkM_{4n+2}$，都有

$$\mathrm{Pf}(a_{12},a_{13},\ldots,a_{14n+2},a_{23},\ldots,a_{24n+2},\ldots,a_{4n+14n+2})^2=\det(A),$$

归一化使得

$$\mathrm{Pf}_{j-i=2n+1}(a_{12},a_{13},\ldots,a_{14n+2},a_{23},\ldots,a_{24n+2},\ldots,a_{4n+14n+2}):=1 \tag{2.1}$$

对于 $a_{ij}:=\begin{cases}1,&\text{当 }0\\ &\text{时;}\end{cases}$

否则。

更明确地说，如上所述，考虑一个斜对称的 $4n+2\times 4n+2$-矩阵 A，并对每个基数为（比如） $m.$ 的子集 $I\subseteq\{1,2,\ldots,4n+2\}$。令 $A(I)$ 表示从 A 中消去所有未按 $I.$ 中指标编号的行和列后得到的斜对称$m\times m$-矩阵。此外，令

$$P(I):=\mathrm{Pf}(A(I)) \tag{2.2}$$

对每个 $I\subseteq\{1,2,\ldots,4n+2\}$，其中按惯例 $\mathrm{Pf}(A(\phi)):=1$。那么有如下结果。

定理 2.3（[2], 定理 1，第 122 页）。对于任意两个奇数基数的子集 I_1、$I_2\subseteq\{1,2,\ldots,4n+2\}$ 以及元素 i_1、i_2、.....、$i_t\in\{1,2,\ldots,4n+2\}$，满足 $i_1<i_2<\cdots<i_t$ 且 $\{i_1,\ldots,i_t\}=I_1\Delta I_2:=(I_1\setminus I_2)\cup(I_2\setminus I_1)$，都有

$$\sum_{\tau=1}^{t}(-1)^\tau\cdot P(I_1\Delta\{i_\tau\})\cdot P(I_2\Delta\{i_\tau\})=0. \tag{2.3}$$

注 2.4. 对于 $\underline{i}=(i_1,i_2,\ldots,i_{4n+2})\in I_{4n+2,8n+4}$，我们有

$q_{\underline{i}}=P(\underline{i}(B))=$

i_1	i_2	$\cdots$	i_{4n+2}

.

注 2.5. 设 $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, 4n+2\}$ 使得 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$.设 $\{j_1, \ldots, j_{4n+2-r}\}$ 为 $\{i_1, \ldots, i_r\}$ 在 $\{1, 2, \ldots, 4n+2\}$ 中的补集，使得 $j_1 < j_2 < \ldots < j_{4n+2-r}$. 那么我们有 $P(I) = q_{\underline{i}}$，其中 $\underline{i} = (j_1, j_2, \ldots, j_{4n+2-r}, 8n+5-i_r, \ldots, 8n+5-i_1)$。

3. Main Theorem

回顾一下，根据 [9, 推论 1.9，p.85] 存在唯一的极小 $v_1 \in W^P$，使得$v_1(\lambda) \leq 0$。经过简单计算可得

$$v_1 = s_{4n+2} \prod_{i=2n}^{1} \tau_{2i-1},$$

其中，$\tau_{2i-1} = s_{2i-1}s_{2i} \cdots s_{4n-1}s_{4n}s_{4n+1}$ 当 i 为偶数时，而 $\tau_{2i-1} = s_{2i-1}s_{2i} \cdots s_{4n-1}s_{4n}s_{4n+2}$ 当 i 为奇数时。用单行记法表示，v_i 的 $(1 \leq i \leq 6)$ 如下:

- $v_1 = (2, 4, 6, \ldots, 4n-4, 4n-2, 4n, 4n+3, 4n+4, 4n+6, 4n+8, \ldots, 8n+4)$
- $v_2 = (2, 4, 6, \ldots, 4n-4, 4n-1, 4n, 4n+3, 4n+4, 4n+7, 4n+8, \ldots, 8n+4)$
- $v_3 = (2, 4, 6, \ldots, 4n-4, 4n-2, 4n+1, 4n+3, 4n+5, 4n+6, 4n+8, \ldots, 8n+4)$
- $v_4 = (2, 4, 6, \ldots, 4n-4, 4n-1, 4n+1, 4n+3, 4n+5, 4n+7, 4n+8, \ldots, 8n+4)$
- $v_5 = (2, 4, 6, \ldots, 4n-4, 4n-2, 4n+2, 4n+4, 4n+5, 4n+6, 4n+8, \ldots, 8n+4)$
- $v_6 = (2, 4, 6, \ldots, 4n-4, 4n-1, 4n+2, 4n+4, 4n+5, 4n+7, 4n+8, \ldots, 8n+4)$.

由于 $v_1 \leq v_i$ 和 $v_1(\lambda) \leq 0$，我们有 $v_i(\lambda) \leq 0$，对所有 $2 \leq i \leq 6$. 均成立。因此，由 [8, 引理 2.1，p.470] $X(v_i)_T^{ss}(\mathcal{L}(2\lambda))$ 对所有 $1 \leq i \leq 6$.均非空

设 $X = T\backslash\backslash(X(v_6))_T^{ss}(\mathcal{L}(2\lambda))$。设 $R = \oplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_k$，其中 $R_k = H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}^{\otimes k}(2\lambda))^T$. 注意，$R_k$ 是有限维向量空间，且 $X = \text{Proj}(R)$。

设 p_Γ 是 R_k 中对应于一个 $Spin(8n+4, \mathbb{C})$-标准杨表 Γ. 的标准单项式。因此，Γ 的形状为 $(2k, 2k, \ldots, 2k)$（$4n+2$ 次）。此外，Γ 的任一行中的元素从左到右严格递增，而 Γ 的任一列中的元素从上到下非递减（见第 2.5.1 节）。由于 p_Γ 是 T-不变的，根据注 2.2，对所有 $1 \leq t \leq 8n+4.$，有 $c_\Gamma(t) = c_\Gamma(8n+5-t)$。因此，我们有

$$c_\Gamma(t) = k \tag{3.1}$$

对于所有 $1 \leq t \leq 8n+4.$

设 $\underline{i} \in I_{4n+2,8n+4}$ 满足：i_t 和 $8n+4-i_t$ 不会同时出现在 $\underline{i}$ 中，且大于或等于 $4n+3$ 的整数个数为偶数。注意，这样的 $\underline{i}$ 可由递增整数序列的元组 $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ 唯一确定，其中这些整数小于或等于 $4n+2$，并出现在 $\underline{i}$ 中，且 r 为偶数。我们将形状为 $k\lambda$ $(k \geq 1)$、第一行为 $\underline{i}_1$、第二行为 $\underline{i}_2$、依此类推、第 k 行为 $\underline{i}_k$ 的杨表记作 $\text{YT}^{k\lambda}$ $(_{i_1}(1)\ _{i_1}(2)\ \ldots,_{i_1}(_{r_1}))$ $(_{i_2}(1)\ _{i_2}(2)\ \ldots,_{i_2}(_{r_2}))$ $\cdots$ $(_{i_k}(1)\ _{i_k}(2)\ \ldots,_{i_k}(_{r_k}))$，其中元组 $(_{i_j}(1)\ _{i_j}(2)\ \ldots, _{i_j}(_{r_j}))$ 表示递增整数序列，这些整数小于或等于 $4n+2$，并出现在 $\underline{i}_j$. 中

考虑以下杨表

$$X_1 = \text{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n+1,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)}$$
$$X_2 = \text{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n)}$$
$$X_3 = \text{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)}$$

$$X_4 = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}$$
$$X_5 = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+1)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2)}$$
$$X_6 = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}$$

$Y_1 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}$
$Y_2 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}$
$Y_3 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}$
$Y_4 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}$
$Z_1 = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)\ \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}}$
$Z_2 = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2)\ (1,3,\ldots,4n-3,4n)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)\ \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}}$.

引理 3.1. R 的齐次坐标环由 X_i、 Y_j、 Z_1 和 Z_2.生成

证明. 设 $p_\Gamma \in R_k$ 是一个标准单项式。我们证明 $p_\Gamma = p_{\Gamma_1} p_{\Gamma_2}$，其中 p_{Γ_1} 属于 R_1 或R_2 或 R_3.

对于 $1 \le i \le 2k$和 $1 \le j \le 4n+2$，令 row_i表示第 i行，$e_{i,\ j}$表示 Γ. 的第（i，j）个条目。令$n_{t,\ j}$ 表示 t 在 Γ.的第 j列中出现的次数

由于我们考虑的是 X（v_6），因此有 $row_{2k} \le v_6$.。于是，对于 $1 \le j \le 2n-2$ 或 $2n+4 \le j \le 4n+2$，有$e_{2k,\ j} \le 2j$.。因此，对于 $1 \le j \le 2n-2$ 或 $2n+5 \le j \le 4n+2$，有

$$e_{i,j} = \begin{cases} 2j-1 & \text{for } 1 \le i \le k \\ 2j & \text{for } k+1 \le i \le 2k. \end{cases}$$

进一步，由于 $e_{2k,2n-2} = 4n-4$ （分别地，$e_{1,2n+5} = 4n+9$），对于所有 $1 \le i \le k$ （分别地，$k+1 \le i \le 2k$），我们有 $e_{i,2n-1} = 4n-3$ （分别地，$e_{i,2n+4} = 4n+8$）。

注意，$e_{2k,2n-1} \le 4n-1$. 因此，$e_{2k,2n-1}$ 要么是 $4n-2$，要么是 $4n-1$。此外，由于 $e_{2k,\ 2n} \le 4n+2$，我们有 $e_{2k,2n}$ 要么是 $4n$、 $4n+1$，要么是 $4n+2$.。因此， row_{2k}有以下几种可能：

(i) $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)}$
(ii) $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n)}$
(iii) $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)}$
(iv) $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}$
(v) $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2)}$
(vi) $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}$.

情形（i）：假设 $row_{2k} = \mathrm{YT}^{\lambda}_{(2,\ 4,\ \ldots,\ 4n-4,\ 4n-2,\ 4n)}$。

Then

$$e_{i,j} = \begin{cases} 4n-2 & \text{for } k+1 \le i \le 2k \text{ and } j = 2n-1 \\ 4n-1 & \text{for } 1 \le i \le k \text{ and } j = 2n \\ 4n & \text{for } k+1 \le i \le 2k \text{ and } j = 2n \\ 4n+1 & \text{for } 1 \le i \le k \text{ and } j = 2n+1. \end{cases}$$

因此， $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots,\ 4n-3,\ 4n-1,\ 4n+1,\ 4n+2)}$ 因此， row_1、 row_{2k} 共同给出 p_Γ 的一个因子 X_1。

情形（ii）：假设 $row_{2k} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(2,\ 4,\ \ldots\ldots,\ 4n-4,\ 4n-1,\ 4n)}$。

则$e_{i,\ 2n} = 4n$ 对所有 $k+1 \le i \le 2k$ 和 $e_{1,\ 2n} = 4n-2$ 或 $4n-1.$。若 $e_{1,\ 2n} = 4n-1$，则所有 $4n-2$ 都出现在第（$2n-1$）列中。此外，由于 $e_{2k,\ 2n-1} = 4n-1$， $n_{4n-2,\ 2n-1} \le k-1$，这与方程（3.1）矛盾。因此，$e_{1,\ 2n} = 4n-2.$。所以， $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots\ldots,\ 4n-3,\ 4n-2,\ 4n+1,\ 4n+2)}$，因此， row_1、 row_{2k} 共同构成 p_Γ 的一个因子 X_2。

情形（iii）：假设 $row_{2k} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(2,\ 4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)}$.

则对所有 $k+1 \le i \le 2k$，$e_{i,2n-1} = 4n-2$，并且对所有 $1 \le i \le k.$，$e_{i,2n} = 4n-1$。由于$e_{2k,2n} = 4n+1$，我们有 $n_{4n,2n} \le k-1$。因此，$n_{4n,2n+1} \ge 1$。从而，我们有 $e_{1,2n+1} = 4n$。进一步地，由于 Γ 满足如下性质：每一行中大于 $4n+2$ 的条目数为偶数，因此我们有 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+1)$ 或 $\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+2)$（见第 2.5.1 节）。

断言： $row_1 \neq \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1\ 3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+1)}$.

假设 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+1)$· 令 k' 表示 Γ 中恰有 $2n+2$ 个小于或等于 $4n+2.$ 的项的行数。则剩余的 $2k-k'$ Γ 中恰有 $2n$ 个小于或等于 $4n+2.$ 的项的行数。由方程（3.1）， $c_\Gamma(t) = k$ 对所有$1 \le t \le 4n+2$成立，我们有 $(2n+2)k' + 2n(2k-k') = (4n+2)k.$ 因此，我们有 $k' = k.$ 因此， $row_i(1 \le i \le k)$中恰有 $2n$ 个小于或等于 $4n+2$ 的项，而 row_i ($k+1 \le i \le 2k$)中恰有 $2n+2$ 个小于或等于 $4n+2$的项。此外，由于 $e_{2k,2n} = 4n+1$，所有 $4n+2$ 都出现在第（$2n+2$）列，因此 $n_{4n+2,2n+2} \le k-1$，这与方程（3.1）矛盾。

另一方面，若 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots 4n-3,\ 4n-1,\ 4n,\ 4n+2)}$，则 row_1和 row_{2k} 共同给出 p_Γ.的一个因子 X_3

情形 (iv)：假设 $row_{2k} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(2,\ 4,\ \ldots 4n-4,\ 4n-1,\ 4n+1)}$。

由于$e_{2k,\ 2n-1} = 4n-1$，我们有$n_{4n-2,\ 2n-1} \le k-1.$ 因此，$n_{4n-2,\ 2n} \ge 1.$ 所以，$e_{1,\ 2n} = 4n-2$。现在我们断言$e_{1,\ 2n+1} \le 4n.$。若$e_{1,\ 2n+1} \ge 4n+1$，则所有小于或等于$4n$ 的整数都会出现在前 $2n$ 列中。由于$e_{2k,\ 2n} = 4n+1$，我们有$\sum_{t=1}^{4n}\sum_{j=1}^{2n} n_{t,\ j} \le 4nk-1$，这与公式（3.1）矛盾。因此，$e_{1,\ 2n+1} \le 4n.$ 因此，row_1 是以下之一：

- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2)}$.

如果 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n)$，$\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1)$，或 $\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1)$，那么使用情形（iii）第三段（第 7–12 行）中的论证可知， $row_i(1 \le i \le k)$ 中恰好有 $2n+2$ 个不大于 $4n+2$ 的元素，且 $row_i(k+1 \le i \le 2k)$

恰好包含 $2n$ 个不大于 $4n+2$ 的元素。此外，由于 $e_{2k,\ 2n}=4n+1$，所有 $4n+2$ 都出现在第 $(2n+2)$ 列中。由于 $e_{1,\ 2n+2}=4n$ 或 $4n+1$，我们有 $n_{4n+2,\ 2n+2}\leq k-1$，这与方程（3.1）矛盾。

若 $row_1=\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2)$，则对 $k+1\leq i\leq 2k-1$，有 $e_{i,\ 2n-1}=4n-2$ 或 $4n-1.$。此外，由于 $e_{1,2n+1}=4n-1$，有 $n_{4n-2,2n-1}+n_{4n-1,2n-1}+n_{4n-1,\ 2n+1}\geq k+1.$。因此，$n_{4n-2,2n}+n_{4n-1,2n}\leq k-1.$。因此，$e_{k,2n}=4n.$。故，$row_k=\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)$ 或 $\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n)$。若 $row_k=\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)$，则 $\sum_{j=2n+1}^{4n+2}\sum_{t=4n+3}^{8n+4}n_{t,j}\leq(4n+2)k-2$，这与公式（3.1）矛盾。若 $row_k=\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n)$，则对所有$k\leq i\leq 2k$，都有 $e_{i,2n+1}=4n+3$，这与公式（3.1）矛盾。

若 $row_1=\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots,\ 4n-3,\ 4n-2,\ 4n,\ 4n+2)}$，则由此，$row_1$、$row_{2k}$ 共同构成了 p_Γ 的一个因子 X_4。

若 $row_1=\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2)$，则按照情形（iii）第三段（第 7–12 行）中的论证，我们可知 $row_i\,(1\leq i\leq k)$ 中恰有 $2n+2$ 个不大于 $4n+2$ 的条目，而 $row_i\,(k+1\leq i\leq 2k)$ 中恰有 $2n$ 个不大于 $4n+2$ 的条目。此外，由于 $e_{1}、{}_{2n+2}=4n+2$，对于所有 $1\leq i\leq k.$，我们有 $e_{i}、{}_{2n+2}=4n+2$。由于 $n_{4n-2}、{}_{2n-1}+n_{4n-1}、{}_{2n-1}+n_{4n-1}、{}_{2n+1}\geq k+1$，我们有 $n_{4n-2}、{}_{2n}+n_{4n-1}、{}_{2n}\leq k-1.$。因此，$e_{k}、{}_{2n}\geq 4n.$。此外，由于 $e_{2k}、{}_{2n}=4n+1$，我们有 $e_{k}、{}_{2n}=4n.$。于是，$row_k=\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)$。由于 $e_{k}、{}_{2n+1}=4n+1$，我们有 $n_{4n+1}、{}_{2n}\leq k-1.$。因此，$e_{k+1}、{}_{2n}=4n.$。所以，$row_{k+1}=\mathrm{YT}^{\lambda}(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)$，于是 row_1、row_k、row_{k+1}、row_{2k} 共同构成了 $p_\Gamma.$ 的一个因子 Y_1。

情形（v）：假设 $row_{2k}=\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(2,\ 4,\ \ldots 4n-4,\ 4n-2,\ 4n+2)}$。那么，对于所有 $k+1\leq i\leq 2k$，$e_{i,\ 2n-1}=4n-2$；对于所有 $1\leq i\leq k.$，$e_{i,\ 2n}=4n-1$。此外，由于 $e_{2k,\ 2n}=4n+2$，我们有 $n_{4n,\ 2n}\leq k-1.$。因此，$n_{4n,\ 2n+1}\geq 1.$。于是，$e_{1,\ 2n+1}=4n.$。因此，$e_{1,\ 2n+2}=4n+1$，或者 $4n+2.$

断言：$e_{1,\ 2n+2}\neq 4n+2.$

假设 $e_{1,\ 2n+2}=4n+2.$。按照情形（iii）第三段（第 7–12 行）中的论证，我们看到 $row_i\,(1\leq i\leq k)$ 恰好包含 $2n+2$ 个小于或等于 $4n+2$ 的项，而 $row_i\,(k+1\leq i\leq 2k)$ 恰好包含 $2n$ 个小于或等于 $4n+2$ 的项。此外，由于 $e_{2k,\ 2n}=4n+2$，我们有 $n_{4n+2,\ 2n+2}+n_{4n+2,\ 2n}\geq k+1$，这与公式（3.1）矛盾。

另一方面，如果 $e_{1,\ 2n+2}=4n+1$，那么 $row_1=\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots,\ 4n-3,\ 4n-1,\ 4n,\ 4n+1)}$。因此，$row_1$、$row_{2k}$ 共同给出了 p_Γ的一个因子 X_5。

情形（vi）：假设 $row_{2k}=\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(2,\ 4,\ \ldots,\ 4n-4,\ 4n-1,\ 4n+2)}$。

于是 $e_{1,2n}=4n-2.$ 由于 $e_{2k,2n+1}=4n+4$，我们有 $e_{1,2n+2}\leq 4n+1.$ 事实上，若 $e_{1,\ 2n+2}>4n+2$，则 $\sum_{j=2n+1}^{4n+2}\sum_{t=4n+3}^{8n+4}n_{t,j}\geq(4n+2)k+1$，这与方程（3.1）矛盾。若$e_{1,\ 2n+2}=4n+2$，则运用情形（iii）第三段（第 7–12 行）中的论证，我们可知 $row_i(1\leq i\leq k)$ 恰有 $2n+2$个不大于 $4n+2$的元素，而 $row_i(k+1\leq i\leq 2k)$ 恰有 $2n$ 个不大于 $4n+2$的元素。因此，对所有 $1\leq i\leq k.$，$e_{i,2n+2}=4n+2$。进一步，由于 $e_{2k,2n}=4n+2$，我们有 $n_{4n+2,\ 2n}+n_{4n+2,2n+2}\geq k+1$，这与方程（3.1）矛盾。因此，$row_1$ 是以下情形之一：

- $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1)}$

- $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n)}$.

子情形（i）：假设 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1)}$.

由于 $n_{4n-1,2n+1} \geq 1$，我们有 $e_{k+1,2n-1} = 4n-2.$。此外，由于 $n_{4n-2,2n-1} + n_{4n-1,2n-1} + n_{4n-1,2n+1} \geq k+1$，我们有 $n_{4n-2,2n} + n_{4n-1,2n} \leq k-1.$。因此，$e_{k,2n} \geq 4n.$。另外，利用情形（iii）第三段（第 7–12 行）中的论证，我们可知 $row_i\ (1 \leq i \leq k)$ 恰好包含 $4n+2$ 以下（含 $4n+2$）的 $2n+2$ 个条目，而 $row_i\ (k+1 \leq i \leq 2k)$ 恰好包含 $4n+2$ 以下（含 $4n+2$）的 $2n$ 个条目。因此，$row_k = \mathrm{YT}^{\lambda}\ (1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)$.。于是，$e_{k+1,2n} \geq 4n.$。若 $e_{k+1,2n} \geq 4n+1$，则 $\sum_{t=4n+1}^{4n+2}\sum_{j=2n}^{2n+2} n_{t,j} \geq 2k+1$，这与公式（3.1）矛盾。因此，$e_{k+1,2n} = 4n$，从而 $row_1, row_k, row_{k+1}, row_{2k}$ 一起给出一个因子 Y_2 of p_Γ.

子情形（ii）：如果 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1)}$，那么 row_1 和 row_{2k} 共同给出 X_6 的一个因子 p_Γ.

子情形（iii）：假设 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2)}$.

由于 $e_{1、\ 2n+1} = 4n-1$，我们有 $e_{k+1、\ 2n-1} = 4n-2.$ 进一步地，由于 $n_{4n-2、\ 2n-1} + n_{4n-1、\ 2n-1} + n_{4n-1、\ 2n+1} \geq k+1$，我们有 $n_{4n-2、\ 2n} + n_{4n-1、\ 2n} \leq k-1.$ 因此，$e_{k、\ 2n} \geq 4n.$ 接下来我们证明 $e_{k、\ 2n} = 4n.$ 如果 $e_{k、\ 2n} = 4n+2$，那么我们有 $n_{4n+2、\ 2n} \geq k+1$，这与公式（3.1）矛盾。如果 $e_{k、\ 2n} = 4n+1$，那么 $row_k = \mathrm{YT}^{\lambda}\ (1,3,\ldots,4n-3,4n+1)$. 因此，对所有 $k \leq i \leq 2k$，都有 $e_{i\ 、\ 2n+2} = 4n+5$，这与公式（3.1）矛盾。因此，$e_{k\ 、\ 2n} = 4n$。所以，row_k 要么是 $\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)$，要么是 $\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n)$. 如果 $row_k = \mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)$，那么 $\sum_{j=2n+1}^{4n+2}\sum_{t=4n+3}^{8n+4} n_{t、\ j} \leq (4n+2)\ k-2$，这与公式（3.1）矛盾。

现在假设 $row_k = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n)}$.

由于 $e_{1,\ 2n+4} = 4n+2$，我们有 $e_{k+1,\ 2n} = 4n$ 或 $4n+1$. 若 $e_{k+1,\ 2n} = 4n+1$，则 $row_{k+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(2,\ 4,\ \ldots 4n-4,\ 4n-2,\ 4n+1)}$. 因此，$row_1$、$row_k$、$row_{k+1}$、$row_{2k}$ 共同构成 p_Γ. 的一个因子 Y_3

若 $e_{k+1,2n} = 4n$，则 $row_{k+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}\ (2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)$。由于 row_k 不包含 $4n+1$，存在某个 $k+2 \leq l \leq 2k-1$，使得 l row_l 包含 $4n+1.$。因此，row_l 要么是 $\mathrm{YT}^{\lambda}(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)$，要么是 $\mathrm{YT}^{\lambda}(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)$。若 $row_l = \mathrm{YT}^{\lambda}(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)$，则 row_1、row_k、row_l、row_{2k} 共同构成 p_Γ 的一个因子 Y_3。

考虑 $row_l = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(2,\ 4,\ \ldots\ldots,\ 4n-4,\ 4n-1,\ 4n+1)}$. 接下来我们研究 $row_{\frac{k}{2}+1}$.

假设 k 是偶数。

若 $e_{\frac{k}{2}+1,\ 2n+1} = 4n-1$，则 $\sum_{t=4n-2}^{4n-1}(n_{t,\ 2n-1} + n_{t,\ 2n} + n_{t,\ 2n+1}) \geq 2k+2$，这与公式（3.1）矛盾。若 $e_{\frac{k}{2}+1,\ 2n+1} \geq 4n+3$，则 $e_{\frac{k}{2}+1,\ 2n+1} = 4n+3$ 且 $e_{\frac{k}{2}+1,\ 2n+2} = 4n+4.$ 因此，$\sum_{t=4n+3}^{4n+4}\sum_{j=2n+1}^{2n+2} n_{t,\ j} \geq 2k+1$，这与公式（3.1）矛盾。因此，$row_{\frac{k}{2}+1}$ 属于以下行集。

- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2)}$

- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+1)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+2)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n+1,4n+2)}$
- $\mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)}$.

若 $row_{\frac{k}{2}+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots,\ 4n-3,\ 4n-2,\ 4n,\ 4n+1)}$，则 $row_{\frac{k}{2}+1}$、row_{2k}给出 p_{Γ}.的一个因子 X_6

若 $row_{\frac{k}{2}+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots,\ 4n-3,\ 4n-2,\ 4n,\ 4n+2)}$，则 $row_{\frac{k}{2}+1}$、row_l给出 p_{Γ}.的一个因子 X_4

若 $row_{\frac{k}{2}+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots,\ 4n-3,\ 4n-2,\ 4n+1,\ 4n+2)}$，则 $row_i (i = 1,\ \frac{k}{2}+1,\ k,\ k+1,\ l,\ 2k)$ 给出 p_{Γ}.的一个因子 Z_2

若 $row_{\frac{k}{2}+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+1)$ 或 $\mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+2)$，则 n_{4n-2}、$_{2n} \leq \frac{k}{2}$。因此，n_{4n-2}、$_{2n-1} \geq \frac{k}{2}$。此外，由于 $row_l = \mathrm{YT}^{\lambda}(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)$，我们有 $row_{\frac{3k}{2}} = \mathrm{YT}^{\lambda}(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)$。因此，对于 $1 \leq i \leq \frac{3k}{2}$、$e_i$、$_{2n} = 4n-2$、$4n-1$ 或 $4n$，以及对于 $1 \leq i \leq \frac{k}{2}+1$、$e_i$、$_{2n+1} = 4n-1$或 $4n.$，故 $\sum_{j=2n-1}^{2n+1} \sum_{t=4n-2}^{4n} n_t$、$_j \geq k + \frac{3k}{2} + \frac{k}{2} + 1 = 3k+1$，这与公式（3.1）矛盾。

若 $row_{\frac{k}{2}+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots,\ 4n-3,\ 4n-1,\ 4n+1,\ 4n+2)}$，则 $row_{\frac{k}{2}+1}, row_{k+1}$ 给出 p_{Γ}.的一个因子 X_1

若 $row_{\frac{k}{2}+1} = \mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)$，则对于 $1 \leq i \leq \frac{k}{2}$, $e_{i,2} = 4n-2$ 以及 $e_{i,}$ $_3 = 4n-1$.。因此，对于所有 $k+1 \leq i \leq \frac{3k}{2}.$，$row_i = \mathrm{YT}^{\lambda}(1,3,\ldots,4n-2,4n)$。于是，对于所有 $\frac{k}{2}+1 \leq i \leq \frac{3k}{2}$，$e_{i,2} = 4n$。由于 $e_{1,4} = 4n$，我们有 $n_{4n,2} + n_{4n,4} \geq k+1$，这与方程（3.1）矛盾。

同样，如果 $k+1$ 是偶数，则证明类似。

子情形 (i v)：如果 $row_1 = \mathrm{YT}^{\lambda}{}_{(1,\ 3,\ \ldots 4n-3,\ 4n-2,\ 4n-1,\ 4n)}$，那么证明类似于子情形（iii）。

□

引理 3.2. X_i's $(1 \leq i \leq 6)$ Y_j's $(1 \leq j \leq 4)$ 中的以下关系在 R_2. 中成立

(i) $X_2X_3 - X_1X_4 + Y_1 - Y_3 = 0.$
(ii) $X_4X_5 - X_3X_6 + Y_4 - Y_3 = 0.$
(iii) $X_2X_5 - X_1X_6 + Y_2 - Y_3 = 0.$

证明. (i)：注意到

$X_2X_3 = \mathrm{YT}^{4\lambda}{}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)}$.

现在我们看到，$\mathrm{YT}^{2\lambda}{}_{(1,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2),(1,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+2)}$ 是一个非标准单项式。我们应用定理 2.3、注 2.4 和注 2.5，将上述非标准单项式表示为标准单项式的线性组合。

令 $\underline{i}_1 = (1, 3, \ldots, 4n-3, 4n-2, 4n+1, 4n+2, 4n+5, 4n+6, 4n+9, \ldots, 8n+3)$ 和 $\underline{i}_2 = (1, 3, \ldots, 4n-3, 4n-1, 4n, 4n+2, 4n+4, 4n+7, 4n+9, \ldots, 8n+3)$。那么 $\underline{i}_1(B) = (2, 4, \ldots, 4n-4, 4n-1, 4n)$ 和 $\underline{i}_2(B) = (2, 4, \ldots, 4n-4, 4n-2, 4n+1)$ 是 $\{1, 2, \ldots, 4n+2\}$. 的两个子集

为了应用定理 2.3，令 $I_1 = \{2, 4, \ldots, 4n-4, 4n-1\}$ 和 $I_2 = \{2, 4, \ldots, 4n-4, 4n-2, 4n, 4n+1\}$. 注意到 $I_1 \Delta I_2 = \{4n-2, 4n-1, 4n, 4n+1\}$. 于是我们有

$P(I_1\Delta\{4n-2\})\cdot P(I_2\Delta\{4n-2\}) - P(I_1\Delta\{4n-1\})\cdot P(I_2\Delta\{4n-1\}) + P(I_1\Delta\{4n\})\cdot P(I_2\Delta\{4n\}) - P(I_1\Delta\{4n+1\}) \cdot P(I_2\Delta\{4n+1\}) = 0.$

利用注 2.5，我们得到如下结果：

$$P(I_1\Delta\{4n-2\}) = q_{\{1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2,4n+6,4n+7,4n+9,\ldots,8n+4\}}$$
$$P(I_2\Delta\{4n-2\}) = q_{\{1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2,4n+4,4n+5,4n+9,\ldots,8n+4\}}$$
$$P(I_1\Delta\{4n-1\}) = q_{\{1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2,4n+9,\ldots,8n+4\}}$$
$$P(I_2\Delta\{4n-1\}) = q_{\{1,3,\ldots,4n-3,4n+2,4n+4,4n+5,4n+6,4n+7,4n+9,\ldots,8n+4\}}$$
$$P(I_1\Delta\{4n\}) = q_{i_1}$$
$$P(I_2\Delta\{4n\}) = q_{i_2}$$
$$P(I_1\Delta\{4n+1\}) = q_{\{1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2,4n+4,4n+6,4n+9,\ldots,8n+4\}}$$
$$P(I_2\Delta\{4n+1\}) = q_{\{1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n+1,4n+2,4n+5,4n+7,4n+9,\ldots,8n+4\}}.$$

因此，在 $G/P^{\alpha_{4n+2}}$ 中有如下标准化律

$$\begin{aligned}
&\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+2)}\\
&= \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n+1,4n+2)}\\
&-\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2)}\\
&+\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n+2)}.
\end{aligned}$$

类似地，利用定理 2.3、注 2.4 和注 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n)} &= \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}\\
&-\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n-1),(2,4,\ldots,4n-4,4n,4n+1)}\\
&+\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n-1,4n,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4)}.
\end{aligned}$$

由于我们在舒伯特簇 $X(v_6)$ 中工作，上述标准化律变为

$$\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n)} = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}. \tag{3.2}$$

因此，利用上述标准化律，我们得到

$$\begin{aligned}
X_2X_3 &= \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}\\
&- \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}\\
&+ \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}.
\end{aligned}$$

由于我们是在舒伯特簇 $X(v_6)$ 中进行讨论，利用定理 2.3 和注 2.5 可得

$$\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)} = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2)}.$$

因此
$$X_2X_3 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2),(1,3,\ldots4n-3,4n-1,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)} - \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)} + \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}.$$

我们在 $G/P^{\alpha_{4n+2}}$. 中有如下标准化定律

$$\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)} = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)} - \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n-1),(2,4,\ldots,4n-4,4n+1,4n+2)} + \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n-1,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4)}.$$

由于 我们正在舒伯特簇 $X(v_6)$ 中进行研究，因此上述标准化定律变为 s

$$\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)} = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}. \tag{3.3}$$

因此，我们有
$$\begin{aligned} X_2X_3 &= \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2),(1,3,\ldots4n-3,4n-1,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)} \\ &\quad - \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)} \\ &\quad + \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots4n-3,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)} \\ &= X_1X_4 - Y_1 + Y_3. \end{aligned}$$

(*ii*)：注意到

$$X_4X_5 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2),(1,3,\ldots4n-3,4n-1,4n,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+1)}.$$

利用定理 2.3 和注 2.5，以下标准化定律在 $G/P^{\alpha_{4n+2}}$. 中成立

$$\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+2),(1,3,\ldots4n-3,4n-1,4n,4n+1)} = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1),(1,3,\ldots4n-3,4n-1,4n,4n+2)} - \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n),(1,3,\ldots4n-3,4n,4n+1,4n+2)} + \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots4n-3,4n)}. \tag{3.4}$$

因此，利用方程 (3.3) 和方程 (3.4)，我们得到

$$\begin{aligned} X_4X_5 &= \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1),(1,3,\ldots4n-3,4n-1,4n,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)} \\ &\quad - \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n),(1,3,\ldots4n-3,4n,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)} \\ &\quad + \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots4n-3,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)} \\ &= X_3X_6 - Y_4 + Y_3. \end{aligned}$$

(*iii*)：注意
$$X_2X_5 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n)}.$$

利用定理 2.3 和注 2.5，以下标准化定律在 $G/P^{\alpha_{4n+2}}$. 中成立

2λ 2λ 2λ
YT (1,3,...,4n−3,4n−2,4n+1,4n+2),(1,3,...,4n−3,4n−1,4n,4n+1) = YT (1,3,...,4n−3,4n−2,4n,4n+1),(1,3,...,4n−3,4n−1,4n+1,4n+2) − YT (1,3,...,4n−3,4n−2,4n−1,4n+1),(1,3,...,4n−3,4n,4n+1,4n+2) + YT (1,3,...,4n−3,4n−2,4n−1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,...,4n−3,4n+1)

and

$$\begin{aligned}\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n)} &= \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}\\ &\quad -\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n-1),(2,4,\ldots,4n-4,4n,4n+2)}\\ &\quad +\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n-1,4n,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4)}.\end{aligned}$$

由于我们是在舒伯特簇 $X(v_6)$ 中进行讨论，上述标准化定律变为 s
$\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,...,4n-4,4n-2,4n+2),(2,4,...,4n-4,4n-1,4n)} = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(2,4,...,4n-4,4n-2,4n),(2,4,...,4n-4,4n-1,4n+2)}$.

因此，利用上述标准化律可得

$$\begin{aligned}X_2X_5 &= \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1),(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}\\ &\quad -\mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1),(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}\\ &\quad +\mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}.\end{aligned}$$

由于我们是在舒伯特簇 $X(v_6)$ 中进行讨论，利用定理 2.3 和注 2.5 可得

$$\mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n)} = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1)}.$$

因此，可得

$$\begin{aligned}X_2X_5 &= \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n,4n+1),(1,3,\ldots,4n-3,4n-1,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}\\ &\quad -\mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n+1),(1,3,\ldots,4n-3,4n,4n+1,4n+2),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}\\ &\quad +\mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,\ldots,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,\ldots,4n-3,4n),(2,4,\ldots,4n-4,4n-2,4n+1),(2,4,\ldots,4n-4,4n-1,4n+2)}\\ &= X_1X_6 - Y_2 + Y_3.\end{aligned}$$ □

引理 3.3。以下关于 X_i 的（$1 \le i \le 6$） Y_j 的（$1 \le j \le 4$）以及 Z_1, Z_2 的关系在 R_3. 中成立

(i) $Z_1 - X_2Y_4 = 0$.
(ii) $Z_2 - X_2Y_3 = 0$.

证明 2λ (i)：注意到 $X_2Y_4 = \mathrm{YT}^{4\lambda}_{(1,3,...,4n-3,4n-2,4n-1,4n),(1,3,...,4n-3,4n-2,4n+1,4n+2),(1,3,...,4n-3,4n,4n+1,4n+2),(2,4,...,4n-4,4n-2,4n+1)}$ 2λ 2λ 2λ YT (2,4,...,4n−4,4n−1,4n),(2,4,...,4n−4,4n−1,4n+2). 回想一下，YT (2,4,...,4n−4,4n−2,4n+1),(2,4,...,4n−4,4n−1,4n) = YT (2,4,...,4n−4,4n−2,4n),(2,4,...,4n−4,4n−1,4n+1)（见式 (3.2)）。因此，我们有 $X_2Y_4 = Z_1$. (ii)：注意到 $X_2Y_3 = \mathrm{YT}^{2\lambda}_{(1,3,...,4n-3,4n-2,4n-1,4n,4n+1,4n+2),(1,3,...,4n-3,4n+1,4n+2),(1,3,...,4n-3,4n),(2,4,...,4n-4,4n-2,4n+1)}$ YT (2,4,...,4n−4,4n−1,4n),(2,4,...,4n−4,4n−1,4n+2).

回想一下，$\mathrm{YT}^{2\lambda}(2,4,\ldots,_{4n-4},_{4n-2},_{4n+1}),(2,4,\ldots,_{4n-4},_{4n-1},_{4n}) = \mathrm{YT}^{2\lambda}(2,4,\ldots,_{4n-4},_{4n-2},_{4n}),(2,4,\ldots,_{4n-4},_{4n-1},_{4n+1})$（see 式 (3.2)）。因此，我们有 $X_2Y_3 = Z_2$. □

引理 3.4。 R 由 X_i、$(1 \le i \le 6)$ 和 Y_3 作为 $\mathbb{C}$-代数生成。

证明。由引理 3.1、引理 3.2 和引理 3.3 即得。 □

回顾定理 2.1，非常 ample 线丛 $\mathcal{L}(4\lambda)$下降为几何不变理论商 $T\backslash\backslash(G/P^{\alpha_{4n+2}})^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 上的线丛。我们证明，关于 T-线性化的非常 ample 线丛$\mathcal{L}(4\lambda)$的下降，几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_6))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 是射影正规的。

定理 3.5. $T\backslash\backslash(X(v_6))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 的齐次坐标环由一次元生成。

证明. 设 $f \in H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T = H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}^{\otimes 2k}(2\lambda))^T$.。由引理 3.4，得

$$f = \sum a_{\underline{m},n_1} X^{\underline{m}} Y_3^{n_1},$$

其中 $\underline{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6) \in \mathbb{Z}^6_{\ge 0}$，且 $n_1 \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 满足 $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + 2n_1 = 2k$； $X^{\underline{m}}$ 表示 $X_1^{m_1}X_2^{m_2}X_3^{m_3}X_4^{m_4}X_5^{m_5}X_6^{m_6}$，而 $a_{\underline{m},n_1}$ 均为非零标量。

现在要证明 $T\backslash\backslash(X(v_6))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 的齐次坐标环由 $H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$ 作为 $\mathbb{C}$-代数生成，只需证明对于上述每个 f，以及在 f 的表达式中出现的每个单项式，均可写成 k 个 $H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$.的乘积。

考虑表达式 f. 中的单项式 $X^{\underline{m}}Y_3^{n_1}$。注意， $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6$ 是一个偶整数。因此，$X^{\underline{m}}$ 可以写成 $\prod_{(i,\ j)} X_iX_j$，其中配对 (i,j) 的数量为 $k-n_1$，且允许 X_i 重复出现。因此， $X^{\underline{m}}$ 可以写成 $H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$. 中 $k-n_1$ 个单项式的乘积。另一方面，由于 $Y_3 \in H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$，$X^{\underline{m}}Y_3^{n_1}$ 是 $H^0(X(v_6)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$. □中 k 个元素的乘积。

定理 1.1 的证明。由于 $X(v_6)$ 是正规的，簇 $T\backslash\backslash(X(v_6))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 是正规的。因此，利用定理 3.5 可得，$T\backslash\backslash(X(v_6))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 关于 T-线性化非常 ample 线丛 $\mathcal{L}(4\lambda)$. □的下降是射影正规的。

推论 3.6. 设 $v \in W^{P^{\alpha_{4n+2}}}$ 满足 $v_1 \le v \le v_6$.。则几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 关于 T-线性化非常 ample 线丛 $\mathcal{L}(4\lambda)$ 的下降是射影正规的。

证明。由于 T 是线性约化的，限制映射

$$\phi : H^0(X(v_6), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T \longrightarrow H^0(X(v), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T$$

对所有 $k \ge 1$ 都是满射。

因此，根据定理 1.1， $T\backslash\backslash(X(v))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$ 关于 T-线性化非常 ample 线丛 $\mathcal{L}(4\lambda)$. □的下降是射影正规的。

命题 1.2 的证明。注意，对所有 $1 \le i \le 5.$， $Y_3 = 0$ 在 $X(v_i)$ 上

(i)：由于 T 是线性约化的，限制映射

$$\phi : H^0(X(v_6), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T \longrightarrow H^0(X(v_1), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T$$

对所有 $k \geq 1$ 都是满射。因此，根据引理 3.4，$H^0(X(v_1)\ \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T$ 中的任意标准单项式都具有 X_1^{2k}. 的形式。因此，$T\backslash\backslash(X(v_1))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda)) = Proj(\mathbb{C}[X_1^2])$。

(ii)：由于 T 是线性约化的，限制映射

$$\phi : H^0(X(v_6), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T \longrightarrow H^0(X(v_2), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T$$

对所有 $k \geq 1$ 都是满射。因此，根据引理 3.4，X_1^2、X_1X_2、X_2^2 是 $H^0(X(v_2)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$. 中的标准单项式

注意，根据推论 3.6，$T\backslash\backslash(X(v_2))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 是射影正规的。因此，存在一个满同态

$$\phi : \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2] \longrightarrow \oplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(X(v_2), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T,$$

由下式定义

$$(z_0, z_1, z_2) \mapsto (X_1^2, X_1X_2, X_2^2).$$

令 I 为由关系式生成的 $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ 的理想

$$z_0z_2 = z_1^2. \tag{3.5}$$

显然，$I \subseteq \ker\phi$ 和 ϕ 诱导出一个 $\mathbb{C}$-代数同态

$$\tilde{\phi} : \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]/I \longrightarrow \oplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(X(v_2), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T.$$

˜现在，我们证明 ϕ 是一个同构。为完成证明，我们将 (3.5) 用作约化系统。具体过程是：将 z_i中的一个单项式 M，若其可被约化规则 $L_i = R_i$ 左侧的一项 L_i整除，就用约化规则右侧的 R_i 替换为（M/L_i）R_i。我们证明，环论的菱形引理对这个约化系统成立（见 [1]）。也就是说，z_i中的任意单项式在应用约化规则后，都会化为 z_i中的唯一表达式，其中没有任何一项可被上述约化系统左侧出现的项整除。

由于我们只有一条约化规则，只需检查 $z_0z_1z_2.$。注意，$z_0z_1z_2 =$（z_0z_2）$z_1 = z_1^3$，对此无法再作进一步约化。因此，$\tilde{\phi}$ 是一个同构。于是，几何不变理论商 $T\backslash\backslash$（X（v_2））$_T^{ss}$（$\mathcal{L}$（4λ））同构于 $Proj$（$\frac{\mathbb{C}[z_0,z_1,z_2]}{(z_1^2-z_0z_2)}$）。因此，几何不变理论商$T\backslash\backslash$（$X$（$v_2$））$_T^{ss}$（$\mathcal{L}$（$\lambda$））作为一个极化簇同构于（$\mathbb{P}^1$，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$（2））。

(iii) 的证明与 (ii) 的证明类似。

(iv)：由于 T 是线性约化的，限制映射

$$\phi : H^0(X(v_6), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T \longrightarrow H^0(X(v_4), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T$$

对所有 $k \geq 1$ 都是满射。因此，由引理 3.1，X_1^2、X_2^2、X_3^2、X_4^2、X_1X_2、X_1X_3、X_1X_4、X_2X_4、X_3X_4、Y_1 是 $H^0(X(v_4)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$. 中的标准单项式。进一步，由引理 3.2，$X_2X_3 = X_1X_4 - Y_1.$。注意，由推论 3.6，$T\backslash\backslash(X(v_4))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$ 是射影正规。令 $A =\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6,$ z_7、z_8、z_9、$z_{10}]$ 是以 z_i's ($1 \leq i \leq 10$) 为变量的多项式代数。于是存在一个满同态

$$\phi : A \to \oplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(X(v_4), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T,$$

定义为

$$(z_1, z_2, \ldots, z_{10}) \mapsto (X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2, X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4).$$

设 I 为由以下关系生成的 A 的理想:

$z_1z_2 = z_5^2$	$z_1z_3 = z_6^2$	$z_1z_4 = z_7^2$	$z_1z_8 = z_5z_6$	$z_1z_9 = z_5z_7$
$z_1z_{10} = z_6z_7$	$z_2z_3 = z_8^2$	$z_2z_4 = z_9^2$	$z_2z_6 = z_5z_8$	$z_2z_7 = z_5z_9$
$z_2z_{10} = z_8z_9$	$z_3z_4 = z_{10}^2$	$z_3z_5 = z_6z_8$	$z_3z_7 = z_6z_{10}$	$z_3z_9 = z_8z_{10}$
$z_4z_5 = z_7z_9$	$z_4z_6 = z_7z_{10}$	$z_4z_8 = z_9z_{10}$	$z_5z_{10} = z_6z_9$	$z_6z_9 = z_7z_8$

显然， $I \subseteq$ 核 ϕ 和 ϕ 诱导出一个 $\mathbb{C}$代数同态

$$\tilde{\phi} : A/I \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(X(v_4), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T.$$

˜现在，我们证明 ϕ 是一个同构。

为完成证明，我们将上述关系用作约化系统。通过考察极小重叠歧义的约化，我们证明该约化系统满足菱形引理（见 [1]）。

注意， $z_1z_2z_3 =$ （z_1z_2）$z_3 = z_3z_5^2$ （使用 $z_1z_2 = z_5^2$） $=$ （z_3z_5）$z_5 = z_5z_6z_8$ （使用 $z_3z_5 = z_6z_8$） .

再次， $z_1z_2z_3 = z_1(z_2z_3) = z_1z_8^2$ (使用 $z_2z_3 = z_8^2$) $= (z_1z_8)z_8 = z_5z_6z_8$ (使用 $z_1z_8 = z_5z_6$)。

此外， $z_1z_2z_3 = (z_1z_3)z_2 = z_2z_6^2$ (使用 $z_1z_3 = z_6^2$) $= (z_2z_6)z_6 = z_5z_6z_8$ (使用 $z_2z_6 = z_5z_8$)。

因此， $z_1z_2z_3$ 可化简为唯一的表达式。

同样，我们可以证明，应用不同的化简规则后，其余的重叠歧义都能在 z_i's 中化简为唯一的表达式-˜sion。因此， ϕ 是一个同构。

考虑嵌入

$$\psi : \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^9$$

由下式给出

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4).$$

令 J 为由矩阵的 2×2 阶子式生成的 A 的齐次理想

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_5 & z_6 & z_7 \\ z_5 & z_2 & z_8 & z_9 \\ z_6 & z_8 & z_3 & z_{10} \\ z_7 & z_9 & z_{10} & z_4 \end{pmatrix},$$

其中， z_i是 $\mathbb{P}^9$. 的齐次坐标。注意， $\psi(\mathbb{P}^3)$由 J. 给出。此外，注意 $I \subseteq J$ 和 $dim(A/I) = dim(A/J) = 4$（使用 Macaulay2 [3]计算）。因此，几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_4))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$与作为极化簇的$(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2))$同构。

（v）： 由于 T 是线性约化的，限制映射

$$\phi : H^0(X(v_6), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T \longrightarrow H^0(X(v_5), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda)^T$$

对所有 $k \geq 1$都是满射。因此，由引理 3.1， $X_1^2, X_3^2, X_5^2, X_1X_3, X_1X_5, X_3X_5$是 $H^0(X(v_5)\ \mathcal{L}(4\lambda))^T$. 中的标准单项式。注意，由推论 3.6， $T\backslash\backslash(X(v_5))_T^{ss}(\mathcal{L}(4\lambda))$是射影正规簇。令 $A = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ 为变量为 z_i的多项式代数。于是存在一个满同态

$$\phi : A \longrightarrow \oplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(X(v_5), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T,$$

定义为

$$(z_1, z_2, \ldots, z_6) \mapsto (X_1^2, X_3^2, X_5^2, X_1X_3, X_1X_5, X_3X_5).$$

令 I 为由以下关系生成的 A 理想:

$z_1z_2 = z_4^2$ $z_1z_6 = z_4z_5$	$z_1z_3 = z_5^2$ $z_2z_5 = z_4z_6$	$z_2z_3 = z_6^2$ $z_3z_4 = z_5z_6$

.

显然， $I \subseteq$ 核 ϕ，且 ϕ 诱导一个同态

$$\tilde{\phi} : A/I \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(X(v_5), \mathcal{L}^{\otimes k}(4\lambda))^T.$$

˜现在，我们证明 ϕ是一个同构。

为完成证明，我们将上述关系用作约化系统。通过考察极小重叠歧义的约化，我们证明该约化系统满足菱形引理（见 [1]）： $z_1z_2z_3, z_1z_2z_5, z_1z_2z_6, z_1z_3z_4, z_1z_3z_6, z_2z_3z_4, z_2z_3z_5$.

Note that $z_1z_2z_3 = z_3(z_1z_2) = z_3z_4^2$ (using $z_1z_2 = z_4^2$) $= (z_3z_4)z_4 = z_4z_5z_6$ (using $z_3z_4 = z_5z_6$).
Again $z_1z_2z_3 = z_1(z_2z_3) = z_1z_6^2$ (using $z_2z_3 = z_6^2$) $= (z_1z_6)z_6 = z_4z_5z_6$ (using $z_1z_6 = z_4z_5$).
Also, $z_1z_2z_3 = z_2(z_1z_3) = z_2z_5^2$ (using $z_1z_3 = z_5^2$) $= (z_2z_5)z_5 = z_4z_5z_6$ (using $z_2z_5 = z_4z_6$).
同样，我们可以证明其余重叠歧义：

$z_1z_2z_5, z_1z_2z_6, z_1z_3z_4, z_1z_3z_6, z_2z_3z_4, z_2z_3z_5$经应用不同的约化规则后，在 z_i 的意义下约化为唯一表达式，即 $z_4^2z_5$,$z_4^2z_6$, $z_4z_5^2$, $z_5^2z_6$, $z_4z_6^2$, $z_5z_6^2$ 。因此， $\tilde{\phi}$ 是一个同构。

考虑以下嵌入

$$\psi : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$$

由下式给出

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

令 J为由矩阵的 2×2 阶子式生成的 A 的齐次理想 ix

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_4 & z_5 \\ z_4 & z_2 & z_6 \\ z_5 & z_6 & z_3 \end{pmatrix},$$

其中， z_i是 $\mathbb{P}^5$. 的齐次坐标。注意， $\psi(\mathbb{P}^2)$由 J. 给出。此外，注意 $I \subseteq J$ 和 $dim(A/I) = dim(A/J) = 3$ （使用 Macaulay2 [3]计算）。因此，几何不变理论商 $T\backslash\backslash(X(v_5))^{ss}_T(\mathcal{L}(4\lambda))$与作为极化簇的$(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$同构。□

致谢。两位作者都谨此感谢印度理工学院孟买分校在他们任职期间提供博士后奖学金并给予热情接待。

References

[1] G. M. Bergman，环论中的菱形引理， *Adv. Math.* **29**(2)(1978)，178–218。[2] A. W. M. Dress，W. Wenzel，关于反对称矩阵的佩尔方的一条恒等式的简单证明， *Advances in Mathematics*，112(1995)，120–134。[3] D. R. Grayson，M. E. Stillman，Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统，网址：https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/。[4] R. Hartshorne， *Algebraic Geometry*， *Graduate Texts in Mathematics book series*，（GTM 52，施普林格出版社，纽约，1977。[5] J. E. Humphreys， *Introduction to lie Algebras and Representation Theory*，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1972。[6] J. E. Humphreys， *Linear Algebraic Groups*，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1975。

[7] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*，第二版，数学调查与专著107，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003年。[8] S. S. Kannan，S. K. Pattanayak，齐性空间的环面商——允许半稳定点的最小维数舒伯特簇，*Proc. Indian Acad. Sci.* (Math.Sci.) 119(4)，2009，469–485。[9] S. S. Kannnan，P. Sardar，一般线性群的齐性空间的环面商与某些对称群的标准表示， *Proc. Indian Acad. Sci.* **119** (2009)，81–100。[10] S. Kumar，极大环面对旗簇几何不变理论商的线丛的下降，
groups **13** 2008 757 771
Transformation
，（），–
。[11] V. Lakshmibai，K. N. Raghavan， *Standard Monomial Theory Invariant Theoretic Approach*，数学科学百科全书137，施普林格出版社，柏林，2008年。[12] P. Littelmann，Littelwood-Richardson规则的推广，
Journal of Algebra，130(1990)，328–368。[13] D. Mumford，J. Fogarty，F. Kirwan， *Geometric Invariant Theory*，第三版，施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1994年。[14] A. Nayek，S. K. Pattanayak，S. Jindal，旗簇环面商的射影正规性，
Pure and Applied Algebra **224** 2020
Journal of
，（）。
[15] A. Nayek，P. Saha，正交格拉斯曼簇中舒伯特簇的环面商， *Preprint*。

Arpita Nayek, Department of Mathematics, IIT Bombay, Powai, Mumbai, 400076, India.
Email address: arpitan@math.iitb.ac.in

Pinakinath Saha, Department of Mathematics, IIT Bombay, Powai, Mumbai, 400076, India.
Email address: psaha@math.iitb.ac.in