Draft version February 2, 2023年使用 LaTeX
twocolumn style 排版，采用 AASTeX631

arXiv:2302.00580v1 [astro-ph.EP] 1 Feb 2023

圆型限制性问题中的环双星轨道理论的动力系统方法

Andrew Langford[1, 2, *] and Lauren M. Weiss[1]

[1] Department of Physics and Astronomy, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, 46556, USA
[2] Institute of Astronomy, University of Cambridge, Madingley Road, Cambridge CB3 0HA, UK

（收到日期：2022年11月28日；接受日期：2023年1月30日）

提交至《天文学杂志》

摘要

为了更好地理解近距双星周围系外行星，即环双星行星（CBPs）的轨道动力学，我们将动力系统理论中的方法应用于圆型限制性三体问题（CR3BP）中一组具有物理动机的解。我们运用弗洛凯理论，刻画平面环双星周期轨道（极限环）周围的线性动力学行为——静态、振荡或指数变化。我们计算了顺行和逆行极限环，并分析其几何形状、稳定性分岔和动力学结构。轨道和稳定性计算均为 CR3BP 中的精确计算，并可通过开源 Python 软件包pyraa复现。周期轨道形成了一组彼此不交叉、动力学上较冷且有利于微行星生长的环双星轨道。对于质量比 $\mu \in [0.01, 0.50]$，我们在顺行族中发现了反复出现的特征，包括：（1）最内侧的近圆轨道，其内侧的解具有共振几何形状；（2）最内侧稳定轨道（$_{\rm c} \approx 1.61 - 1.85\, a_{\rm bin}$），其特征是一个切触分岔极限环；以及（3）动力学不稳定区域（$a \approx 2.1\ a_{\rm bin}$；$\Delta a \approx 0.1\ a_{\rm bin}$），即排斥区，其边界由一对临界稳定轨道——分岔极限环——构成。排斥区的外边界与此前对圆轨道双星周围$_{\rm c}$ 的确定结果一致。我们通过 N体模拟验证了分析结果，并将其应用于冥王星-卡戎系统。在顺行排斥区与$_{\rm c}$之间的内侧稳定区域中尚未探测到环双星行星，这表明排斥区可能会阻碍环双星行星向内迁移。

关键词：《天体力学》（211）、三体问题（1695）、系外行星动力学（490）、轨道（1184）

1. 引言

目前对5200多颗系外行星的统计显示，行星系统构型多种多样，其中许多不同于太阳系（美国国家航空航天局系外行星科学研究所 2020年）。尽管分离距离为 $a_{\rm bin} < 1$ 天文单位的近距双星约占双星总数的一半

通讯作者：Andrew Langfordaml99@cam.ac.uk

* NSF研究生研究员

银河系中的恒星系统（Ragha- van 等人，2010年）中，大多数已确认的系外行星都位于单星系统，或轨道周期较长的双星系统中，$P_{\rm bin} > 100$ 年。由于环双星行星（CBP）很少被探测到，而且对此类行星系统进行后续观测往往面临挑战，因此，与绕单颗恒星运行的系统相比，这种复杂却可能十分普遍的架构仍未得到充分了解。迄今为止，尽管食双星的管线筛选会造成不利的选择偏差，仍已有14颗凌星环双星行星通过开普勒和TESS测光得到确认（Kostov 等人，2021年；Jenkins等，2010年）。环双星行星也通过直接成像技术

表1. 所选环双星轨道动力学研究在方法和概念上的比较。勾号表示该研究包含相应特征，叉号表示不包含相应特征。

论文	模型	周期轨道	弗洛凯理论	稳定性极限	逆行	面外	极轨道
斯特¨ömgren (1922年)	圆型限制性三体问题	✓	×	×	✓	×	×
Holman &Wiegert (1999年)	椭圆限制性三体问题	×	×	✓	×	×	×
Doolin & Blundell(2011年)	椭圆限制性三体问题	×	×	✓	✓	✓	✓
Bosanac 等人 (2015年)	圆型限制性三体问题	✓	✓	×	×	×	×
Quarles 等人 (2018年)	N体	×	×	✓	×	✓	✓
Chen 等人（2020年）	N体	×	×	✓	✓	✓	✓
本文	圆型限制性三体问题	✓	✓	✓	✓	✓	×

NOTE—所选指标为 f 用于说明本研究的相关内容，并不代表任何特定研究工作的全部方法和分析内容。

被探测到（Janson 等人，2021年）。利用开普勒数据，Arm- strong 等人(2014年)确定，半径为$R_p > 6\ R_\oplus$ 且轨道周期为 < 300 天的环双星行星发生率为$10.0^{+18}_{-6.5}$%（95% 置信度）——与单星系统中巨行星的发生率相当（Fulton 等人，2021年）。双星周围的轨道轨迹可能因双星引力势所产生的非线性混沌动力学而导致行星被逐出系统。值得注意的是，许多环双星行星的轨道都接近其动力学稳定性极限；该极限由长时间的（$10^4\ P_{bin}$）数值积分确定 Holman & Wiegert(1999年）。Li 等人(2016年）证明，这种环双星行星的聚集不太可能是观测偏差所致。

尽管探测环双星行星面临这些挑战，行星与两颗恒星之间的层级式三体相互作用，通常能提供比围绕单颗恒星运行的行星更精确的星历和动力学质量（Winn& Fabrycky 2015）。双星也往往能稳定环双星行星的自旋倾角——这一特征有利于长期气候调节（Deitrick 等人 2018年；Chen 等人 2022年）。近距离双星系统一旦被观测到，便可成为信息最丰富的实验室之一，用于检验行星形成与演化理论的可靠性。

环双星引力相互作用如何影响行星演化，其理论基础仍是一个活跃的研究领域。环双星行星处于动态敏感的引力环境中，两颗恒星沿行星轨道内侧运行。最初为太阳系动力学建立的开普勒框架，无法像适用于单星轨道那样系统地应用于环双星轨道。三体问题的不可积性和非线性敏感性，使得对系统动力学和稳定性作出普遍且精确的预测颇具挑战。

有两种方法可直接用于双星系统周围的轨道动力学研究：长期数值积分和动力系统理论。Holman & Wiegert（1999年）开展了最早的一批长期数值实验，旨在确定环双星有界轨迹的总体规律。与后续较新的研究方法类似，他们检验了开普勒圆形初始条件（$v\ (r) \propto \sqrt{1/r}$），以探查行星围绕双星运行的可行轨道位置（Doolin &Blun-dell 2011；Quarles etal. 2018；Chen等人2020）。这类方法的进展得益于更长的积分时长、更精细的采样、对倾角的考量，以及行星／盘质量建模。长期积分得到的有界轨迹通常以其密切开普勒轨道根数及其相对于双星的初始距离来呈现。通过这种方法，研究者确定了三种稳定的环双星轨道构型：逆行共面、顺行共面和极向（Doolin & Blundell2011；Chen etal.2019）。

动力系统方法旨在通过研究非线性解空间的基本解，即周期轨道、平衡点以及不变稳定流形和不稳定流形，来理解其自然形成的动力学结构。与通过二体解和瞬时开普勒轨道根数来预测运动的环双星动力学摄动解析方法不同（Lee &Peale 2006；Leung &Lee 2013；Geor-gakarakos & Eggl 2015；Sutherland &Kratter 2019），动力系统理论将三体问题的复杂性直接纳入系统的基本解中，再对这些解进行分析。这种方法源于数学领域的发展，其开端是Poincar´e （1892年）对三体问题的研究。动力系统应用于轨道力学的早期研究认识到周期轨道的实际和数学意义

轨迹——既能保证数值结果有界，也能作为探查底层解空间的工具（Szebehely 1967）。哥本哈根天文台的人工计算员通过数值积分，求出了逆行和顺行运动中绕等质量双星运行的周期轨迹的首批连续集合，即族，因此这些轨迹被称为哥本哈根问题（Str¨omgren 1922年，1938；Szebehely1967）。到了20$^{\rm th}$ 世纪后期，航天动力学界发展出用于计算周期轨迹族的数值技术，以理解非线性解空间以及CR3BP轨道的稳定性（Breakwell & Brown1979；Howell 1984）。在这种现代方法中，通过弗洛凯理论，依据邻近非线性周期解周围的线性动力学，计算状态空间某一区域内的稳定性（Floquet1883）。Bosanac 等人（2015年）将这些现代技术用于计算顺行环双星周期轨迹族，并在广泛的恒星质量比范围内，通过弗洛凯理论评估其稳定性（$\mu \in [10^{-6}, 0.50]$）。除精确的数值结果外，动力系统方法的优势还在于能够理解理想化非线性解空间的底层动力学结构，而这些结构往往会在真实物理系统中持续存在（Bosanac2016）。

双星周围行星最内侧轨迹的位置，是动力学天文学中一个持续受到关注的问题。在该轨迹以内，引力环境会产生混沌动力学，容易将小质量天体从系统中抛射出去。这一动力学约束可能塑造了现有的环双星行星系统构型，并且不同于单恒星系统中的抛射机制——尽管在环双星系统中也可能诱发不稳定的行星—行星共振（Sutherland &Kratter 2019）。因此，确定最近的稳定轨道——也就是可观测的轨道——一直是采用长期数值积分开展研究的共同目标（Holman & Wiegert1999；Doolin &Blundell 2011；Quarles etal. 2018；Chen等人2020）。耐人寻味的是，大多数环双星行星的发现，其轨道都接近长期数值积分所确定的最内侧稳定距离Armstrong 等人（2014年）；Winn &Fabrycky（2015年）；Li 等人（2016年）。

为建立环双星系外行星轨道动力学理论，我们采用现代动力系统理论中的方法（§2）。我们的方法基于Bosanac 等人（2015年）的计算，借助周期解（极限环）族，理解系统内部及不同质量比下解空间与稳定性的演化。我们首先展示这一方法在等质量双星这一特殊情形下的应用（§3），随后将其推广至一系列双星质量比（§4）。为说明计算结果的背景，我们将临界稳定轨道的判定与以往研究进行比较（§5）。我们讨论这些计算对环双星行星形成与演化理论的意义（§6）。表1将我们的分析与其他环双星轨道动力学研究进行了比较。

本文旨在作为系列论文的第一篇，发展一种动力系统方法的理论及其应用，用于描述天体物理系统中的多体引力环境。

2. 动力学背景与理论

三体问题的一项重大挑战是，无法以闭式形式获得一组广义基本解。相反，通过在圆型限制性三体问题（CR3BP）中对环双星行星运动进行建模，其中两颗恒星具有质量，而行星被视为测试粒子，我们可以数值求解该系统的基本非静态有界解和连续的极限环族，并利用弗洛凯理论评估其内在稳定性性质。

2.1. 模型：圆型限制性三体问题

圆型限制性三体问题描述了测试粒子（$m_3 = 0$）在两个大质量天体（

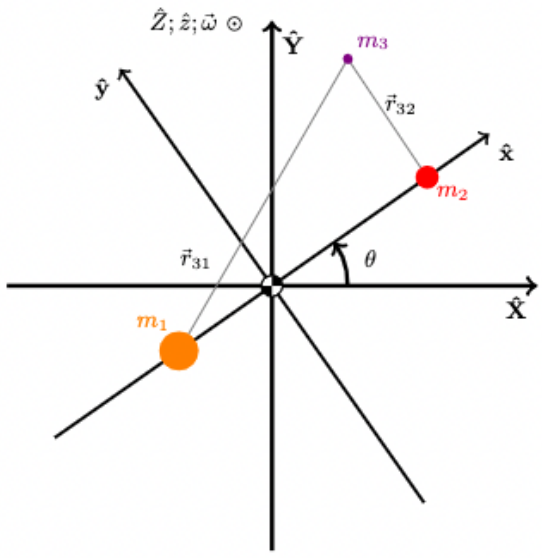


图1。圆型限制性三体问题示意图。测试粒子（$m_3 = 0$）在两个大质量天体（$m_1 > 0$、$m_2 > 0$）的引力作用下沿轨迹运动，其中 m_1 和 m_2 的轨道为圆形。会合参考系（$\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$）以速率 $d\vec{\theta}/dt = \vec{\omega}$ 相对于惯性坐标系^^^^（X、Y、Z）沿共同的$\hat{Z}/Z$方向旋转，原点位于质心。

表 2. 圆型限制性三体问题中有量纲值和无量纲值及其特征量的对照表。有量纲值通过将无量纲值乘以相应的特征量得到。

有量纲	无量纲	特征
m_1	$1-\mu$	$m^* = m_1 + m_2$
m_2	μ	$m^* = m_1 + m_2$
a_{bin}	1	$l^* = \lvert\vec{r}_1 - \vec{r}_2\rvert$
P_{bin}	2π	$t^* = \sqrt{\frac{l^{*3}}{Gm^*}}$

m_1， $m_2 > 0$）引力作用下的运动，其中 m_1 和 m_2 以圆周运动绕系统质心运行（Euler 1772）。圆型限制性三体问题的几何构型如图1所示。通过在与双星共同旋转的会合参考系中研究 m_3 的动力学，可将运动方程（EOM）的维数从18降至6，从而有效消除 m_1 和 m_2 的运动。六维会合运动方程有五个不动点，通常称为拉格朗日点，以及一个积分常数，即雅可比常数（Lagrange 1772；Jacobi 1836）。对于本研究而言，最值得注意的是，非自治（即与时间无关）的运动方程允许存在连续的周期解族（Poincar´e 1892）。第2节其余部分回顾了本研究所用的相关圆型限制性三体问题解析理论。关于解析理论的更详尽论述，请参见 Szebehely (1967)；Murray & Dermott (2000)；Short (2010)；Pavlak (2010)；Bosanac (2016)；Gupta (2020)；Boudad (2022)。

2.1.1. *Equations of Motion*

圆型限制性三体问题有一个参数，即质量比，

$$\mu := \frac{m_2}{m_1 + m_2} \in (0, 0.5], \tag{1}$$

可视为两个主天体质量的分配。质量比决定了动力学解空间，并将解推广至物理系统。圆型限制性三体问题（CR3BP）通常用无量纲运动方程（EOM）表示，这些方程通过特征物理量与有量纲运动方程相关联（表2）。除非另有说明，本文均采用无量纲会合坐标系坐标。主天体在会合坐标系中的位置是静止的，并且其分布使质心始终固定在原点， $\vec{r}_1 = -\mu\hat{}x$ 和$\vec{r}_2 = (1-\mu)\hat{}x$。

按照惯例，伪势函数定义为：

$$U^*(x, y, z) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{|\vec{r}_{31}|} + \frac{\mu}{|\vec{r}_{32}|} \tag{2}$$

其中， n 是双星的平均运动，在圆型限制性三体问题中设为$n = 1$。伪势包含 m_1、 m_2的引力势，以及离心力的有效势。圆型限制性三体问题的运动方程为

$$\ddot{x} = (\nabla U^*)_x + 2n\dot{y} \tag{3.1}$$
$$\ddot{y} = (\nabla U^*)_y - 2n\dot{x} \tag{3.2}$$
$$\ddot{z} = (\nabla U^*)_z \tag{3.3}$$

圆型限制性三体问题的三条二阶非线性常微分方程，可解耦为一组六条一阶非线性常微分方程，并满足以下关系：

$$\mathbf{F}(\bar{X}) = \dot{\bar{X}}, \tag{4}$$

其中 ¯X $= [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$是¯粒子的瞬时状态，X由圆型限制性三体问题的运动方程（方程3）给出。给定一组六个初始条件¯ ¯，X(t_0)，即可通过 t 对向量函数¯进行数值积分，在给定时刻求得X。$\mathbf{F}(X)$，积分区间为t_0 至 $t_$。

2.1.2. *Jacobi Constant*

圆型限制性三体问题的运动方程（方程3）具有时间平移对称性，即不显含时间。因此，根据诺特定理，我们应当预期存在一个类似能量的守恒量（诺特（1918））。按照惯例，这个不变量称为雅可比常数，

$$C_J := 2U^*(x, y, z) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{5}$$

注意雅可比常数与伪哈密顿量 $H^* = -\frac{1}{2}C_J$ 之间的关系。雅可比常数取较大的正值，表示轨迹“能量较低”。

由于粒子的雅可比常数沿弹道轨迹保持不变，要求速度分量为实数便可得到零速度曲线和曲面方程——它们是构形空间（$\hat{}x$， $\hat{}y$， $\hat{}z$）中 m_3 无法到达区域的边界。雅可比常数还将系统的自由度从六个减少到五个。在平面动力学情况下， $z = \dot{z} = 0$，问题则简化为三个自由度。

2.1.3. *Jacobian and State Transition Matrix*

在动力系统中，雅可比矩阵，

$$\mathbf{A}(\bar{\mathrm{X}}) := \frac{\partial \mathbf{F}(\bar{\mathrm{X}})}{\partial \bar{\mathrm{X}}} \tag{6}$$

提供了关于特定状态周围线性动力学的信息。在圆型限制性三体问题（CR3BP）中，对方程¯求导4 ，即对状态向量 X 求导，可得，

$$\mathbf{A}_{CR3BP}(\bar{\mathrm{X}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ U^*_{xx} & U^*_{xy} & U^*_{xz} & 0 & 2 & 0 \\ U^*_{yx} & U^*_{yy} & U^*_{yz} & -2 & 2 & 0 \\ U^*_{zx} & U^*_{zy} & U^*_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

其中， U^*_{ij} 表示伪势（二式2）关于 i 和 j 的二阶偏导数。

计算¯ ¯ ¯$\mathbf{A}_{CR3BP}(X)$ 在不动点 $\{X \mid \mathbf{F}(X) = 0\}$处的特征值和特征向量 $= 0\}$，可以对其周围的线性动力学进行分类。对非静态有界解（即极限环）的类似分析，则从计算状态转移矩阵（STM） $\mathbf{\Phi}$开始。考虑一个向量函数$\mathbf{F}(\bar{\mathrm{X}}) = \bar{\mathrm{X}}$，在 $\bar{\mathrm{X}}^* + \delta\,\bar{\mathrm{X}}$ 处取值，并围绕 $\bar{\mathrm{X}}^*$进行泰勒展开，

$$\mathbf{F}(\bar{\mathrm{X}}^* + \delta\,\bar{\mathrm{X}}) = \dot{\bar{\mathrm{X}}}^* + \mathbf{A}(\bar{\mathrm{X}}^*)\delta\,\bar{\mathrm{X}} + O(\delta\,\bar{\mathrm{X}}^2) \tag{8}$$

其中 $\mathbf{A}$ 为雅可比矩阵。一阶近似下，方程8 变为

$$\delta\,\dot{\bar{\mathrm{X}}} = \mathbf{A}(\bar{\mathrm{X}}^*)\delta\,\bar{\mathrm{X}} \tag{9}$$

其通解为

$$\delta\,\bar{\mathrm{X}}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\delta\,\bar{\mathrm{X}}(t_0) \tag{10}$$

其中， $\mathbf{\Phi}$ 描述了在 t时刻，时间为 t_0 的两个状态之间的线性关系。 $\mathbf{\Phi}$ 的一些相关性质如下：

$$\mathbf{\Phi}(t_0 + \delta t, t_0) = \frac{\partial\,\bar{\mathrm{X}}(t_0 + \delta t)}{\partial\,\bar{\mathrm{X}}(t_0)} \tag{11.1}$$

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t_0, t_0) = \mathbf{A}(t_0)\,\bar{\mathrm{X}}(t_0) \tag{11.2}$$

$$\mathbf{\Phi}(t_N, t_0) = \Pi_0^{N-1}\,\mathbf{\Phi}(t_{i+1}, t_i). \tag{11.3}$$

方程11.1、11.2和11.3描述了一种线性映射，它将给定状态分量中的初始扰动如何传播到给定时刻的状态向量中的信息传递出去。因此，STM 携带了参考轨迹在状态空间中的内在动力学信息。它还可作为一种有价值的用于通过迭代方法求解周期轨迹的工具（参见§3.1.1）。对¯的系数进行数值积分，并与 $\mathbf{\Phi}$ 和 X 一起计算，可得到 42 个运动方程。

2.1.4. *Rotation Matrix*

对于圆型限制性三体问题的动力学而言，自然的参考系是会合坐标系，它与系统中的大质量天体共同旋转。不过，为了建立物理直觉，将解从会合坐标系投影到惯性参考系会有所帮助。这种变换也有助于与在惯性坐标系中计算的解析二体解进行定量比较。给定一个会合坐标系状态向量 ${}^R\bar{\mathrm{X}}$，对应的惯性状态向量 ${}^I\bar{\mathrm{X}}$可计算如下：

$${}^I\bar{\mathrm{X}} = \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{Q}_R(f) & 0_{3\times3} \\ \partial_f {}^I\mathbf{Q}_R(f) & {}^I\mathbf{Q}_R(f) \end{bmatrix} {}^R\bar{\mathrm{X}}, \tag{12}$$

其中，

$${}^I\mathbf{Q}_R(f) = \begin{bmatrix} \cos f & -\sin f & 0 \\ \sin f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

是绕 $\hat{}z$ 旋转 f 角度的旋转矩阵，其中 f 是双星的真近点角。

2.2. 动力系统理论

圆型限制性三体问题（CR3BP）的动力系统理论视角于 19th 世纪末由庞加莱´(1892年)提出。过去一个世纪以来，计算能力的提升和新兴数值技术的发展，使人们得以深入了解非线性系统的解空间（斯特¨ömgren 1922；Szebehely1967；Bosanac 等（2015））。本研究受到近期系外行星观测结果的启发，旨在找出最接近环双星轨道行为的解族，并借助动力系统理论方法评估其稳定性性质。作为背景，针对圆型限制性三体问题中周期轨迹的类似分析，为理解拉格朗日点“晕”轨道奠定了基础；这些轨道被用作航天应用的基准轨迹（Breakwell 与 Brown 1979；Howell 1984）。

2.2.1. 周期解

要让环双星系外行星能够长期存在并被观测到，其运动必须被限制在双星周围的一个区域内。与二体问题相比，圆型限制性三体问题中的初始条件敏感性使得将状态空间中的区域

分类为有界运动[1]更加困难。在动力系统中，有界运动分为三类：不动点、极限环（周期轨道）[2]和准周期轨道。在各种有界运动类型中，我们研究极限环，因为它们为环双星行星提供了广泛且具有代表性的解空间，并且其解与二体问题中的有界运动解相类似。

极限环 $\mathbf{\Gamma}$ 是状态空间中的参数化闭曲线，代表一组常微分方程的特定解；其轨迹会以固定的时间间隔（即周期） T 重复，

$$\mathbf{\Gamma}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^6 \mid \mathbf{\Gamma}(0) = \mathbf{\Gamma}(T) \tag{14}$$

圆型限制性三体问题中的极限环（我们也称之为周期轨迹）以连续的解族形式存在，并且通常会将其稳定性性质延续至附近的解。请注意，极限环是圆型限制性三体问题中基本的、非静态的有界解。

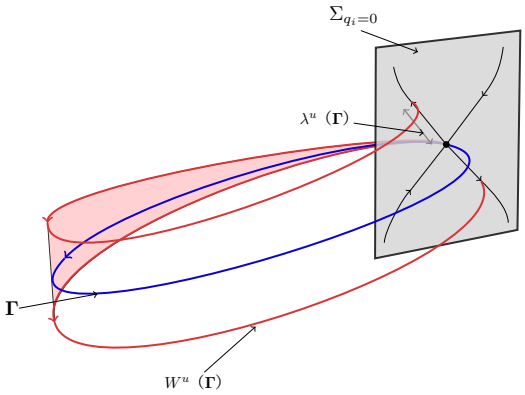


图 2. 三维系统中弗洛凯理论（§2.2.2）的示意图。蓝色周期轨道 $\mathbf{\Gamma}$ 在庞加莱截面上生成一个不动点′， $\Sigma_{q_i=0}$。沿不稳定流形 W^u($\mathbf{\Gamma}$的正、负方向对轨道进行初始扰动（红色），经过一个周期后，其位移幅度为弗洛凯乘子 λ^u($\mathbf{\Gamma}$)。请注意，这些轨迹在时间上对称，因此完全可逆。

2.2.2. *Floquet theory*

回顾§2.1.3 可知，沿参考轨迹传播的初始扰动所产生的线性响应由状态转移矩阵（STM）承载， $\mathbf{\Phi}$。弗洛凯理论指出，状态转移矩阵的时变系数 $\Phi_{ij}(t)$ 沿周期轨道可以分解为两个具有周期系数的矩阵，$\mathbf{F}(t)$ 和取指数后的对角矩阵$\mathbf{\Omega}$ (Floquet 1883；Bosanac 2016)。经过一个周期后，$\mathbf{F}(T) = \mathbf{F}(0)$，由此得到的状态转移矩阵为

$$\mathbf{M} := \mathbf{\Phi}(T, 0) = \mathbf{F}(T)e^{\mathbf{\Omega}T}\mathbf{F}(0)^{-1} \tag{15}$$

其中$\mathbf{M}$ 是单值矩阵。$\mathbf{M}$的特征值

$$\lambda_i = \pm e^{\Omega_i T} \tag{16}$$

是*Floquet*乘子，用于描述一个周期后沿相关特征方向的扰动伸展与旋转情况。将状态空间中的周期轨迹视为庞加莱截面上的不动点（图′2），我们便能提取周围解空间的动力学信息。由于 CR3BP 是一个哈密顿系统，极限环的六个 Floquet乘子成对出现， λ_a， λ_b，且满足

$$\lambda_a = \frac{1}{\lambda_b}. \tag{17}$$

[1] 二体问题允许存在一个广泛的有界运动区域，即 $e < 1$。[2]二体问题中的任何有界解（即椭圆或圆）都是一个极限环。

这使得我们可以将一个极限环周围的六维状态空间分解为三个不同的子空间。若一个极限环属于一个连续族，则有一对 Floquet乘子等于 1，$\lambda_a = \lambda_b = 1$。其余两对通常为实数（$\lambda_a$， $\lambda_b \in \mathbb{R}$），或为单位圆上的复数（λ_a， $\lambda_b \in \mathbb{C}$；$|\lambda_a| = |\lambda_b| = 1$）。若 $|\lambda| < 1$，沿相应特征方向的扰动会沿着稳定流形指数衰减并趋向极限环。若 $|\lambda| > 1$，沿相关特征方向的扰动会沿着不稳定流形从极限环处指数增长。若为 $|\lambda| = 1$，扰动会导致极限环附近的有界运动。

2.2.3. *Stability Indices*

在本研究中，我们将使用由Floquet乘子导出的两个指标，来评估圆型限制性三体问题中极限环的动力学性质。第一个指标是庞加莱指数，

$$\Omega_k = \frac{1}{T}(\mathrm{Log}|\lambda^k| + i\mathrm{Arg}(\lambda^k)),\ k \in [1, ..., 6], \tag{18}$$

描述沿着 Floquet乘子的特征方向、在周期轨道附近施加初始扰动后，经过一个周期，扰动增长或衰减的 e 倍。对该指数的解释与李雅普诺夫指数类似。然而，与李雅普诺夫指数不同，庞加莱指数是根据单条周期轨道的单值矩阵测得的，而不是根据两条参考轨道之间的发散程度测得的。如果 $\lambda^k \in \mathbb{C}$，庞加莱指数还描述状态空间中绕参考轨道振荡的角频率

。注：对于位于复单位圆上的任意特征值，庞加莱指数的实部均为零。

第二个指标，

$$\nu_i := \frac{1}{2}(\lambda_a^i + \lambda_b^i),\ i \in [1,2,3], \tag{19}$$

将每对 Floquet 乘子归约为一个实值参数，有助于检测解空间中的分岔。如果某个非单位 ν 参数瞬间等于单位值，$\nu_i = \pm 1$，则表示发生了分岔。极限情况下的行为 $\nu_i \to \pm 1$可表明分岔类型。也可以通过观察 Floquet 乘子在复平面和单位圆上的变化来理解分岔分类。详见Bosanac (2016年)；Gupta (2020年)；Zimovan-Spreen(2021年)，了解圆型限制性三体问题中分岔分类的详细说明。

3. 动力系统理论在哥本哈根问题中的应用

虽然Poincar´e (1892年)利用摄动方法，在小质量比条件下得出了圆型限制性三体问题中的首批周期轨迹，但Str¨omgren (1938)年哥本哈根天文台的计算团队通过数值积分，得出了等质量圆型限制性三体问题中的首批极限环，即哥本哈根问题（Szebe-hely 1967）。本节将重新考察哥本哈根问题中的周期性环双星解，并进一步分析§2中所述的稳定性性质和动力学行为。

3.1. 周期族初始化

我们希望将动力系统理论应用于更深入地理解行星绕圆轨道双星运行时的轨道动力学。环双星运动的基本解表现为围绕每个主星质量的同心近圆轨迹（Str¨omgren 1922年；Szebehely1967；Bosanac 等（2015）；Bromley & Kenyon 2015年，2020a）。在随双星旋转的参考系中，这些轨迹构成一个连续的周期轨迹族。计算这些周期解属于边界条件问题。极限环包含一组连续的状态向量，但也可以通过其中一个状态向量唯一确定。按照惯例，我们使用垂直 $+\hat{}x$ 穿越状态向量，$\bar{\mathrm{X}}^* = [x_0^*, 0, 0, 0, \dot{y}_0^*, 0]^T$，作为周期轨道及其传播初始条件的唯一标识。

为使用下文所述的微分修正算法求解圆型限制性三体问题中的环双星极限环，需要一个近似周期的初始猜测。在一阶近似下，双星引力势的多极展开等价于二体运动方程。因此，对于远离双星的极限环，圆形开普勒解可作为合理的初始猜测。我们还发现，圆型限制性三体问题的自治性意味着，双星的初始真近点角不会影响旋转坐标系中的解。在不失一般性的前提下，我们取 $f = 0$，${}^I\dot{x} = 0$，${}^I y = 0$。注意到，非零倾角通常与旋转坐标系中的周期运动不相容，因此我们取 $z = \dot{z} = 0$。基于上述假设，并假定轨道为开普勒圆轨道，我们利用方程12沿 $+\hat{}x$生成会合坐标系坐标中的环双星周期运动初始猜测，

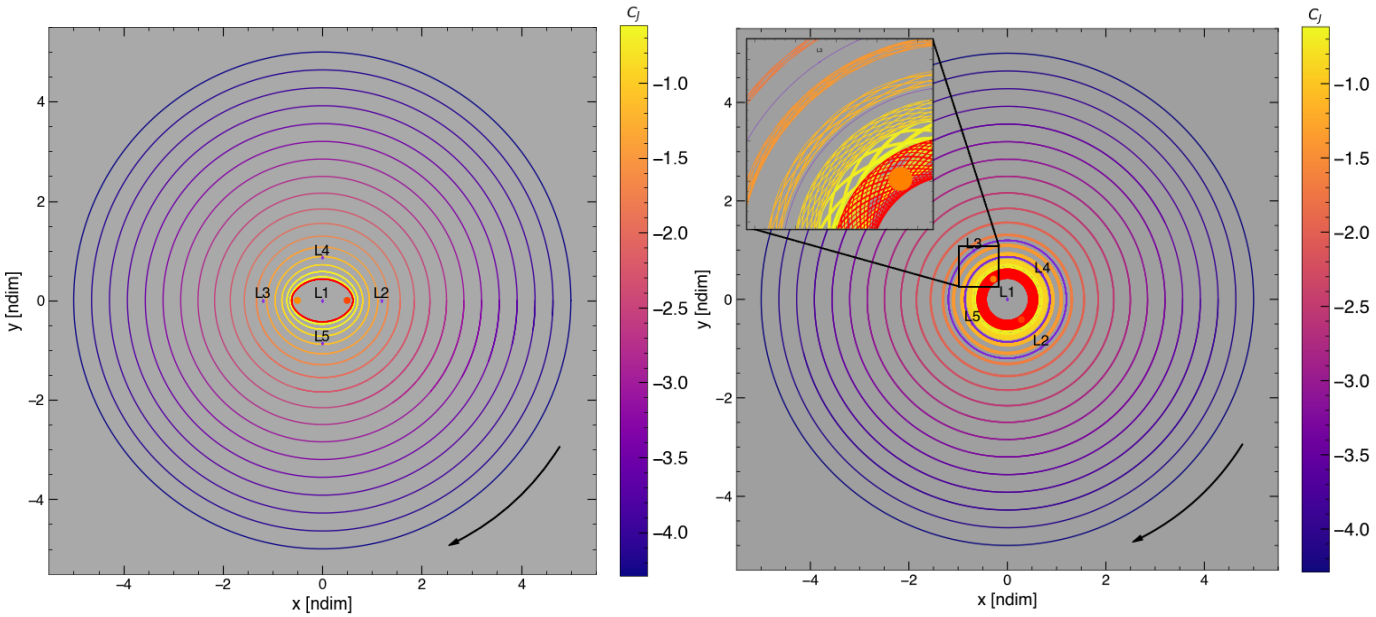
$$\bar{\mathrm{X}}^* \approx [x, 0, 0, 0, -x \pm x^{-1/2}, 0]^T \tag{20}$$

该 $\pm x^{-1/2}$ 源于在惯性坐标系中观察时，对顺行和逆行运动所作的圆形开普勒近似。[3] 因此，我们预期圆型限制性三体问题中存在两族环双星极限环。Poincar´e 通过解析延拓证明了这些族的存在（Szebehely1967）。我们求解沿着 $\hat{}x$的五种双星轨道间距下的首批周期轨道，$x_0 = 5\ a_{\mathrm{bin}}$这符合估算初始条件的假设，并涵盖了环双星系统中所有最内侧的凌日系外行星（Kostov等，2021年）。

3.1.1. *Differential Corrections Numerical Algorithm*

微分瞄准法采用基于梯度的方法来确定所需的解。在本研究中，我们采用一种简单的瞄准算法——单重射击法——来计算环双星周期轨道的初始条件（Pavlak 2010；Bosanac2016；Zimovan-Spreen2021）。单重射击¯算法由设计向量 $\mathbf{X}_{\mathrm{d}}$、约束函数 $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}}_{\mathrm{d}})$ 以及设计雅可比矩阵 $\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{d}}) \partial \bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{d}}$ 构成。¯设计向量 $\mathbf{X}_{\mathrm{d}}$包含 n 个分量，并在每次迭代时进行更¯新。约束函数 $\mathbf{G}(\mathbf{X}_{\mathrm{d}})$¯将设计变量 $\mathbf{X}_{\mathrm{d}}$ 映射为一个 m 维向量函数，该函数表示 m 个标量约束方程。该映射通过对圆型限制性三体问题的运动方程进行数值传播，并测量目标状态 $\mathbf{X}_0$ 与由设计向量 $\mathbf{X}_{\mathrm{d}}$产生的最终传播状态 $\mathbf{X}_f$之间的误差¯来实现。

[3]随着轨道周期随距质心距离增加而增大，在会合坐标系中观察时，所有环双星运动均为逆行。因此，我们仅将 *retrograde*和 *prograde* 用于指代在惯性坐标系中观察到的运动。



(a) 会合坐标系 (b) 惯性坐标系

图3. 等质量双星周围逆行族周期轨道解在会合坐标系（左）和惯性坐标系（右）中的稀疏表示。箭头表示测试粒子在各参考系中的轨迹运动。双星在会合坐标系中固定不动，在惯性坐标系中逆时针旋转。图中显示了五个拉格朗日点（会合坐标系中的不动点）。远离双星的轨迹在会合坐标系中呈现近圆轨道，并随着该族接近双星而沿着$\hat{y}$变扁。最内稳定轨道（红色，见 §3.2）位于所有拉格朗日点的内侧。它在会合坐标系中呈椭圆形状，而同一轨道在惯性坐标系中则形成复杂的准周期几何形态。

该算法通过迭代求解设计变量 $\bar{\mathrm{X}}_d^*$，使得 $\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^*) = \bar{0}$。在 $\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^*) = \bar{0}$ 附近进行一阶泰勒展开，

$$\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d}) \approx \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^*) + \frac{\partial\,\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d}))}{\partial\,\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d}}(\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d} - \bar{\mathrm{X}}_d^*) \qquad (21)$$

并重新表述为更新方程：$\bar{\mathrm{X}}_d^* \rightarrow \bar{\mathrm{X}}_d^{j+1}$，$\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d} \rightarrow \bar{\mathrm{X}}_d^j$，

$$\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^j) + \frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^j)}{\partial\,\bar{\mathrm{X}}_d^j}(\bar{\mathrm{X}}_d^{j+1} - \bar{\mathrm{X}}_d^j) = \bar{0} \qquad (22)$$

我们得到更新后的设计向量方程，$\bar{\mathrm{X}}_d^{j+1}$。如果设计变量的数量超过约束的数量，$n > m$，$\partial\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^j)\,\partial\,\bar{\mathrm{X}}_d^j$ 是一个没有逆矩阵的矩形矩阵，即奇异矩阵，因此存在无穷多个解。通过取最小范数解可以获得唯一解，

$$\bar{\mathbf{X}}^{j+1} = \bar{\mathbf{X}}^j - \frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^j)}{\partial\,\bar{\mathrm{X}}_d^j}^T \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^j)}{\partial\,\bar{\mathrm{X}}_d^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^j)}{\partial\,\bar{\mathrm{X}}_d^j}^T \right)^{-1} \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^j). \qquad (23)$$

如果 $n < m$，则该系统是超定的，不存在解。方程 23 可以通过迭代求解，直到找到一组设计变量 $\bar{\mathrm{X}}_d^*$，使得

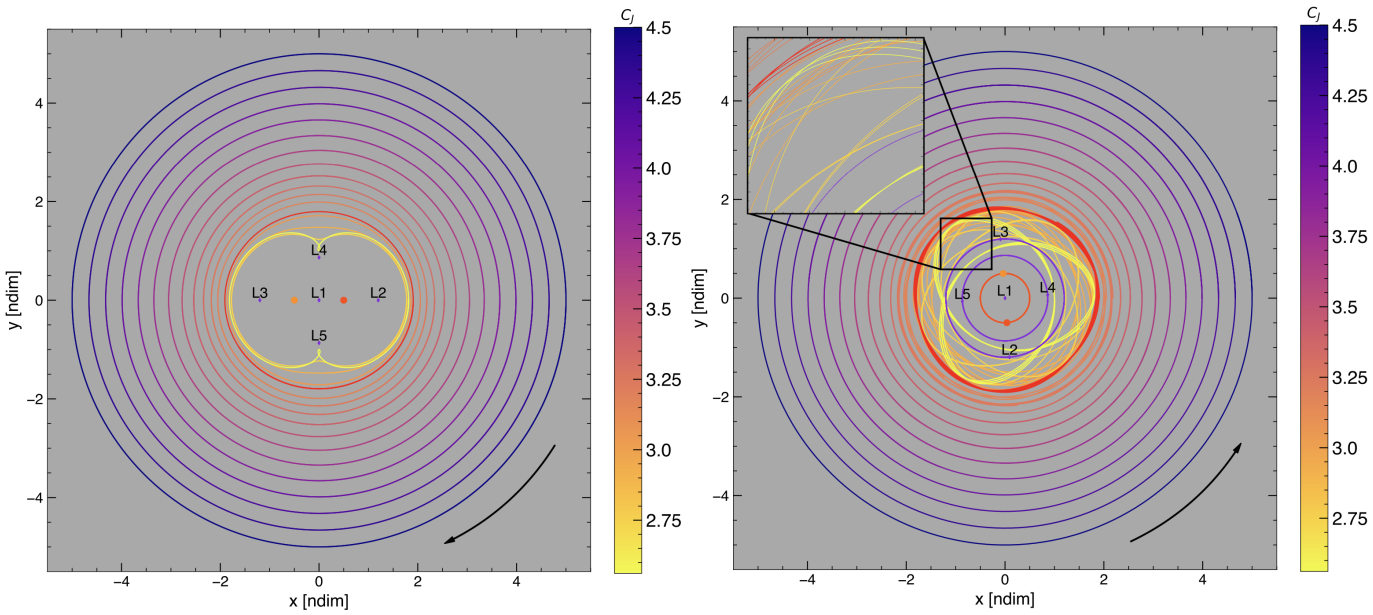
$$|\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^*)| < \epsilon$$

其中，ϵ 是解的预定容差。在本研究中，周期族初始条件通过 $\epsilon \leq 1 \times 10^{-10}$确定。

微分修正方法中最具挑战性的部分，通常是求得雅可比矩阵，该矩阵将约束向量 $\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d})$ 的线性响应表示为设计向量 $\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d}$ 的函数。幸运的是，$\mathbf{\Phi}$包含了设计向量 $\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d}$ 中状态变量的相关信息。如果传播时间也包含在设计向量 $T \in \bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d}$ 中，那么描述传播时间的变化与最终状态向量 $\bar{\mathrm{X}}_f$ 之间关系的雅可比系数包含在 $\mathbf{X}_f$ 中。关于应用于圆型限制性三体问题的微分修正算法的详细说明，参见 Pavlak (2010)、Bosanac (2016) 和 Zimovan-Spreen (2021)。

3.1.2. *Continuation of Periodic Families*

选取设计向量 $\bar{\mathrm{X}}_d = [x_0, \dot{y}_0, T]$ 和约束向量 $\mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{d}) = [y_f, \dot{x}_f]$，即可求得轨迹起点和终点均垂直穿越会合系



(a) 会合坐标系　　(b) 惯性坐标系

图4. 与图3相同，但此处为顺行周期轨道。远离双星的轨迹近乎圆形，平面内分岔极限环（红色）内侧的轨迹也如此。当雅可比常数较低时，轨迹在穿过 $x = 0$ 会合坐标系（左图）中的尖点后，最终在L4和L5附近形成环状结构。惯性坐标系（右图）显示，形成尖点的轨道会迅速绕质心进动，其进动时间尺度与轨道时间尺度相当。平面内分岔轨道（红色）在任一坐标系中都未显现出显著的几何特征。

x轴的解。根据 镜像定理，这是周期运动的充分条件（Roy 与 Ovenden（1955））。因此，设计雅可比矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d)}{\partial \bar{\mathrm{X}}_d} = \begin{bmatrix} \Phi(T,t_0)_{21} & \Phi(T,t_0)_{25} & \dot{y}_f \\ \Phi(T,t_0)_{41} & \Phi(T,t_0)_{45} & \ddot{x}_f \end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中，$\Phi(T,\ t_0)_{ij}$ 是传播后的状态转移矩阵中第 i^{th} 行第 j^{th} 列的分量，$\mathbf{\Phi}(T,\ t_0)$。

为求解连续族，我们采用伪弧长延拓法。采用伪弧长延拓法后，即使事先并不知道连续族的演化情况，也可以通过将当前周期设计向量 $\bar{\mathrm{X}}_d^*$ 的所有分量朝相邻解移动，来探索该连续族。一旦确定了逆行和顺行环双星轨道族各自的一个成员，我们便迭代应用伪弧长延拓法，求解该族中的成员，直到求得预先指定的终止解。

在伪弧长延拓中，预测下一个周期解将沿设计雅可比矩阵零空间 $\mathrm{N}\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^*)}{\partial}\mathrm{X}_d^*\right)$ 的方向。因此，下一个族成员的初始猜测值为：

$$\bar{\mathrm{X}}_d^{i+1} = \bar{\mathrm{X}}_d^{*i} + s \times \mathrm{N}\left(\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathrm{X}}_d^*)}{\partial \bar{\mathrm{X}}_d^*}\right) \tag{25}$$

其中，s 是一个标量值，用于确定沿下一解方向所采取的步长。本分析中，我们使用了 $s = 5 \times 10^{-3}$。

在伪弧长延拓中，必须选择何时停止求解族中的解。我们根据轨道与观测到的环双星运动的相关性，决定终止各族的延拓过程。对于顺行族，当轨道的会合周期达到 $T = 15$ [ndim] 时，我们便停止延拓该族，因为这些轨道已远离凌星环双星行星的近圆形环双星几何构型（Winn& Fabrycky 2015）。Bosanac 等人(2015年)将顺行族延伸至 $T = 20$ [ndim]。当逆行族的x轴交点位置距主星质量达到 $0.03\,a_{\mathrm{bin}}$时，我们便停止对其进行延拓。在距主天体质量小于 $0.03\,a_{\mathrm{bin}}$ 的范围内，我们发现，使用简单的单次打靶算法难以计算高度非线性轨迹。本研究的计算为每个族生成了 1,200–2,500 个周期解。

3.1.3. *Periodic Orbit Geometries in an Equal-Mass Binary*

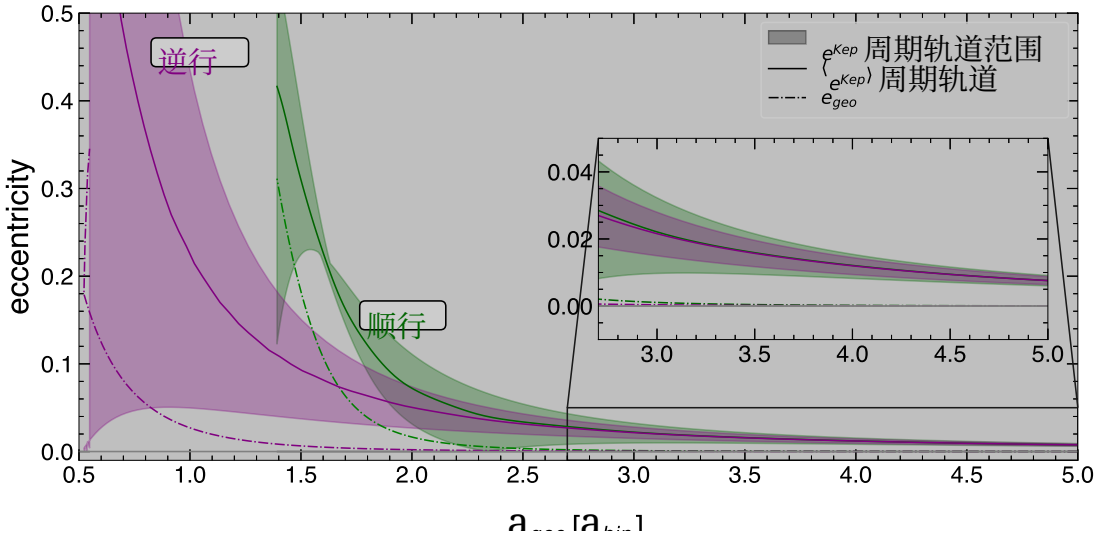


图5. 偏心率与几何半长轴的关系， $a_{\rm geo} = (r_a + r_p)/2$，围绕等质量双星运行的逆行（粉色）和顺行（蓝色）族。对于每条轨道，开普勒瞬时偏心率（式28）在一个轨道周期内变化（阴影区域），并且可以为每条轨道计算时间平均的开普勒偏心率（粗线）。随着轨迹接近双星，几何偏心率（式27，虚线）和开普勒偏心率均呈指数增长。

通过在会合坐标系和惯性坐标系中将计算得到的周期解族可视化，可以初步了解平面环双星解空间。图3和4 分别展示了圆形等质量双星系统中的环双星逆行和顺行周期解的稀疏表示，即哥本哈根问题（Str¨omgren 1922年，1938；Bosanac 等（2015））。每幅图中，左侧面板展示会合坐标系中的轨道几何形状，右侧面板展示惯性坐标系中的轨道几何形状。顺行族和逆行族中的周期解，在远离双星时都具有近圆几何形状，但在向质心移动时演化方式各不相同。逆行轨道在该族进入拉格朗日点以内时，沿 x轴明显变平。与此同时，顺行轨道也沿双星方向略微变平，但其在会合坐标系中的x轴交点达到最小值 $x_0 = 1.767\,a_{\rm bin}$ 。沿顺行族越过该轨道继续前进，会出现尖点和环绕式共振几何形状，其雅可比常数更低、周期更长。旋转坐标系中的每个周期解，在惯性坐标系中都对应一个有界准周期轨道。[4] 在会合坐标系中，逆行轨道的速度大小较大，因此雅可比常数较低（见方程5），会合周期也较短。然而，应用旋转矩阵方程12后，顺行族较小的会合速度会被“旋转掉”，并使轨迹方向反转。

在轨道动力学由单一势主导的情况下，开普勒轨道根数能够提供有关轨迹几何形状的有用信息。由于圆型限制性三体问题的解并非圆锥曲线，几何偏心率与轨迹的瞬时开普勒偏心率不同，且不一致。因此，我们采用 Sutherland& Kratter (2019年) 对几何半长轴的定义：$a_{\rm geo}$，

$$a_{\rm geo} := (r_a + r_p)/2, \tag{26}$$

以及偏心率 $e_{\rm geo}$，

$$e_{\rm geo} := (r_a - r_p)/(r_a + r_p), \tag{27}$$

用于描述有界环双星轨道的典型距离和径向变化范围，其中 r_a 是轨道的远拱点，而 r_p 是轨道的近拱点。我们对 e_{geo} （方程27）的定义不同于Bromley & Kenyon （2020a）方程 11 中提出的同名术语。 a_{geo} 的值也不同于Lee &Peale（2006年）所定义的导引中心半径 R_0；该半径或假定为开普勒半长轴，或通过快速傅里叶变换技术求得（Woo&Lee 2020）。

测量有界解（周期轨道）的瞬时开普勒偏心率和轨道速度，可以凸显环双星系统与单星系统中轨道之间的差异。过去通过长期N体模拟研究环双星运动的工作，评估了环双星运动的瞬时轨道倾角

[4]在某些特殊情况下，极限环的周期与双星周期成整数比， $T_\Gamma : T_{bin} = m : n \mid m,\ n \in \mathbf{N}$，轨迹将在惯性坐标系中以周期 $m \times n$ 重复。

以及由双星诱导的近心点幅角，并确定了环双星运动各组中的进动模式（Doolin & Blundell 2011；Chen 等人 2019年）。然而，环双星运动的典型瞬时偏心率较为复杂，因为轨迹的偏心率直接取决于初始条件设定，以及相对于"最圆"轨迹的偏差（Bromley 与 Kenyon（2020a））。将开普勒圆轨道速度（Holman& Wiegert(1999年)；Doolin& Blundell (2011年)；Quarles 等人 (2018年)；Chen 等人(2020年)）应用于距离双星不同距离的轨迹，会产生具有非零自由偏心率的轨迹，因此无法保证对典型环双星行星偏心率进行稳健采样（Bromley&Kenyon2015）。

我们的轨迹按构造即为周期轨迹，因此可为每条轨道定义明确的 $e_{\rm geo}$。我们将其与开普勒瞬时密切偏心率进行比较，

$$e_{\rm Kep} = \sqrt{1 - h^2\left(v^2 - \frac{2}{r}\right)} \tag{28}$$

其中 $h = \vec{r}\times\vec{v}$。方程 28 由二体问题的不变偏心率矢量推导而来，也可通过对 Murray &Dermott (2000）的方程 2.135 应用活力方程加以复现。在单恒星行星系统中，轨迹的[5] 值近似相等，分别为$e_{\rm geo}$ 和 $e_{\rm Kep}$。在圆型限制性三体问题中，几何偏心率可用于描述有界轨道的形状，并且在不同参考系之间保持不变。应用于环双星轨道时，开普勒偏心率衡量的是在距质心相同的距离处，环双星轨道与圆形二体轨道之间的角动量差异。

在图5上图中，我们展示了哥本哈根问题中顺行（蓝色）和逆行（粉色）周期族的几何偏心率计算值，以及密切开普勒偏心率的取值范围。随着周期解向双星靠近，其几何偏心率随之增大，这与图3 和4中最靠近双星的周期轨迹所呈现的大幅径向偏移相符。一个会合周期内密切开普勒偏心率的时间平均值也会增大，并且始终大于给定轨道的几何偏心率。测得的几何偏心率与开普勒偏心率取值范围之间存在显著差异，这凸显了它们在圆型限制性三体问题中的关联性很弱。几何偏心率是一个尤为重要的指标，因为许多天体物理过程取决于行星与恒星天体之间距离的变化。请注意，这些关系 $r_{(\text{apo, 近日点})} = a(1 \pm e)$仅当对环双星行星使用 $a_{\rm geo}$和 $e_{\rm geo}$ 取代其开普勒轨道根数定义时才成立。

借助哥本哈根问题中的逆行和顺行周期族作为环双星运动的基本解，我们考察它们与先前关于有界环双星轨道的解析预测是否一致。薄三维盘的受迫偏心率分布在靠近双星处呈指数增长（Lubow 2022）。Bromley & Kenyon (2015年) 预测，环双星行星沿着动力学上冷的轨迹运行，其作用类似于单星周围的开普勒圆轨道。他们的解析计算表明，这些轨迹以嵌套同心轨道的形式存在，受迫偏心率极小且与双星对齐——这一描述与图3 和4中的周期轨道相符。他们还发现，与解析推导出的嵌套、动力学上冷的轨道相比，选用二体问题初始条件会产生过量的自由偏心率，从而导致更多散射事件。按照构造，我们通过微分修正法求解周期性初始条件，生成一组处于不交叉（因而动力学上冷）构型中的轨迹。因此，我们认为，环双星会合极限环族构成了零偏心率双星周围存在的"最圆"轨道集合（Lee& Peale 2006；Youdin 等（2012）；Bromley & Kenyon2015，2020a）。

3.2. 分岔检测与分析

与二体问题不同，CR3BP轨道的长期稳定性可能存在差异，但轨道几何形状在视觉上却没有明显区别。因此，我们通过§2.2.2中介绍的弗洛凯理论方法，提取圆型限制性三体问题中周期解周围动力学的信息。根据解空间的局部拓扑结构识别稳定性的变化，并将其归为不同类型的分岔（Broucke 1969；Perko 1996）。在许多情况下，圆型限制性三体问题中的分岔出现在两个族在六维状态空间中相切连接之处（Bosanac 2016；Zimovan-Spreen2021）。计算这些相切族的演化超出了本研究的范围，因为（1）我们预计它们不稳定；（2）它们不太可能描述观测到的环双星行星的轨道轨迹。尽管如此，掌握圆型限制性三体问题中周期轨迹的完整解空间，是深入理解可能动力学的基础。

由于自然行星系统中预期会存在偏离精确极限环的扰动，因此，我们对周期解周围局部动力学的考察使我们能够确定这些极限环附近轨迹的长期行为，进而确定其稳定性。

[5] 只有在二体问题中，圆锥曲线是运动方程的解，$e_{\rm Kep} = e_{\rm geo}$才成立。

在圆型限制性三体问题中，弗洛凯理论可提供相关计算，从而精确定位周期解连续族中稳定性发生变化的位置（Floquet1883；Bosanac 等（2015）；Bosanac 2016）。扰动对周期轨迹的线性响应——静态、振荡或指数动力学——由 Floquet乘子[6]（方程16）刻画。因此，弗洛凯理论能够精确说明极限环周围状态空间任意方向上的线性动力学如何演化。

一个族内的分岔表现为一对 Floquet 乘子发生变化，使得沿相应特征方向施加的扰动产生定性上不同的线性动力学响应。在圆型限制性三体问题中，单值矩阵 **M**并非对称矩阵，因此其特征向量不一定正交。因此，一对特征向量发生分岔也可能意味着另一对非正交特征向量对应的扰动稳定性发生变化。通过分岔参数可以简化对特征方向及其动力学特性的描述 ν（方程 19）。在本研究中，ν_1 对应于单位Floquet 乘子对，其面内特征方向与轨迹相切。参数 ν_2对应于非单位Floquet 乘子对，其面内特征方向与切向特征向量之间的夹角会发生变化。随着周期轨道延伸至离双星更远处，面内特征方向之间的夹角趋近于零，即 $\lim_{x_0\to\infty} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0$，其中 $\hat{e}_i$，$\hat{e}_j$ 是单值矩阵中未成对的平面特征向量。最后一个参数 ν_3 对应于具有面外特征方向的非单位 Floquet 乘子，即 z，$\dot{z}$ 扰动。如§2.2.3所述，通过 ν_i 瞬时等于 ± 1 来界定分岔。

图6 展示了哥本哈根问题中顺行和逆行周期族的分岔参数演化。根据定义，ν_1 在连续族中始终保持为 1。随着各族进一步远离双星，每个 ν 参数都趋近于 1。出现三个单位ν 值意味着任何扰动都会导致产生新的极限环，这与二体问题类似；当 $x_0 \to \infty$时，圆型限制性三体问题趋近于二体问题。$\nu_2 = -1$ 的值对应倍周期分岔，而 $\nu_2 = 1$的值对应切向分岔（Gupta2020）。对于等质量双星，倍周期分岔只发生在顺行方向。其他质量比的示例见§4.1 。

[6]单值矩阵的特征值，方程 15

例。在 $\mu = 0.5$ 的逆行族和顺行族中，ν_2 处均发生切向分岔，使平面内扰动相对于参考极限环的影响由振荡（$\nu_2 < 1$）转变为指数增长（$\nu_2 > 1$）。切向分岔内部的特征向量在各个平面方向上的分量均为 x，y，$\dot{x}$，$\dot{y}$。因此，任何平面内扰动都会在切向分岔内部的极限环周围状态空间中呈指数增长，导致测试粒子长期不稳定。

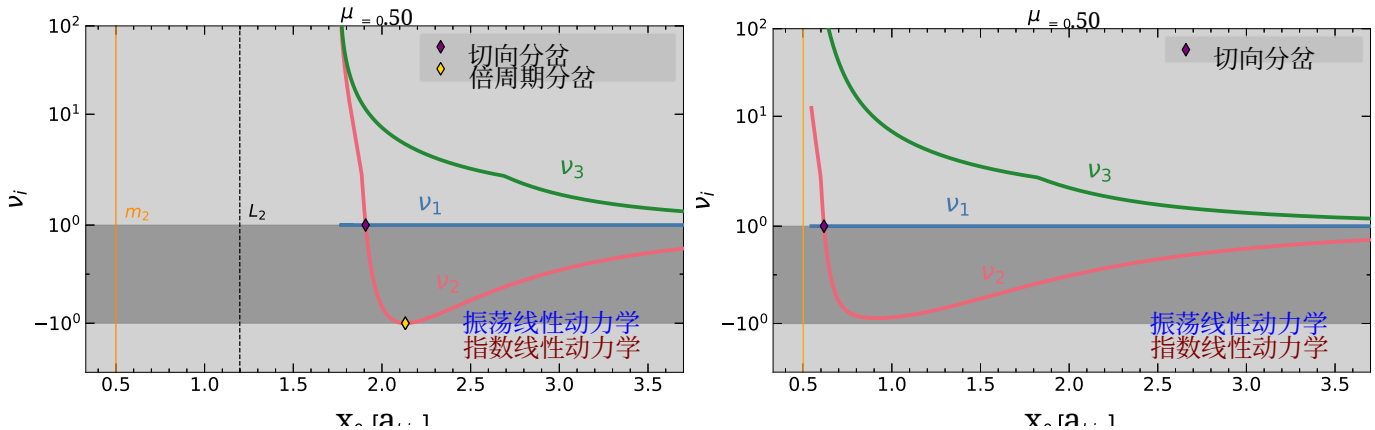
最后一对弗洛凯乘子，其特征为ν_3，具有面外特征向量，与面内特征向量对正交，ν_1，ν_2。对于我们所考察的所有$\nu_3 > 1$值，无论在顺行族还是逆行族中，面外方向上的扰动都呈现指数线性动力学（ x_0 ）。通常，指数动力学会导致极限环附近长期不稳定。然而，由于 ν_3 特征方向并非彼此正交，非线性的稳定流形与不稳定流形会相交，因此在某些条件下仍可能存在有界运动。在逆行族和顺行族中，当 sign($W^u(\mathbf{\Gamma})$ $z$sign($=$)$\dot{z}$时，不稳定流形（$W^s(\mathbf{\Gamma})$）更易被激发，从而导致运动从极限环开始指数增长。稳定流形z（ $=$ –）在 sign($\dot{z}$) $z/\dot{z}$ sign() 时更易被激发，从而使运动朝极限环指数衰减。基于符号对增长与衰减的描述，也适用于简谐运动的某些方面。我们将在§3.3 中通过数值模拟表明，沿不稳定特征方向的扰动经过长时间后会趋于振荡的有界行为，因此测试粒子对微小面外扰动是稳定的。

3.3. 考察指数动力学行为

在 §3.2 中，我们发现，弗洛凯理论预测，在哥本哈根问题中，环双星运动会出现两种指数型动力学，因此也是不稳定的情形。第一种情形存在于逆行族和顺行族中，并与面外扰动有关。第二种情形涉及切向分岔内侧的平面内扰动。第 3.3.1 节和3.3.2 节将通过数值实验，探讨这些关于指数型线性动力学的预测所带来的影响。

3.3.1. *Out-of-plane perturbations*

弗洛凯理论预测，若对顺行和逆行极限环施加面外扰动，$\hat{z}/\hat{\dot{z}}$中会出现指数动力学。然而，这种行为是相对于状态空间中的平面极限环所作的预测，并未考虑相交的稳定流形和不稳定流形所产生的长期影响。一种简单的分



(a) 顺行族 （b）逆行族

图6。 分岔参数 ν_1 （蓝色）、 ν_2 （红色）和 ν_3 （绿色）与其 x轴交叉位置的关系，分别对应绕等质量双星（$\mu = 0.5$）运行的顺行（左）和逆行（右）周期轨迹。振荡线性动力学区域（$|\nu| < 1$）和无界线性动力学区域（$|\nu| > 1$）已标出（注意 y 轴采用半对数刻度）。对于$\nu = 1$，与面内特征向量相关的 ν_2，在顺行族和逆行族中均会发生切向分岔（紫色菱形）。在顺行轨道族中，$\nu = -1$对应的 ν_2 参数会发生倍周期分岔（黄色菱形）。与面外运动相关的参数 ν_3对应于指数动力学，我们将在§3.3.1中对其进行更详细的研究。参数ν_1 在每个轨道族中均为 1，这与周期轨道连续解空间的行为一致。对于非等质量双星，请参见图11 和12 。

析方法对圆型限制性三体问题运动方程的分析表明，在通常由哥本哈根问题的环双星周期解所满足的条件下，$\hat{z}/\dot{z}$ 中的运动有界。以下推导说明，对双星外近圆轨道施加$\hat{z}/\hat{\dot{z}}$ 扰动，预计会在$\hat{z}$ 中诱发振荡运动，其频率由距质心的距离决定。

从 $\hat{z}/\hat{\dot{z}}$ 圆型限制性三体问题的运动方程出发，

$$\ddot{z} = -\frac{1-\mu}{r_{31}^3} z - \frac{\mu}{r_{32}^3} z \tag{29}$$

其中 $r_{31} = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$且 $r_{32} = \sqrt{(x-(1-\mu))^2 + y^2 + z^2}$，我们假设 $(x+\mu)^2 + y^2 \approx (x-(1-\mu))^2 + y^2 = r^2$。远离双星时，近圆轨道满足这些条件——但需注意，靠近双星时，顺行族和逆行族都不满足这一假设。假设 $z << a_{\rm bin} < r$，运动方程变为：

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &\approx -\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \\
&\approx -\frac{z}{r^3}\left(1 + \left(\frac{z}{r}\right)^2\right)^{-3/2} \\
&\approx -\frac{z}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{z^3}{r^4} + O(z^5)
\end{aligned}$$

将 z 展开到一阶，

$$z(t) \approx \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega z_0}\right)^2}\cos(\omega t - \phi_0) \tag{30}$$

其中 $\omega = r^{-3/2}$ 且 $\phi_0 = \tan^{-1}(\dot{z}_0/\omega z_0)$。方程30 预言，对顺行或逆行极限环中的一个成员，$\hat{z}$ 的微小扰动幅度有界，并围绕 $z = 0$振荡。

为检验方程30的有效性，我们将简谐振子模型与数值圆型限制性三体问题实验进行比较：沿不稳定流形方向，在距双星逐渐增加的位置对极限环施加面外扰动，见图7。不稳定弗洛凯乘子的特征向量方向给出了面外分量之间适当的比值z_0 ： $\dot{z}_0$。在顺行族中，该比值约为 9 : 1。我们通过生成倾角来确定扰动幅度，这些倾角与开普勒双星周围行星的实测倾角相当，但更大（Winn & Fabrycky 2015年）。这确保我们的分析涵盖了与可观测环双星行星系统相似范围的倾角。

图 7显示，沿 $z/\dot{z}$ 方向受到扰动的顺行轨道，与简谐振子模型预测的最大振幅高度吻合。最重要的是，这种吻合甚至延伸到了顺行族中接近平面内分岔轨道的区域。在逆行族中，我们发现，沿 $z/\dot{z}$施加的量级为 10^{-1}的扰动，与简谐振子模型对 $x_0 > 1\ a_{\rm bin}$所描述的有界运动一致。对于距双星足够远的轨迹，简谐振子模型还能准确预测绕平面振荡的角频率。

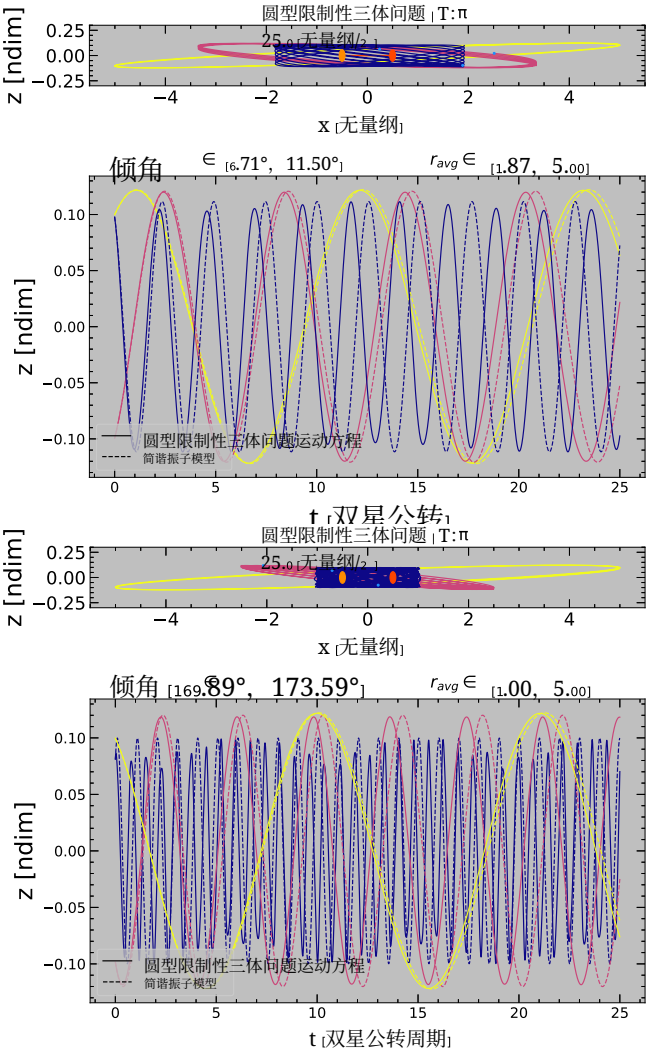


图7。面外方向上，沿不稳定不变流形的顺行（上组）和逆行（下组）极限环的受扰轨道轨迹，$z/\dot{z}$。惯性的 $x-z$ 投影（小图）显示了倾斜轨道。大图中，圆型限制性三体问题运动方程随时间的传播结果（实线）与由线性化运动方程推导出的简谐振子解析模型（虚线）进行了比较。解析模型，即方程 30，总体上与环双星运动面外扰动的数值振幅和角频率一致。这表明，对于距离双星足够远的情况，面外相交的不稳定/稳定流形可在较长时间尺度上使状态空间中的运动保持有界。

这次数值实验凸显了不变流形作为环双星轨道动力学中动力学结构所发挥的微妙作用。由于任何物理上的环双星行星（CBP）都具有非零倾角，面外不变流形会影响行星轨道的长期演化。在非线性动力学系统中，不稳定不变流形充当附近轨迹的吸引曲面且具有相同的雅可比常数（Perko 1996）。因此，我们应当预期，倾斜的环双星轨迹近似沿着环双星极限环的不变不稳定流形运行。

3.3.2. 平面内切向分岔

环双星轨迹中不稳定性的第二种预言，源于双星平面内发生的切向分岔。这一现象表现为一对复数值弗洛凯乘子趋于 1，随后沿实轴分离（Gupta 2020年；Boudad 2022年）。

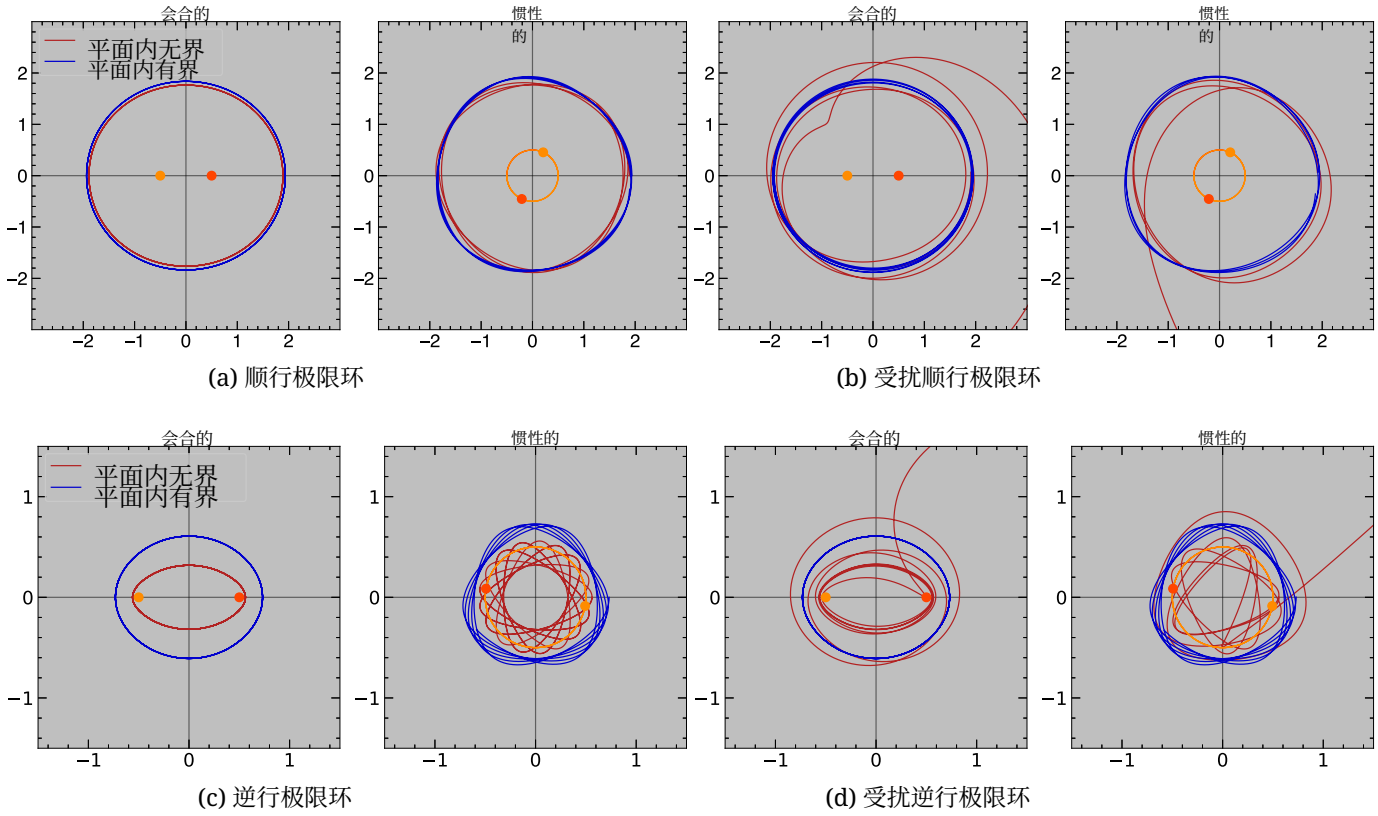
图 8 展示了沿分岔特征方向对极限环施加扰动的影响，分别给出了会合坐标系和惯性坐标系中分岔内侧（蓝色）与外侧（红色）的情况。这些周期轨道的几何形态和解并无显著差异。若不施加扰动，这些数学解将作为有界轨道存在，并在任意长时间内按固定间隔重复。

图 8右侧中，极限环沿分岔特征方向受到扰动，扰动量为 10^{-1}。扰动后各条轨迹的行为在定性上符合弗洛凯理论的线性动力学预言。分岔外侧的轨迹围绕周期解振荡，因此在会合坐标系和惯性坐标系中均呈现有界运动。然而，分岔内侧受到扰动的轨迹会指数级偏离其对应的周期解，最终看起来被抛射出系统。

这项关于平面内稳定性的数值实验，将我们的弗洛凯理论计算置于长时间积分方法的研究范畴之中（Holman& Wiegert1999；Doolin &Blundell 2011；Quarles etal. 2018；Chen 等人 2019）。我们已证明，振荡动力学极限环附近的轨迹，在经历数次双星公转后仍保持有界[7]，；而指数动力学极限环周围的轨迹则会在同一时间内被抛射出系统。因此，分岔极限环为无界与有界环双星轨迹的解空间提供了一条分界线。平面环双星极限环族中的分岔，为广泛记录的双星附近环双星轨迹不稳定性提供了一种可能的潜在动力学机制（Holman&Wiegert 1999；Doolin& Blundell 2011；Winn & Fabrycky 2015；Li 等人 2016；Quarles et al. 2018；Chen 等人 2019）。

3.3.3. *Circumbinary Solution Space for* $\mu = 0.5$

[7] 请参见§5.3 以了解基于 $\sim 10^5\, P_{\rm bin}$ 模拟的分析。



(a) 顺行极限环 (b) 受扰顺行极限环

(c) 逆行极限环 (d) 受扰逆行极限环

图8。对几何形状相似的轨道施加平面内扰动，根据轨道位于稳定性变化分岔的有界侧（蓝色）还是无界侧（红色），会产生性质截然不同的结果。上排左侧两幅图：顺行族中的两条周期轨迹，分别显示在会合系（左）和惯性系（右）中，并标出了恒星的位置和轨道（橙色和红色圆点）。上排右侧两幅图：沿切向分岔对应的特征方向对轨道施加扰动。对有界轨道（蓝色）的扰动会导致其围绕极限环作准周期运动，而对无界轨道（红色）的扰动则会使其被抛出双星系统。下排：与上文相同，但展示的是平面内扰动后仍保持有界（蓝色）或变为无界（红色）的逆行轨道。注意坐标轴不同。

对于圆型限制性三体问题中绕一个主天体运动的轨迹，其可达区域通常由该轨迹的零速度曲线界定。然而，对于环双星运动的轨迹，其在构型空间中的可达区域没有外边界，有时也没有内边界。简而言之，圆型限制性三体问题仅提供了环双星运动中有界轨迹的最低限度判据。不过，极限环族呈现出一种涌现的动力学结构，能够刻画有界环双星运动的典型几何性质和稳定性。

为了直观展示环双星解空间，图9给出了位于第二个质量体外侧的周期解族，并绘制了 $+x$轴交点与雅可比常数的关系。图9 中的纵轴采用倒置表示，以便将雅可比常数与更直观的不变量框架——能量——联系起来。等质量情形下，零速度面的一个截面表示了轨迹无法进入的解空间区域，因为轨迹的速度将不再为实数。

同时还展示了轨迹相对于惯性坐标系沿顺行方向或逆行方向绕行的分界线，这与我们此前关于各解族运动方向的论述一致。[8] m_2 的会合位置由位于 $x = +0.50$处的橙色竖线标出。

图9，我们称之为分岔图，以简洁的方式展示了四维平面环双星解空间。周期轨道的连续族以粗黑线表示：顺行族、逆行族以及

[8]顺行与逆行之间的边界，是通过求解给定 x 轴交点处的雅可比常数得到的；该常数对应的速度相对于质心在$\hat{z}$ 方向上的角动量为零。

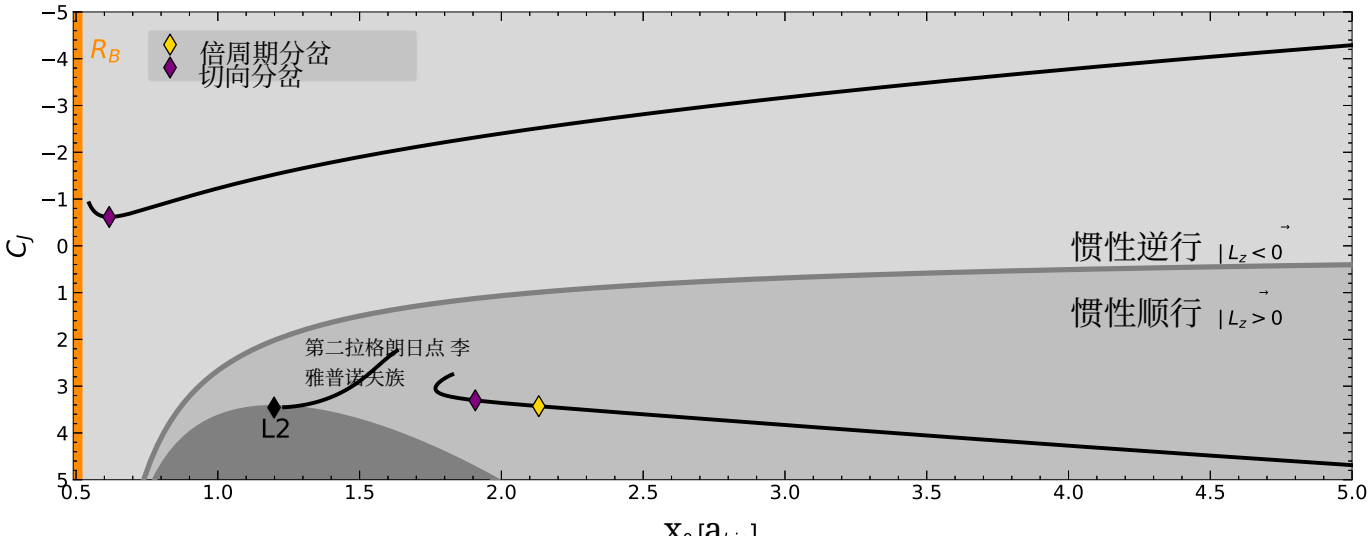


图9. 图中以环双星轨道极限环（黑色）的正向x轴交点和雅可比常数为参数绘制了这些轨道。该图展示了极限环分岔的位置（菱形）以及周期运动在状态空间中的演化。负向x轴交点与正向交点对称（第二拉格朗日点李雅普诺夫族除外），因此未予展示。顺行族和平面第二拉格朗日点李雅普诺夫族位于解空间中互不相交的区域。

L2 李雅普诺夫族。[9] 请注意，在所计算的状态空间区域内，各族彼此既不重叠也不相交。逆行族几乎一直延伸到双星附近，而顺行族则在 $x_0 \approx 1.767\,a_{\rm bin}$处折返。顺行族在靠近双星处可能受到 L2不动点及其对应的 L2 李雅普诺夫族的限制，不过，对这些族之间相互作用的详细研究不在本研究的讨论范围内。顺行族有两个分岔——在 $x_0 \approx 2.131\,a_{\rm bin}$ 处发生的倍周期分岔，以及在$x_0 \approx 1.907\,a_{\rm bin}$ 处发生的切向分岔——二者都位于顺行族折返处拐点的外侧。[10]

逆行族在接近双星时不受影响，因为其周围的状态空间缺乏动力学特征。面内切向分岔发生在逆行族的雅可比常数最小值处。越过这一点后，轨迹在平面内呈现无界行为，且雅可比常数不断减小。环双星极限环及其在状态空间中的分岔位置，为环双星运动的位置提供了观测约束，其作用类似于环恒星运动中的零速度曲线。

[9]平面第二拉格朗日点李雅普诺夫族由一组不稳定极限环构成，这些极限环绕第二拉格朗日点运行，为理解环双星顺行运动提供了相关的动力学结构。[10]求解分岔轨道处的切向极限环，将填补解空间中的部分区域，并揭示更为奇异的周期族。

4. 质量比下的动力学行为

哥本哈根问题（§3）是圆型限制性三体问题的极限情形。本节将动力系统方法扩展至不同双星系统质量比的情形，以研究动力学特征的出现。本节所列的质量比 $\mu \in [0.01, 0.50]$ 涵盖了美国国家航空航天局开普勒任务和 TESS 环双星行星宿主双星系统的观测质量比（Winn &Fabrycky2015；Kostov等，2021年）。这些质量比不同于 $\mu < 0.01$；在该质量比范围内，圆型限制性三体问题的周期族结构迅速变化，并趋近于希尔问题（Bosanac 等（2015））。

4.1. 轨道几何

我们采用第3.1.1 节和3.1.2节所述的单次打靶算法和伪弧长延拓技术，计算了圆型限制性三体问题中的环双星顺行族和逆行族。图10 展示了若干选定质量比下这些轨道族的稀疏表示，其中包括选取的 x轴交点对应的轨道（蓝色、紫色、品红色、玫瑰色和橙色曲线），以及各轨道族中计算得到的最内侧轨道（黄色）。

远离质心的周期轨迹在所有质量比下几乎完全相同。对于具有$x_0 \lesssim 2\,a_{\rm bin}$的轨迹，不同质量比之间的几何形状略有差异。在顺行族中，最内侧轨迹尖点的位置与 L4 和 L5 平衡点相对应。对于质量比为 $\mu \in [0.2, 0.5]$ 的情况，我们在环双星顺行轨迹中发现了一个转折点；越过该点后，继续沿该族前进会产生高能量、快速进动的轨道。在逆行

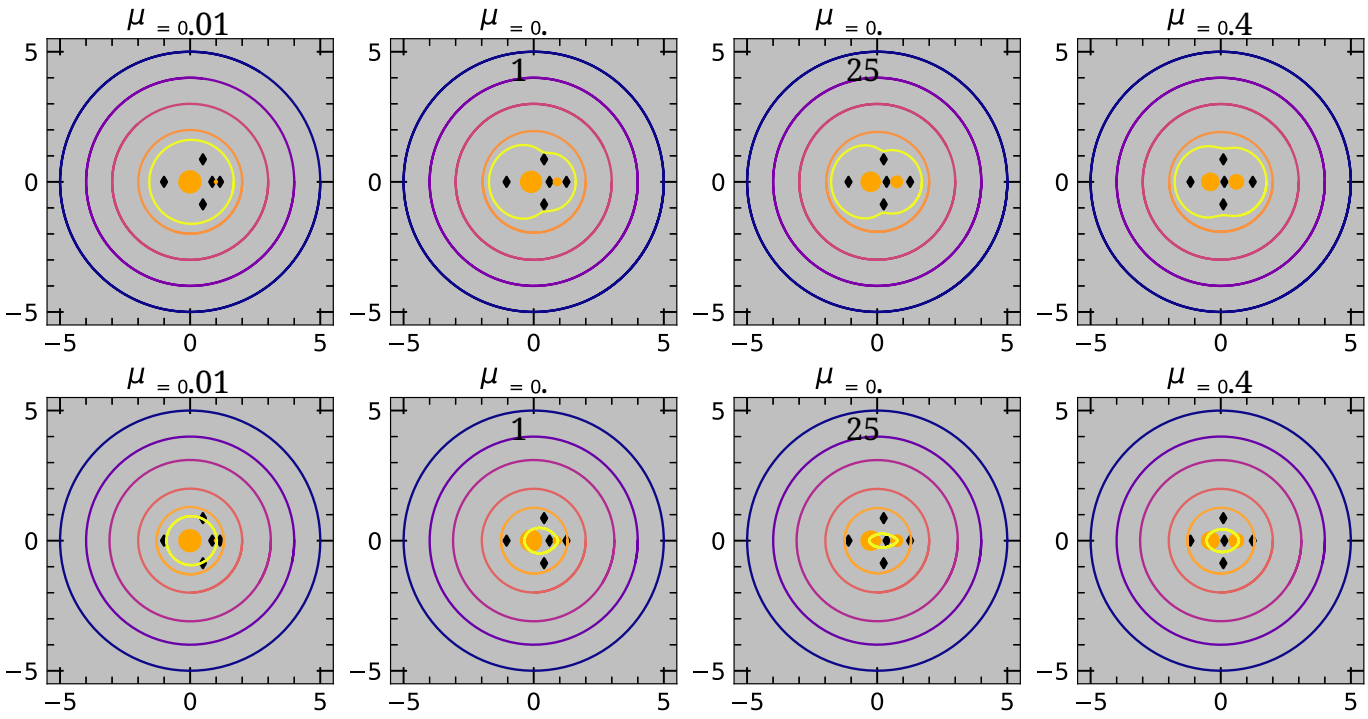


图10。 对于选定的双星质量比 μ，会合坐标系中顺行（顶部）和逆行（底部）周期性环双星轨道族的稀疏表示。所有轨迹均在会合坐标系中沿顺时针方向传播。主星的相对大小按照其质量分数进行缩放。图中标出了每个系统的五个不动点（拉格朗日点）。对于所有质量比，超过 $2\,a_{\rm bin}$ 的周期轨迹均保持近圆几何形状

族中，只有在拉格朗日点以内，不同质量比下的周期轨迹才会呈现明显的视觉差异。除 $\mu = 0.01$外，所有最内侧的逆行周期轨迹都沿 x轴变平； $\mu = 0.01$则保持近圆几何形状。总体而言，不同质量比下的周期轨迹在轨道几何形状上略有变化，其中具有$x_0 > 2\,a_{\rm bin}$ 的轨迹随 μ 变化极小。

4.2. 质量比变化下的动力学演化

在本节中，我们将§3.2中的动力系统方法扩展至§4.1 中所展示的已计算出的逆行和顺行周期族，以更好地理解质量比如何影响环双星轨道动力学。

4.2.1. 质量比变化趋势

对于给定的质量比系统，我们通过计算参数 ν_i（见方程 19），识别出环双星运动极限环各族中的稳定性分岔。分岔在某族内部的点 $\nu_i = \pm 1$ 处瞬时发生。图 11和 12 展示了分岔参数 ν_i 随双星质量比 μ的变化趋势。如§3.2所述，ν_1 和 ν_2 分别对应于双星平面内的特征方向（x， y， $\dot{x}$， $\dot{y}$）以及面外方向（z， $\dot{z}$）。

在顺行族中，随着极限环逐渐接近双星，会连续发生两次倍周期分岔，见图11。在这两个倍周期分岔极限环之间，沿该族的解空间呈现指数线性动力学。这种动力学的特征是：轨迹在双星平面内会因扰动而变得不稳定。对于所有计算得到的 $0.01 \leq \mu < 0.50$值，都会出现这一不稳定区域。我们发现的这一不稳定区域，与（Bosanac 等（2015））图5a中所示的一条平面不稳定带相对应；该图展示了会合周期为 $T = \approx 9.42$ 、质量比为 $10^{-5} \leq \mu < 0.50$时的极限环。在倍周期分岔的内侧，我们在 ν_2中检测到切向分岔。越过切触分岔极限环后，顺行轨迹通常在平面内无界。然而，Bosanac 等人 (2015年)（图5a）发现，在 $\mu \in [0.1, 0.5]$条件下存在一条狭窄的平面稳定轨迹带，其轨迹具有环绕式几何形态。总体而言，质量比 $\mu \in [0.05, 0.50]$ 范围内的分岔特征与哥本哈根问题大体相似，但倍周期分岔之间还出现了小片不稳定区域。Bosanac 等人 (2015年)的图5“排除图”也展示了对顺行环双星限制性三体问题解空间的这一刻画，其中定性稳定性表示为会合周期和系统质量比的函数。

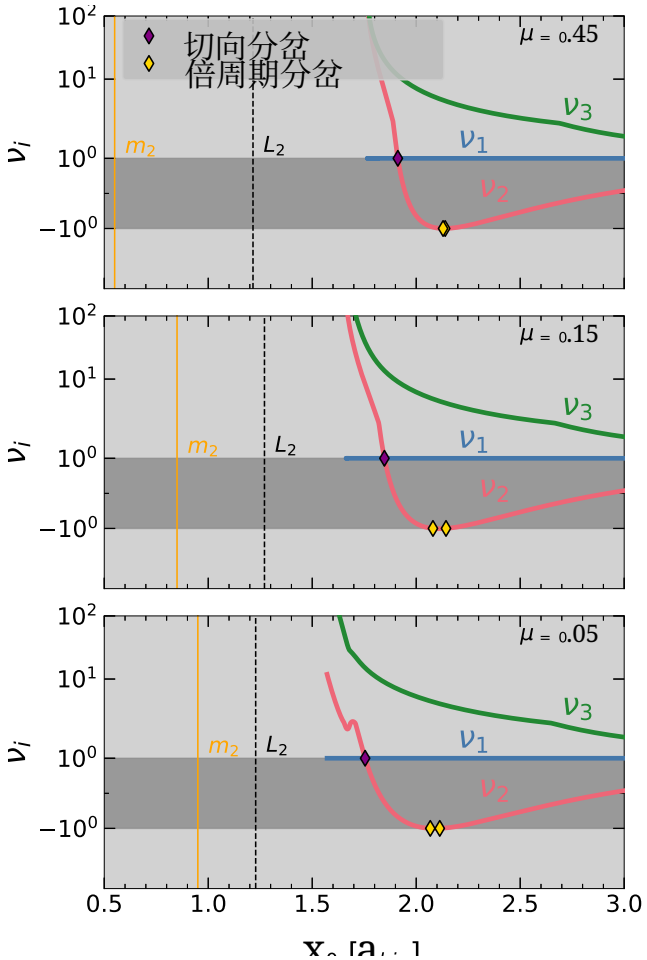


图11. 与图 6 左图相同，但对应多种恒星质量比；$\mu = [0.05, 0.15, 0.45]$。标出了伴星（$x_0 = 1-\mu$，橙色直线）和第二拉格朗日点（黑色虚线）的位置。注意，对于 $\mu < 0.50$，在一个平面内扰动会导致指数增长的区域两侧各有一个倍周期分岔。倍周期分岔和切向分岔的位置随恒星质量比而变化。

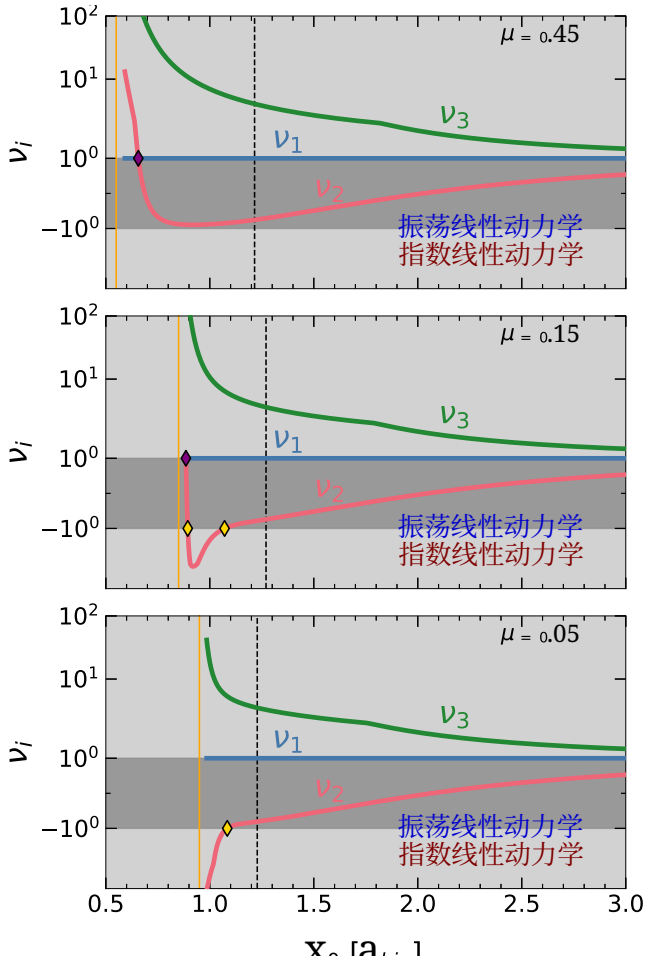


图12. 与图11相同，但对应逆行轨道，类似于图6右图。我们发现，对于 $\mu = 0.45$ 和 $\mu = 0.15$，存在一个对应于最内侧稳定轨道的切向分岔，但对于 $\mu = 0.05$则不存在。注意，在 $\mu = 0.45$ 和 $\mu = 0.15$之间出现了一对倍周期分岔。

逆行族的分岔随质量比的变化，比顺行族对应分岔的变化显著得多，详见图12。在较高质量比下，$\mu \geq 0.33$，我们测得一次切向分岔，发生位置接近次级天体的所在处（图12 上图）。请注意，切向分岔内侧的轨迹在双星平面内无界（§3.2）。在质量比 $0.13 \geq \mu \geq 0.32$范围内，会出现一对倍周期分岔，从而限制切向分岔外侧的有界运动区域。在 $\mu = 0.13$附近，ν_2 趋近于无穷斜率（图12 中图）。在 $\mu < 0.13$条件下，我们只检测到一次倍周期分岔（图12 下图）。在这一质量范围内，ν_2 不再具有产生另一次倍周期分岔和切向分岔的拐点分岔。因此，具有这一主天体质量比的环双星系统，其动力学结构从根本上不同于哥本哈根问题。

4.2.2. *CR3BP Solution Space for Various Mass Ratios*

质量比为时逆行和顺行环双星周期族的计算会产生大量数据。质量参数 μ 范围内六维极限环的解空间如图13所示，这是对图9 在多种质量比下的扩展。图13展示了质量比变化时，逆行和顺行极限环解空间的相似性。随着与双星距离增大，各周期族都单调趋近于相似的解。这与以下认识一致：首项

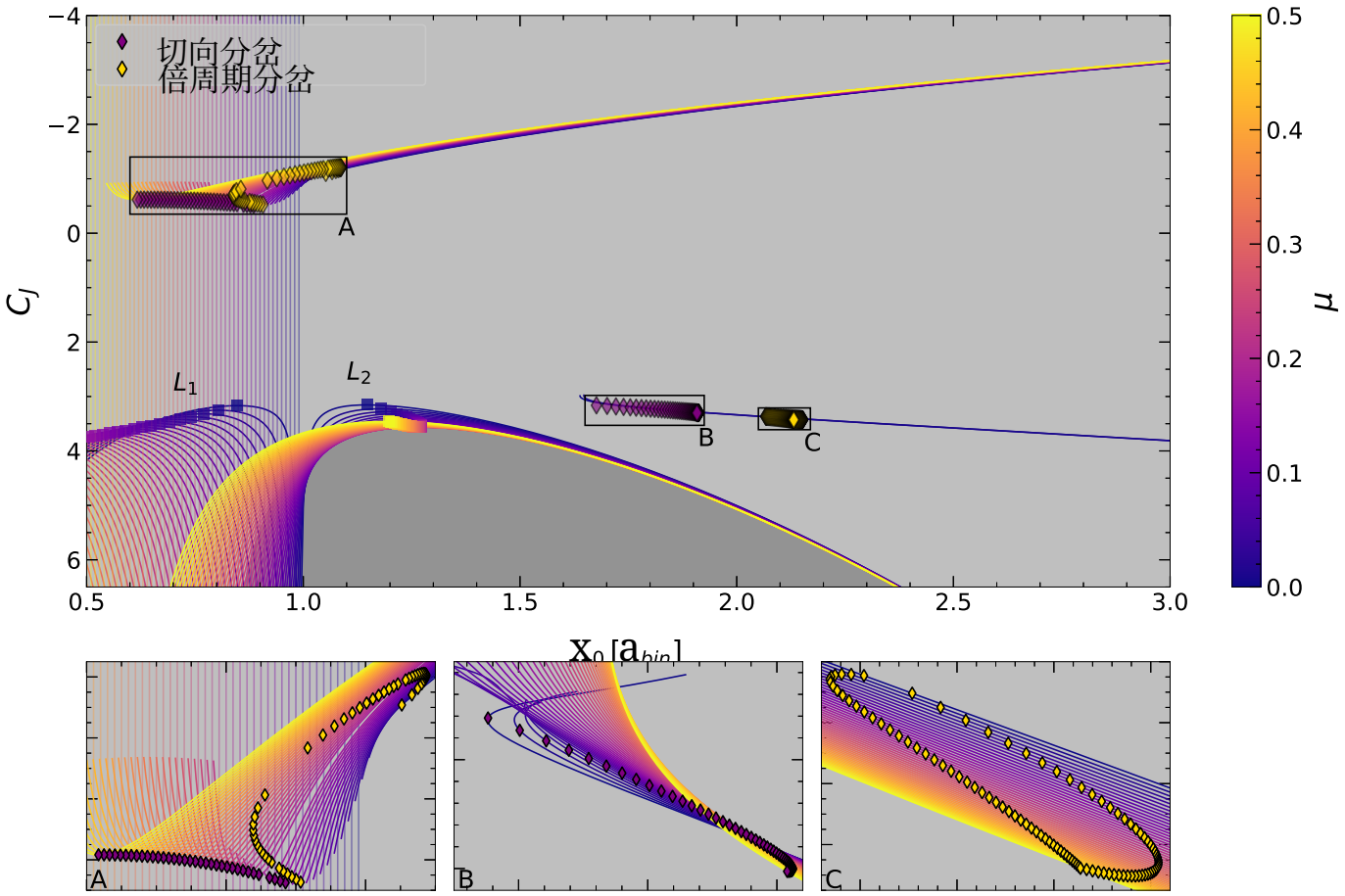


图13。上图：与图9相同，但坐标轴范围不同，并展示了多种恒星质量比（μ，颜色）。图中展示了逆行和顺行轨道族（粗线）、零速度等值线的截面（细曲线）以及伴星的位置（细竖线）。各轨道族中的分岔以菱形标出。为使图示清晰，未显示第二拉格朗日点李雅普诺夫族，但标出了L1和L2拉格朗日点。下图：逆行族中的分岔区域（A）、顺行族中的切向分岔（B）以及顺行族中的倍周期分岔（C）。

双星势展开中不含质量比。

逆行族的解空间在接近低质量比轨道族中首次出现倍周期分岔的位置之前，仍相对完整；该位置为 $x_0 \approx 0。87$。图13的A面板展示了逆行族中的分岔随质量比变化的过程。与图12相同，高质量比 $\mu \geq 0.34$的轨道族仅有一个切向分岔。在 $\mu \approx 0.33$处，一对倍周期分岔出现并持续演化，直至$\mu \approx 0.13$，此时内部的倍周期分岔与切向分岔相撞。图13 还直观地显示，切向分岔位于逆行族中雅可比常数取最大值的解处。虽然本研究未明确求解这一问题，但切向分岔与倍周期分岔的碰撞可能标志着逆行族中最大雅可比常数解的终止。

在倍周期分岔（图 C）以内，顺行极限环仍然相似，只有在更接近切向分岔处才会出现差异（图 B）。对于质量比 $\mu \in [0.01, 0.04] \cup [0.11, 0.50]$，我们沿顺行族确定了转折点，此后极限环沿 ˆ 向外移动x_0。对于 $\mu = 0.01$，转折点靠近切向分岔；而对于更高的 μ，转折点位于切向分岔以内，因此代表一个对线性扰动不稳定的解空间。图13 的图 B 和图 C 详细展示了不同质量比的顺行族中的分岔。在图 B 中，我们观察到切向分岔逐渐向外移动，直至 $\mu \approx 0.42$。在 $0.2 \lesssim \mu \leq 0.5$之间，切向分岔的位置被限制在 x_0之间$[1.872, 1.193]$。在较大质量比范围内，切向分岔位置仅发生相对较小的变化，这表明近距离环双星运动同样会受到两个大质量天体存在的影响

对于不同的质量比。在低质量比族中，我们观察到最小 x 交叉位置在 $\mu = 0.04 \rightarrow \min(x_0) = 1.676$ 和 $\mu = 0.05 \rightarrow \min(x_0) < 1.571$之间发生了相当显著的变化。然而，切向分岔在所有质量比范围内均连续演化，并且随着质量比减小，雅可比常数单调减小。图 C 展示了顺行族中倍周期分岔的成对演化。我们观察到，这一对分岔起源于 $\mu = 0.5$族中的 $x_0 = 2.1318$处。外部分岔在 $\mu = 0.27$处达到最大值 $x_0 = 2.1520$。内侧倍周期分岔在 $\mu = 0.06$处达到最小值 $x_0 = 2.0671$。随着 $\mu \rightarrow 0$ –，这一对分岔似乎正在趋于汇聚，并将在 $x_0 \approx 2.08$ 处相撞；当然，在 $\mu = 0$处不应存在分岔。倍周期分岔之间所涵盖的 x_0值范围最大时，发生在 $\mu = 0.13$、 $\Delta x_0 = 0.0634$处。我们对顺行族的计算和分岔分析，与 Bosanac 等（2015）在相同质量比域内对环双星平面稳定性的计算结果一致。

5. 临界稳定轨道

不同于单星系统，环双星行星系统具有一条最内侧稳定轨道，它严格限制了有界运动。存在于这条临界稳定轨道以内的物质会很快被抛射出系统。最内侧稳定轨道距质心的距离，即$_c$，被认为是双星行星架构的一项基本属性（Winn& Fabrycky 2015）。因此，$_c$ 是针对一系列系统和动力学模型经常进行的计算（Holman & Wiegert 1999；Doolin& Blundell 2011；Quarles etal. 2018；Chen等人2020）。双星的偏心率和质量比是影响系统最内侧稳定轨道位置的主要动力学参数。分岔图（图13）概略展示了给定质量比下圆形双星的环双星轨道族。然而，为了比较不同质量比之间以及与其他研究的结果，我们最关注的是轨道族中的极限环，因为它们界定了其他动力学性质相似的解之间的边界。为将我们的结果应用于更广泛的背景中，我们定义了两类极限环，其特征如下：

临界稳定轨道 – 定义了具有定性不同动力学的解空间之间边界的分岔极限环

最内侧稳定轨道 –最接近双星的临界稳定极限环（在本研究中记作 a_c ）

在本研究中，我们通过分岔分析，精确确定了 CR3BP 在质量比$\mu \in [0.01, 0.50]$ 范围内允许的顺行和逆行轨道的最内侧稳定轨道。我们还确定了若干并非最内侧稳定轨道、但仍界定稳定与不稳定平面动力学区域边界的临界稳定轨道。我们的广义结果使动力系统方法能够与用于测量双星系统中 a_c 的长期积分方法进行直接比较。

5.1. 识别最内侧稳定轨道的既有方法

在比较最内侧稳$_c$定轨道的结果之前，值得回顾一下用于计算 a_c 的模型和方法。Holman & Wiegert（1999年）采用椭圆限制性三体问题（ER3BP），对初始处于顺行开普勒圆轨道上的试验粒子的长期行为进行建模。他们通过确定八个等间隔粒子平近点$_c$角存活 $_{HW}$ 所需的初始距离，得出了 a 10^4 P_{bin}。Doolin & Blundell（2011年）也将 ER3BP 用于初始处于圆形开普勒轨道上的粒子 10^4 P_{bin}，并在 Holman & Wiegert（1999年）的基础上：（1）将试验粒子初始位置的采样分辨率提高一倍；（2）考察逆行和非平面轨道上的粒子。Doolin & Blun-dell（2011年）绘制了模拟中初始条件的存活情况，但未明确列出数值，也未公开其结果。为了确定 a_c，我们目视检查了 Doolin & Blundell（2011年）的图14，并估算了其最内稳定轨道距离的数值和误差。Quarles 等（2018年）采用 mercury（Chambers 等，2002年）程序包中的伴随积分器进行 N体模拟，以检验木星质量天体在初始开普勒圆轨道速度下沿顺行平面轨道运动 10^5 P_{bin} 的存活情况。Quarles 等（2018年）在初始粒子位置、平近点角和双星质量比取值方面采用了 Holman & Wiegert（1999年）十倍的采样分辨率。Quarles 等（2018年）采用了与 Holman & Wiegert（1999年）相同的标准来确定 a_c——即所有初始平近点角下的粒子都能存活至积分结束时所对应的初始半长轴。Chen 等（2020年）也通过长时间 N体积分，使用 rebound（Rein & Liu 2012）中的二阶辛 Wisdom-Holman 积分器，研究了初始速度为开普勒圆轨道速度的平面及极向环双星轨道的稳定性。Chen 等（2020年）未测试 $e_{bin} = 0$ ，也未给出 a_c 的明确结果。

5.2. 不同研究之间临界稳定轨道的比较

现在，我们考察先前长时间积分的研究以及我们的动力系统理论结果，研究质量比为 $\mu \in [0.01, 0.50]$ 的圆轨道双星周围环双星行星的最内侧稳定轨道位置 a_{c}。我们的动力系统结果给出了临界稳定轨道，它们在六维状态空间中划分出无界动力学区域和有界动力学区域。为将这些结果推广到可与先前研究进行比较，我们采用临界稳定轨道的几何半长轴 $a_{\rm geo} = (r_a + r_p)/2$，作为距质心代表性距离的测量值。

图14 比较了四项研究中顺行平面轨道的$_{c}$ 和临界稳定轨道的结果。各$_{c}$ 的拟合表达式在可能的情况下绘制于其原始数据的域上。[11] 我们的分析所得的$_{c}$ 值，对于 μ的所有取值，均等于或小于先前研究所得的值。我们还发现，在由一对临界稳定轨道确定的最内侧稳定轨道外侧，存在无界平面动力学区域。这些临界稳定轨道是顺行族内一对倍周期分岔的结果——因此我们将这些不稳定区域称为倍周期排斥区。四系数模型（方程32）近似描述了临界稳定轨道的半长轴如何随恒星质量比变化（表4）。

每项研究都发现，$_{c}$ 在域 $\mu \in [0.30, 0.50]$内几乎保持不变。有趣的是，尽管Holman & Wiegert (1999年)（蓝色方块）和Quar- les 等人 (2018年)分别采用了不同的模型（受限模型和N体模型）及采样分辨率，但它们关于$_{c}$ 的结果总体一致。值得注意的是，Quarles 等人 (2018年)的最内侧稳定轨道在 $\mu \approx 0.11$处（但不位于其中）跨越了我们计算得到的倍周期排斥区（黄色菱形）。与此同时，Doolin &Blundell (2011年)的长期积分（绿色三角形）得到的最内侧存活轨道，与我们计算得到的最内侧有界轨道一致（紫色菱形）。注，在极限 $e_{\rm bin} = 0$下，Holman & Wiegert(1999年)、Doolin & Blundell (2011年)以及我们的工作均采用完全相同的动力学模型（受限圆模型），而Quarles 等人(2018年)则将行星质量视为非零。

图 15 展示了 Doolin& Blundell (2011年) 和我们的逆行临界稳定轨道。由于逆行族中的分岔格局不断变化，我们的动力系统研究结果对最内侧稳定轨道给出了更细致的图景。在高质量比下，逆行排斥区并不存在，最内侧稳定轨道由切向分岔周期轨道决定。我们与 $a_{c,\ \rm DB}$ 在大质量比下的结论不一致，可能有以下两种解释。首先，Doolin &Blundell (2011年)也没有明确说明最小采样距离，因此他们可能没有像我们的方法那样，将逆行轨道的初始位置设在离双星如此近的地方。其次，如果Doolin &Blundell (2011年)确实采样了靠近双星的区域，那么他们的二体问题初始条件或许不足以在三体动力环境中产生有界运动；而我们通过对轨迹进行微分校正，使其收敛到闭合轨道，从而保证初始条件能够产生有界运动。在 $0.13 \leq \mu \leq 0.32$ 最内侧稳定轨道正外侧的解空间，会被倍周期排斥区填满。随着质量比降低，该排斥区会迅速压缩切向分岔附近有界运动所允许的解空间。对于 $\mu \lesssim 0.12$，只有一个倍周期分岔（参见图12），且该分岔以内的所有轨道对扰动都不稳定。对于这些低质量比，Doolin &Blundell(2011年)发现的最内侧稳定轨道，与我们通过分岔分析确定的 a_{c} 数值一致。我们测得，在低质量比（$\mu \leq 0.12$）下，逆行轨道中的 $a_{c,\ \rm LW}$ 相当稳定，并预期 $a_{c,\ \rm LW} \to 1$ 为 $\mu \to 0$ – 与二体问题的结果一致。

双星与环双星行星之间的平均运动轨道共振，常被视为会稳定或破坏行星轨道的动力学特征。除临界半长轴外，图14 和15 还绘出了显著恒星共振对应的等效半长轴随双星质量比变化的情况。这些恒星共振通过以下方式计算：

$$\frac{1}{P_{\rm sid}} = \left| \frac{1}{P_{\rm bin}} - \frac{1}{P_{\rm syn}} \right| \tag{31}$$

其中，$P_{\rm bin}$ 是双星的周期，$P_{\rm syn}$[12] 是极限环的会合周期，且 $P_{\rm sid}/P_{\rm bin} = m/n$ 其中$m,\ n \in \mathbb{Z}$。与半长轴相同的二体轨道相比，环双星轨迹的周期更短，因此环双星共振距离质心比其二体

[11]参数化方法$_{c}$ 将在§5.4中进行比较。

[12]先前称为 T 见§2。

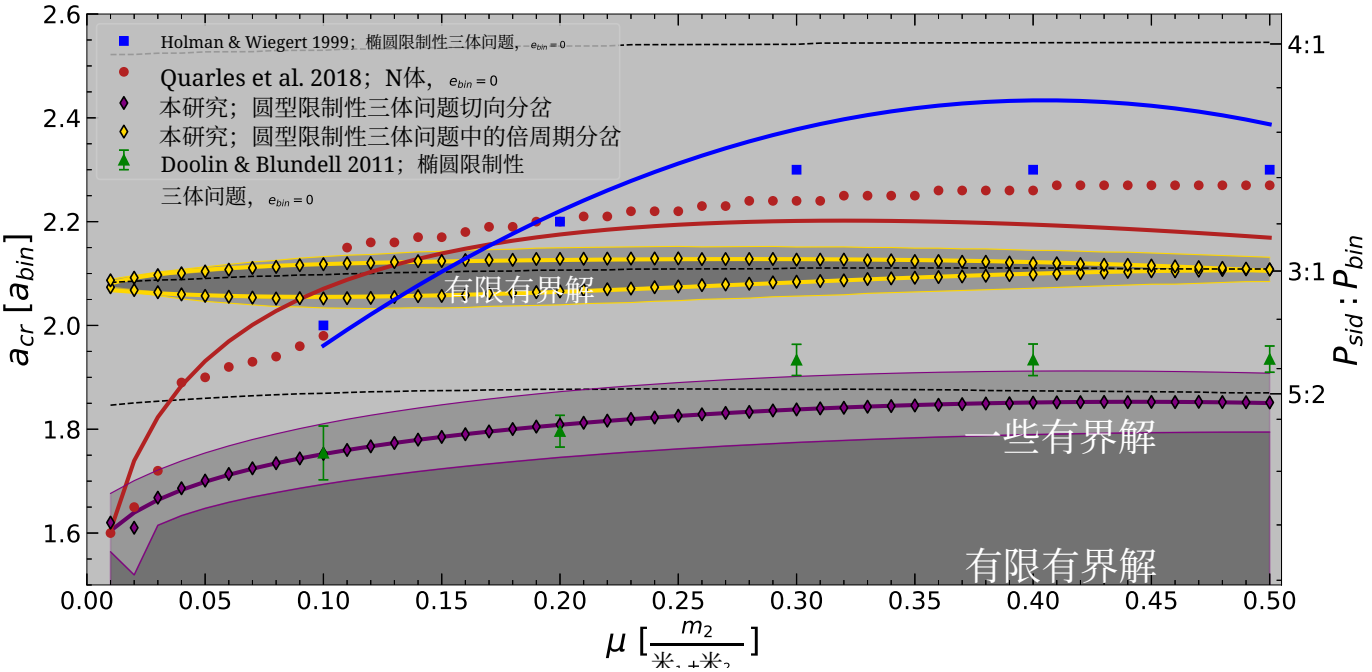


图14. 圆型限制性三体问题顺行方向上有界平面环双星轨道的质心临界距离（a_c）与质量比（$\mu \in [0.01, 0.50]$）的关系。图中展示了恒星共振（虚线）随双星质量比的变化。图中还标出了先前研究对 a_c 的测定结果（各种形状），以及在可用情况下拟合所得的模型（实线，见 §5.4）。本研究计算得到的临界分岔轨道的几何半长轴（菱形）采用参数模型拟合（方程 32，粗线），其中紫色表示切向分岔，黄色表示倍周期分岔。图中还显示了临界稳定轨道的远拱点和近拱点（细线）。对临界轨道进行稳定性分析后，得出了不存在稳定轨道的区域（双重阴影区域）。

对应轨道更远。例如，图14显示，3 : 1 环双星共振位于倍周期分岔之间。若假设恒星质量集中于质心，并应用开普勒第三定律（$P \propto a^{3/2}$），则 3 : 1 共振的位置应为 $2.080\,a_{\rm bin}$，这位于排斥区内部，与我们对共振的动力学计算结果不符。

反直觉的是，临界稳定轨道似乎并不总是对应低阶平均运动共振。例如，在所有质量比范围内，顺行最内侧稳定轨道与 5 : 2 共振之间都没有明确联系。此外，图15 并未清晰显示低阶平均运动共振与逆行临界稳定轨道之间存在联系。根据这些结果，很难建立弗洛凯稳定性与平均运动共振之间的直接关系。对从周期轨道中采样得到的 N体模拟进行进一步分析，或许能加深我们对这种关系的理解。

5.3. 与长期 *N*体结果的比较

为了理解Quarles 等人(2018年) 与本研究计算得出的顺行最内侧稳定轨道之间表面上的差异，我们比较了他们公开的单独 N 体试验结果与我们计算得出的无界动力学区域的对比见图16。对于圆轨道双星的所有质量比，Quarles 等人 (2018年的模拟显示，存活轨迹数量有所减少，而这一减少与我们倍周期排斥区的半长轴范围相吻合。在此间隙以内，存活轨迹数量有所增加，直至到达所有轨迹均被抛射的最内侧距离。因此，差异部分源于$_c$ Quarles 等人 (2018年将最内侧稳定轨迹定义为其 N 体试验中存活率达到 100% 的最小初始半径。我们的分析预测，在$_{c以内,\ Q}$也存在稳定轨迹；事实上，Quarles 等人(2018年在其公布的 a_c值以内发现了长寿命轨道。尽管排斥区以内的存活轨迹数量有所增加，但只有低质量比系统的模拟中，切向分岔与内侧排斥区边界之间的轨迹存活率才达到 100%。在靠近双星的位置，高质量比系统中保证有界运动的周期性初始条件与圆形开普勒解存在显著偏差（见§3.1.3）。因此，Quarles 等人(2018年采用圆形开普勒速度，可能与有界动力学解空间的距离不够近

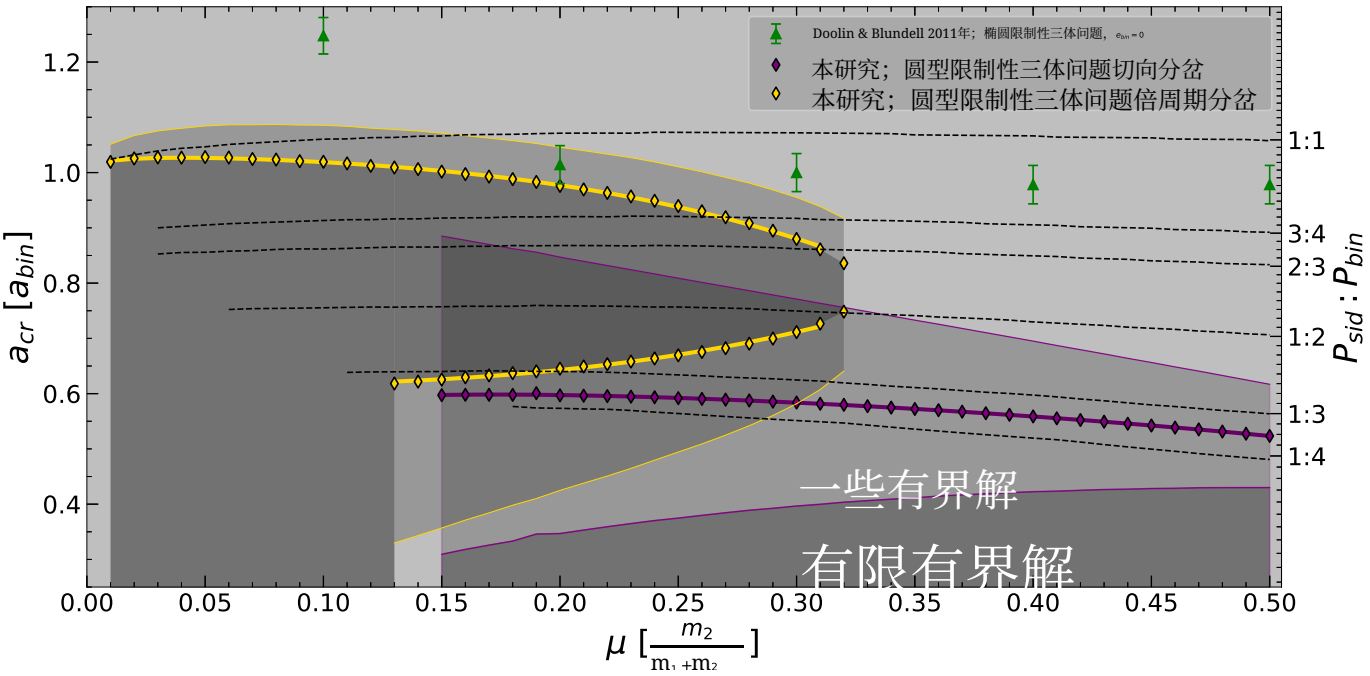


图15。与图14相同，但针对逆行轨道。注：由于轨道几何形状的影响，一些稳定的环双星逆行轨道的轨道周期比双星的轨道周期更短（$a_{\rm geo} < a_{\rm bin}$）。参见图3 和10。

无法充分贴近切向分岔与排斥区之间存在的有界动力学解空间。

为了检验弗洛凯理论稳定性预测的准确性，我们模拟了 $m_p = 0.2\,M_J$ 在圆型限制性三体问题周期轨迹上初始化的行星，针对 $10^5\,P_{\rm bin}$。尽管我们并不认为实际的环双星行星会处于精确的周期轨迹上，但这种初始化方式与以往研究中采用严格圆形初始条件进行存活性测试的方法最为相似（Holman & Wiegert 1999年；Doolin & Blundell 2011年；Quarles et al. 2018年）。我们使用，000 条初始位置为 $x_0 \in [1.6, 2.5]$ 、质量比为 $\mu \in [0.1, 0.2, 0.3, 0.5]$ 的轨迹，并采用`rebound`I AS15 积分器（Rein & Liu 2012年）进行数值积分。到达距质心为其初始间距 1.1 倍距离的轨迹被视为不稳定，因此不太可能在可观测时间尺度内存留于该系统中。图 16 第二行展示了按其几何半长轴划分的存活轨迹百分比。轨迹的几何半长轴通过在整个数值积分过程中对轨道进行采样来计算。我们利用弗洛凯理论对圆型限制性三体问题中环双星稳定区域所作的计算结果，与长期数值积分的结果一致。值得注意的是，在排斥区与最内侧稳定轨道之间的稳定区域内，100% 的轨迹均能存活，这为Quarles 等人（2018年）在同一区域得到的存活轨迹增加现象提供了背景。具有 $0.2\,M_J$ 的行星在圆型限制性三体问题极限环上初始化的轨道，与我们根据弗洛凯理论作出的预测一致（§2）。然而，要刻画线性理论对更广泛的非理想化行星轨道的适用性，对于与观测系统进行比较将至关重要。

从定量角度来看，Quarles 等人（2018年）以及我们的 N体模拟支持我们通过动力系统理论所得出的结论，即：在有界区域（排斥区内部和外部）初始化的轨迹，比在无界区域（排斥区以及切向分岔内部）中的轨迹更有可能保持存在。然而，当扰动仅经过 e 倍增长 $12.5-150\,P_{\rm bin}$时，问题仍然是：既然如此，排斥区内为何还会存在任何轨迹？一个可能的答案涉及两个因素：（1）圆型限制性三体问题与 N体动力学之间的动力学差异；（2）半长轴作为表征周期倍增分岔之间不稳定解空间的参数过于简化。对这些复杂因素的一种部分补救方法，是将排斥区定义为一段具有不稳定解空间的轨道能量范围。在圆型限制性三体问题中，雅可比常数沿任意轨迹保持不变，并严格确定粒子可访问的解空间。例如，当我们计算

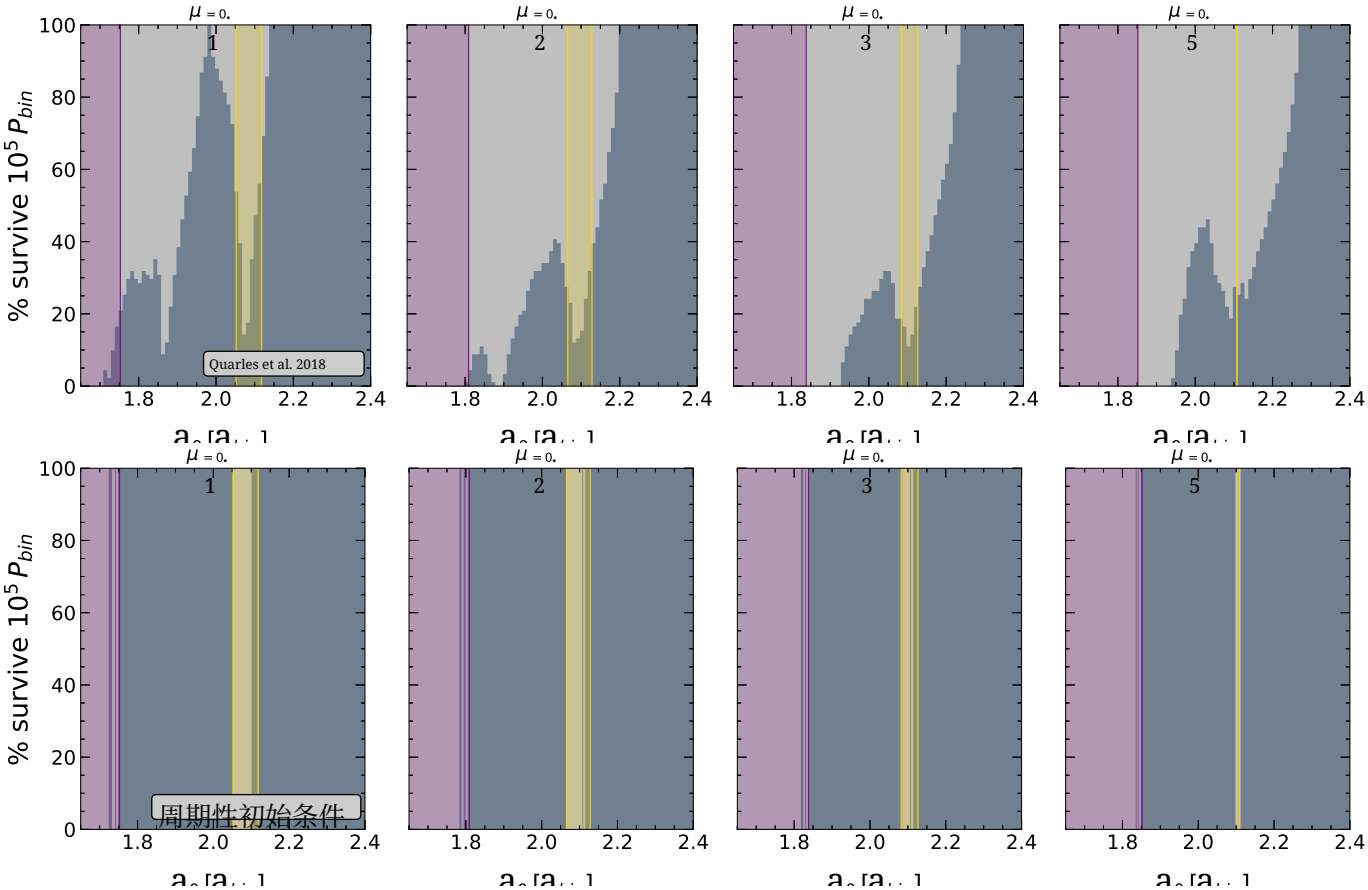


图16。 上图：来自 Quarles 等人 (2018年)[b] 测量大质量行星的存活情况（$m_p \approx 1 M_J$），这些行星最初沿开普勒圆轨道运行，持续 $10^5\ P_{\rm bin}$，其中心双星的初始偏心率为零。根据弗洛凯理论计算出的临界稳定轨道的几何半长轴叠加在轨迹的半长轴上。下图：重复上图的模拟，但采用圆型限制性三体问题的周期性初始条件。在两幅图中，倍周期排斥区（金色）位于存活轨迹的一个显著间隙内。只有极少数模拟轨迹能在切触分岔轨道（紫色）的内侧存活。所有周期性初始条件都在预测的稳定区域内存活，而在同一区域内存活的开普勒圆轨道初始条件则仅有所增加。

[a] http://doi.org/10.5281/zenodo.1174228[b] http://doi.org/10.5281/zenodo.1174228

某一周期轨道具有局部不稳定动力学时，这一表征适用于极限环邻域内的轨迹，因此也适用于具有相同雅可比常数的轨迹。在考虑行星质量和双星偏心率的模型中，有界轨迹的雅可比常数会发生振荡；然而，评估这种振荡行为的上下限，可能可以保证轨迹始终处于具有稳定解空间的雅可比常数范围内。与振荡线性动力学相关的轨迹，其半长轴落在排斥区内是可行且符合预期的。未来的分析或许可以使用雅可比常数来参数化稳定区域，以提高不同模型之间的准确性和一致性，同时结合半长轴等直观指标。

5.4. 动力学结果的参数拟合

动力系统分析通过分岔分析，能够精确确定最内侧稳定轨道的位置，以及$_c$和排斥区，但计算开销很大。为了将$_c$ 的位置及倍周期排斥区推广到圆轨道双星中 μ 的任意取值，我们希望对动力学结果拟合一个简单的参数模型。先前的研究选择了幂级数展开作为模型的基础，如表 3所示。这些参数模型在适用时列于图14 和15 中，而参数模型对动力学结果的拟合优度差异显著。例如，Quarles 等人(2018年) 使用增广幂级数展开拟合$_c$ ，无论从视觉上还是定量上看，效果都优于Holman & Wiegert

表3。 圆轨道双星临界稳定半径方程的函数形式与拟合优度比较。

论文	拟合方程	参数	质量比	相对误差， $\bar{\sigma}$
Holman& Wiegert(1999年)	$c_1 + c_2\mu + c_3\mu^2$	3	5	6×10^{-2}
Quarles 等人(2018年)	$c_1 + c_2\mu^{1/3} + c_3\mu^{2/3}$	3	51	3×10^{-2}
本研究	$c_1 + \frac{1}{\mu + c_2} + \mu^{c_3} - c_4^3$	4	50	$O(10^{-3})^{\mathrm{A}}$

NOTE—A：系数和最佳拟合模型的误差见表 4。

表 4. 基于圆型限制性三体问题（CR3BP）动力系统结果，对平面环双星轨迹稳定性变化边界位置的模型。将这些系数代入方程 32 可得到与图 14 和15所示结果相拟合的曲线。

Line	c_1	c_2	c_3	c_4	域	分数误差， $\bar{\sigma}$
顺行						
最内侧稳定轨道	0.53607	1.03820	0.47113	−0.45708	$0.01 \leq \mu \leq 0.50$	3.1×10^{-3}
排斥区内临界轨道	1.23903	1.19962	1.32271	−0.96885	$0.01 \leq \mu \leq 0.50$	9.2×10^{-4}
排斥区外临界轨道	0.79351	0.79290	0.68747	−0.66265	$0.01 \leq \mu \leq 0.50$	8.9×10^{-4}
逆行						
最内侧稳定轨道[A]	−0.98016	0.83811	0.29942	−0.45159	$0.13 \leq \mu \leq 0.32$	3.4×10^{-4}
排斥区内临界轨道	0.35382	3.71797	4.11392	3.90066	$0.15 \leq \mu \leq 0.50$	6.2×10^{-3}
排斥区外临界轨道	−0.26963	0.77862	0.80658	−5.89374	$0.01 \leq \mu \leq 0.32$	3.5×10^{-3}

NOTE—A：仅在适用于该模型的域内，才有最内侧稳定轨道。对于 $\mu < 0.15$，排斥区外临界轨道是该系统最内侧的稳定逆行轨道。

(1999年) 的模型。我们选择了一种结合多个基函数的函数形式，

$$a(\mu) = c_1 + \frac{1}{\mu + c_2} + \mu^{c_3} + c_4^3, \tag{32}$$

其中 $\{c_1, ...c_4\}$ 为实系数。与先前研究相比，此关系仅多出一个自由参数，但提高了自由度加权分数误差，

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N}\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i^2}}, \tag{33}$$

相差 $1-2$ 个数量级。在方程 33中， N 是我们在动力学模型中探测的质量比数量，索引为 i； k 是模型系数的数量， E_i 表示每个质量比对应的动力学结果，而 O_i 则是根据模型的最佳拟合计算出的值。利用方程 32以及表4中列出的系数，可以近似求得圆型限制性三体问题（CR3BP）中的环双星临界稳定轨道的几何半长轴，如图 14 和15所示。为了获得更精确的分岔轨道预测结果，我们建议在计算解之间进行三次样条插值，或者使用开源且附有文档的 Python 软件包 pyraa直接计算所需轨道。

5.5. 初步应用：冥王星-卡戎

尽管本研究的出发点是环双星系外行星，但双星偏心率在动力学中起着重要作用，因此我们目前的计算适用范围有限。不过，潮汐锁定的冥王星-卡戎系统（ $\mu = 0.10854$， $e = 5 \times 10^{-6}$Brozovi´c 等，2015年）为我们提供了一个机会，可以将动力系统理论的研究成果应用于太阳系中一个研究充分的环双星系统（ Weaver 等，2006年；Showalter 等，2011年，2012年）。冥王星-卡戎系统很可能由柯伊伯带中的原行星碎屑发生斜向巨撞击而形成（Canup 2005，2011年）。冥王星-卡戎最初的双星轨道特性尚不清楚；不过，潮汐力使半长轴增大了 a_{PC}，达到原来的 ~ 4 倍，并使轨道从 $e \sim 0.5$

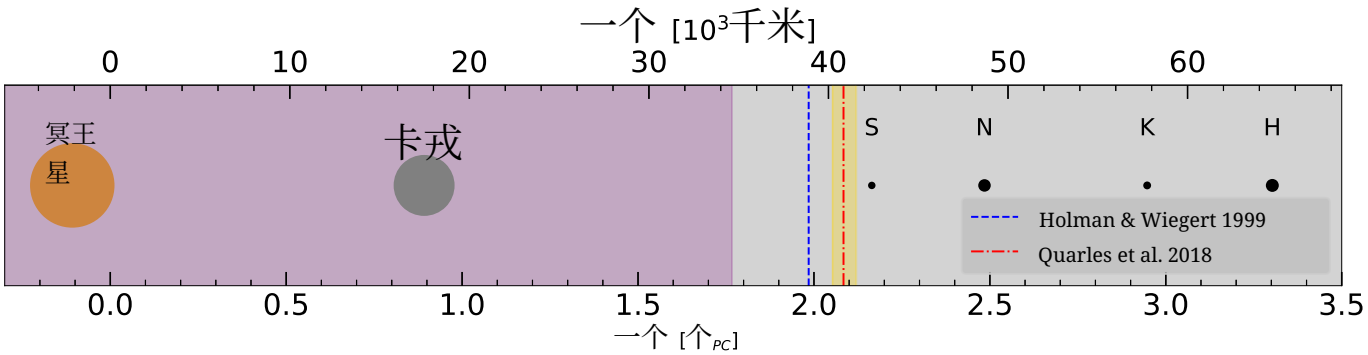


图17. 冥王星-卡戎系统的动力学结构（$\mu = 0.108$，$e = 0$）。弗洛凯理论预测的动力学不稳定区域以紫色（切向分岔内侧区域）和黄色（倍周期排斥区）标示。先前研究中的参数模型预测的最内稳定轨道以竖直虚线表示。最内侧的卫星冥卫一位于排斥区外缘 $a_{\rm Styx} = 1.021\,a_{\rm c}$，EZ之外 $0.045\,a_{\rm PC}$（$\sim$ 900km）。排斥区与最内侧稳定轨道（紫色）之间的内部稳定区域内尚未发现卫星。

在 $1-10$ Myr 内完成，这一过程发生于潮汐扩张时期（Canup2011；Walsh & Levison 2015）。关于冥王星-卡戎共面、动力学冷卫星——冥卫一、冥卫二、冥卫四和冥卫三——的形成理论，可分为潮汐演化前和潮汐演化后两类（Kenyon &Bromley2021）。潮汐演化前的理论认为，环双星卫星形成于巨撞击留下的碎屑之中。在这一情景下，卫星会通过共振捕获和碰撞阻尼，随时间迁移至目前的位置（Ward &Canup 2006；Cheng 等，2014；Woo &Lee 2018；Kenyon& Bromley 2021）。由于难以重现卫星向外迁移的过程，潮汐演化后的理论提出，一个海王星外天体（TNO）与卡戎相撞，形成第二片碎屑场，并由此在卫星目前所在的位置形成卫星（Bromley &Kenyon 2020b）。无论哪种情景，最内侧的轨道碎片都应受到冥王星-卡戎临界稳定环双星区域的塑造。请注意，我们现有的圆型限制性三体问题计算未包含潮汐耗散。

冥王星-卡戎最内侧的卫星冥卫一，位于一条近圆形的 $a_{\rm Styx} = 2.164\,a_{\rm PC}$ 轨迹上（Brozovi´c 等人 2015 年）。冥卫一接近冥王星-卡戎的 3:1 轨道共振，并且靠近 Holman & Wiegert （1999年）提出的临界稳定半长轴 $a_{\rm c}$（Bromley & Kenyon2020b，a）。值得注意的是，冥王星-卡戎的质量比处于这样一个参数范围内：在该范围中，Holman &Wiegert（1999年）和 Quarles 等人（2018年）针对 $a_{\rm c}$ 的多项式模型落入排斥区，且无法很好地拟合经验模拟结果（图 14）。从图 16所示的 N体实验结果可知，动力学冷环双星轨迹不太可能在排斥区的半长轴范围内存续。以往模型的这一不准确之处凸显了通过动力系统方法精确解析参数空间中的动力学结构的一个优势。

。如果排斥区的外缘（$a_{\rm c,\ EZ} = 2.119\,a_{\rm PC}$）是冥卫一真正的临界稳定轨道，那么我们可以计算出 $a_{\rm Styx} = 1.021\,a_{\rm c,\ EZ} \sim 900$ 千米，距排斥区之外。根据我们的计算，临界稳定轨道比 Hol-man& Wiegert （1999年）或 Quarles 等人 （2018年）的参数模型预测的更靠近冥卫一。冥卫一目前的轨迹不太可能位于排斥区内，因为在排斥区内初始化的轨迹，其典型抛射时间为 $< 10^3\,P_{\rm bin}$，即 20 年。[13] 在 N体模拟中，Kenyon &Bromley（2022年）发现了一些情景：冥卫一在与冥卫二及 3:1 共振发生破坏稳定性的相互作用后被抛射。这与我们的发现一致，即冥卫一接近稳定性的临界轨道。

如果冥卫一确实是在原位形成的，那么它与排斥区的距离很近，可能限制了它的成长；这对于环双星卫星形成理论而言，将是一个很值得关注的问题。目前尚未在内部稳定区域探测到卫星；该区域位于排斥区与最内侧稳定轨道之间。Kenyon& Bromley (2019年发现，无质量粒子可以在该区域（$a = 1.7$–$2.1\,a_{\rm PC}$）存活 10 Myr。这可能表明冥王星-卡戎系统的演化历史中存在清除过程，也可能说明内部稳定区域并非适宜碎屑聚集的稳固环境。利用詹姆斯·韦布空间望远镜进行成像，为探测新的可能卫星和粒子碎屑开辟了新的参数空间（Kenyon&Bromley 2019）。

[13] 根据 $\mu = 0.10$ 图中所示的 N体模拟 16。

6. 圆型限制性三体问题涌现的动力学结构对行星形成的启示

在本研究中，我们识别并计算了两种动力学结构：最内侧稳定轨道和动力学排斥区。它们源自圆型限制性三体问题，可能与观测到的近距离双星系统中行星的构型有关。由于动力学排斥区的位置与先前对圆型限制性三体问题中最内侧稳定轨道的研究结果更加吻合，人们或许会想知道，在真实物理系统中——恒星轨道具有非零偏心率且行星具有有限质量的情况下——该排斥区是否仍然存在。我们认为，放宽这些条件后，倍周期排斥区仍会存在，理由有以下几点：（1）在动力系统中，涌现结构（如排斥区）往往会随着模型参数（如偏心率）的变化而平滑变化（Boudad2022）。（2）Quarles 等人 (2018年) 对偏心双星系统周围的大质量行星进行的模拟，一直都产生了类似于图 16中所示的存活轨道间隙，这表明倍周期排斥区并非圆轨道双星或试验粒子轨迹所独有。（3）即使考虑观测偏差，开普勒双星周围行星在 $a_{c,HW}$ 附近出现的概率在统计上仍具有显著性（Winn &Fabrycky 2015；Li 等人2016）。

临界稳定轨道的位置可能会影响环双星行星在近距离双星系统周围形成的方式和位置，以及它们被观测到的情况（Thun 和 Kley 2018）。对充满气体和尘粒的原行星盘进行流体动力学模拟，发现盘中会在$_{c附近形成中央空腔，HW}$ 此处双星周围的轨迹是不稳定的（Coleman 等人 2022）。中央空腔会在盘内形成压力梯度，并使岩质物质聚集在其内缘附近。观测到的、位于$_{c附近的HW}$ 开普勒双星周围行星，可能是通过以下两种方式形成的：（1）在空腔边缘附近原位形成，或（2）穿过盘迁移，并停驻在空腔边缘附近。对行星形成环境的分析不支持原位形成，但流体动力学模拟难以使模拟行星停驻在观测到的位置（Paardekooper 等人 2012；Thun 和 Kley 2018；Coleman 等人 2022）。

双星周围可能存在两个彼此分离的稳定区域，这既使环双星行星的形成理论更加复杂，也对其提出了限制。未能在 $a_{c,HW}$ 内探测到环双星行星，因此也未能在排斥区内探测到，这表明行星无法在被抛射之前穿越不稳定区域，也无法在排斥区与最内侧稳定轨道之间的稳定区域内原位形成。在这种情况下，最外侧排斥区的临界稳定轨道将成为$_c$ 来自雪线以外的迁移行星的Armstrong 等人(2014)将发挥这一作用。要量化最内侧稳定轨道与倍周期排斥区之间行星的稀少程度，需要：(1) 按照Armstrong 等人(2014的方法，通过注入/回收进行细致的完备性校正；(2) 准确确定偏心双星的倍周期排斥区范围。这些后续工作虽具挑战性，但很可能有助于阐明环双星行星形成和演化的动力学条件。

7. 未来应用展望

本文介绍的技术和结果，是将现代动力系统理论应用于动力天文学相关问题的初步尝试。我们成功拓展了先前关于圆轨道双星周围环双星动力学的理论研究成果。不过，要广泛应用于物理系统，仍有一些挑战有待解决，即拓展至偏心双星系统，并与可观测量建立联系。下文将探讨这些后续工作可能如何开展。

7.1. 拓展至偏心双星系统

大多数环双星行星的宿主恒星都处于偏心率足够大的轨道上，此时双星的偏心率主导着系统的稳定性（Kos- tov 等，2021年）。为了将动力系统理论的预测与观测到的环双星行星直接比较，有必要将相关计算推广到偏心双星周围的运动。椭圆限制性三体问题（ER3BP）是在圆型限制性三体问题（CR3BP）基础上作出的适当扩展，可用于模拟偏心双星引力环境中的无质量粒子。由于会合坐标系中的运动方程是非自治的（随时间变化），ER3BP 比 CR3BP 更具挑战性（Hiday 1992）。回顾§2.2.1 可知，CR3BP 中存在周期解连续族，这是因为其运动方程是自治的（不随时间变化）。虽然 ER3BP 中在与会合运动方程共振时存在孤立周期解，但要解析动力学结构和稳定性分岔，则需要连续族。因此，将动力系统理论方法推广到偏心双星，需要计算二维准周期轨道（QPOs）连续族，以取代非自治模型中的周期轨迹。在限制性动力学模型中计算准周期轨道及其在轨道动力学中的应用，是一个活跃的研究领域

（Olikara &Scheeres 2012；Baresi 等，2018；McCarthy&Howell2021，2022年）。对 ER3BP 中二维准周期轨道的计算与分析，将为动力系统方法推广至偏心双星中的环双星行星提供适当的概括。

7.2. 与可观测量的联系

为了利用弗洛凯理论精确的稳定性预测，必须将这些计算的结果——极限环——与可观测量联系起来。我们现有的分析提供了参数模型，用于描述稳定性发生变化的周期轨迹的几何半长轴如何随圆轨道双星的质量比变化（表 3 和 4）。利用观测系统的质量比，可以计算其临界稳定半长轴，并与该系统中已知的环双星轨道进行比较（见 §5.5）。鉴于周期轨迹是理想化的解，未来的工作必须验证一组合适的参数，例如 $a_{\rm geo}$、 C_J、 $e_{\rm geo}$ ，以准确推广对更高保真度引力模型中非周期轨迹稳定性的预测。弗洛凯稳定性的未来应用对象可能包括环双星行星以外的天体，例如碎屑盘或太阳系天体。在每种应用中，可测量量都应与弗洛凯理论的稳定性计算有较为直接的联系。对于环双星行星，轨道解是通过在光度动力学模型中满足约束来计算的（见 Kostov 等，2016及其中的参考文献）。根据这些轨道解，可以计算瞬时开普勒轨道根数和雅可比常数。同样，太阳系天体通常也有约束良好的轨道解。 Lee &Peale(2006年）的一阶本轮理论也可能成为可测量量与动力系统输出之间的有用桥梁，可通过 Woo & Lee (2020年）的快速傅里叶变换方法提取轨道参数。环双星碎屑盘的可测量轨道参数更可能仅限于基于光谱能量分布（SED）确定的、与恒星源之间的距离及其不确定性（Farihi 等，2017）。

8. 总结

受已观测到的环双星行星系统构型启发，我们考察了现代动力系统理论方法在深入理解环双星行星轨道动力学方面的适用性。我们通过计算质量比为 $\mu \in [0.01, 0.50]$时的平面环双星轨迹周期族来开展研究。环双星逆行和顺行周期轨道集合有助于：(1) 描述三体环境中有界轨迹的解空间；(2) 分析环双星轨道的局部稳定性和涌现的动力学结构。

周期族线性稳定性中的分岔决定了给定质量比系统的最内侧稳定轨道。对于逆行轨道，该轨道作为族内雅可比常数最大值（能量最小值）的极限环存在，其范围为 $a_{\rm geo} \in [1.02, 0.52]$ ，适用于双星质量比 $\mu \in [0.01, 0.50]$。顺行最内侧稳定轨道的范围为 $a_{\rm geo} \in [1.61, 1.85]$ ，适用于 $\mu \in [0.01, 0.50]$。我们对周期族进行的分岔分析，为位于此前确定值以内的$_{\rm c}$ 提供了精确且可复现的计算结果。

我们的分岔分析还揭示了一个不稳定轨道区域，我们称之为倍周期排斥区，该区域位于最内侧稳定轨道之外。排斥区的解空间由最小和最大雅可比常数界定，与最内侧稳定轨道以内的不稳定解空间不连通。对顺行周期轨道恒星时周期的分析发现，在所有质量比下，3：1平均运动共振都位于排斥区内，而其他临界稳定轨道均未与某一共振形成明确联系。此前确定的最内侧稳定轨道位置位于排斥区的临界稳定轨道之外。对于开普勒双星周围行星的质量比，先前确定的最内侧稳定轨道位置略微位于排斥区之外，其相关模型解释了环双星行星的统计性聚集。排斥区的 $\sim 0.1\, a_{\rm bin}$ 宽广区域位于 $2.1\, a_{\rm bin}$附近；对于以 $10^5\, P_{\rm bin}$绕圆轨道双星运行的木星质量行星而言，该位置对应于存活轨道数量的不足。我们对这一结果的解释包括这样一种可能性：环双星行星可能位于动力学排斥区的外边界附近，而非系统的最内侧稳定轨道附近。进一步将动力系统方法应用于偏心双星和长期N体积分，将有助于确定排斥区是否持续存在于物理系统中。

动力系统理论方法揭示了圆型限制性三体问题中稳定与不稳定轨道的区域，而这些区域难以通过数值模拟或解析摄动方法直接识别。将现代动力系统技术应用于动力天文学中的其他适用情形，或可为影响多体引力环境中天体物理过程的新兴动力学结构带来新的见解。

致谢 在整个研

究过程中，我们感谢 F. Adams 和 J. Becker 提出的宝贵建议。我们还感谢 M. Wyatt 的讨论，这些讨论提升了本研究的质量。A.L. 感谢 Purdue 多体动力学研究组成员为将动力系统理论应用于 CR3BP 提供的技术指导。我们感谢匿名审稿人提出的高质量反馈和建议，其中包括对冥王星-卡戎系进行初步应用的建议。

系。此项研究部分由圣母大学研究计算中心提供支持。本材料基于美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划在资助编号 DGE-1842166 下支持的工作。

软件：`pyraa`、`rebound` (Rein &Liu 2012), `scipy`(Virtanen et al.2020), `numpy` (Harris et al.2020), `numba`(Lametal.2015), `matplotlib` (Hunter2007), `TikZiT`

参考文献

Armstrong, D. J., Osborn, H. P., Brown, D. J. A., 等. 2014, 《皇家天文学会月报》, 444, 1873, doi:10.1093/mnras/stu1570Baresi,N., Olikara,Z. P.,& Scheeres,D.J.2018, 《宇航科学杂志》, 65, 157, doi: 10.1007/s40295-017-0124-6Bosanac, N. 2016年, 利用自然动力学结构探索多体系统。
https://engineering.purdue.edu/people/kathleen.howell.1/Publications/dissertations/2016 Bosanac.pdfBosanac, N., Howell, K. C., & Fischbach, E. 2015年, 《天体力学与动力天文学》, 122, 27, doi: 10.1007/s10569-015-9607-6Boudad, K. K. 2022年, 四体模型中地月空间与日地拉格朗日点之间的轨迹设计。
https://engineering.purdue.edu/people/kathleen.howell.1/Publications/dissertations/2022 Boudad.pdfBreakwell, J. V., & Brown, J. V. 1979, 《天体力学》, 20, 389, doi:10.1007/BF01230405Bromley, B. C., & Kenyon, S. J. 2015年, 《天体物理学杂志》, 806, doi: 10.1088/0004-637X/806/1/98—. 2020a, 《天文学杂志》, 161, 25, doi: 10.3847/1538-3881/abcbfb—. 2020b, 《天文学杂志》, 160, 85, doi: 10.3847/1538-3881/ab9e6cBroucke, R. 1969, 《美国航空航天学会杂志》, 7, 1003, doi: 10.2514/3.5267Brozovi´c, M., Showalter, M. R., Jacobson, R. A., & Buie, M. W. 2015年, 《伊卡洛斯》, 246, 317, doi: 10.1016/j.icarus.2014.03.015Canup, R. M. 2005, 《科学》, 307, 546, doi: 10.1126/science.1106818—. 2011年, 《天文学杂志》, 141, 35, doi: 10.1088/0004-6256/141/2/35Chambers, J. E., Quintana, E. V., Duncan, M. J., & Lissauer, J. J. 2002, 《天文学杂志》, 123, 2884, doi: 10.1086/340074

Chen, C., Franchini,A., Lubow, S. H., & Martin, R. G. 2019, 《皇家天文学会月报》, 490, 5634, doi:10.1093/mnras/stz2948Chen, C., Lubow, S. H., & Martin, R. G. 2020, 《皇家天文学会月报》, 494, 4645, doi: 10.1093/mnras/staa1037Chen, R., Li, G., & Tao, M. 2022, 《皇家天文学会月报》, 515, 5175, doi: 10.1093/mnras/stac2071Cheng, W., Peale, S., & Lee, M. H. 2014, 《伊卡洛斯》, 241,180, doi: 10.1016/j.icarus.2014.07.006Coleman, G. A. L., Nelson, R. P., & Triaud, A. H. M. J. 2022, 《皇家天文学会月报》, 513, 2563, doi:10.1093/mnras/stac1029Deitrick, R., Barnes, R., Bitz, C., et al. 2018, 《天文学杂志》, 155, 266, doi: 10.3847/1538-3881/aac214Doolin, S., & Blundell, K.M. 2011,《皇家天文学会月报》, 418, 2656, doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19657.xEuler, L. 1772年, 月球运动理论（帝国科学院印刷） Farihi, J., Parsons, S. G., &G¨ansicke, B. T. 2017, 《自然·天文学》, 1, 0032, doi: 10.1038/s41550-016-0032Floquet, G. 1883, 《巴黎高等师范学院科学年鉴》 ´Ecolenormalesup´erieure, 12, 47, doi:10.24033/asens.220Fulton, B. J., Rosenthal, L. J., Hirsch, L. A., et al. 2021, 《天体物理学杂志增刊》,255, 14, doi: 10.3847/1538-4365/abfcc1Georgakarakos, N.,& Eggl, S. 2015, 《天体物理学杂志》, 802, 94, doi: 10.1088/0004-637X/802/2/94Gupta, M. 2020, 寻找混沌中的秩序：共振轨道与庞加莱截面。
https://engineering.purdue.edu/people/kathleen.howell.1/Publications/masters/2020 Gupta.pdfHarris, C. R., Millman, K. J.,van der Walt, S. J.,et al. 2020, 《自然》, 585, 357, doi: 10.1038/s41586-020-2649-2

Hiday, L. A. 1992年, 椭圆限制性三体问题中平动点轨道之间的最优转移 Holman, M. J., & Wiegert, P. A. 1999, 《天文学杂志》, 117, 621, doi: 10.1086/300695Howell, K. C. 1984年, 《天体力学》, 32, 5
2.
https://engineering.purdue.edu/people/kathleen.howell.1/Publications/journals/1984CM How.pdfHunter, J. D.2007年,《科学与工程计算》, 9, 90, doi: 10.1109/MCSE.2007.55Jacobi, C. G. J. 1836年, 《巴黎科学院纪事》´émie des Sciences de Paris, 59 Janson, M., Gratton, R., Rodet, L., et al. 2021, 《自然》, 600, 231, doi: 10.1038/s41586-021-04124-8Jenkins, J. M., Caldwell, D. A., Chandrasekaran, H., et al. 2010, 《天体物理学杂志》, 713, L87, doi: 10.1088/2041-8205/713/2/L87Kenyon, S. J., & Bromley, B. C. 2019, 《天文学杂志》, 157, 79, doi: 10.3847/1538-3881/aafa72—. 2021, 《天文学杂志》 , 161, 211, doi: 10.3847/1538-3881/abe858—. 2022, 《天文学杂志》 , 163, 238, doi: 10.3847/1538-3881/ac6188Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. 2016, 《天体物理学杂志》, 827, 86, doi: 10.3847/0004-637X/827/1/86Kostov, V. B., Powell, B. P., Orosz, J. A., et al. 2021, 《天文学杂志》, 162, 234, doi: 10.3847/1538-3881/ac223aLagrange, J.-L. 1772年, 巴黎皇家科学院奖´émie Royale des Sciences de Paris, 6, 292 Lam, S. K., Pitrou, A., & Seibert, S. 2015, HPC 中 LLVM 编译器基础设施第二届研讨会论文集 - LLVM '15, 1, doi: 10.1145/2833157.2833162 Lee, M., & Peale, S. 2006, 《伊卡洛斯》, 184, 573, doi: 10.1016/j.icarus.2006.04.017Leung, G. C. K., & Lee, M. H. 2013, 《天体物理学杂志》, 763, 107, doi: 10.1088/0004-637X/763/2/107Li, G., Holman, M. J., & Tao, M. 2016, 《天体物理学杂志》, 831, 96, doi: 10.3847/0004-637X/831/1/96Lubow, S. H. 2022年, 《皇家天文学会月报》, 516, 5446, doi: 10.1093/mnras/stac2636McCarthy, B. P., & Howell, K. C. 2021, 《轨道动力学》, 5, 139, doi: 10.1007/s42064-020-0094-5—. 2022, 《空间研究进展》, doi: 10.1016/j.asr.2022.09.020 Murray, C. D., &Dermott, S. F. 2000, 太阳系动力学（剑桥大学出版社）, doi: 10.1017/CBO9781139174817美国国家航空航天局系外行星科学研究所。2020年，行星系统表，红外处理与分析中心，doi:10.26133/NEA12Noether, E. 1918,《哥廷根科学学会纪事》¨，数学与物理学部，235 Olikara, Z. P., & Scheeres, D. J. 2012, 《宇航科学进展》, 145, 911 Paardekooper, S.-J., Leinhardt, Z. M., Th´ebault, P., & Baruteau, C. 2012, 《天体物理学杂志》, 754, L16, doi: 10.1088/2041-8205/754/1/L16Pavlak, T. A. 2010, 《地月系统中的任务设计应用：转移轨迹与轨道维持》。
https://engineering.purdue.edu/people/kathleen.howell.1/Publications/Masters/2010 Pavlak.pdfPerko, L. 1996, 微分方程与动力系统，第7卷（施普林格美国公司）, doi: 10.1007/978-1-4684-0249-0Poincar´e, H. 1892年, 《天体力学新方法》´ethodes nouvelles dela m´ecaniquec´eleste，第1卷 Quarles, B., Satyal, S., Kostov, V., Kaib, N., & Haghighipour, N. 2018年, 《天体物理学杂志》, 856, 150, doi: 10.3847/1538-4357/aab264Raghavan, D., McAlister, H.A., Henry, T. J., 等，2010年, 《天体物理学杂志增刊》, 190, 1, doi: 10.1088/0067-0049/190/1/1Rein, H., & Liu,S.-F. 2012, 《天文学与天体物理学》, 537, A128, doi: 10.1051/0004-6361/201118085Roy, A. E., & Ovenden, M. W. 1955, 《皇家天文学会月报》, 115, 296, doi: 10.1093/mnras/115.3.296Short, C. R. 2010, 圆型限制性三体问题中的拉格朗日相干结构。
https://engineering.purdue.edu/people/kathleen.howell.1/Publications/masters/2010 Short.pdfShowalter, M. R., Hamilton, D. P., Stern, S. A., 等，2011年，9221, 1 Showalter, M. R., Weaver,H. A.,Stern, S.A., 等，2012年，9253, 1 Str¨omgren, E.1922年 —. 1938年, 《美国数学杂志》, 60, 867, doi: 10.2307/2371265Sutherland, A. P., & Kratter, K. M. 2019年, 《皇家天文学会月报》, 487, 3288, doi: 10.1093/mnras/stz1503Szebehely, V. 1967年，轨道理论：限制性三体问题（纽约：学术出版社）

Thun, D., & Kley, W. 2018年，《天文学与天体物理学》，616, doi: 10.1051/0004-6361/201832804Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., 等，2020年，《自然·方法》，17, 261, doi: 10.1038/s41592-019-0686-2Walsh, K. J., & Levison, H. F. 2015年，《天文学杂志》，150, 11, doi: 10.1088/0004-6256/150/1/11Ward, W. R., & Canup, R. M. 2006年，《科学》，313, 1107, doi: 10.1126/science.1127293Weaver, H. A., Stern, S. A., Mutchler, M. J., 等，2006年，《自然》，439, 943, doi: 10.1038/nature04547

Winn, J. N., & Fabrycky, D. C. 2015年，《天文学与天体物理学年度评论》，53，409，doi: 10.1146/annurev-astro-082214-122246Woo, J. M. Y., & Lee, M. H. 2018年，《天文学杂志》，155，175，doi: 10.3847/1538-3881/aab367—. 2020年，《天文学杂志》，159，277，doi: 10.3847/1538-3881/ab8dc1Youdin, A. N., Kratter, K. M., & Kenyon, S. J. 2012，《天体物理学杂志》，755，17，doi: 10.1088/0004-637X/755/1/17Zimovan-Spreen, E. M. 2021年，地月空间探索计划应用的轨道设计与目标瞄准