时间扭曲试次

Eric Easthope不列颠哥伦比亚大学电气与计
算机工程系 加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华

arXiv:2302.00583v1 [eess.SP] 1 Feb 2023

我概述了一种信号重采样策略，用于在时间序列试次之间对齐事件时间，适用于起始时刻和结束时刻等重要事件时刻在不同试次间存在变化的情形。这些变化使实际情境下无法直接比较试次，因为比较要求时间序列等长 [8]。动态时间规整等算法有助于量化这些局部变化，但若不通过插值或下采样来添加或移除采样点，就不适用于时间序列信号的连续变换 [2, 4]。我将说明，只要考虑填充和采样频率，sinc插值就足以对试次区间的部分内容进行重采样，生成等长时间锁定试次；这些试次与其未扭曲的对应信号相关，且能很好地近似它们，同时插值效应极小。具体而言，我将说明，通过过采样、根据错位事件长度的平均值选择性地对试次中未对齐的部分进行插值，以及对未对齐事件进行足量的零填充，可以将插值效应降至最低。插值后的信号带限远低于奈奎斯特频率，并满足奈奎斯特-香农采样定理，从而确保能够完美重建；我还发现，可以追踪并有望抵消重采样对信号能量量值的影响。

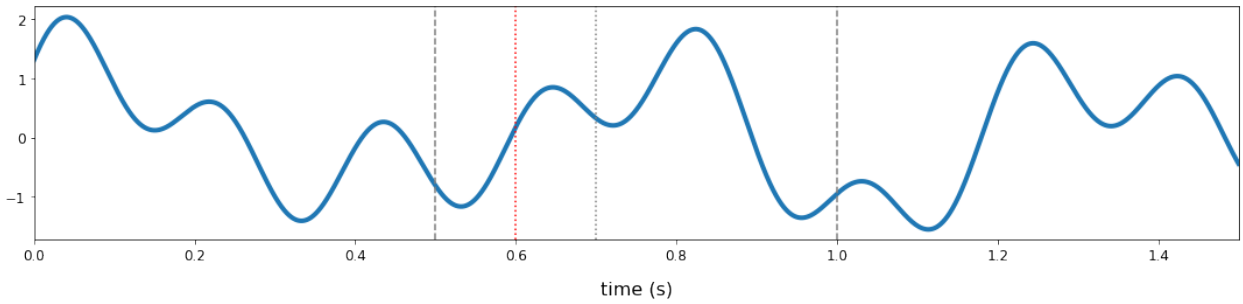

图1：由频率为 $f_1 = 5/\pi$ 和 $f_2 = 5/2$ 的成分构成、以 $f_{samp} = 2048$Hz 采样的非周期信号。图中标注了重要事件时刻（黑色和红色）。

1 背景

信号事件通常会在时域中截取为试次，每个试次由某个重复出现的目标信号的起点和终点标记。理想情况下，这些试次应当时间对齐，试次长度固定。然而，由于上下文、实验条件和／或人为错误，试次的起始和结束时间可能会略有变化。若试次还包含其他重要事件时刻（例如不同部分之间的转换时刻），这种现象会更加明显。由于试次通常以数字序列表示，因此若要通过求平均等简单操作直接比较长度不同的试次，就会变得困难，甚至不可能。对长度可变的序列进行操作通常缺乏明确的定义，或带有任意性，因此需要采用变通方法来实现事件的时间锁定。

诸如动态时间规整（DTW）[1] 和非线性混合效应建模 [7] 等技术，能够帮助我们量化并校正变长序列之间的差异，但若不通过插值或下采样来增删采样点，就难以将其应用于连续时间序列 [2, 4]。DTW 的设计也针对离散序列对，通常只应用于成对序列 [3]。其时间复杂度以及易受噪声影响而过拟合的特性 [6]，限制了它在试验数据处理中的应用；若要同时处理大量序列，则需要启发式方法 [5]。

我将探讨一种更简单的方法，对变长时间序列进行最小且可量化的调整，以便直接比较试验时间序列中的量。

2 方法

sinc插值是一种已知的重采样策略，可将信号从一种采样频率下采样或上采样到另一种采样频率，也是对事件序列进行时间锁定的理想方法。

对每个试次中的单个时间区间进行重采样相对简单，现有文献中也已有明确的定义；这种做法假设我们希望进行时间对齐的区间在试次开始时开始、在试次结束时终止。我们关注的是更复杂的情况：一个或多个重要事件时刻（如起始时刻和结束时刻）在不同试次间有所变化，需要彼此进行时间锁定。

为演示之用，我构造了一个示例试次，将其设为以 f_{samp} =2048Hz 采样的非周期时间序列，其中包含图1所示的三个重要事件时刻，由两个频率 $f_1 = 5/\pi$ 和$f_2 = 5/2$组成。显然，f_1，f_2 彼此不能整除，且远低于奈奎斯特频率；由于 $f_{nyq} = f_{samp}/2 = 1024\text{Hz} \gg f_1$，$f_2$，奈奎斯特-香农采样定理表明，通过 sinc 插值可以实现完美的信号重建。

最简单的情况是一个试次由两个时间区间组成，并由单个事件时间将二者分隔开来。当某个试次事件的起始时间（或结束时间）存在一定变化时，就会出现这种情况，例如按压按钮，或对试次刺激做出反应时开始发声。此外，在两个感兴趣的区间之前和之后都存在非事件时间区间的情况下，也会出现这种情况，如图1所示。

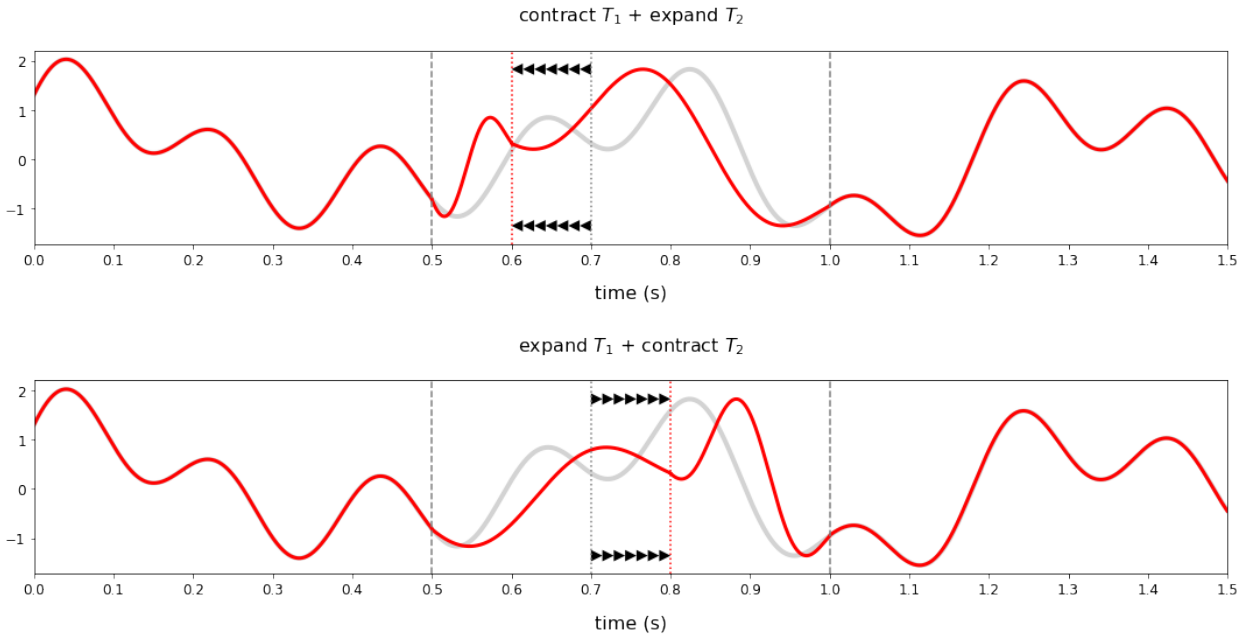

图2：根据重采样是收缩还是扩展 T_1， T_2而产生的不同结果。未扭曲信号以灰色显示。

这两种情况下都适用相同的重采样策略。若要在试次间对事件进行时间锁定，同时保留试次长度，就必须使一个时间区域 T_1 收缩，以配合另一个区域 T_2的扩展。我们根据事件起始和结束时间确定的索引对每个试次进行分区，并对中间的两个时间区间进行重采样。

来自 T_1， T_2 的信号会使用紧邻 T_1， T_2 的前后信号中的 ℓ_{pad} 值进行填充，以避免因信号长度过短而无法进行sinc插值时出现的“振铃”伪影。在定量论证之前，我对如何选择ℓ_{pad} 的依据有些随意，因此会凭定性判断选择足够大的 ℓ_{pad} 值，使振铃伪影在视觉上出现在远离 T_1， T_2的位置。在讨论中，我会定量说明 ℓ_{pad} 最小可以取多小而不损害重采样精度。从定性角度看，在每个试次的每侧填充 $\ell_{pad} \approx 10\% \times f_{samp}$个点，似乎已足以避免这种构造中出现振铃伪影。

我根据上下文选择重采样区域 T_1'， T_2'的长度，并计算每个区间的缩放比r_1， r_2。收缩区间对应 $T_i > T_i'$和 $r_i > 1 > 0$，而扩展区间对应 $T_i < T_i'$和 $0 < r_i < 1$。为了重采样并相应地扭曲各试次的时间，我对来自 T_1， T_2的每个试次信号应用窗函数sinc滤波器进行sinc插值。随后，我分别将 T_1， T_2 中的重采样信号截短$\ell_{pad,\ 1}$， $\ell_{pad,\ 2}$ ，并将这些截短后的信号与未缩放的试次区间拼接，以生成时间锁定试次。图2展示了收缩或扩展T_1， T_2 所产生的不同结果。

3 讨论

3.1 时间锁定试次高度近似未变形试次

显然，变形（sinc 插值）信号与其未扭曲的对应信号具有相当高的相关性（$r \approx 0.85$，图3），但区间端点可能是例外：在事件起始、过渡和结束时间处，通过收缩或扩展进行重采样会产生不光滑（但分段连续）的曲线。适当选择峰值检测方法并采用线性插值，或许可以修正其中一些伪影。

我进一步展开说明，并且 以欧氏DTW距离作为插值质量的代理指标，并计算 e

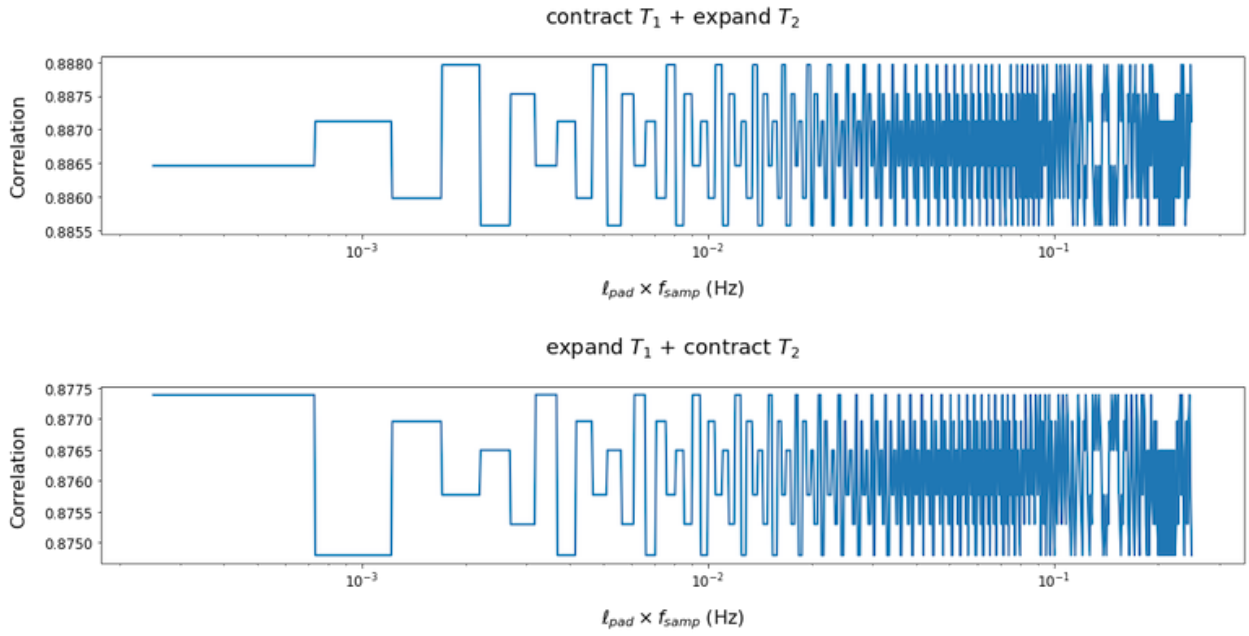

图3：不同填充选择下的扭曲试次相关性（纵轴）。填充以采样频率 f_{samp} （横轴）表示，涵盖扩展区间和收缩区间 T_1，T_2 （各行）。

扭曲信号与未扭曲信号之间的有效“距离”。我在图4中比较了它们与采样频率的关系。使用归一化欧几里得距离，扭曲信号与其未扭曲的对应信号相似度超过99%；图5中试次扭曲和反扭曲的“成本”表明，试次变换几乎不费吹灰之力，而且也可以按预期轻松撤销。在未缩放区间和整体试次时长上保持高度（甚至完美）的对应关系，凸显了以互补方式重新缩放试次各部分的重要性，以保留总试次长度以及 T_1、T_2之外定长区间内的相关性。

3.2 填充选择取决于 f_{samp}

我在图6和图7中估算了对每个区间进行扭曲所需的填充量，以避免显著的插值伪影。我们看到， ℓ_{pad} 可以低至 $\ell_{pad} \approx 10^{-2}$ ，此时“短”信号端点处的振铃效应等插值伪影会降低相关性和动态时间规整距离。经过充分填充的区间 $(\ell_{pad} \geq 10^{-1})$ 仍保持合理的相关性；根据奈奎斯特-香农采样定理，这些相关性在更高的采样频率下也会保持不变。将 f_{samp} 降低到图6中的 $1/32 \times f_{samp}$ 时，我们几乎看不到相关性受到影响。图7显示，插值信号在低至$1/8 \times f_{samp}$时相似度便会损失99%，这表明在 sinc 插值无法重构出相似的时间扭曲信号之前，采样开销仍有相当大的余量。

3.3 信号能量随插值呈线性变化

通过变量替换可知，在某个均匀间隔的有限时间域 $t \in [0, L]$ 内，将任意非周期信号 f 扭曲至 f' 后，通过重采样到另一个均匀间隔的有限时间域 $r_i t = T \in [0, r_i L]$，其能量最多会按线性因子 r_i 缩放：

$$r_i \cdot E_f = r_i \cdot \langle f(t), f(t) \rangle \equiv \langle f(r_i t), f(r_i t) \rangle = \langle f(T), f(T) \rangle = E_{f'}.$$

相应地，信号功率 $P_i = \int |f(t)|^2 dt$ 每 T_i 应随 sinc 插值呈线性缩放，直至 t

o

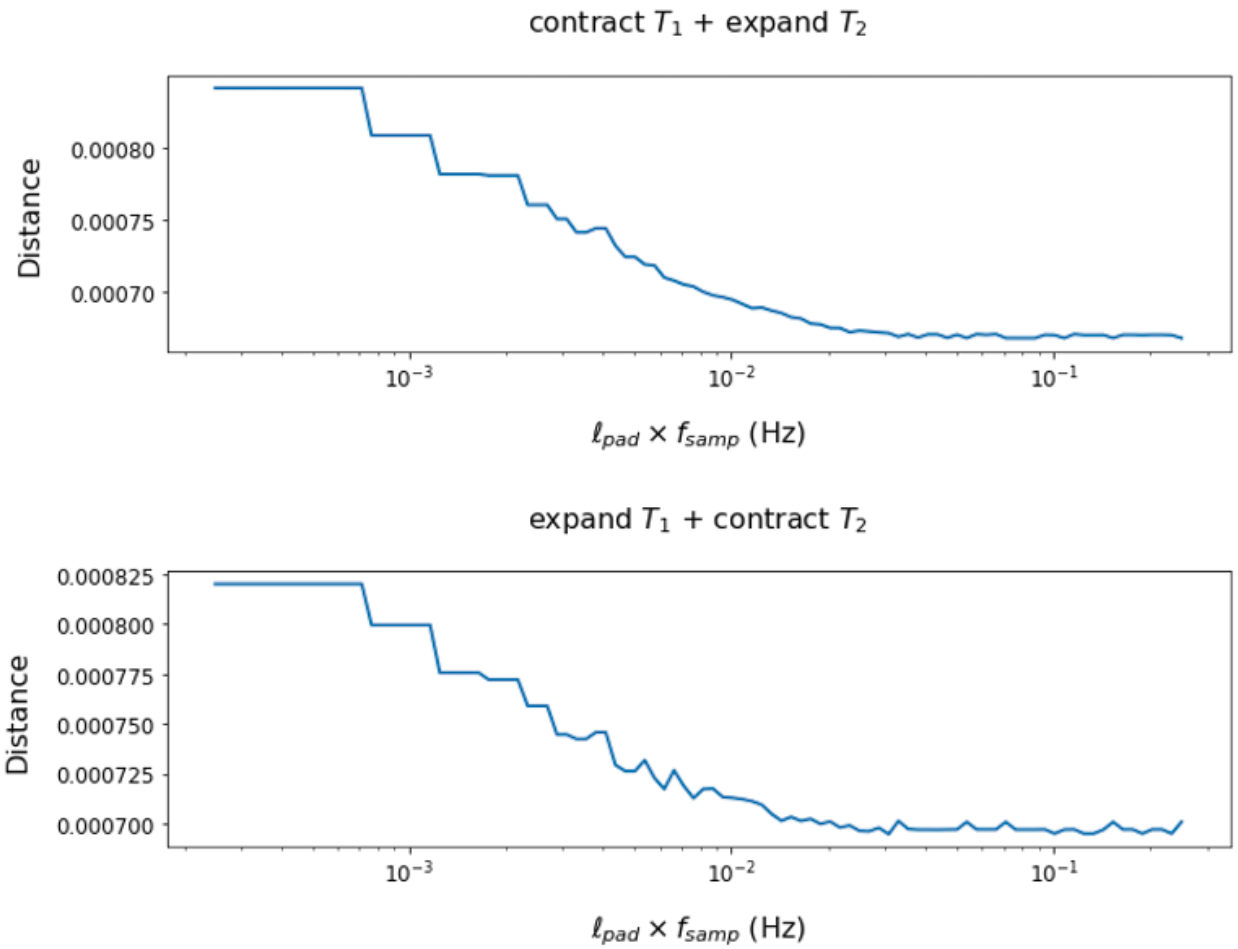

图4：不同填充选择下，变形试次与未变形试次之间的归一化欧几里得 DTW 距离。填充量以采样频率 f_{samp} （x 轴）表示，适用于扩展区间和收缩区间 T_1， T_2 （行）。

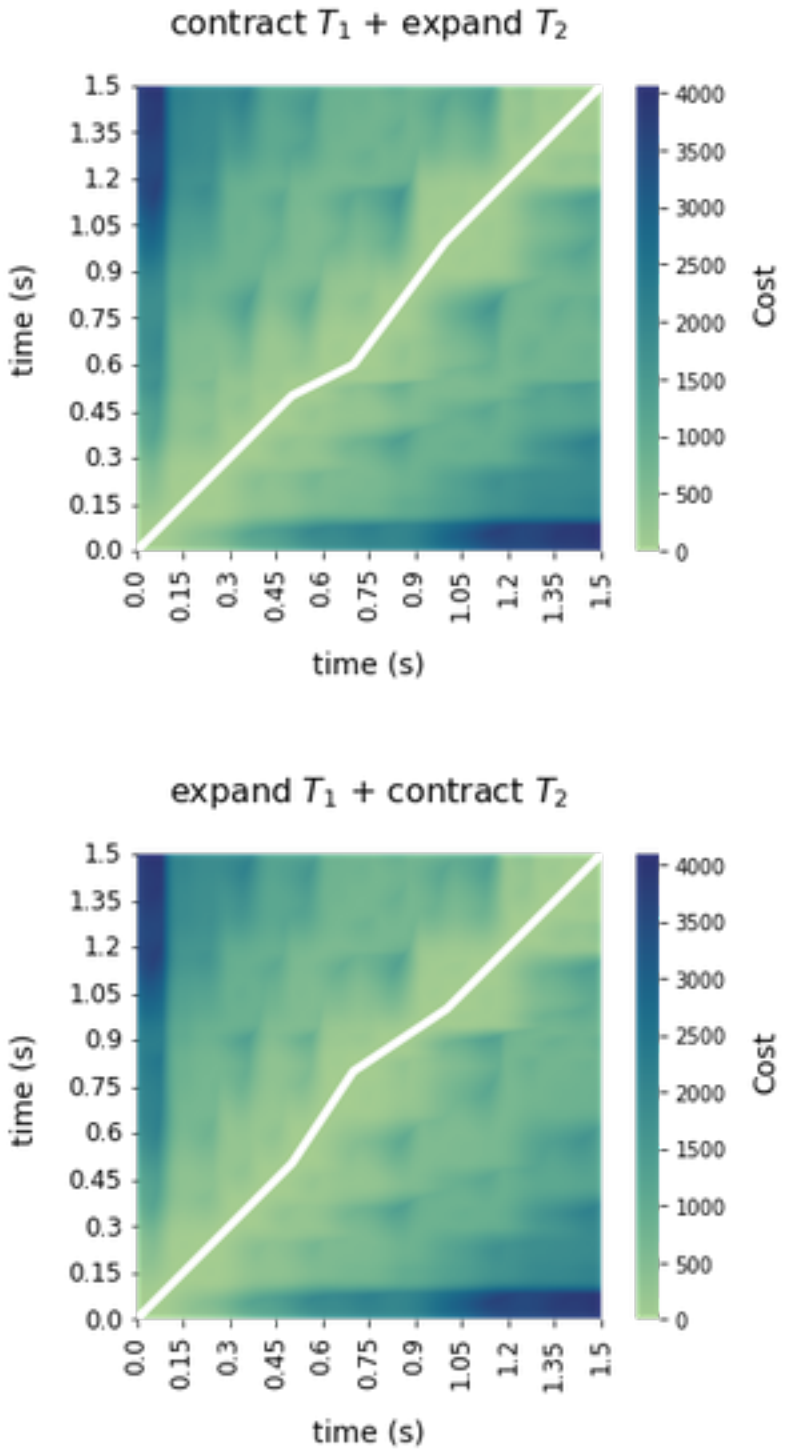

图5：在区间 T_1，T_2 中使用 DTW 在扭曲信号与其未扭曲的对应信号之间进行转换时的有效成本矩阵。突出显示了最小“扭曲路径”，表明在扭曲信号与未扭曲信号之间进行转换的成本接近于零。

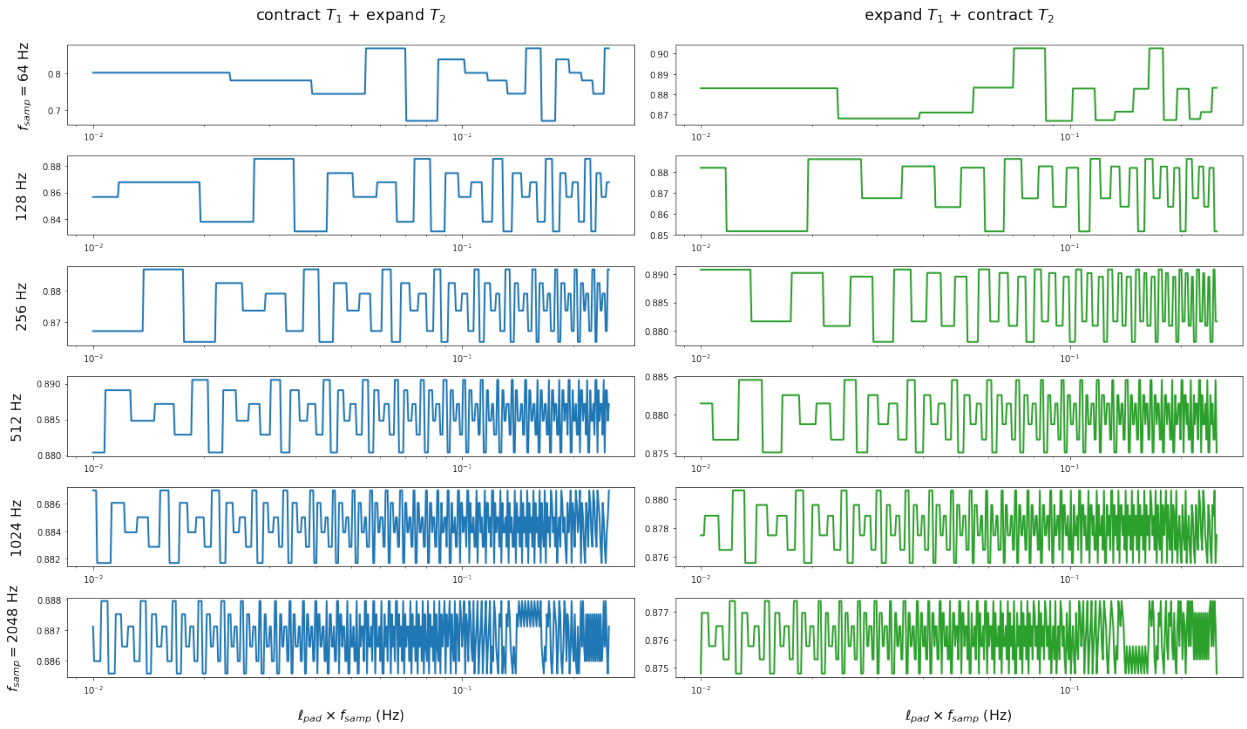

图6：不同填充选择下的扭曲试次相关性（纵轴）。填充量以采样频率 f_{samp} 表示（横轴，各行），分别对应扩展区间和收缩区间 T_1，T_2 （各列）。

一个数值浮点误差因子。这使得能量变化易于跟踪并进行数值核算，实际上 r_i 是每个 T_i 的线性能量缩放因子。

4 结论

我证明，sinc 插值足以作为一种重采样策略，用于扭曲并生成等长的时间锁定试次，使其与未扭曲的对应信号具有较好的相关性，且不会产生不需要的插值效应。具体而言，我证明，通过过采样、根据错位事件长度的均值对试次中错位的部分进行选择性插值，以及对错位事件进行充分的零填充，可以最大限度地减少插值效应。我估算了使重建结果达到 99% 相似度所需的最小插值填充量 ℓ_{pad} （相对于采样频率 f_{samp} ），并估算了在采样和带宽限制下， f_{samp} 以及相应的 ℓ_{pad} 可以降低到多低而不致使插值效果恶化。最后，我发现可以跟踪重采样对信号能量量值的影响。

参考资料

[1] R. Bellman 和 R. Kalaba。关于自适应控制过程。*IRE*自动控制汇刊，4(2):1–9，1959年11月。[2] Andreas Eckner。不均匀间隔时间序列数据分析框架。2014年。[3] L. Gupta、D.L. Molfese、R. Tammana 和 P.G. Simos。用于估计诱发电位的非线性对齐与平均。*IEEE*生物医学工程汇刊，43(4):348–356，1996年4月。[4] Zulkarnain Jamid。关于动态时间规整，你所知道的一切都是错的。第三届时间与序列数据挖掘研讨会，2004年1月。

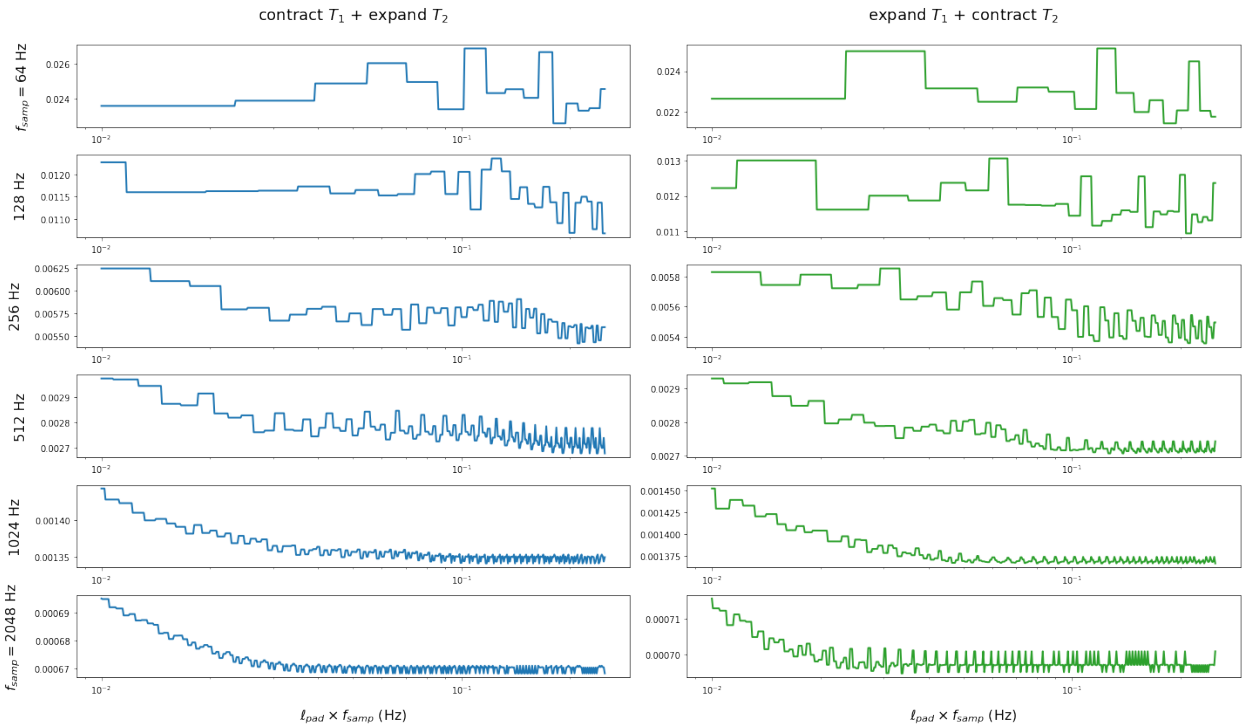

图7：不同填充选择下，变形试次与未变形试次之间的归一化欧几里得 DTW 距离。填充量以采样频率表示 f_{samp}（横轴、行），适用于扩展和收缩区间 T_1，T_2（列）。

[5] Fran¸cois Petitjean、Alain Ketterlin 和 Pierre Gan¸carski。《动态时间规整的全局平均方法及其在聚类中的应用》。《模式识别》，44(3):678–693，2011年3月。[6] Lars Lau Raket、Britta Grimme、Gregor Sch¨oner、Christian Igel 和 Bo Markussen。《人体运动分析中的时序、运动条件与个体差异分离》。《*PLoS* 计算生物学》，12(9):e1005092，2016年9月。[7] Lars Lau Rakˆet、Stefan Sommer 和 Bo Markussen。《用于函数型数据同时平滑与配准的非线性混合效应模型》。《模式识别快报》，38:1–7，2014年3月。[8] Efra¨ım Salari。《迈向语音脑机接口：感觉运动皮层活动与语音、发音器官及面部运动之间的关系》。*Rudolf Magnus*脑中心，266，2019年4月。