arXiv:2302.00602v1 [math.PR] 1 Feb 2023

张量值随机过程的尾界

Shih Yu Chang *

2023年2月2日

摘要

为研究高维随机过程，我们提出随机张量值过程（TRP）的概念。在本研究中，我们首次尝试应用泛型链式方法，推导 TRP 上确界的所有 p 阶矩的尾界。我们首先建立具有指数尾的随机过程上确界的尾界，进而推导具有任意多个指数尾的随机过程上确界的尾界。我们将这些界应用于高维压缩感知和经验过程刻画。

索引词——张量、随机过程、泛型链、尾界、经验过程、压缩发送。

1 引言

泛型链是 Talagrand 提出的一种强大的概率工具，用于确定实值随机过程上确界的期望值。这种方法源自 Kolmogorov 创立的传统链式论证，以及 Dudley、Fernique 和 Talagrand 提出的主导测度方法 [1]。泛型链运用 γ-泛函——一种定量衡量随机过程指标集度量复杂度的工具——来估计随机过程上确界的期望值。已知这类估计在若干特殊情况下是精确的，例如，著名的主导测度定理保证了对高斯随机过程的估计是精确的 [2]。泛型链的应用涉及信号处理、统计学和调和分析 [1]。除了了解随机过程上确界期望值的上界之外，我们还希望知道随机过程的上确界超过该期望值的可能性有多大。要回答这个问题，泛型链界还必须给出其他尾界，以刻画随机过程上确界相对于其期望值的偏差。对随机变量这类集中现象的研究，催生了许多关于尾界估计的研究成果，并在各个领域产生了多种应用，参见 [3]。

张量作为高维数据，已应用于科学和工程的不同领域，例如理论物理学 [4], 信号处理 [5], 机器学习 [6], 等。自 2010 [7], 以来，人们开始研究随机矩阵（二阶张量）的集中现象；关于将集中理论推广到任意阶随机张量，可参见以下工作：通过扩张图方法处理非独立随机张量 [8], 主序方法 [9], T-积张量 [10, 11], 以及其他方法 [12, 13]。在本研究中，我们首次尝试应用泛型链式方法，为随机张量值过程（TRP）的上确界的所有 p 阶矩推导尾界。我们的工作沿用了 [14], 提出的同一泛型链方法；然而，我们将其推广到随机张量情形，而非随机变量情形，并考虑具有任意数量、指数各不相同的指数尾部的混合 TRP。

*Shih Yu Chang 任职于美国加利福尼亚州圣何塞的圣何塞州立大学应用数据科学系（电子邮件: shihyu.chang@sjsu.edu）。

本文其余部分安排如下。第 2 节将定义张量值随机过程（TRP），并简要回顾张量的相关概念。随后，我们将在第 3 节基于泛型链讨论两类尾界：指数尾和混合尾部。第 4 节讨论指数尾界在压缩感知中的应用。第 5 节介绍混合尾界在经验过程中的应用。

2 张量值随机过程

我们将定义本文中所考虑的张量和张量值随机过程。关于张量基本概念的更多细节，请参见 [5, 12]。不失一般性，可以将张量的维度划分为两组，分别为 M维和 N维。因此，对于两个阶数为 (M+N) 的张量： $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$和 $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$，根据 [15],，张量加法 $\mathcal{A}+\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$定义为

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}+\mathcal{B})_{i_1,\cdots,i_M,j_1\times\cdots\times j_N} &\overset{\text{def}}{=} a_{i_1,\cdots,i_M,j_1\times\cdots\times j_N} \\
&\quad + b_{i_1,\cdots,i_M,j_1\times\cdots\times j_N}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

另一方面，对于张量 $\mathcal{A} = a_{i_1 \cdots i_M\, j_1 \cdots j_N} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$ 和 $\mathcal{B} = b_{j_1 \cdots j_N\, k_1 \cdots k_L} \in \mathbb{C}^{J_1 \times \cdots \times J_N \times K_1 \times \cdots \times K_L}$，根据爱因斯坦积[15]（或简称为本文中的张量积） $\mathcal{A} \star_N \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times K_1 \times \cdots \times K_L}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A} \star_N \mathcal{B})_{i_1,\cdots,i_M,k_1\times\cdots\times k_L} \overset{\text{def}}{=} \\
&\qquad \sum_{j_1,\cdots,j_N} a_{i_1,\cdots,i_M,j_1,\cdots,j_N} b_{j_1,\cdots,j_N,k_1,\cdots,k_L}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

请注意，为了简化记号，在本文其余部分中，我们常将张量积 $\mathcal{A} \star_N \mathcal{B}$ 简写为“$\mathcal{A}\mathcal{B}$”。该张量积在 $L = M = N =$1 的情况下可化为标准矩阵乘法。其他简化情形也可扩展为张量-向量积（$M > 1$、$N = 1$和 $L = 0$）以及张量-矩阵积（$M > 1$和 $N = L = 1$）。类比矩阵分析，我们定义一些基本张量和初等张量运算如下。

定义 1 所有元素均为零的张量称为零张量，记作 $\mathcal{O}$。

定义 2 单位张量 $\mathcal{I} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_N \times J_1 \times \cdots \times J_N}$ 定义如下：

$$
(\mathcal{I})_{i_1\times\cdots\times i_N\times j_1\times\cdots\times j_N} \overset{def}{=} \prod_{k=1}^{N} \delta_{i_k,j_k}, \qquad (3)
$$

其中 $\delta_{i_k,\ j_k} \text{ 定义为}= 1$若 $i_k = j_k$；否则 $\delta_{i_k,\ j_k} \text{ 定义为}= 0$。

为了定义厄米张量，现将张量的共轭转置运算（或厄米伴随）规定如下。

定义 3 给定一个张量 $\mathcal{A} \overset{def}{=} (a_{i_1,\cdots,i_M,j_1,\cdots,j_N}) \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$，其共轭转置记为 $\mathcal{A}^H$，定义为

$$
(\mathcal{A}^H)_{j_1,\cdots,j_N,i_1,\cdots,i_M} \overset{def}{=} \overline{a_{i_1,\cdots,i_M,j_1,\cdots,j_N}}, \qquad (4)
$$

其中，上划线表示复数 $a_{i_1,\ \cdots,\ i_M,\ j_1,\ \cdots,\ j_N}$ 的复共轭。若张量 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}^H = \mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}$ 是厄米张量。

定义 4 给定张量 $\mathcal{A} \overset{def}{=} (a_{i_1,\ \cdots,\ i_M,\ j_1,\ \cdots,\ j_M}) \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_M}$，若

$$\mathcal{A}^H \star_M \mathcal{A} = \mathcal{A} \star_M \mathcal{A}^H = \mathcal{I} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_M}, \tag{5}$$

那么 $\mathcal{A}$ 是一个酉张量。

定义 5 $\mathcal{A} = a_{i_1 \cdots i_M\, j_1 \cdots j_M}$ $\mathcal{X} \in$给定一个方张量 定义$(,,,,)$ $\in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times I_1 \times \cdots \times I_M}_{I_1 \times \cdots \times I_M \times I_1 \times \cdots \times I_M}$，如果存在使得

$$\mathcal{A} \star_M \mathcal{X} = \mathcal{X} \star_M \mathcal{A} = \mathcal{I}, \tag{6}$$

那么 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$的逆。我们通常记作 $\mathcal{X} \overset{定义}{=} \mathcal{A}^{-1}$。

我们也在此列出其他重要的张量运算。张量的迹等于所有对角元素之和，使得

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{1 \le i_j \le I_j,\, j \in [N]} \mathcal{A}_{i_1, \cdots, i_M, i_1, \cdots, i_M}. \tag{7}$$

两个张量 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N}$ 的内积定义为

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}\left(\mathcal{A}^H \star_M \mathcal{B}\right). \tag{8}$$

根据式（8），张量 $\mathcal{A}$ 的 Frobenius 范数定义为

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathrm{F}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle}. \tag{9}$$

在后续章节中，我们用 $\|\mathcal{A}\|_\alpha$ 表示由 [9] 中定义的规范函数 α 所对应的一般酉不变范数。

下面我们将定义张量值随机过程，并回顾泛型链的重要概念。设 $\mathfrak{X}$ 是由维度相同的张量组成的赋范线性空间，且 (T, d) 是一个度量空间。我们假设 T 的基数 $|T|$ 有限。张量值过程定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t \ &: \ \mathbb{R} \times \Omega \to \mathfrak{X} \\ &\quad (t, \omega) \to \mathcal{X}_t(\omega). \end{aligned} \tag{10}$$

相对于 d，T 的直径定义为

$$\Delta_d(T) \ = \ \sup_{s,t \in T} d(s,t). \tag{11}$$

我们称在度量空间 (T, d) 上，带参数 β 的 $\mathfrak{X}$ 值过程 $(\mathcal{X}_t)_{t \in T}$ 具有指数尾，如果

$$\mathrm{P}(\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_s\|_\alpha \ge u d(s,t)) \le 2\exp(-u^\beta), \tag{12}$$

其中 $\beta \ge 0$。

T 的子集序列 $\mathfrak{T} = (T_n)_{n \ge 0}$ 称为可容许的，如果 $|T_0| = 1$ 且对所有 $n \ge 1$ 均有 $|T_n| \le 2^{2^n}$。对于任意 $0 < \beta < \infty$，(T, d) 的 γ_β 泛函定义为

$$\gamma_\beta(T, d) \ = \ \inf_{\mathfrak{T}} \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/\beta} d(t, T_n), \tag{13}$$

其中 i　下确界取遍所有可容许序列，而 $d(t, T_n)$ 通过 $\inf_{s \in T_n} d(t, s)$ 得到。

3 TRP 的上确界与尾部估计

本节将介绍两种基于泛型链的尾界分析。第一种是为具有指数尾的随机过程的上确界建立尾界，见第 3.1 节。第二种是为具有混合指数尾的随机过程的上确界建立尾界，见第 3.2 节。

3.1 具有指数尾的随机过程上确界的尾界

为了考虑 p 阶矩，我们需要定义以下截断的 γ_β 泛函。对于给定的 $1 \le p < \infty$，我们用符号 n' 表示通过 $n' = \lfloor \log_2(p) \rfloor$ 得到的整数，其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示整数部分。我们定义关于幂 p 的截断 γ_β 泛函如下

$$\gamma_{\beta,p}(T,d) \quad = \quad \inf_{\mathfrak{T}} \sup_{t\in T} \sum_{n=n'}^{\infty} 2^{n/\beta} d(t, T_n), \tag{14}$$

其中 $n' = \lfloor \log_2(p) \rfloor$。比较式 (14) 和式 (13) 给出的定义可得，对于所有 $1leqp < \infty$ 和 $\gamma_{\beta,\ p}(T,d) \le \gamma_\beta(T,d),\ _1(T,d) = \gamma_\beta(T,d)$。使下确界取到的序列 $\mathfrak{T}$ 称为最优序列。

我们需要先准备以下三个引理，它们将在后续每一个泛型链论证中用到。

引理 1 给定 $1 \le p < \infty$，令 $n' = \lfloor \log_2(p) \rfloor$，并设 $(\mathcal{X}_t)_{t\in T}$ 为一组随机张量。若 $|T| \le 2^{2^{n'}}$，则有

$$\left(\mathbb{E} \sup_{t\in T} \|\mathcal{X}_t\|_\alpha^p \right)^{1/p} \le 2 \sup_{t\in T} \left(\mathbb{E} \|\mathcal{X}_t\|_\alpha^p \right)^{1/p}. \tag{15}$$

证明：由于 $|T| \le 2^{2^{n'}}$，我们有

$$\mathbb{E} \sup_{t\in T} \|\mathcal{X}_t\|_\alpha^p \le \sum_{t\in T} \mathbb{E} \|\mathcal{X}_t\|_\alpha^p \le |T| \sup_{t\in T} \mathbb{E} \|\mathcal{X}_t\|_\alpha^p \le 2^p \sup_{t\in T} \mathbb{E} \|\mathcal{X}_t\|_\alpha^p. \tag{16}$$

□

引理 2 给定 $1 \le p < \infty$、$0 < \beta\infty$、$u \ge 2^{1/\beta}$，并令 $n' = \lfloor \log_2(p) \rfloor$。对于每个 $n > n'$，设 $(E_{j,\ n})_{j\in J_n}$ 为一组满足以下条件的事件

$$\mathrm{P}(E_{j,n}) \le 2\exp(-2^n u^\beta), \tag{17}$$

其中 $j \in J_n$。如果 $|J_n| \le 2^{2^{n+1}}$，则有

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n>n'} \bigcup_{j\in J_n} E_{j,n} \right) \le C_1 \exp(-pu^\beta/4). \tag{18}$$

证明：由并集界以及 $u^\beta \geq 2$ 这一事实可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{n>n'}\bigcup_{j\in J_n} E_{j,n}\right) &\leq \sum_{n>n'} 2^{2^{n+1}} 2\exp(-2^n u^\beta) \\
&= 2\sum_{n>n'} \exp(2(\log 2)2^n)\exp(-2^n u^\beta) \\
&\leq 2\sum_{n>n'} \exp((\log 2 - 1)2^n u^\beta) \\
&= \exp(-2^{n'}u^\beta/2)\sum_{n>n'} \exp((\log 2-1)2^n u^\beta + 2^{n'}u^\beta/2) \\
&\leq \exp(-2^{n'}u^\beta/2)\sum_{n>0} \exp((\log 2-1)2^n u^\beta + 2^n u^\beta/4). \qquad (19)
\end{aligned}$$

注意，

$$\begin{aligned}
\sum_{n>0}\exp((\log 2-1)2^n u^\beta + 2^n u^\beta/4) &= \sum_{n>0}\exp(2^n u^\beta(\log 2 - 0.75)) \\
&\leq_1 \sum_{n>0}\exp(2^{n+1}(\log 2 - 0.75)) \\
&\leq \sum_{n>0}\exp(2n(\log 2 - 0.75)) \\
&= C_1. \qquad (20)
\end{aligned}$$

其中我们在 $\leq_1$ 处应用 $u \geq 2^{1/\beta}$，并且使用 $(\log 2 - 0.75) < 0$。然后，由于 $2^{n'} \geq p/2$，我们得到式 (19)。 □

引理 3 给定一个正随机变量 x、比率 $r \geq 0$、边界常数 $u_b > 0$、$1 \leq p < \infty$ 和 $0 < \beta < \infty$，若有

$$\mathrm{P}(x > ru) \leq d\exp(-pu^\beta/4), \qquad (21)$$

其中 $u \geq u_b$。然后，我们有

$$(\mathbb{E}x^p)^{1/p} \leq r(c_\beta d + u_b), \qquad (22)$$

其中常数 c_β 仅取决于 β。

证明：通过分部积分和变量代换，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}x^p &= \int_0^\infty px^{p-1}\mathrm{P}(x>u)du \\
&= r^p\int_0^\infty pv^{p-1}\mathrm{P}(x>rv)dv \\
&\leq_1 r^p\left(\int_{u_b}^\infty pv^{p-1}d\exp(-pu^\beta/4)dv + \int_0^{u_b} pv^{p-1}dv\right) \\
&= r^p\left(d\int_{u_b}^\infty pv^{p-1}\exp(-pu^\beta/4)dv + u_b^p\right), \qquad (23)
\end{aligned}$$

其中我们应用了 $\leq_1$ 中的式 (21)。我们需要进一步分析项 $\int_{u_b}^{\infty} pv^{p-1}\exp(-pu^{\beta}/4)dv$。因为我们有

$$\begin{aligned}\int_{u_b}^{\infty} pv^{p-1}\exp(-pu^{\beta}/4)dv &\leq \int_{0}^{\infty} pv^{p-1}\exp(-pu^{\beta}/4)dv \\ &=_1 \frac{2p^{1-p/\beta}2^{p/\beta}}{\beta}\int_{0}^{\infty} w^{2p/\beta-1}e^{-w^2/2}dw \\ &= \frac{2\sqrt{2\pi}p^{1-p/\beta}2^{p/\beta}}{2\beta}\mathbb{E}|y|^{2p/\beta-1} \end{aligned} \tag{24}$$

其中，$=_1$ 由变量代换得到，y 是一个标准正态随机变量。根据文献 [16],，我们有

$$\mathbb{E}|y|^{2p/\beta-1} = \frac{2^{p/\beta-1/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p/2\beta). \tag{25}$$

结合以上所有估计即可得到该结果。 □

我们现在可以给出以下关于具有指数尾的张量随机过程上确界的尾界定理。

定理 1 设 $0 < \beta < \infty$ 和 $(\mathcal{X}_t)_{t\in T}$ 满足公式（12），则存在常数 C_β、$D_\beta > 0$，它们仅依赖于 β，使得对于任意 $t_0 \in T$ 和 $1 \leq p < \infty$，我们有

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha^p\right)^{1/p} \leq C_\beta\gamma_{\beta,p}(T,d) + 2\sup_{t\in T}\left(\mathbb{E}\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha^p\right)^{1/p}. \tag{26}$$

此外，

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in T}\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha \geq e^{1/\beta}\left(C_\beta\gamma_{\beta,p}(T,d) + uD_\beta\Delta_d(T)\right)\right) \leq \exp(-u^\beta/\beta). \tag{27}$$

证明：设 $\mathfrak{T} = (T_n)_{n\geq 0}$ 是 $\gamma_{\beta,\ p}(T,d)$ 的一个最优可容许序列，并设 $\varpi_n:\ T \to T_n$ 是一列定义如下的函数：$\varpi_n(t) = \arg\min_{s\in T_n} d(s,t)$。令 $n' = \lfloor \log_2(p) \rfloor$，我们得到以下分解

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha^p\right)^{1/p} \leq \left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\left\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)}\right\|_\alpha^p\right)^{1/p} + \left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\left\|\mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)} - \mathcal{X}_{t_0}\right\|_\alpha^p\right)^{1/p}. \tag{28}$$

对于式 (28)右端的第一项，我们将对 $\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)}$ 应用望远镜求和表示。具体为

$$\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)} = \sum_{n>n'}\mathcal{X}_{\varpi_n(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{n-1}(t)}. \tag{29}$$

由于张量随机过程 $(\mathcal{X}_t)_{t\in T}$ 满足公式（12），我们有

$$\mathrm{P}\left(\left\|\mathcal{X}_{\varpi_n(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{n-1}(t)}\right\|_\alpha \geq u2^{n/\beta}d(\varpi_n(t),\varpi_{n-1}(t))\right) \leq 2\exp(-u^\beta 2^n), \tag{30}$$

其中 $n > n'$。若 $u \geq 2^{1/\beta}$，我们用 $E_{u,\ p}$ 表示以下事件：

$$\left\|\mathcal{X}_{\varpi_n(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{n-1}(t)}\right\|_\alpha \leq u2^{n/\beta}d(\varpi_n(t),\varpi_{n-1}(t)), \tag{31}$$

其中 $\forall n > n'$ 和 $\forall t \in T$。于是，根据引理 2，我们得到事件 $E_{u,\ p}$的补集的以下概率界：

$$\mathrm{P}(E_{u,p}^{c}) \leq C_1 \exp(-pu^{\beta}/4). \tag{32}$$

若事件 $E_{u,\ p}$ 发生，则有

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n>n'} \mathcal{X}_{\varpi_n(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{n-1}(t)} \right\|_{\alpha} &\leq \sum_{n>n'} \left\| \mathcal{X}_{\varpi_n(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{n-1}(t)} \right\|_{\alpha} \\ &\leq u \sum_{n>n'} 2^{n/\beta} d(\varpi_n(t), \varpi_{n-1}(t)) \\ &\leq u(1+2^{1/\beta}) \gamma_{\beta,p}(T,d). \end{aligned} \tag{33}$$

因此，我们有

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in T} \left\| \mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)} \right\|_{\alpha} u(1+2^{1/\beta}) \gamma_{\beta,p}(T,d) \right) \leq C_1 \exp(-pu^{\beta}/4). \tag{34}$$

由引理 3 可得

$$\left(\mathbb{E} \sup_{t\in T} \left\| \mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)} \right\|_{\alpha}^{p} \right)^{1/p} \leq C_{\beta} \gamma_{\beta,p}(T,d). \tag{35}$$

对于式 (28) 右端的第二项，我们可以利用引理 1 对其进行估计，得到

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \sup_{t\in T} \left\| \mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)} - \mathcal{X}_{t_0} \right\|_{\alpha}^{p} \right)^{1/p} &\leq 2 \sup_{t\in T} \left(\mathbb{E} \left\| \mathcal{X}_{\varpi_{n'}(t)} - \mathcal{X}_{t_0} \right\|_{\alpha}^{p} \right)^{1/p} \\ &\leq 2 \sup_{t\in T} \left(\mathbb{E} \left\| \mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{t_0} \right\|_{\alpha}^{p} \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{36}$$

结合式（28）、式 (35) 和式 (36)，即可推出公式（26）。

在证明公式（27）之前，我们需要陈述关于随机变量的两个事实。它们的证明见 [17] 中的第 7 章。若 X 是满足以下条件的随机变量

$$(\mathbb{E}|X|^{p})^{1/p} \leq ap^{1/\beta} + b, \tag{37}$$

其中 $0 < a$、b、$\beta < \infty$ 和 $p \geq 1$，那么我们有

$$\mathrm{P}\left(|X| \geq e^{1/\beta}(au+b) \right) \leq \exp(-u^{\beta}/\beta), \tag{38}$$

其中 $u \geq 1$。第二个事实是如何根据随机变量的尾界来界定其矩。如果随机变量 X 满足以下条件：

$$\mathrm{P}(|X| \geq e^{1/\beta} au) \leq be^{-u^{\beta}/\beta}, \tag{39}$$

其中 $0 < a$、b、β、$u < \infty$；我们有

$$(\mathbb{E}|X|^{p})^{1/p} \leq e^{1/2e} ap^{1/\beta} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} be^{\beta/12} \right)^{1/p}. \tag{40}$$

根据公式（12）给出的条件以及公式（40）给出的事实，我们有

$$\sup_{t\in T}\left(\mathbb{E}\left\|\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_{t_0}\right\|_\alpha\right)^{1/p}\leq D_\beta\Delta_d(T)p^{1/\beta}. \tag{41}$$

然后，将公式（41）应用于公式（26），再结合公式（38），即可得到公式（27）。 □

我们使用 符号 $\preceq$ in $\mathcal{X}\preceq\mathcal{Y}$ 表示张量 $\mathcal{Y}-\mathcal{X}$ 是一个正定张量 .

由于定理 1 不要求张量过程 $(\mathcal{X}_t)_{t\in T}$ 的增量满足任何独立性假设，因此我们可以在鞅情形下应用定理 1。若 $(\mathcal{X}_i)_{i=0,1,2,\cdots,n}\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times I_1\times\cdots\times I_M}$ 是一个离散时间厄米张量值鞅，且其 i 阶差分张量为 $\mathcal{D}_i=\mathcal{X}_i-\mathcal{X}_{i-1}$，那么根据 [12],中的定理14（张量 Azuma 不等式），我们有

$$\mathrm{P}\left(\lambda_{\max}\left(\mathcal{X}_n-\mathcal{X}_0\right)\geq u\right)\leq\left(\prod_{i=1}^{M}I_i\right)\exp\left(-\frac{u^2}{8\sigma^2}\right), \tag{42}$$

其中， $\sigma^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}_i^2\right\|_{\text{maxspec}}$ 和 $\|\cdot\|_{\text{max spec}}$ 表示最大谱范数。将公式（42）给出的张量 Azuma 不等式与定理 1 结合，我们得到以下推论。

推论1 设 $\mathcal{X}_t=(\mathcal{X}_{t,i})_{i=0,1,\cdots,n},t\in T$ 是关于同一滤过的一族离散时间鞅。我们定义如下度量：

$$d_{s,t}=\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\mathcal{D}_i^2\right\|_{max\ spec}\right)^{1/2}, \tag{43}$$

其中 $\mathcal{D}_i=(\mathcal{X}_{t,i}-\mathcal{X}_{s,i})-(\mathcal{X}_{t,i-1}-\mathcal{X}_{s,i-1})$。对于任意 $u\geq1$，有

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in T}\lambda_{\max}\left(\mathcal{X}_{t,n}-\mathcal{X}_{t,0}\right)\geq e^{1/2}\left(C_2\gamma_2(T,d)+D_2\Delta_d(T)u\right)\right)\leq e^{-u^2/2}. \tag{44}$$

3.2 具有混合指数尾的随机过程上确界的尾界

本节旨在建立具有混合指数尾的张量过程上确界的尾界。为此，我们先准备以下两个引理，它们将用于证明张量过程上确界的尾界。

引理4 若 X 是满足以下条件的随机变量

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}\leq\sum_{n=1}^{m}a_np^{1/n}+a_{n+1}, \tag{45}$$

其中 $p\geq1$ 和 $0\leq a_n<\infty$；则有

$$\mathrm{P}\left(|X|\leq e\left(\sum_{n=1}^{m}a_np^{1/n}+a_{n+1}\right)\right)\leq\exp(-u), \tag{46}$$

其中 $u\geq1$。

证明：该结论可直接由马尔可夫不等式推出。 □

引理 5 若随机变量 X 满足

$$\mathrm{P}\left(|X| \geq \sum_{n=1}^{m} a_n p^{1/n}\right) \leq \exp(-u), \tag{47}$$

其中 $u \geq 0$和 $0 \leq a_n < \infty$；于是，

$$(\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} \leq \sum_{n=1}^{m} m a_n f_n(p) p^{1/n}, \tag{48}$$

其中 f_n（p）是与参数 p和 $p \geq 1$相关的正实值函数 .

证明：由式（48）可得

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{m}|X| \geq u\right) \leq \begin{cases} e^{-u^m/a_m^m}, & \text{if } 0 \leq u \leq a_m^m/a_{m-1}^{m-1}; \\ \quad \vdots \quad , & \quad \vdots \quad ; \\ e^{-u^3/a_3^3}, & \text{if } a_4^4/a_3^3 \leq u \leq a_3^3/a_2^2; \\ e^{-u^2/a_2^2}, & \text{if } a_3^3/a_2^2 \leq u \leq a_2^2/a_1; \\ e^{-u/a_1}, & \text{if } u \geq a_2^2/a_1. \end{cases} \tag{49}$$

利用分部积分和变量代换，可得

$$\begin{aligned} m^{-p}\mathbb{E}|X|^p &= p\int_0^\infty u^{p-1}\mathrm{P}\left(\frac{1}{m}|X| \geq u\right) du \\ &\leq p\int_0^{a_m^m/a_{m-1}^{m-1}} u^{p-1} e^{-u^m/a_m^m} du + p\sum_{n=2}^{m-1}\int_{a_{m-n+2}^{m-n+2}/a_{m-n+1}^{m-n+1}}^{a_{m-n+1}^{m-n+1}/a_{m-n}^{m-n}} u^{p-1} e^{-u^{m-n+1}/a_{m-n+1}^{m-n+1}} du \\ &\quad + p\int_{a_2^2/a_1}^\infty u^{p-1} e^{-u/a_1} du \\ &\leq \frac{1}{m} p a_m^p \Gamma(p/m) + \sum_{n=2}^{m-1} \frac{1}{n} p a_n^p \Gamma(p/n) + p a_1^p \Gamma(p) \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} p a_n^p \Gamma(p/n) \\ &\leq_1 \sum_{n=1}^{m} m a_n f_n(p) p^{1/n}, \end{aligned} \tag{50}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数，而 $\leq_1$ 来自对斯特林公式的估计。Γ（p）的斯特林公式可表示为

$$\Gamma(p) = \sqrt{2\pi} p^{p-1/2} e^{-p} e^{\mu(p)/12p}, \tag{51}$$

其中 $0 \leq \mu$（p）≤ 1。该引理通过求取 f_n（p）来界定每个 n对应的 $\frac{1}{n}p\Gamma$（p/n）而得以证明。例如，若 $m = 2$，则有

$$\begin{aligned} f_1(p) &= \sqrt{2\pi p} p^p e^{-p+1/12p}, \\ f_2(p) &= \sqrt{\pi} e^{1/6p} (2e)^{-p/2} e^{p/2e} p^{p/2}. \end{aligned} \tag{52}$$

□

有了这两个引理，我们可以陈述以下关于具有混合指数尾的张量过程上确界的尾界定理。

定理 2 若 $(\mathcal{X}_t)_{t\in T}$ 具有满足以下条件的混合尾部:

$$\mathrm{P}\left(\|\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_s\|_\alpha \geq \sum_{n=1}^{m} u^{1/n} d_n(s,t)\right) \leq 2e^{-u}, \tag{53}$$

其中， $d_n(s,t)$是定义在 T 和 $u \geq 0$上的度量。那么，存在一个常数 $C_2 > 0$ ，使得对于任意$1 \leq p < \infty$, 我们有

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\|\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha\right)^{1/p} \quad \leq \quad C_2\sum_{n=1}^{m}\gamma_n(T,d_n)+2\sup_{t\in T}\left(\mathbb{E}\,\|\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha^p\right)^{1/p}. \tag{54}$$

因此，存在常数 C_2, C_3 ，使得对于任意 $u \geq 1$，我们有

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in T}\|\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha \geq C_2\sum_{n=1}^{m}\gamma_n(T,d_n)+C_3\sum_{n=1}^{m}u^{1/n}\Delta_{d_n}(T)\right)\leq e^{-u}. \tag{55}$$

证明：我们选取 m 组可容许的分割序列 $\mathfrak{Q}^{(n)}=(\boldsymbol{Q}_i^{(n)})_{i\geq 0}$ ，对于 $n=1,2,\cdots,m$，使得

$$\sup_{t\in T}\sum_{i\geq 0}2^{i/n}\Delta_{d_n}(\boldsymbol{Q}_i^{(n)}(t)) \leq 2\gamma_n'(T,d_n), \tag{56}$$

其中， $\gamma_n'(T,d_n)$定义为

$$\gamma_n'(T,d_n) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \inf_{\mathfrak{Q}^{(n)}}\sup_{t\in T}\sum_{i=0}^{\infty}2^{i/n}\Delta_{d_n}(\boldsymbol{Q}_i^{(n)}(t)). \tag{57}$$

对于 $i \geq 0$，令 $\mathfrak{A}=(A_i)_{i\geq 0}$ 为由 $\boldsymbol{Q}_{i-j}^{(n)}$ 生成的分割:

$$A_i=\left\{\bigcap_{n=1}^{m}Q^{(n)} : Q^{(n)}\in\boldsymbol{Q}_{i-j}^{(n)}\right\} \tag{58}$$

其中， $j=\lceil \log_2 m\rceil$ 且 $\boldsymbol{Q}_{-j}^{(n)} \overset{\text{定义}}{=} \boldsymbol{Q}_0^{(n)}$ ，使得 $A_0=T$。那么，$(A_i)_{i\geq 0}$ 是递增的，并且

$$|A_i| \leq \prod_{n=1}^{m}|\boldsymbol{Q}_{i-j}^{(n)}| \leq 2^{2^{i-j}}\cdot 2^{2^{i-j}}\cdots 2^{2^{i-j}} = 2^{2^i}, \tag{59}$$

这表明 $\mathfrak{A}$ 是可容许的。对于每个 $i \geq 0$，我们通过从每个 A_i中恰好选取一个点，定义 T的 T_i。定义 $\varpi_i(t): T \to T_i$ 为 $T_i \bigcap A_i(t)$的唯一元素，于是得到一个映射序列 $(\varpi_i)_{i\geq 0}$。

令 $i'=\lfloor \log_2(p)\rfloor$，可得如下分解

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\|\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_{t_0}\|_\alpha^p\right)^{1/p} \quad \leq \quad \left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\left\|\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_{\varpi_{i'}(t)}\right\|_\alpha^p\right)^{1/p}+\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T}\left\|\mathcal{X}_{\varpi_{i'}(t)}-\mathcal{X}_{t_0}\right\|_\alpha^p\right)^{1/p}. \tag{60}$$

我们将重点估计式 (60) 右端的第一项，因为式 (60) 右端的第二项可在定理 1 的证明中用类似的方法推导。对于第一项，我们可以应用望远镜求和:

$$\mathcal{X}_t-\mathcal{X}_{\varpi_{i'}(t)}=\sum_{i>i'}\mathcal{X}_{\varpi_i(t)}-\mathcal{X}_{\varpi_{i-1}(t)}. \tag{61}$$

根据式 (53) 给出的混合尾部条件，对于 $i > i'$ 和 $u \geq 0$，我们有

$$\mathrm{P}\left(\left\|\mathcal{X}_{\varpi_i(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{i-1}(t)}\right\|_\alpha \geq \sum_{n=1}^{m} u^{1/n} 2^{i/n} d_n(\varpi_i(t), \varpi_{i-1}(t))\right) \leq 2e^{-u2^i}. \tag{62}$$

令$E_{u,p}$ 表示事件

$$\left\|\mathcal{X}_{\varpi_i(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{i-1}(t)}\right\|_\alpha \geq \sum_{n=1}^{m} u^{1/n} 2^{i/n} d_n(\varpi_i(t), \varpi_{i-1}(t)), \tag{63}$$

其中 $i > i'$ 且 $t \in T$。若事件 $E_{u,p}$ 发生，则有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i>i'} \mathcal{X}_{\varpi_i(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{i-1}(t)}\right\|_\alpha &\leq \sum_{i>i'} \left\|\mathcal{X}_{\varpi_i(t)} - \mathcal{X}_{\varpi_{i-1}(t)}\right\|_\alpha \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} u^{1/n} \sum_{i>i'} 2^{i/n} d_n(\varpi_i(t), \varpi_{i-1}(t)).\end{aligned} \tag{64}$$

根据我们对 $\mathfrak{Q}^{(n)}$的选择，可以找到常数 h_n，使得对于 $n = 1$、2、$\cdots$、m，有

$$\sum_{i>i'} 2^{i/n} d_n(\varpi_i(t), \varpi_{i-1}(t)) \leq h_n \gamma_n'(T, d_n). \tag{65}$$

$_m$由于 $\sup_{t\in T} \left\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'(t)}}\right\|_\alpha \leq \sum_{n=1} h_n \gamma_n'(T, d_n)$，我们有

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t\in T} \left\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'(t)}}\right\|_\alpha > C_2' u \sum_{n=1}^{m} \gamma_n'(T, d_n)\right) \leq c\exp(-pu/4), \tag{66}$$

其中 $C_2' = \max_{n=1,2,\cdots,m} {}^{h_n}$。根据引理 3以及事实 $\gamma_n(T, d_n) \leq \gamma_n'(T, d_n) \leq g(n)\gamma_n(T, d_n)$，其中 $g(n)$是一个仅依赖于 n []的常数；我们有

$$\left(\mathbb{E}\sup_{t\in T} \left\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{\varpi_{n'(t)}}\right\|_\alpha^p\right)^{1/p} \leq C_2' u \sum_{n=1}^{m} \gamma_n'(T, d_n) \leq C_2 u \sum_{n=1}^{m} \gamma_n(T, d_n). \tag{67}$$

于是，我们得到了式 (54)。

对于尾界，引理 5 和式 (53) 给出的混合尾部条件可得 u s

$$\sup_{t\in T} (\mathbb{E}\left\|\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{t_0}\right\|_\alpha^p)^{1/p} \leq C_3 \sum_{n=1}^{m} p^{1/n} \Delta_{d_n}(T). \tag{68}$$

结合引理 4，将式 (68) 应用于式 (54) 即可得到式 (55)。 □

4 应用：压缩感知

本节中，我们将把定理 1 应用于高维压缩感知。首先介绍一些基于张量的高维压缩感知基本记号。注意，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 是标准 Frobenius 范数。

如果张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{J_1 \times \cdots \times J_N}$ 是 ξ-稀疏的，则称其为

$$\|\mathcal{X}\|_0 \stackrel{\text{def}}{=} |\{(j_1, j_2, \cdots, j_N) : x_{j_1, j_2, \cdots, j_N} \neq 0\}| \leq \xi. \tag{69}$$

对于给定的 $\xi \in \mathbb{N}$， ξ 阶受限等距常数 τ_ξ 是满足以下条件的 $I_1 \times \cdots \times I_M \times J_1 \times \cdots \times J_N$ 张量 $\mathcal{A}_{M \quad N}$ 在限制 $\prod_{i=1} I_i \leq \prod_{j=1} J_j$ 下的最小常数 τ：

$$(1-\tau)\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}^2 \leq \|\mathcal{A} \star_N \mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}^2 \leq (1+\tau)\|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}^2, \tag{70}$$

对于所有 ξ-稀疏张量 $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{J_1 \times \cdots \times J_N}$。我们还可以定义 ξ-稀疏张量 $\mathcal{X}$ 的集合：

$$S_{\xi;(J_1, \cdots, J_N)} = \left\{\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{J_1 \times \cdots \times J_N} : \|\mathcal{X}\|_{\mathrm{F}} = 1, \|\mathcal{X}\|_0 \leq \xi\right\}, \tag{71}$$

那么，我们有

$$\tau_\xi(\mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{X} \in S_{\xi;(J_1, \cdots, J_N)}} \left| \|\mathcal{A} \star_N \mathcal{X}\|_{\mathrm{F}}^2 - 1 \right|. \tag{72}$$

受限等距常数 $\tau_\xi(\mathcal{A})$ 是压缩感知中的一个重要参数。

设 $[u_{i_1, \cdots, i_N, j_1, \cdots, j_N}] \in \mathcal{U} \in J_1 \times \cdots \times J_N \times J_1 \times \cdots \times J_N$ 为酉张量，并且存在某个正数 $\Upsilon \geq 1$，使得

$$\sup_{i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n} \sqrt{\prod_{j=1}^{N} J_j} |u_{i_1, \cdots, i_n, j_1, \cdots, j_n}| \leq \Upsilon. \tag{73}$$

我们考虑一个序列 $(\theta_{j_1, \ \cdots, \ j_N})_{1 \leq j_i \leq J_j}$，其中 $i = 1$、2、 $\cdots$、 N 是随机选择器的独立同分布副本，即满足以下条件的伯努利随机变量：

$$\mathrm{P}(\theta = 1) = \frac{\prod_{i=1}^{M} I_i}{\prod_{j=1}^{N} J_j}. \tag{74}$$

令 $\Pi = \{(j_1, \cdots, j_N) : \theta_{j_1, \ \cdots, \ j_N} = 1\}$ 为选定索引的随机集合，其期望基数为 $_M\mathbb{E}|\Pi| = \prod I_{i\circ}$ 令 $\mathcal{U}_\Pi$ 为由酉张量 $\mathcal{U}$ 按 $_{i=1}$ 得到的采样张量

$$\mathcal{U}_\Pi = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{N} J_j}{\prod_{i=1}^{M} I_i}} \mathcal{S}_\Pi \star_N \mathcal{U}, \tag{75}$$

其中， $\mathcal{S}_\Pi$ 是将张量限制为其在 $\mathcal{U}$ 的 Π 中的条目的算子。

下面给出关于受限等距常数 τ_ξ 的定理。

定理3 若存在通用常数 C_4、 $C_5 > 0$，使得对于任意给定的 $\xi \in \mathbb{N}$ 以及任意满足以下条件的 $0 < \tau$、 $\eta < 1$

$$\prod_{i=1}^{M} I_i \geq \xi \Upsilon^2 \tau^2 \max\{C_4 \log^2 \xi \log\left(\prod_{i=1}^{M} I_i\right) \log\left(\prod_{j=1}^{N} J_j\right), C_5 \log(\eta^{-1})\}, \tag{76}$$

那么，

$$\mathrm{P}(\tau_\xi(\mathcal{U}_\Pi) \geq \tau) \leq \eta. \tag{77}$$

证明：设 $\mathcal{U}_{j_1,\cdots,j_N}$ 为 $\mathcal{U}$ 的第 $(j_1,\cdots,j_N)-$ 个投影张量。对于每个张量 $\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}$，我们定义如下函数

$$f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})=\theta_{j_1,\cdots,j_N}\sqrt{\frac{\prod_{j=1}^{N}J_j}{\prod_{i=1}^{M}I_i}}\langle\mathcal{U}_{j_1,\cdots,j_N},\mathcal{X}\rangle. \tag{78}$$

由于 $\mathcal{U}$ 是一个酉张量，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\mathbb{E}f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) &= \frac{\prod_{j=1}^{N}J_j}{\prod_{i=1}^{M}I_i}\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\mathbb{E}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\left|\langle\mathcal{U}_{j_1,\cdots,j_N},\mathcal{X}\rangle\right|^2\\ &= \sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\left|\langle\mathcal{U}_{j_1,\cdots,j_N},\mathcal{X}\rangle\right|^2\\ &= \|\mathcal{U}\star_N\mathcal{X}\|_2^2=1.\end{aligned} \tag{79}$$

我们可以将 $\tau_\xi(\mathcal{U}_\Pi)$ 表示为

$$\tau_\xi(\mathcal{U}_\Pi) = \sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}}\left|\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\left(f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})-\mathbb{E}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right)\right|. \tag{80}$$

设 $\epsilon_{j_1,\ \cdots,\ j_N}$ 为一个Rademacher序列，即由相互独立的对称伯努利随机变量组成的序列，并且 $1\le p<\infty$，我们有

$$\left(\mathbb{E}\tau_\xi^p(\mathcal{U}_\Pi)\right)^{1/p}\le 2\left(\mathbb{E}\mathbb{E}_\epsilon\sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}}\left|\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\epsilon_{j_1,\cdots,j_N}f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|^p\right)^{1/p}. \tag{81}$$

根据Hoeffding不等式，我们有

$$\mathrm{P}\left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\epsilon_{j_1,\cdots,j_N}\left((f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})-f_{\mathcal{Y}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N}))^2\right)^{1/2}\right)\le\exp(-u^2/2). \tag{82}$$

因为我们有

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\left(f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})-f_{\mathcal{Y}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right)^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\left(f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})-f_{\mathcal{Y}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right)^2\left(f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})+f_{\mathcal{Y}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right)^2\right)^{1/2}\\ &\le 2\sup_{\mathcal{Z}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}}\left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}f_{\mathcal{Z}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right)^{1/2}\max_{\substack{1\le j_i\le J_i,\\ \text{for } 1\le i\le N}}\left|f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})-f_{\mathcal{Y}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|,\end{aligned} \tag{83}$$

那么，我们可以得到以下次高斯过程

$$\mathcal{X} \to \sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N} \epsilon_{j_1,\cdots,j_N} f^2_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}), \tag{84}$$

关于该度量

$$\begin{aligned} & d(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \\ = \; & 2 \sup_{\mathcal{Z}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}} \left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N} f_{\mathcal{Z}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) \right)^{1/2} \max_{\substack{1\le j_i\le J_i, \\ \text{for } 1\le i\le N}} \left| f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) - f_{\mathcal{Y}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) \right| \\ = \; & 2 \sup_{\mathcal{Z}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}} \left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N} f_{\mathcal{Z}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) \right)^{1/2} d_\theta(\mathcal{X},\mathcal{Y}), \end{aligned} \tag{85}$$

其中，我们将度量 $d_\theta(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 表示为

$$d_\theta(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \;=\; \max_{\substack{1\le j_i\le J_i, \\ \text{for } 1\le i\le N}} \left| f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) - f_{\mathcal{Y}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) \right|. \tag{86}$$

根据定理 1，我们有

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E}_\epsilon \sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}} \left| \sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N} \epsilon_{i_1,\cdots,j_N} f^2_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) \right|^p \right)^{1/p} \\ \lesssim \; & \gamma_2\left(S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}, d_\theta\right) \sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}} \left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N} f^2_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) \right)^{1/2} \\ & + \sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}} \left(\mathbb{E}_\epsilon \left| \sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N} \epsilon_{i_1,\cdots,j_N} f^2_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N}) \right|^p \right)^{1/p}, \end{aligned} \tag{87}$$

其中，. 表示小于且与某个标量常数倍相差不大的比较。由于我们可以通过泛型链得到以下估计：

$$\gamma_2\left(S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}, d_\theta\right) \;\lesssim\; \int_0^\infty \left(\log N(S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}, d_\theta, u)\right)^{1/2} du, \tag{88}$$

其中，$N(S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}\ d_\theta, u)$ 表示集合 $S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}$ 的覆盖数，即在 $(S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)};\ d_\theta)$ 中覆盖 $S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}$ 所需的半径为 u 的球的最小数量。由 [18],，我们得到关于 $\int_0^\infty \left(\log\ N(S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}\ d_\theta, u)\right)^{1/2} du$ 的如下界：

$$\int_0^\infty \left(\log N(S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}, d_\theta, u)\right)^{1/2} du \;\lesssim\; \Upsilon \sqrt{\frac{\xi}{\prod_{i=1}^M I_i}} \log\left(\xi \sqrt{\log \prod_{i=1}^M I_i} \sqrt{\log \prod_{j=1}^N J_j} \right). \tag{89}$$

由 Hoeffding不等式，我们得到式（87）中项 $\left(\mathbb{E}_\epsilon\left|\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\epsilon_{i_1,\cdots,j_N}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|^p\right)^{1/p}$ 的以下估计：

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{E}_\epsilon\left|\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\epsilon_{i_1,\cdots,j_N}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|^p\right)^{1/p}\\ \leq\ &\sqrt{p}\left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right)^{1/2}\max_{\substack{1\leq j_i\leq J_i,\\ \text{for } 1\leq i\leq N}}\left|f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|.\end{aligned}\tag{90}$$

由 $\mathcal{X}$ 的 ξ-稀疏性可得以下界：

$$\max_{\substack{1\leq j_i\leq J_i,\\ \text{for } 1\leq i\leq N}}\left|f_{\mathcal{X}}(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|\leq\Upsilon\sqrt{\frac{\xi}{\prod_{i=1}^M I_i}}.\tag{91}$$

根据式 (89)、(90) 和 (91) 给出的估计，我们有

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{E}_\epsilon\left|\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}\epsilon_{i_1,\cdots,j_N}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|^p\right)^{1/p}\\ \leq\ &\sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}}\left(\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right)^{1/2}\\ &\times\Upsilon\sqrt{\frac{\xi}{\prod_{i=1}^M I_i}}\left(\sqrt{\log\prod_{i=1}^M I_i}\sqrt{\log\prod_{j=1}^N J_j}\cdot\log\xi+\sqrt{p}\right).\end{aligned}\tag{92}$$

根据式 (81) 和 L^p 范数，我们有

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{E}\sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}}\left|\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})-\mathbb{E}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|^p\right)^{1/p}\\ \lesssim\ &\left(\mathbb{E}\sup_{\mathcal{X}\in S_{\xi;(J_1,\cdots,J_N)}}\left|\sum_{j_1=1,\cdots,j_N=1}^{J_1,\cdots,J_N}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})-\mathbb{E}f_{\mathcal{X}}^2(\theta_{j_1,\cdots,j_N})\right|^p\right)^{1/2p}\\ &\times\Upsilon\sqrt{\frac{\xi}{\prod_{i=1}^M I_i}}\left(\sqrt{\log\prod_{i=1}^M I_i}\sqrt{\log\prod_{j=1}^N J_j}\cdot\log\xi+\sqrt{p}\right)\\ &+\Upsilon\sqrt{\frac{\xi}{\prod_{i=1}^M I_i}}\left(\sqrt{\log\prod_{i=1}^M I_i}\sqrt{\log\prod_{j=1}^N J_j}\cdot\log\xi+\sqrt{p}\right).\end{aligned}\tag{93}$$

由于式 (93) 是关于 $\left(\mathbb{E}\tau_\xi^p(\mathcal{U}_\Pi)\right)^{1/2p}$ 的二次不等式，我们可以求解式 (93) 关于

$\left(\mathbb{E}\tau_\xi^p(\mathcal{U}_\Pi)\right)^{1/2p}$，并得到如下结果：

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\tau_\xi^p(\mathcal{U}_\Pi)\right)^{1/p} \lesssim\ & \Upsilon\sqrt{\frac{\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}}\left(\sqrt{\log\prod_{i=1}^{M}I_i}\sqrt{\log\prod_{j=1}^{N}J_j}\cdot\log\xi\right)\\ &+\Upsilon^2\frac{\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}\left(\log\prod_{i=1}^{M}I_i\right)\left(\log\prod_{j=1}^{N}J_j\right)\cdot\log^2\xi\\ &+\Upsilon\sqrt{\frac{p\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}}+\Upsilon^2\frac{p\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}.\end{aligned}\tag{94}$$

由引理 4 和公式 (76) 给出的条件可得

$$\mathrm{P}\left(\tau_\xi\geq\tau\right)\ \leq\ \mathrm{P}\left(\tau_\xi\geq G(\eta)\right)\leq\eta,\tag{95}$$

其中 $G(\eta)$ 可表示为

$$\begin{aligned}G(\eta)\ =\ & \Upsilon\sqrt{\frac{\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}}\left(\sqrt{\log\prod_{i=1}^{M}I_i}\sqrt{\log\prod_{j=1}^{N}J_j}\cdot\log\xi\right)\\ &+\Upsilon^2\frac{\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}\left(\log\prod_{i=1}^{M}I_i\right)\left(\log\prod_{j=1}^{N}J_j\right)\cdot\log^2\xi+\Upsilon\sqrt{\frac{\log(\eta^{-1})\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}}+\Upsilon^2\frac{\log(\eta^{-1})\xi}{\prod_{i=1}^{M}I_i}.\end{aligned}\tag{96}$$

因此，该定理得证。 □

5 应用：经验过程

本节将应用定理 2 研究经验过程上确界的尾界。我们需要以下关于随机张量的伯恩斯坦不等式的引理。

引理 6 设有一列有限的独立厄米张量 $\{\mathcal{X}_i\in\mathbb{C}^{I_1\times\cdots\times I_M\times I_1\times\cdots\times I_M}\}$，满足

$$\mathbb{E}\mathcal{X}_i=0\ \textit{and}\ \mathbb{E}(\mathcal{X}_i^p)\preceq\frac{p!\Upsilon^{p-2}}{2}\mathcal{A}_i^2,\tag{97}$$

其中 $p=2$、3、4、$\cdots$，以及某个正数常量 Υ。

将总方差 σ^2 定义为：$\sigma^2\overset{\text{定义}}{=}\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{A}_i^2\right\|_{\text{谱}}$，其中 $\|\cdot\|_{spec}$ 表示谱范数。于是，我们有以下不等式：

$$\Pr\left(\lambda_{\max}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{X}_i\right)\geq\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{u}+\frac{\Upsilon}{n}u\right)\leq 2\left(\prod_{i=1}^{M}I_i\right)\exp(-u).\tag{98}$$

证明：对 [12] 中的定理 13 稍作修改。 □

我们考虑 n 概率空间 (Ω_i, P_i)，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$。给定一个参数集 T，它由n-元组 $t = (t_1, \cdots, t_n)$构成，对于每个 $t \in T$，我们都有一个 n-元组 $\mathcal{X}_t = (\mathcal{X}_{t_1}, \cdots, \mathcal{X}_{t_n})$，其由满足引理 6 所需条件的随机厄米张量组成。我们考虑以下经验张量过程

$$\mathcal{E}_t \quad = \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{X}_{t_i} - \mathbb{E}\mathcal{X}_{t_i}) \,. \tag{99}$$

根据引理 6， 我们有张量过程 $(\mathcal{E}_t)_{t \in T}$，它相对于以下度量具有混合尾部 s

$$\begin{aligned} d_1(s,t) \quad &= \quad \max_{1 \le i \le n} \lambda_{\max}(\mathcal{X}_{t_i} - \mathcal{X}_{s_i}), \\ d_2(s,t) \quad &= \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\max}(\mathcal{X}_{t_i} - \mathcal{X}_{s_i})^2 \right)^{1/2} . \end{aligned} \tag{100}$$

定理 4 令 $\mathcal{E}_t$ 由式 (99) 定义，并满足以下条件：

$$\mathcal{X}_{t_i} - \mathbb{E}\mathcal{X}_{t_i} \preceq \frac{p! \Upsilon^{p-2}}{2} \mathcal{A}_i^2, \tag{101}$$

那么，对于任意 $1 \le p < \infty$，我们有

$$\left(\mathbb{E} \sup_{t \in T} \|\mathcal{E}_t\|_{spec}^p \right)^{1/p} \quad \lesssim \quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_2(T, d_2) + \frac{1}{n} \gamma_1(T, d_1) \right) + \sqrt{p} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + p \frac{\Upsilon}{n}, \tag{102}$$

其中 $\sigma^2 \overset{定义}{=} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i^2 \right\|$谱。

此外，存在常数 C_2、$C_3 > 0$，使得对于任意 $u \ge 1$，都有

$$\mathrm{P}\left(\sup_{t \in T} \|\mathcal{E}_t\|_{spec} \ge C_2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_2(T, d_2) + \frac{1}{n} \gamma_1(T, d_1) \right) + C_3 \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{u} + \frac{\Upsilon}{n} u \right) \right) \le e^{-u}. \tag{103}$$

证明：令 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 $\|\cdot\|_{\mathrm{spec}}$，并应用定理 2 和引理 6。 □

参考文献

[1] M. Talagrand, 《泛型链：随机过程的上界与下界》。施普林格科学与商业媒体，2005年。[2] ——, 《高斯过程的正则性》，1987年。[3] M. Ledoux, 《测度集中现象》。美国数学学会，2001年，第89号。[4] S. Hess, 《物理学中的张量》。施普林格，2015年。[5] S. Y. Chang 和 H.-C. Wu, 《张量维纳滤波器》，《IEEE 信号处理汇刊》，第70卷，第410–422页，2022年。[6] Y. Ji、Q. Wang、X. Li 和 J. Liu, 《机器学习中张量技术及其应用综述》，《IEEE Access》，第7卷，第162950–162 990页，2019年。

[7] J. A. Tropp，《随机矩阵和的易用尾界》，《计算数学基础》，第12卷，第389–434页，2012年。[8] S. Y. Chang，《张量扩张器切尔诺夫界》，arXiv 预印本 arXiv:2105.06471，2021年。[9] S. Y. Chang 和 Y. Wei，《随机张量求和的一般尾界：主序方法》，《计算与应用数学杂志》，第416卷，第114533页，2022年。[10] ——，《T-平方张量——第一部分：不等式》，《计算与应用数学》，第41卷，第1期，第62页，2022年。[11] ——，《T-积张量——第二部分：随机 T-积张量和的尾界》，《计算与应用数学》，第41卷，第3期，第99页，2022年。[12] S. Y. Chang 和 W.-W. Lin，《随机张量和的便捷尾界》，《台湾数学期刊》，第1卷，第1期，第1–36页，2021年。[13]S. Y. Chang，《随机张量的广义汉森-赖特不等式》，arXiv 预印本 arXiv:2203.00659，2022年。[14] S. Dirksen，《通过泛型链得到尾界》，《电子概率学报》，第20卷，第53期，第1–29页，2015年。[15] M. Liang 和 B. Zheng，《张量摩尔-彭罗斯逆的进一步结果及其在张量近似问题中的应用》，《计算机与应用数学》，第77卷，第5期，第1282–1293页，2019年3月。[16]A. Winkelbauer，《正态分布的矩与绝对矩》，arXiv 预印本 arXiv:1209.4340，2012年。[17] S. Foucart、H. Rauhut、S. Foucart 和 H. Rauhut，《压缩感知入门》。施普林格，2013年。[18] M. Rudelson 和 R. Vershynin，《基于傅里叶测量和高斯测量的稀疏重构》，《纯粹与应用数学通讯：库朗数学科学研究所出版期刊》，第61卷，第8期，第1025–1045页，2008年。