arXiv:2302.00610v2 [cs.GT] 6 Feb 2023

Uniswap 流动性提供：一种在线学习方法

Yogev Bar-On[1] 和 Yishay Mansour[1,2]

[1] 布拉瓦特尼克计算机科学学院，特拉维夫大学，以色列特拉维夫[2] Google Research，以色列特拉维夫{baronyogev,mansour.yishay}@gmail.com

摘要。去中心化交易所（DEXs）是利用区块链技术的新型市场平台。它们允许用户使用自动做市商（AMM）交易资产，而资金由流动性提供者提供，因此无需订单簿。在这类去中心化交易所中，Uniswap v3 允许流动性提供者通过指定资金适用的活跃价格区间，更高效地配置资金。这带来了如何选择价格区间以制定最优策略的问题。我们将这一问题形式化为一个具有非随机奖励的在线学习问题。我们采用遗憾最小化方法，提出一种流动性提供策略，并证明该策略能够保证奖励达到一个下界。即使资产价格发生非随机变化，这一结论仍然成立；我们还将此下界表示为交易量的函数。

1 引言

近年来，人们对去中心化金融（DeFi）的兴趣日益浓厚，因为区块链技术使人们得以开发不依赖中心化实体的新型金融服务。去中心化交易所（DEX），尤其是自动做市商（AMM）去中心化交易所，是去中心化金融中较为突出的应用之一。借助自动做市商，交易者可以在两种或多种资产之间进行交易，而无需交易另一方的实体同意价格。

具体而言，流动性提供者（LPs）为由两种资产组成的公共资金池提供资金。随后，交易者可以将一种资产形式的资金发送到该资金池，以换取另一种资产形式的资金。资金池仅利用链上可用的数据自动确定价格，不依赖外部来源，并收取交易费支付给流动性提供者。

截至撰写本文时，Uniswap 是规模最大的自动做市商去中心化交易所之一，仅在以太坊上的储备价值就超过 30 亿美元 [20]。最初[3], Uniswap 上的流动性提供者会向流动性池提供两种资产，无论价格如何变化，交易者都可以使用这些资金。这并非高效的资金分配方式，因为很大一部分资金永远不会被使用，而是被预留给不切实际的价格。

Uniswap v3 [4] 通过引入一种新型自动做市商解决了这个问题，它允许投资者在特定价格范围内配置流动性，而不是允许

在任何可能的价格下进行交易。借助这种集中流动性，如果对市场价格的预测正确，流动性提供者就能从投资中赚取更多收益。然而，当市场价格不在其投入资金所覆盖的价格范围内时，流动性提供者会错失潜在交易收益。因此，人们对如何为每笔投资选择合适价格范围的策略兴趣浓厚。

人们曾尝试根据对未来资产价格分布的某种判断，寻找最优流动性提供策略。然而，目前尚无研究针对对抗性价格寻找流动性提供者策略；在这种情况下，我们不对资产未来价格将如何变化作任何假设。

在本文中，我们将 Uniswap v3 中的流动性提供问题视为非随机设定下的在线学习问题。这使我们能够将流动性提供策略形式化为基于专家建议的预测 [9,10]。我们可以使用遗憾最小化方法构建流动性提供算法，使流动性提供者获得正奖励。该算法几乎不对未来资产价格如何变化作任何假设。此外，我们还可以利用投资时间段内的交易量，给出奖励的下界。

1.1 相关工作

Uniswap v3 上的流动性提供策略是一个活跃的研究领域。Neuder 等人 [18] 研究了价格按马尔可夫链演变时的最优策略，Fan 等人 [14] 在此基础上进行了拓展，提出了更完善的分析，并将无常损失纳入考量。Heimbach 等人 [16] 也在布莱克-斯科尔斯随机市场模型中对该问题及策略分析进行了形式化。Fritch[15]基于实证数据评估流动性提供者的表现。近期，Milionis 等人 [17] 研究了理想化布莱克-斯科尔斯随机市场中流动性提供者的奖励，并给出了提供流动性的可预测持续成本。Cartea 等人 [8] 提出了一种最优流动性提供策略，其奖励与无风险账户中的自融资投资组合进行比较。

关于流动性池机制，Angeris 等人 [7] 证明，在理性假设下，Uniswap v2 池能够紧密跟踪真实资产价格。 [5,6]将这一结果推广到了更多情形。Engel 和 Herlihy [13] 对在一笔交易中组合多个自动做市商的影响进行了形式化研究。

在传统金融领域，使用在线学习进行做市早已受到关注。Chen 和 Vaughan [11] 展示了基于成本函数的预测市场与无悔学习之间的联系。Penna 和 Reid [12]研究了将老虎机算法用于自动做市。Abernethy 等人 [1]为证券市场的设计提供了通用优化框架，并 [2] 展示了一种基于订单簿价差、运用在线学习技术的自适应做市算法。最近，Spooner 等人 [19] 通过采用更通用的强化学习框架，改进了这些成果。

1.2 概述

下一节将概述 Uniswap 上的自动做市商机制。然后，我们将在第 3 节正式定义在线流动性提供策略模型。第 4 节将分析一类特殊策略（称为静态策略）的奖励。我们将利用这些策略，在第 5 节提出并分析一种动态遗憾最小化策略。随后，我们将在第 6 节使用实证数据对模型进行模拟。最后，我们将在第 7 节总结全文。

2 Uniswap 概述

任何 Uniswap 流动性池都包含两种资产储备，即代币 A 储备和代币 B 储备。这些资产由流动性提供者提供，交易者可以利用流动性池在这两种代币之间进行交易。

2.1 恒定乘积做市商

在 Uniswap v2 上进行交易时，池会维持其持有的代币数量不变量。设 $x > 0$ 和 $y > 0$ 分别为池中代币 A 和代币 B 的数量。这些数量必须满足 $F(x, y) \triangleq xy = L^2$，其中 $L > 0$（即池的流动性）不会因交易而改变。这种机制称为恒定乘积做市商（CPMM）。假设交易者用 Δx 单位的代币 A 进行兑换，他们将收到 Δy 单位的代币 B，使得$F(x + \Delta x, y - \Delta y) = L^2$。其原理在于供需：当某种代币被买入时，其价格会上涨；当其被卖出时，价格则会下跌。

定价现货价格定义为无穷小交易中收到的代币 B 数量与支付的代币 A 数量之比：

$$p = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

我们可以用当前储备来表示：

$$y - \Delta y = \frac{L^2}{x + \Delta x} = \frac{xy}{x + \Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y\left(\frac{1}{\Delta x} - \frac{x}{\Delta x(x + \Delta x)}\right) = \frac{y}{x + \Delta x}$$

$$p = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{x}.$$

因此，现货价格就是池中储备的比值。这意味着，随着 L 增大（储备中的资金增多），需要更大的交易量才能影响价格。此外，你可以看到，对于非常大的交易，实际成交价格可能与现货价格大不相同——这称为滑点。

提供流动性 流动性提供者可以随时向池中添加流动性，方法是同时提供代币 A 和代币 B，且两者的数量应使现货价格保持不变。由于 $xy = L^2$ 和 $p = \frac{y}{x}$，我们得到：

$$x = \frac{L}{\sqrt{p}}, \qquad y = L\sqrt{p}. \tag{1}$$

因此，流动性会随着流动性提供者提供的新代币数量线性增长。如果一名流动性提供者向池中添加了 x'，y' 代币，满足 $\frac{y'}{x'} = p$ 和 $x'y' = L'^2$，则池中的总流动性会增加 L'。流动性提供者始终可以从池子的储备中提取资金，但提取的数量与其向池中提供的流动性成比例，而不是最初提供的相同数量。他们可以提取由 $\frac{L'}{L+L'}x$ 单位代币 A 和 $\frac{L'}{L+L'}y$ 单位代币 B 组成的一组资产。这意味着价格变化会影响流动性提供者，他们可能会因价格波动而遭受资金损失（相较于完全不投资的情况）；这被称为无常损失。

交易手续费 流动性提供者的激励在于，每当发生交易时，例如从代币 A 兑换为代币 B，交易者实际收到的代币 B 数量为 $(1-\gamma)\Delta y$，其中$\gamma\Delta y$ 是支付给流动性提供者的交易费。 γ 是该池的手续费等级，通常介于 0.05% 至 1% 之间。交易手续费会按流动性提供者在池中所占流动性的比例分配给所有流动性提供者。因此，如果某位流动性提供者向一个总流动性为 L 单位的池提供了 L' 单位流动性，那么他将获得 $\gamma\Delta y\frac{L'}{L}$ 单位代币 B 作为交易手续费。

2.2 集中流动性

无论现货价格如何，Uniswap v2 池的池储备始终都有可用资金。如果流动性提供者认为流动性池的现货价格只会处于有限区间内，那么这种流动性分配方式就会造成浪费。为提高效率，Uniswap v3 引入了集中流动性。

在 Uniswap v3 中，现货价格域被划分为离散区间：$[d^i, d^{i+1})$，适用于所有 $i \in \mathbb{Z}$，其中 $d > 1$ 是区间大小（通常为 $1.0001 \leq d \leq 1.01$，会随刻度间距参数而变化）。每个现货价格区间都相当于一个独立的 CPMM 流动性池，流动性提供者可以选择只在某些区间提供流动性。这意味着 LP 的资金分配效率更高，并且每提供一单位代币就能获得更多交易手续费。不过，如果现货价格不在某个 LP 的活跃区间内，该 LP 就无法赚取任何交易手续费。

为此，Uniswap v3 会跟踪 虚拟储备 (见图1）。假设流动性提供者在价格范围 x 内投入 y 单位的代币 A 和 $[a, b]$单位的代币 B。虚拟储备 x_v、 y_v 定义如下：

$$x_v = x + \frac{L}{\sqrt{b}}, \qquad y_v = y + \sqrt{a}L,$$

其中，$L = \sqrt{x_v y_v}$ 是所提供的流动性数量。基本上，这些就是在 Uniswap v2 流动性池中获得相同流动性所需的储备。请注意，当为 $(0, \infty)$ 提供流动性时，虚拟储备与实际储备相同，因此这相当于向 Uniswap v2 池中投入资金。

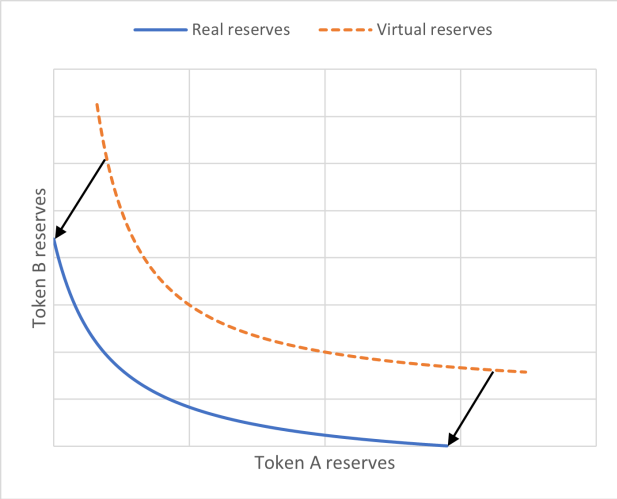

图 1. Uniswap v3 虚拟储备示意图。

随后，可以使用虚拟储备计算交易价格，就像在 Uniswap v2 池中一样。由公式 1 可得 $x_v = \frac{L}{\sqrt{p}}$ 和 $y_v = \sqrt{p}L$，因此：

$$x = (\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{b}})L, \qquad y = (\sqrt{p} - \sqrt{a})L \tag{2}$$

现货价格离开活跃区间时会发生什么？在 $p \geq b$ 的情况下，代币 A 的实际储备将为零，而代币 B 的储备为 $(\sqrt{b} - \sqrt{a})L$ 个单位。同理，如果 $p < a$，我们将得到 $(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}})L$ 个单位的代币 A。这可以成为流动性提供者进行限价单交易的一种方式：价格离开某个区间后，将全部投资转换为单一代币。

3 在线学习模型

我们考虑一个 Uniswap v3 流动性池，其中包含代币 A 和代币 B，区间大小为 $d \in [1.0001, 2)$，手续费等级为 $\gamma < 1$。现在，我们介绍用于流动性提供的在线学习策略：在每个时间步，我们都将整个投资组合重新投入到一个以当前现货价格为中心的价格范围内。

对于每个时间步 $t = 1, \ldots\ldots, T$，我们投资价值为 M_t 个代币 B 的投资组合，其中包含 $Q_t^{(A)} = \frac{M_t}{2p_t}$ 个代币 A 和 $Q_t^{(B)} = \frac{M_t}{2}$ 个代币

B，其中 p_t 是步骤 t时以代币 B 计价的代币 A 现货价格；我们选取一个正的集中度控制器 $n_t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，并在区间 $[p_t d^{-n_t}, p_t d^{n_t}]$ 内提供流动性（注意，这假设区间大小足够精细，可以用其指数近似现货价格）。根据公式 2，因此在每个步骤 t，我们的活跃流动性为

$$L_t = \frac{Q_t^{(B)}}{\sqrt{p_t} - \sqrt{p_t d^{-n_t}}} = \frac{M_t}{2\sqrt{p_t}(1 - d^{-\frac{n_t}{2}})}.$$

时间步结束时，会揭示一个新价格 $p_{t+1} = p_t d^{\rho_t}$（其中 $\rho_t \triangleq \log_d \frac{p_{t+1}}{p_t}$ 是对数价格变化），以及交易量 v_t。随后我们获得一些奖励 $r_t(n_t) = \ln \frac{M_{t+1}}{M_t}$，重新调整资金以适应新价格，并再次进行投资。我们的目标是选择最优的集中度控制器，以最大化总奖励：

$$G_T(n_1, ..., n_T) = \ln \frac{M_T}{M_1} = \sum_{t=1}^{T} r_t(n_t).$$

请注意，奖励以代币 B 计价，因此其中隐含了一个假设：我们关心的是最大化以代币 B 计价的持有量（不失一般性）（例如，最大化持有的美元数量，而非欧元数量）。

3.1 假设

我们首先做出一些假设，以简化模型和分析。

总流动性 我们假设总活跃流动性 $\mathbb{L}_t$ 在时间步 t 内保持不变，并将 K_t 定义为对应于该流动性数量的等效虚拟储备。因此，根据方程 1可得：

$$K_t = 2\sqrt{p_t}\,\mathbb{L}_t.$$

用这些虚拟储备来表示交易量很有用，因此我们将**相对交易量** 定义为交易量与活跃虚拟储备之间的比值：

$$u_t \triangleq \frac{v_t}{K_t} = \frac{v_t}{2\sqrt{p_t}\,\mathbb{L}_t}.$$

部分手续费 我们假设在整个步骤中，价格始终处于我们的活跃区间内，或者始终不在其中——也就是说，我们要么获得全部佣金，要么一分也得不到。实际上，由于我们假设在同一步骤中可以进行许多笔交易，价格可能会在步骤中途进出活跃区间。

Gas 价格 Gas 价格相当于在总奖励中加入一个关于 T 的线性负项。为简化结果，我们忽略这一项，并假设对资金进行再平衡和再投资不会造成损失。

3.2 奖励函数

现在，我们将说明在步骤 t 中，给定集中度控制器 n_t、交易量 v_t 和价格变化 ρ_t 时奖励函数的形式。显然，奖励由我们作为佣金获得的交易手续费 $f_{v_t}(n_t)$ 构成。但它还取决于步骤结束时（再平衡之前）投资组合的价值 $M_{t\to t+1}$，该价值与步骤开始时的价值不同。因此：

$$M_{t+1} = M_{t\to t+1} + f_{v_t}(n_t),$$

我们将奖励定义为价值的对数变化，并以代币 B 为计量单位：

$$r_t(n_t) \triangleq \ln \frac{M_{t+1}}{M_t} = \ln\left(M_{t\to t+1} + f_{v_t}(n_t)\right) - \ln M_t.$$

交易手续费 步骤 t 的交易费与交易量 v_t 和我们的活跃流动性成正比，与池中的总活跃流动性成反比，其中交易费 γ 为比例常数。因此，我们获得的佣金为：

$$f_{v_t}(n_t) = \begin{cases} 0 & |\rho_t| > n_t \\ \gamma v_t \frac{L_t}{\mathbb{L}_t} & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} 0 & |\rho_t| > n_t \\ \gamma u_t \frac{M_t}{(1-d^{-\frac{n_t}{2}})} & \text{else} \end{cases}.$$

价值变化 当我们在步骤 t 按照策略的建议进行投资时，我们的投资组合将由以下数量的代币组成（参见公式 2）：

$$Q^{(A)}_{t\to t+1} = \begin{cases} 0 & \rho_t > n_t \\ L_t \frac{1}{\sqrt{p_t}}(d^{\frac{n_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}) & \rho_t < -n_t \\ L_t \frac{1}{\sqrt{p_t}}(d^{-\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}) & \text{else} \end{cases}$$

$$Q^{(B)}_{t\to t+1} = \begin{cases} L_t\sqrt{p_t}(d^{\frac{n_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}) & \rho_t > n_t \\ 0 & \rho_t < -n_t \\ L_t\sqrt{p_t}(d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}) & \text{else} \end{cases}$$

因此，在步骤 t结束时，我们的投资组合价值为:

$$\begin{aligned} M_{t\to t+1} &= p_{t+1}Q^{(A)}_{t\to t+1} + Q^{(B)}_{t\to t+1} \\ &= \begin{cases} L_t\sqrt{p_t}(d^{\frac{n_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}) & \rho_t > n_t \\ L_t\sqrt{p_t}d^{\rho_t}(d^{\frac{n_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}) & \rho_t < -n_t \\ L_t\sqrt{p_t}\left(2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}(1+d^{\rho_t})\right) & \text{else} \end{cases} \\ &= \begin{cases} M_t\frac{1+d^{\frac{n_t}{2}}}{2} & \rho_t > n_t \\ M_t\frac{d^{\rho_t}(1+d^{\frac{n_t}{2}})}{2} & \rho_t < -n_t \\ M_t\frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}(1+d^{\rho_t})}{2(1-d^{-\frac{n_t}{2}})} & \text{else} \end{cases}. \end{aligned}$$

总奖励 综上可得:

$$\frac{M_{t+1}}{M_t} = \frac{M_{t\to t+1} + f_{v_t}(n_t)}{M_t} = \begin{cases} \frac{1+d^{\frac{n_t}{2}}}{2} & \rho_t > n_t \\ \frac{d^{\rho_t}(1+d^{\frac{n_t}{2}})}{2} & \rho_t < -n_t \\ \frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}(1+d^{\rho_t}) + 2\gamma u_t}{2(1-d^{-\frac{n_t}{2}})} & \text{else} \end{cases},$$

因此:

$$r_t(n_t) = \ln\frac{M_{t+1}}{M_t} = \begin{cases} \ln\frac{1+d^{\frac{n_t}{2}}}{2} & \rho_t > n_t \\ \ln\frac{d^{\rho_t}(1+d^{\frac{n_t}{2}})}{2} & \rho_t < -n_t \\ \ln\frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}(1+d^{\rho_t}) + 2\gamma u_t}{2(1-d^{-\frac{n_t}{2}})} & \text{else} \end{cases}. \tag{3}$$

正如预期，使用较小的流动性区间会带来更高的奖励，但也会增加损失交易手续费的概率。具体来说:

– 如果 $p_t > n_t$，则不会产生交易手续费，但奖励大于 1，因为代币 A 的价值更高（以代币 B 计）。价格越过活跃区间后，所有代币都转换成了 B 类，因此奖励不取决于价格，只取决于集中度控制器。

– 如果 $p_t < -n_t$，则不会产生交易手续费，而且投资组合的价值更低，因此奖励小于 1。此时奖励确实取决于价格，因为所有代币都转换成了 A 类（而我们以代币 B 计量价值）。

– 如果 $-n_t \le p_t \le n_t$，奖励可能大于 1，也可能小于 1。术语 $2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n_t}{2}}(1+d^{\rho_t})$表示价格变化对奖励的影响，而 γu_t表示收取的费用的影响。分母中的术语 $1-d^{-\frac{n_t}{2}}$表示，随着流动性集中在更小的区间内，奖励会更高。

4 静态策略

在本节中，我们将分析 n-静态策略：在这类策略中，我们为所有步骤选取一个恒定的集中度控制器 n。我们将静态策略的总奖励记为 $G_T(n) = G_T(n, \ldots\ldots, n)$，并根据平均对数价格变化对其进行界定：

$$P \triangleq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |\log_d p_{t+1} - \log_d p_t| = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |\rho_t|,$$

这本质上是每一步跳过的价格区间的平均数量。

4.1 $n = \infty$

我们首先考虑 ∞-静态策略，它可用作基准。这等同于投资于 Uniswap v2 池，并在每一步对资金进行再平衡。

引理 1. 对于任意满足 $u_t \le \frac{2}{\gamma}$ 的 ρ_t、u_t 序列，∞-静态策略的奖励满足：

$$G_T(\infty) \ge \frac{\gamma}{2}\sum_{t=1}^{T} u_t - \frac{T}{2} P \ln d.$$

证明。令 $n_t \to \infty$ 在公式 3 中取极限并得到 $d^{-\frac{n_t}{2}} = 0$，我们有：

$$\begin{aligned} G_T(\infty) &= \sum_{t=1}^{T} r_t(\infty) = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(d^{\frac{\rho_t}{2}} + \gamma u_t\right) \ge \sum_{t=1}^{T} \ln\left(d^{-\frac{|\rho_t|}{2}} + \gamma u_t\right) \\ &\ge \sum_{t=1}^{T} \ln\left(d^{-\frac{|\rho_t|}{2}}(1 + \gamma u_t)\right) = \sum_{t=1}^{T} \ln(1 + \gamma u_t) - \frac{\ln d}{2}\sum_{t=1}^{T} |\rho_t| \\ &= \sum_{t=1}^{T} \ln(1 + \gamma u_t) - \frac{T}{2} P \ln d \ge \frac{\gamma}{2}\sum_{t=1}^{T} u_t - \frac{T}{2} P \ln d \end{aligned}$$

如所需，其中最后一个不等式是因为对于 $x \le 2$，$\ln(1+x) \ge \frac{x}{2}$。 □

我们已经可以看出，确保获得正奖励的交易量下界为：

推论 1. 对于任意满足 $u_t \le \frac{2}{\gamma}$ 且 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t \ge \frac{1}{\gamma} P \ln d$ 的 ρ_t, u_t 序列，∞-静态策略的奖励为正：

$$G_T(\infty) \ge 0.$$

4.2 $n < \infty$

为分析 n 有限的情况，我们用 $T_{\leq n}$ 表示价格保持在活跃区间内的时间步集合，用 $T_{>n}$ 表示价格离开活跃区间的时间步集合，即，

$$T_{\leq n} = \{t \mid |\rho_t| \leq n\} \qquad\qquad T_{>n} = \{t \mid |\rho_t| > n\}.$$

我们给出奖励的如下下界，

引理 2. *n-静态策略满足：*

$$G_T(n) \geq \frac{n}{4}|T_{>n}| \ln d - TP \ln d + \sum_{|\rho_t| \leq n} \ln\left(1 + \frac{\gamma u_t}{1 - d^{-\frac{n}{2}}}\right).$$

证明。 首先，我们将给出总奖励的一种新表示：

$$\begin{aligned}
G_T(n) &= \sum_{t=1}^{T} r_t(n) && (4)\\
&= \sum_{\rho_t > n} \ln\left(\frac{1 + d^{\frac{n}{2}}}{2}\right) + \sum_{\rho_t < -n} \ln\left(d^{\rho_t}\frac{1 + d^{\frac{n}{2}}}{2}\right) + \sum_{|\rho_t| \leq n} \ln\left(\frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} + 2\gamma u_t - d^{-\frac{n}{2}}(1 + d^{\rho_t})}{2(1 - d^{-\frac{n}{2}})}\right) && (5)\\
&= |T_{>n}| \ln\left(\frac{1 + d^{\frac{n}{2}}}{2}\right) - \ln d \sum_{\rho_t < -n} |\rho_t| + \sum_{|\rho_t| \leq n} \ln\left(\frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} + 2\gamma u_t - d^{-\frac{n}{2}}(1 + d^{\rho_t})}{2(1 - d^{-\frac{n}{2}})}\right) && (6)\\
&= |T_{>n}| \ln\left(\frac{1 + d^{\frac{n}{2}}}{2}\right) - \ln d \sum_{\rho_t < n} |\rho_t| + \sum_{|\rho_t| \leq n} \ln\left(d^{|\rho_t|}\frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} + 2\gamma u_t - d^{-\frac{n}{2}}(1 + d^{\rho_t})}{2(1 - d^{-\frac{n}{2}})}\right), && (7)
\end{aligned}$$

其中（5）直接由（3）得出；在（6）中，我们利用了负的 ρ_t 时这一事实：

$$\ln\left(d^{\rho_t}\frac{1 + d^{\frac{n}{2}}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1 + d^{\frac{n}{2}}}{2}\right) - |\rho_t| \ln d,$$

而在（7）中，我们只需在中间的求和项中加上 $\ln d \sum_{|\rho_t| < n} |\rho_t|$，并在最后一个求和项中通过在对数内乘以 $d^{|\rho_t|}$ 进行补偿。

由于我们要寻找关于平均对数价格变化 P 的下界，因此可以将中间求和补全为对所有时间步求和，得到$TP\ln d$，并利用以下事实，将最后一个求和中的交易量项分离出来：

$d^{|\rho_t|} \geq 1$:

$$G_T(n) \geq |T_{>n}| \ln\left(\frac{1+d^{\frac{n}{2}}}{2}\right) - TP\ln d + \sum_{|\rho_t|\leq n} \ln\left(d^{|\rho_t|}\frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n}{2}}(1+d^{\rho_t})}{2(1-d^{-\frac{n}{2}})} + \frac{\gamma u_t}{1-d^{-\frac{n}{2}}}\right) \tag{8}$$

$$\geq |T_{>n}|\frac{n\ln d}{4} - TP\ln d + \sum_{|\rho_t|\leq n} \ln\left(d^{|\rho_t|}\frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n}{2}}(1+d^{\rho_t})}{2(1-d^{-\frac{n}{2}})} + \frac{\gamma u_t}{1-d^{-\frac{n}{2}}}\right) \tag{9}$$

其中 (9) 由 $\ln\frac{1+e^x}{2} \geq \frac{x}{2}$ 得出。

现在，将 $f(\rho_t) = d^{|\rho_t|}\left(2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n}{2}}(1+d^{\rho_t})\right)$ 视为关于ρ_t的函数。我们要在定义域 $|\rho_t| < n$上寻找一个下界；首先在可微定义域上寻找局部最小值:

$$f'(\rho_t) = d^{|\rho_t|}\ln d\left(\operatorname{sgn}(\rho_t)\left(2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n}{2}}(1+d^{\rho_t})\right) + d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{\rho_t - \frac{n}{2}}\right) = 0$$

因此,

$$(2\operatorname{sgn}(\rho_t)+1)d^{\frac{n+\rho_t}{2}} - (1+\operatorname{sgn}(\rho_t))d^{\rho_t} - \operatorname{sgn}(\rho_t) = 0.$$

当 $\rho_t < 0$ 时，我们得到 $d^{\frac{n+\rho_t}{2}} - 1 = 0$，而当 $|\rho_t| < n$ 时该式无解。对于 $\rho_t > 0$，我们得到 $2d^{\rho_t} - 3d^{\frac{n+\rho_t}{2}} + 1 = 0$，这是关于 $d^{\frac{\rho_t}{2}}$ 的一个二次方程，其解为:

$$d^{\frac{\rho_t}{2}} = \frac{1}{4}(3d^{\frac{n}{2}} \pm \sqrt{9d^n - 8}).$$

注意到 $\sqrt{9d^n - 8} \geq d^{\frac{n}{2}}$，因此第一个解为 $d^{\frac{\rho_t}{2}} \geq d^{\frac{n}{2}}$，但它不在定义域内。此外,

$$\sqrt{9d^n - 8} = \sqrt{(3d^{\frac{n}{2}} - 4)^2 + 24(d^{\frac{n}{2}} - 1)} \geq 3d^{\frac{n}{2}} - 4$$

因此，第二个解为 $d^{\frac{\rho_t}{2}} \leq 1$，但这不可能，因为我们假设了 $\rho_t > 0$。

总之，在可微定义域上不存在局部最小值，而 f（ρ_t）的下界要么位于定义域的边界（$\rho_t = \pm n$），要么位于 $\rho_t = 0$ （唯一的不可微点）。在这些点分别计算 f，得到:

$$f(0) = 2(1-d^{-\frac{n}{2}}), \qquad f(n) = d^{\frac{3n}{2}} - d^{\frac{n}{2}}, \qquad f(-n) = d^{\frac{n}{2}} - d^{-\frac{n}{2}}.$$

请注意:

$$f(-n) - f(0) = 2\left(\frac{d^{\frac{n}{2}} + d^{-\frac{n}{2}}}{2} - 1\right) \geq 0,$$

因此 $f(-n) \geq f(0)$。我们还可以看到 $f(n) = f(-n)d^n \geq f(-n)$。总而言之，我们有 $f(n) \geq f(-n) \geq f(0)$，因此:

$$d^{\frac{3n}{2}} - d^{\frac{n}{2}} \geq d^{|\rho_t|}\left(2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n}{2}}(1+d^{\rho_t})\right) \geq 2(1-d^{-\frac{n}{2}}). \tag{10}$$

现在我们可以将这一结果代入（9），从而完成证明：

$$G_T(n) \geq \frac{n}{4}|T_{>n}| \ln d - TP \ln d + \sum_{|\rho_t| \leq n} \ln\left(1 + \frac{\gamma u_t}{1 - d^{-\frac{n}{2}}}\right).$$

□

现在我们将展示，$n = 4P$ 是集中度控制器的一个良好选择。

定理 1。对于任意满足 ρ_t、u_t 的序列，只要 $P\ln d \leq 1$ 且 $\frac{a}{\gamma}P^2 \ln^2 d \leq u_t \leq \frac{2}{\gamma}$，$4P$-静态策略的奖励满足：

$$G_T(4P) \geq |T_{\leq 4P}| \ln\left(1 + \frac{a-2}{4} P \ln d\right)$$

证明。根据我们关于交易量的假设以及引理 2 可得：

$$\begin{aligned}
G_T(4P) &\geq |T_{>4P}| P \ln d - TP \ln d + \sum_{|\rho_t| \leq 4P} \ln\left(1 + \frac{\gamma u_t}{1 - d^{-2P}}\right) \\
&= \sum_{|\rho_t| \leq 4P} \left(\ln\left(1 + \frac{\gamma u_t}{1 - d^{-2P}}\right) - P \ln d\right) \\
&= \sum_{|\rho_t| \leq 4P} \ln\left(\frac{1 - d^{-2P} + \gamma u_t}{d^P - d^{-P}}\right) \\
&\geq |T_{\leq 4P}| \ln\left(\frac{1 - d^{-2P} + aP^2 \ln^2 d}{d^P - d^{-P}}\right).
\end{aligned}$$

注意，对于 $x \leq 1$，$e^x - 1 - e^{-x} + e^{-2x} \leq 2x^2$。由于我们假设 $P\ln d \leq 1$，因此还可得到 $d^P - 1 - d^{-P} + d^{-2P} \leq 2P^2 \ln^2 d$，从而，

$$\begin{aligned}
G_T(4P) &\geq |T_{\leq 4P}| \ln\left(1 + (a-2)\frac{P^2 \ln^2 d}{1 - d^{-2P} + 2P^2 \ln^2 d}\right) \\
&\geq |T_{\leq 4P}| \ln\left(1 + (a-2)\frac{P^2 \ln^2 d}{1 - d^{-2P} + 2P \ln d}\right).
\end{aligned}$$

利用 $d^{-2P} \geq 1 - 2P\ln d$：

$$G_T(4P) \geq |T_{\leq 4P}| \ln\left(1 + \frac{a-2}{4} P \ln d\right),$$

至此，证明完毕。 □

推论2. 对于任意满足 $\frac{2}{\gamma}P^2 \ln^2 d \leq u_t \leq \frac{2}{\gamma}$ 的 ρ_t, u_t 序列，$4P$-静态策略的奖励为正：

$$G_T(4P) \geq 0.$$

将此结果与 ∞-静态策略进行比较。一方面，我们假设相对交易量存在下界，而非平均交易量存在下界。然而，所需幅度小了 $2P\ln d$ 倍，通常远小于 1。

算法 1 指数权重自适应策略

参数： $N \in \mathrm{N}$ $\eta > 0$.
初始化： $r_0(n) \leftarrow 0$ 对于所有 $1 \leq n \leq N$.
1: **对于** $1 \leq t \leq T$ **执行**
2: Set:

$$p_t(n) \leftarrow \frac{\exp\left(\eta \sum_{0 \leq \tau \leq t} r_\tau(n)\right)}{\sum_{1 \leq \mu \leq N} \exp\left(\eta \sum_{0 \leq \tau \leq t} r_\tau(\mu)\right)}$$

对所有 $1 \leq n \leq N$。3：对于每个集中度控制器 $1 \leq n \leq N$，使用资金中的 $p_t(n)$ 提供流动性，并观察当前奖励 $r_t(n)$。4：**结束循环**

5 自适应策略

我们已经看到，静态策略可以带来正奖励。然而，我们事先不知道平均对数价格变化 P，因此无法选择合适的集中度控制器。我们通过使用一种称为指数权重算法（EWA）的遗憾最小化自适应算法来解决这个问题，该算法见算法 1，从而获得与最优静态策略相近的奖励。本质上，我们在自适应地学习最优集中度控制器，并在此过程中尽可能提高奖励。

既然我们看到 $4P$ 会是一个不错的集中度控制器，我们就希望确保它包含在选项中。因此，我们需要选择 N，使得 $N \geq 4P$。假设 $d^P \leq 2$是合理的，因此只需选择 $N \geq \log_d 16$ 即可。不过，我们需要 N 为自然数；又因为 $d < 2$，所以可以选择 $N = \lfloor \log_d 32 \rfloor$。

现在，在开始分析之前，我们需要对奖励进行界定：

引理 3. 取 $N = \lfloor$对数$_d\, 32\rfloor$。对于任意满足 $d^{|\rho_t|} \leq 2$ 和$u_t \leq \frac{2}{\gamma}$ 的 ρ_t, u_t 序列，我们有：

$$R \triangleq \max_{t \leq T, n \leq N} r_t(n) - \min_{t \leq T, n \leq N} r_t(n) \leq 16$$

证明。 我们分别讨论方程3中的每种情况。

在 $\rho_t > n$ 的情况下，我们有 $r_t(n) = \ln \frac{1+d^{\frac{n}{2}}}{2}$。容易看出$r_t(n) \geq 0$，并且：

$$r_t(n) \leq \ln \frac{1+d^{\frac{N}{2}}}{2} \leq \ln \frac{1+d^{\frac{\log_d 32}{2}}}{2} = \ln \frac{1+\sqrt{32}}{2} \leq 2.$$

在 $\rho_t < -n$ 的情况下，我们有 $r_t(n) = \ln \frac{d^{\rho_t}(1+d^{\frac{n}{2}})}{2}$。由于 $\rho_t < -n$，我们得到 $r_t(n) \leq 0$。利用假设 $|\rho_t| \leq \log_d 2$，我们得到：

$$r_t(n) \geq \rho_t \ln d \geq -\ln 2.$$

否则，如果 $|\rho_t| < n$，我们有 $r_t(n) = \ln \frac{2d^{\frac{\rho_t}{2}} - d^{-\frac{n}{2}}(1+d^{\rho_t}+2\gamma u_t)}{2\,1-d^{-\frac{n}{2}}}$。对于下界，我们可以设 $u_t = 0$，并由公式 10 得到：

$$r_t(n) \geq \ln d^{-|\rho_t|} = -|\rho_t| \ln d \geq -\ln 2.$$

对于上界，我们采用以下假设：$u_t \leq \frac{2}{\gamma}$ 并再次使用公式 10：

$$r_t(n) \leq \ln \frac{d^{-|\rho_t|}(d^{\frac{3n}{2}} - d^{\frac{n}{2}}) + 4}{2(1 - d^{-\frac{n}{2}})} \leq \ln \frac{d^{\frac{3n}{2}} + 4}{2(1 - d^{-\frac{n}{2}})},$$

由于 $1 \leq n \leq N \leq \log_d 32$ 以及 $d \geq 1.0001$：

$$r_t(n) \leq \ln \frac{d^{\frac{3N}{2}} + 4}{2(1 - d^{-\frac{1}{2}})} \leq \ln \frac{32^{\frac{3}{2}} + 4}{2(1 - 1.0001^{-\frac{1}{2}})} \leq 15.$$

综上，对于所有 t，n，我们得到 $-\ln 2 \leq r_t(n) \leq 15$，因此

$$R \leq 15 + \ln 2 \leq 16$$

如所要求的。 □

我们将通过介绍一个众所周知的引理来开始分析，该引理 [9,10], 给出了我们自适应策略的 遗憾 的上界：

引理 4. 指数权重自适应策略的奖励满足：

$$\sum_{t \leq T} \sum_{1 \leq \mu \leq N} p_t(\mu) r_t(\mu) \geq G_T(n) - \frac{\ln N}{\eta} - \frac{\eta}{2} T R^2$$

对于所有 $1 \leq n \leq N$，其中 R 是奖励取值范围的上界。

利用这个引理，我们现在可以得出本文的主要结果：

定理 2. 选择 $N = \lfloor$对数$_d 32\rfloor$ 和 $\eta = \sqrt{\text{自然对数} \frac{N}{128T^{\circ}}}$ 对于任意序列 ρ_t，u_t使得 $d^{|\rho_t|} \leq 2$ 且 $\frac{10}{\gamma} P^2$自然对数$^2 d \leq u_t \leq \frac{2}{\gamma}$，指数权重自适应策略（算法 *1*）的奖励 $G_T^{(\text{EWA})}$ 满足：

$$G_T^{(\text{EWA})} \geq \frac{3}{4} T P \ln d - 23\sqrt{T \ln \log_d 32}.$$

证明。 记 $M_{t+1}(n)$ 为在 $t+1$ 时投资组合的价值，假设我们在第 t 步仅使用集中度控制器 n提供流动性，使得$r_t(n) = \ln \frac{M_{t+1}(n)}{M_t}$。因此，根据詹森不等式：

$$\begin{aligned} G_T^{(\text{EWA})} &= \sum_{t \leq T} \ln \left(\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{p_t(n) M_{t+1}(n)}{M_t} \right) \\ &\geq \sum_{t \leq T} \sum_{1 \leq n \leq N} p_t(n) \ln \frac{M_{t+1}(n)}{M_t} \\ &= \sum_{t \leq T} \sum_{1 \leq n \leq N} p_t(n) r_t(n). \end{aligned}$$

现在，我们可以将这一结果与引理 4结合使用。代入我们选择的 η，令 $n = 4P \le N$，并使用 R 引理 3 中的结果，得到：

$$G_T^{(\mathrm{EWA})} \ge G_T(4P) - \sqrt{512T \ln N} \ge G_T(4P) - 23\sqrt{T \ln N}.$$

根据定理 1，使用 $a = 10$，我们有：

$$G_T^{(\mathrm{EWA})} \ge |T_{\le 4P}| \ln(1 + 2P \ln d) - 23\sqrt{T \ln N} \ge |T_{\le 4P}| P \ln d - 23\sqrt{T \ln N}.$$

根据马尔可夫不等式，我们得到 $|T_{\le 4P}| \ge \frac{3}{4}T$。因此，

$$G_T^{(\mathrm{EWA})} \ge \frac{3}{4}TP \ln d - 23\sqrt{T \ln N} \ge \frac{3}{4}TP \ln d - 23\sqrt{T \ln \log_d 32}$$

如所需。 □

现在可以看出，时间段足够长时，奖励将为正：

推论 3。 取 $N = \lfloor \log_d 32 \rfloor$ 和 $\eta = \sqrt{\ln \frac{N}{128T}}$。对于任意满足 $d^{|\rho_t|} \le 2$ 且 $\frac{10}{\gamma} P^2 \ln^2 d \le u_t \le \frac{2}{\gamma}$ 的 ρ_t, u_t 序列，指数权重自适应策略的奖励在所有足够大的 T 时均为正：

$$G_T^{(\mathrm{EWA})} \ge 0.$$

6 模拟

我们收集了以太坊上两个规模最大的 Uniswap v3 流动性池的交易数据。第一个是 USDT/USDC[3]，交易费为 0.01%。这是一个由两种代币组成的稳定币池，两种代币均代表 1 美元，因此其价值不应发生变化。这个流动性池的价格波动较低，交易费也较低。第二个流动性池是 ETH/USDC[4]，交易费为 0.3%，这是一个价格波动较大、以较高交易费作为补偿的流动性池。对于这两个池，我们的目标都是最大化以 USDC 计价的价值。

我们模拟了涵盖各种集中度控制器的在线静态策略，并按小时再投资。我们还利用静态策略的结果，模拟了指数权重自适应策略。所有数据均来自 Google BigQuery 上的公开以太坊数据集，涵盖 2022年；我们的源代码已公开发布于 https://github.com/yogi-bo/uniswap-v3-online-framework。

6.1 价格与交易量

我们想了解这些假设在真实世界数据中是否成立。表 1汇总了我们使用常见符号收集的实证数据，图2、3 展示了全年价格变化和交易量。

[3] 合约地址：0x3416cF6C708Da44DB2624D63ea0AAef7113527C6 [4] 合约地址：0x8ad599c3A0ff1De082011EFDDc58f1908eb6e6D8

流动性池	d	γ	$\max_t d^{\lvert\rho_t\rvert}$	P	$\frac{P \ln d}{\gamma}$	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t$
USDT/USDC	1.0001	10^{-4}	1.0099	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$3.48 \cdot 10^{-1}$
ETH/USDC	1.00602	$3 \cdot 10^{-3}$	1.11	$9.22 \cdot 10^{-1}$	1.84	$3.62 \cdot 10^{-3}$

表 1. 2022年每小时时间步真实世界数据摘要。

首先，我们可以看出，假设 $d^{|\rho_t|} < 2$ 得到了实证数据的支持。另外，请记住，$^{P}\ln_{\gamma}{}^{d}$ 是获得正奖励所需交易量的基准。在 USDT/USDC 中，我们可以看到，相对交易量的平均值确实更大，因此预期会获得正奖励。然而，在 ETH/USDC 中情况并非如此，因此我们不期待在这个池中表现良好。

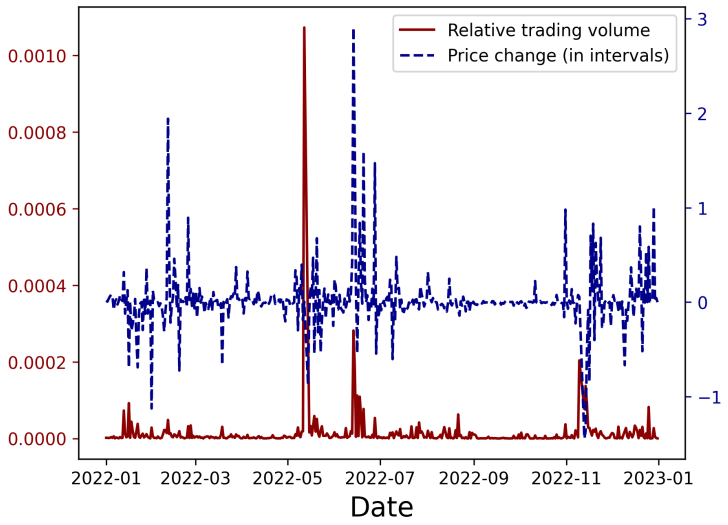

图 2. 2022年 USDT/USDC 每小时价格变化和相对交易量。

6.2 奖励

我们模拟了浓度控制器呈指数增长的静态策略。此外，我们还使用静态策略的模拟奖励运行了指数权重自适应策略（并调整了学习率为 $\eta = 10^3$）。表 2 展示了各个浓度控制器的总奖励，以及 EWA 的奖励。图4、5 展示了选定策略在全年中的奖励。

正如我们预期的那样，USDT/USDC 的奖励为正，而 ETH/USDC 的奖励为负；EWA 承认，其奖励接近最佳静态

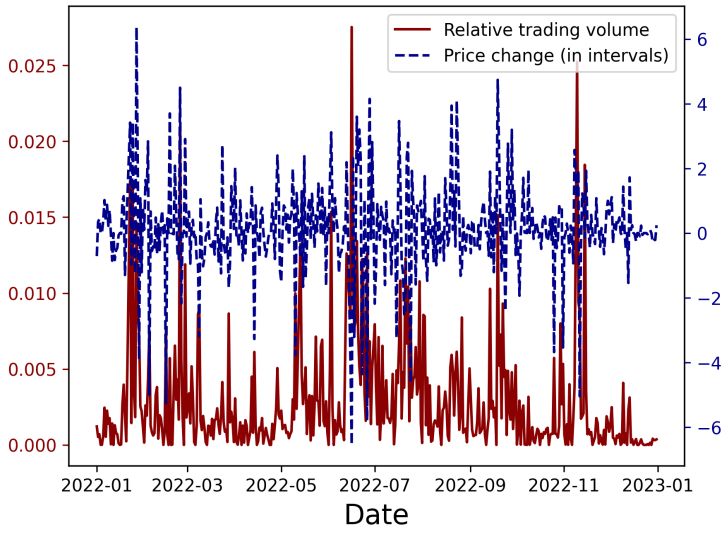

图 3. 2022年 ETH/USDC 每小时价格变化和相对交易量。

USDT/USDC								
策略	$n = 10^0$	$n = 10^1$	$n = 10^2$	$n = 10^3$	$n = 10^4$	$n = 10^5$	$n = 10^6$	EWA
奖励	$1.04 \cdot 10^{-1}$	$9.048 \cdot 10^{-3}$	$2.14 \cdot 10^{-2}$	$5.63 \cdot 10^{-1}$	$1.47 \cdot 10^{-1}$	$1.77 \cdot 10^{-1}$	$1.76 \cdot 10^{-1}$	$5.15 \cdot 10^{-1}$

ETH/USDC								
策略	$n = 4^0$	$n = 4^1$	$n = 4^2$	$n = 4^3$	$n = 4^4$	$n = 4^5$	$n = 4^6$	EWA
奖励	$-9.42 \cdot 10^{-1}$	$-6.01 \cdot 10^{-1}$	$-4.38 \cdot 10^{-1}$	$-4.5 \cdot 10^{-1}$	$-4.70 \cdot 10^{-1}$	$-4.73 \cdot 10^{-1}$	$-4.73 \cdot 10^{-1}$	$-4.86 \cdot 10^{-1}$

表 2. 2022年各种静态策略和 EWA 的总奖励。

控制器。我们注意到，将交易量人为提高 10%，就足以让 EWA 也为 ETH/USDC 给出正奖励。

7 结论

Uniswap v3 引入了一种新颖的自动做市商机制，使流动性提供者能够采用复杂的投资策略。我们的工作展示了使用在线学习方法分析和制定此类策略的有效性。我们将 Uniswap v3 流动性提供问题建模为在线学习问题，并在这一新形式框架下分析了奖励。在主要结果（定理 2）中，我们展示了一种基于专家建议预测的动态策略。我们证明，即使面对非随机价格变动，只要交易量足够大，该策略就能获得正的总奖励。我们根据平均对数价格变化，给出了获得正奖励所需的交易量。

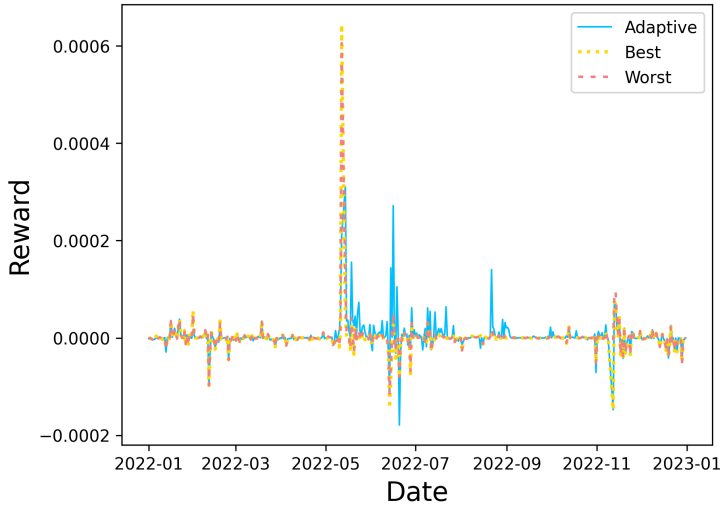

图 4. USDT/USDC 最佳、最差和自适应集中度控制器的奖励。

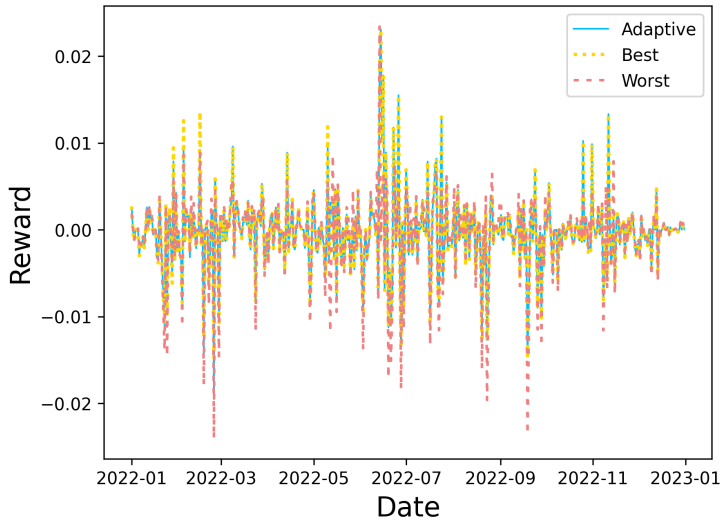

图 5. ETH/USDC 最佳、最差和自适应集中度控制器的奖励。

此外，利用来自真实 Uniswap 流动性池的实证数据，我们证明了在线学习模型能够很好地近似流动性提供问题，并可应用于现实场景。

未来的工作可以通过提高形式化奖励函数的准确性来改进我们的分析。改进措施可能包括：对价格变化显著的步骤按比例收取交易手续费，或将再投资的燃料费纳入考量。

致谢

本项目获得了欧洲研究理事会根据欧盟地平线 2020 研究与创新计划提供的资助（资助协议编号 882396）、以色列科学基金会的资助（资助编号 993/17）、特拉维夫大学 Yandex 机器学习倡议的资助，以及特拉维夫大学人工智能与数据科学中心（TAD）提供的资助。

参考文献

1. Abernethy, J., Chen, Y., Vaughan, J.W.：通过凸优化实现高效做市及其与在线学习的联系。《ACM 经济学与计算汇刊》（TEAC）**1**(2), 1–39 (2013) 2. Abernethy, J., Kale, S.：通过在线学习实现自适应做市。《神经信息处理系统进展》**26** (2013) 3. Adams, H., Zinsmeister, N., Robinson, D.：Uniswap v2 核心 (2020) 4. Adams, H., Zinsmeister, N., Salem, M., Keefer, R., Robinson, D.：Uniswap v3 核心 (2021) 5. Angeris, G., Agrawal, A., Evans, A., Chitra, T., Boyd, S.：常函数做市商：通过凸优化实现多资产交易。载于：《区块链手册》，第 415–444 页。施普林格 (2022) 6. Angeris, G., Chitra, T.：改进价格预言机：常函数做市商。载于：第 2 届 ACM 金融科技进展会议论文集，第 80–91 页 (2020) 7. Angeris, G., Kao, H.T., Chiang, R., Noyes, C., Chitra, T.：Uniswap 市场分析。arXiv 预印本 arXiv:1911.03380 (2019) 8. Cartea, ´A., Drissi, F., Monga, M.：去中心化金融与自动化做市：可预测损失与最优流动性提供。SSRN 4273989 (2022) 9. Cesa-Bianchi, N., Freund, Y., Haussler, D., Helmbold, D.P., Schapire, R.E., Warmuth, M.K.：如何运用专家建议。《ACM 学报》（JACM）44(3), 427–485 (1997) 10. Cesa-Bianchi, N., Lugosi, G.：预测、学习与博弈。剑桥大学出版社 (2006) 11. Chen, Y., Vaughan, J.W.：通过无悔学习重新认识预测市场。载于：第 11 届 ACM 电子商务会议论文集，第 189–198 页 (2010) 12. Della Penna, N., Reid, M.D.：老虎机做市商。arXiv 预印本 arXiv:1112.0076 (2011)

13. Engel, D., Herlihy, M.：组合自动化做市商网络。载于：第 3 届 ACM 金融科技进展会议论文集，第 15–28 页 (2021) 14. Fan, Z., Marmolejo-Coss´ıo, F., Altschuler, B., Sun, H., Wang, X., Parkes, D.C.：Uniswap v3 中的差异化流动性提供及其对合约设计的启示。arXiv 预印本 arXiv:2204.00464 (2022) 15. Fritsch, R.：自动化做市商中的集中流动性。载于：2021 年 ACM CCS 去中心化金融与安全研讨会论文集，第 15–20 页 (2021) 16. Heimbach, L., Schertenleib, E., Wattenhofer, R.：Uniswap v3 流动性提供者的风险与回报。arXiv 预印本 arXiv:2205.08904 (2022) 17. Milionis, J., Moallemi, C.C., Roughgarden, T., Zhang, A.L.：量化自动化做市商中的损失。载于：2022 年 ACM CCS 去中心化金融与安全研讨会论文集，第 71–74 页 (2022) 18. Neuder, M., Rao, R., Moroz, D.J., Parkes, D.C.：Uniswap v3 中的策略性流动性提供。arXiv 预印本 arXiv:2106.12033 (2021) 19. Spooner, T., Fearnley, J., Savani, R., Koukorinis, A.：通过强化学习做市。arXiv 预印本 arXiv:1804.04216 (2018) 20. Uniswap 信息。网址 https://info.uniswap.org, [在线；访问日期：01-Jan-2023]