arXiv:2302.00619v1 [physics.app-ph] 1 Feb 2023

主动散射体的可持续牵引运动

Hossein Khodavirdi 和 Majid Rajabi*Wave Research Laboratory, Department of Mechanical, Materials, and Aerospace Engineering, Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, 60616 USA andSustainable Manufacturing Systems Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Tehran, Iran †（日期：2023年2月2日）

本文关注主动球形载体相对于外部波源位置产生吸引性净运动的问题。我们在此回顾，在声场中，物体所受的声辐射力源于入射波、散射波以及主动载体发出的辐射波，并且会根据物体在声场中的位置而呈现正值、负值或零值。因此，在一般情况下，无法保证实现可持续牵引运动。在本研究中，基于这样一点：对于以单模态主动运行的物体，其在完整一个波长内的辐射力平均值等于施加于被动物体上的辐射力（该力始终为正），我们提出了一种技术，使物体在完整一个波长内产生平均值为负的声辐射力，从而确保净运动具有吸引性。这里的思路是，同时以呼吸模态和一阶模态激励物体，并使两种激励之间存在相位差。我们还将展示，通过控制相位差，物体所受力的平均值可以为正、为负或为零。此外，我们表明，对于特定的相位差，不仅力的平均值为负，而且在这些相位差下，力本身在整个波长内始终不会出现正值；这可能是实现完美负净运动的理想状态。本文的公式推导基于球体表面的速度分布，同时提出了采用压电致动器的实现方法。在此，通过将零声辐射力状态（即辐射力函数抵消）设定为确定表面速度所需振幅或工作电压的合理标准，我们计算了平均力随频率和相位差的变化关系。本研究希望实现完整的机动控制，扩展了智能载体操控的概念，并进一步丰富了单波束声操控技术方面的相关文献。

I. 引言

本文介绍一种简单的构型，旨在为小型载体产生吸引性净运动。用于推送 [1, 2], 牵引 [3], 悬浮 [4–6], 分选 [7, 8], 聚焦 [9–11]或一般而言操控小型载体 [12–14] 的非接触方法，在医学领域一直备受关注，可用于精准药物递送、单细胞操控 [15], 等应用。更具体地说，利用声辐射力和力矩（作为两个必要的驱动因素）操控小物体，涉及入射波场、散射波场和辐射波场与不同形状物体之间的相互作用，这激发了大量科学研究。鉴于压力梯度和力是发展声学非接触操控方法最基础的概念，King [16] 于1934年提出了无黏流体中刚性球所受声辐射压的公式，这可视为该领域文献的基石。Hasegawa 和 Yosioka 也提出了行进平面波场中弹性实心球所受声辐射压的公式 [17, 18]。声辐射力也受到诸多研究的关注，例如 [1, 19, 20], ，研究者采用略有不同的方法，求得了不同形状物体所受的声辐射力。此外，针对不同物体形状，在行进 [21–23]和驻波场 [23, 24] 中声辐射力与力矩的研究也取得了重要进展 [25–27]。

在 [28–34] 等研究中，负声辐射力被认为是实现物体完全声学机动性所必需的自由度。考虑简单行进平面波场入射到被动物体上的情形，直观推断会认为物体受到推送作用，这可以通过考察波向物体传递线性动量来加以证明。此外，由于波与物体相互作用，会产生散射场，进而对物体施加反冲力。在这种情况下，对于前向散射占主导的散射场，产生的力将指向相反方向 [35, 36]。因此，产生负向（牵引）运动的努力，要么是增强前向散射以获得较大的

* 通讯作者
† majid rajabi@iust.ac.ir

拉力强度，要么是尽量减小入射波动量在前向上的投影，以获得较小的推送力。Marston 和 Zhang 的研究对此进行了探讨 [37, 38] ，他们指出，对于置于行进平面波场中的被动物体，不可能出现负吸收能量或负声辐射力。然而，与简单平面波情形相比，贝塞尔波束的入射动量前向投影较小，因此，同一被动物体处于类似贝塞尔光束的聚焦声场中时，会在特定频率和锥角下受到负声辐射力 [28]。

要产生拉力，使用能量上开放的散射体，是替代复杂波场 [39–41]的一种方案。在这里，使用主动体的目标是获得特定状态，使主动体辐射与入射波引起的前向散射之间产生建设性干涉。换言之，通过增强前向的波（前向散射波+辐射），施加于物体本身的后向动量会更大。本文在介绍这项新技术后，将说明在特定的主动状态下，前向波可以强到不仅产生牵引力，还能实现可持续牵引运动。为推动声学操控技术的发展，近期围绕主动载体概念与构想所开展的研究，促成了新概念的提出：作为自驱动载体的声学激活体 [42], ，即由单色入射波束操控的自激活载体 [43–47]；以及由复合场驱动的外部激活体 [48, 49] 。就在最近，还有研究表明，通过球形主动载体内部激励的双极配置，可以实现三维转向 [14]。尽管作者尚未见到使用压电陶瓷设计和制造主动载体的实验研究，但已有许多已发表论文报道了利用不同声场 [5, 6, 50]对被动粒子进行声学操控的实际实验。此外，Hai-Qun Yu 提出了一种方法 [49]，看起来适合进行实际测试：用激光束激励液体球体，而非使用压电陶瓷，以产生负声辐射力；不过，该研究同样是理论研究。

在本研究中，我们提出了另一种操控策略，重点关注这样一个概念：产生与载体位置无关的净负辐射力。通过施加特定的相位差并保持相同频率，使主动载体在其两个一阶振动模态（即单极模态和偶极模态）上受到激励。以下各节首先在第（II）节中给出问题定义，随后进入公式推导部分：第 A 小节介绍声场方程，第 B 小节计算散射系数。第（III）节由两个小节组成：第 C 小节首先对声辐射力公式进行数学处理，随后第 D 小节快速回顾压电弹性结构的相关公式。第（III）节最后在第 E 小节总结流体中运动粒子的动力学。在结果与讨论部分，通过一个数值示例，首先证明公式推导对于单模激活球体的情形是有效的；随后，图（5）表明，对于以单一模态激活的物体，其作用力在物体位置上的平均值始终为正，并且等于作用于被动物体上的声辐射力（ARF）。此外，在第（IV）节中还表明，对于载体两种激励模态之间相当宽范围的相位差，在某些特定频率下可以实现净负辐射力。在结果部分的后续内容中，通过考虑载体在宿主流体介质中的动力学，并假设入射波场的相位呈线性时间变化，证明了辐射力可能存在四种状态:

- 辐射力（RF）的平均值为正，且RF始终为正。
- 辐射力的平均值为正，而RF在一个波长内可取正值、零值或负值，并会诱导出稳定或不稳定的静止状态。
- 辐射力的平均值为负，且RF始终为负。
- 辐射力的平均值为负，而RF在一个波长内可取正值、零值或负值，并会诱导出稳定或不稳定的静止状态。

考虑主动载体在宿主介质中的动力学，并将阻力、历史力和附加质量效应纳入考量， [51], 计算载体传播速度随时间的变化，并观察到，当相位变化率大于某个（与频率相关的）最小值时，载体的传播速度会趋于一个稳定值，其方向与入射波场的传播方向相反。

II. 问题定义

本节将明确界定问题配置。图（1）展示了载体处于零阶模态时的情况，其表面速度为 v_0 ；以及处于一阶模态时的情况，其表面速度为 v_1 。这里， v_0和 v_1 的振幅相等，但两个模态之间始终存在变化的相位，如 $\Delta\phi$，因此我们可以写为 $v_0 = v_{amp}e^{-i\phi_0}$

以及 $v_1 = v_{amp}e^{-i(\phi_0+\Delta\phi)}$。本文首先在不考虑压电弹性结构球体方程的情况下建立公式，该球体方程描述了激活物体的机制；我们只需直接假设物体表面具有所需的速度分布（例如 v_0 和 v_1），即可求得散射系数。随后，我们回顾这些构想在压电弹性球体中的实现，并分别呈现两种视角下的结果。

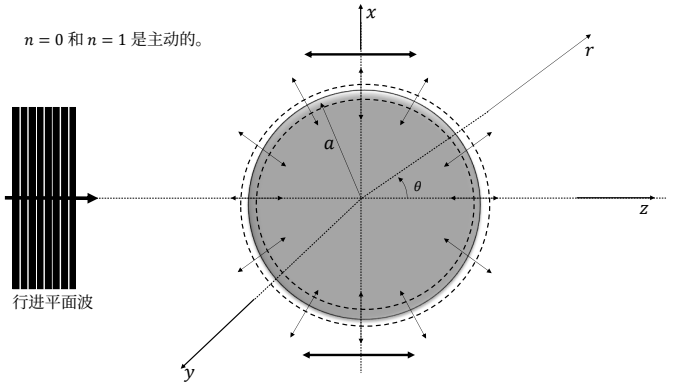


图1. 问题构型。图中表示行进平面波与以零阶和一阶模态振动的主动球体之间的相互作用。

如图（1）所示，为表示呼吸模态（$n = 0$）下的振动，需要均匀的周期性径向速度激励。此外，对于一阶模态振动，径向速度的余弦分布可确保沿z方向振荡，表面的总径向速度可写为 $\boldsymbol{v} =$ （$v_0 + v_1\cos\theta$）$e^{-i\omega t}\hat{e}_r$。图（1）还表示一列朝弹性球传播的入射平面波，该球体外半径为 a，以零阶和一阶模态主动振动，两个模态之间的相位差为 $\Delta\phi$ 。

III. 公式推导

在以下各小节中，我们首先回顾绝热条件下无黏可压缩流体的声场方程。然后，直接假设物体表面的速度分布由球体的任意驱动方式产生，并利用流体与散射体界面处的连续性条件，计算散射系数，并以明确显示物体振动相位的形式表示。此外，我们还给出声辐射力函数及其各项的分类，以突出球体双模态振动之间相位差的重要性。本节还概述压电弹性结构的方程，以介绍实现主动载体的一种方式；最后讨论流体中运动物体的动力学，以考察物体如何随入射波场相位的变化而运动。在以下部分中，粗体符号表示向量或矩阵，而 $\langle\rangle$ 表示权重函数为1的内积或平均运算，具体取决于上下文。

A. 声场

按照经典方法，对于以低速度流动的可压缩流体，牛顿第二定律的广义形式（此处称为欧拉方程）可写为 [52]:

$$-\boldsymbol{\nabla}p = \rho_0\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} \tag{1}$$

其中， p 为压力， ρ_0 为流体密度的平均值， $\boldsymbol{v}$ 为流体的速度矢量。绝热条件下无黏流体的连续性方程可表示为:

$$-\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2}$$

现在，将式（1）和式（2）结合，并在无黏流体中采用亥姆霍兹分解的方法，可将波动方程的定常形式写为:

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 + k^2\right)\varphi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3}$$

其中， k 是波数，在此可表示为 $k = \frac{\omega}{c}$，而 $\varphi(\boldsymbol{r})$是速度势场。以球体中心为原点，对于方位角对称的情形，入射场的波动方程解可写为:

$$\varphi_{inc}(r,\theta,\omega,t) = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n j_n(kr) P_n(\cos\theta) e^{-i\omega t} \tag{4}$$

此外，考虑索末菲辐射条件 [53], ，散射场的波动方程解为:

$$\varphi_{sc}(r,\theta,\omega,t) = \varphi_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(2n+1)\, i^n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta) e^{-i\omega t} \tag{5}$$

在式（4）和式（5）中， A_n 是模态散射系数， $P_n(\cos\theta)$是勒让德多项式， $j_n(kr)$是球贝塞尔函数， $h_n^{(1)}(kr)$是第一类球汉克尔函数。流体中的总径向速度由入射波和散射波共同产生，也可表示为:

$$v_r^f(r,\theta,\omega,t) = \varphi_0 k \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, i^n \left(A_n h_n^{(1)'}(kr) + j_n(kr)'\right) P_n(\cos\theta) e^{-i\omega t} \tag{6}$$

其中，$(.)'$ 表示对 r 的一阶导数，上标 f 表示流体介质中的速度。

B. 模态散射系数

给定一组 r、 θ、 ω 和 t 后，总速度势和速度中的唯一未知参数是$A_n(\omega)$，即散射系数，它们本身携带着散射体的特性。在此，由于系统的物理过程较为简单，只需在 $r = a$ 处对径向速度施加连续性条件，就足以求出所有散射系数。鉴于波动解表示为勒让德多项式完备正交基上的展开，我们也将主动载体表面的速度按同一基展开，如下:

$$v_r^{obj}(\theta,\omega,t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n P_n(\cos\theta) e^{-i\omega t} \tag{7}$$

其中， v_n 是展开式中的速度模态系数。此时，回顾第（II）节可知，由规定激励（由压电陶瓷、激光照射、化学过程等施加）所产生的物体表面总速度可写为 $\boldsymbol{v} = (v_0 + v_1\cos\theta)e^{-i\omega t}\hat{e}_r$。此外，注意到勒让德多项式的正交条件可表示为 $\langle P_n, P_m\rangle = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$，因此速度模态系数可写为:

$$v_n = \begin{cases} v_{amp} e^{-i\phi_0} & n = 0 \\ v_{amp} e^{-i(\phi_0+\Delta\phi)} & n = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{8}$$

已知速度的模态系数后，可以利用式（6）和式（7），并在流体与球体的界面处满足径向速度连续条件，从而求得散射系数:

$$A_n(\omega) = \begin{cases} \frac{v_n + \varphi_0 k(2n+1) i^n j_n'(ka)}{-\varphi_0 k(2n+1) i^n h_n^{(1)'}(ka)} & n = 0 \& n = 1 \\ -\frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)'}(ka)} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

式（9）也可以表示为:

$$A_n(\omega) = \begin{cases} Z_1^n + v_n Z_2^n & n = 0 \& n = 1 \\ Z_1^n & \text{otherwise} \end{cases} \tag{10}$$

其中， $Z_1^n = -\frac{j_n'(ka)}{h_n^{(1)\prime}(ka)}$ 以及 $Z_2^n = -\frac{1}{\varphi_0 k^2 (2n+1) i^n h_n^{(1)\prime}(ka)}$。式（9）表明，被动物体（例如 $n > 1$）的散射系数与入射波场的振幅和相位无关，这意味着所受声辐射力也与物体相对于入射波源的位置无关。然而，入射波速度势的复振幅（φ_0）与物体因其主动性产生的速度模态系数（v_n）同时出现在同一项中，这意味着对于阶数与球体主动模态相同的散射系数（$n = 0\&1$），其值将同时取决于入射波场的振幅和相位以及激励速度。换言之，散射系数 A_0 和 A_1 的相位大致是球体表面指定速度的相位与入射波相位之差的函数，即 $\angle A_0 = \text{func}(\angle v_0 - \angle \varphi_{inc})$ 和 $\angle A_1 = \text{func}(\angle v_1 - \angle \varphi_{inc})$。为简化符号并明确展示物体位置对公式推导的影响，可以将模态速度或入射波的指定相位设为常数，再改变另一者的相位，以观察物体位置对所受力的影响。本文将入射波的相位视为常数，因此，$n = 0$ 的模态速度相位的任何变化都可以解释为物体相对于波源的位置变化。

C. 声辐射力

在非线性区间，波场照射物体时，物体所受的力不为零。对于行进平面波的情况，我们回顾球体所受的所谓声辐射力的公式，其中球体的外表面处于平衡状态。z方向的时间平均辐射力函数可表示为[43]:

$$\langle F \rangle_t = E_{inc} S_c Y_z \tag{11}$$

其中，$E_{inc} = \rho k^2 \varphi_0^2 / 2$ 为入射波能量密度， S_c 为球形物体的横截面积。此外， Y_z 为z方向声辐射力的无量纲形式，如 [55, 56]:

$$Y_z = \frac{-4}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left[\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2 \left(\alpha_n \alpha_{n+1} + \beta_n \beta_{n+1} \right) \right] \tag{12}$$

其中， α_i 和 β_i 分别为散射系数的实部和虚部。将式（12）与式（10）中得到的散射系数结合起来，可以深入了解球体振动对最终声辐射力的影响。换言之，考虑到 A_n 在 $n = 0\&1$和 $n > 1$时的不同表达式，可以将式（12）中的表达式归纳为 Y_z^{active}的两个主要项，可表示为$Y_z^{active} = \text{func}(v_{amp},\ \phi_0,\ \Delta\phi,\ k)$；另一项为 $Y_z^{passive}$，它仅是频率的函数。在前一小节中，根据本文所作的假设， ϕ_0 可解释为粒子相对于波源的位置。对式（10）稍作变换并利用式（8），对于 $n = 0$，可得:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \Re Z_1^0 + \Re Z_2^0 v_{amp} \cos\phi_0 + \Im Z_2^0 v_{amp} \sin\phi_0 \\ \beta_0 &= \Im Z_1^0 + \Im Z_2^0 v_{amp} \cos\phi_0 - \Re Z_2^0 v_{amp} \sin\phi_0 \end{aligned} \tag{13}$$

对于 $n = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Re Z_1^1 + \cos\phi_0 v_{amp} \left(\Re Z_2^1 \cos\Delta\phi + \Im Z_2^1 \sin\Delta\phi \right) + \sin\phi_0 v_{amp} \left(\Im Z_2^1 \cos\Delta\phi - \Re Z_2^1 \sin\Delta\phi \right) \\ \beta_1 &= \Im Z_1^1 + \cos\phi_0 v_{amp} \left(\Im Z_2^1 \cos\Delta\phi - \Re Z_2^1 \sin\Delta\phi \right) - \sin\phi_0 v_{amp} \left(\Im Z_2^1 \sin\Delta\phi + \Re Z_2^1 \cos\Delta\phi \right) \end{aligned} \tag{14}$$

其中，参数前的 $\Re$ ($\Im$) 分别表示该参数的实部（虚部）。现在，将式（13）和式（14）代入式（12），并经过一些推导后，无量纲力函数的表达式可以改写成更符合我们目标的形式，如下:

$$Y_z = \frac{-4}{(ka)^2} \left(A\cos\phi_0 + B\sin\phi_0 + C\sin\phi_0\cos\phi_0 + D\sin^2\phi_0 + E\cos^2\phi_0 \right) + Y_z^{passive} \tag{15}$$

其中，

$$Y_z^{passive} = \frac{-4}{(ka)^2}\Bigg\{\alpha_2 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\left[\alpha_n + \alpha_{n+1} + 2\left(\alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_n\beta_{n+1}\right)\right] + \Re Z_1^0 + 2\Re Z_1^0\Re Z_1^1 + 2\Im Z_1^0\Im Z_1^1 + 2\alpha_2\Re Z_1^1 + 2\beta_2\Im Z_1^1\Bigg\} \quad (16)$$

系数 A、B、C、D 和 E 均为频率和 $\Delta\phi$ 的函数，列于附录（第 VI A 节）。仔细考察式（15）和式（12），并结合 α_0、β_0、α_1 和 β_1 的表达式，可以更深入地理解通过改变相位来激发物体的双模态这一思路。换言之，可以看出，对于球体的单模激励，声辐射力函数仅是 $\cos\phi_0$ 和 $\sin\phi_0$ 的函数；对力在一个完整波长范围内取平均后，唯一非零项为 $Y_z^{passive}$，且该项始终为正 [57]。因此，对球体进行双模激励并改变相位差，可以灵活调节式（15）中的系数 D 和 E，从而使声辐射力在一个完整波长范围内的平均值为负。这样便可确保主动物体在波场中的任何位置都始终受到牵引。

D. 压电弹性结构的实现

根据前面各小节的讨论，或许有人会问，是否存在一种更现实的方法来对本文提出的方法进行建模？换言之，如果从更基础的步骤入手，并考虑一种以不同相位激发球体两个最低阶模态的机制，其数学表述会是什么？这里，我们采用 Scandrett [58] 提出的方法，对浸没式双层球壳的波散射进行分析。该球壳由弹性空心球构成，内侧涂覆有一层压电陶瓷执行器（图（2））。需要强调的是，本节的目的并非详细阐述压电弹性结构的数学表述，而只是简要概述相关步骤。欲了解更多内容，请参阅相关文献 [43, 58] 及附录（VI C）。

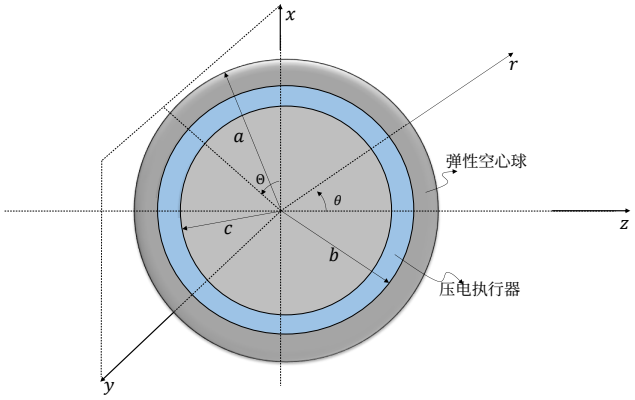


图 2. 内部装有一层压电执行器的弹性空心球。

从本构 弹性材料和压电材料的频域方程出发，我们得到 [43, 59–61] ：

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{s}; \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Phi}; \quad \boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi} \quad (17)$$

其中，$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别为弹性层和压电层的刚度张量，$\boldsymbol{e}$ 为压电矩阵。此外，$\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 分别为各向同性弹性外壳的应力向量和应变向量；$\boldsymbol{\Sigma}$、$\boldsymbol{S}$ 和 Δ 分别为压电材料的应力、应变和电场；$\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为两个矩阵算子。式（17）中各符号的表达式见第（VI B）节。在无外力且自由电荷密度为零的情况下，两组运动方程（结构的动力学方程）以及高斯方程的

电平衡状态可表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma} &= \rho_e \ddot{\boldsymbol{u}} \\ \mathbf{Q}\boldsymbol{\Sigma} &= \rho_p \ddot{\boldsymbol{U}} \\ \nabla_2 \Delta_r + \Delta_r + \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Delta_\theta \sin\theta\right) + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\Delta_\Theta\right) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

¨其中，$\ddot{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 分别为弹性层和压电层位移向量的二阶时间导数，ρ_e 和 ρ_p 分别为对应的密度。此外，由于 ϕ、Φ 和 φ 在本文其他部分均用于表示其他量，此处我们使用大写希腊字母 theta（Θ）表示球坐标中的方位角。从这里开始，按照 [43, 60], 中采用的方法，结合式（17）中的本构关系和式（18）中的方程，可以应用 [60], 中引入的变量代换，使用 [43, 60, 62], 中提出的层合模型，应用固-固/流-固连续条件及机械/电学边界条件，并将状态变量展开为勒让德多项式。经过繁琐且冗长的推导后，可得到如下形式的散射系数：

$$A_n(\omega) = \begin{cases} \mathcal{Z}_1^n + \Phi_n \mathcal{Z}_2^n & n = 0 \& n = 1 \\ \mathcal{Z}_1^n & \text{otherwise} \end{cases} \tag{19}$$

其中，$\mathcal{Z}_1^n$ 和 $\mathcal{Z}_2^n$ 是系统的模态传递函数，见附录；详细版本请参阅 [43]。此外，Φ_n 是施加于压电执行器的无量纲模态电压振幅，由施加的电势振幅的模态展开得到，其形式为：

$$l(\theta,\omega) = \left(\frac{e_{33}a}{\epsilon_{33}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n P_n\left(\cos\theta\right) \tag{20}$$

此处，为避免混淆指定速度与给定电压，我们使用 l 表示电压。与基于位移激励的解类似，为了以相位差激励球体的呼吸模态和一阶模态，我们选择 $l = (l_0 + l_1 \cos\theta)\, e^{-i\omega t}$ 作为给定电压的分布。这里，l_0 和 l_1 是电压的复振幅，分别为 $l_0 = l_{amp} e^{-i\phi_0}$ 和 $l_1 = l_{amp} e^{-i(\phi_0+\Delta\phi)}$。利用勒让德多项式的正交性，可写为：

$$A_n(\omega) = \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_1^0 + \frac{\epsilon_{33}}{e_{33}a} l_{amp} e^{-i\phi_0} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_2^0 & n = 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{Z}}_1^1 + \frac{\epsilon_{33}}{e_{33}a} l_{amp} e^{-i(\phi_0+\Delta\phi)} \boldsymbol{\mathcal{Z}}_2^1 & n = 1 \\ \boldsymbol{\mathcal{Z}}_1^n & \text{otherwise} \end{cases} \tag{21}$$

从此处开始，由于方程（21）与方程（10）极为相似，对于位移激励情况所推导的所有无量纲声辐射力及其平均值公式推导均适用，唯有系数 A, B .. 的表达式略有不同。

E. 散射体的动力学

在声学操控领域的大多数早期研究中，研究重点主要放在问题的稳态解上，以改进和完善相关概念，并引入数学方法来丰富声学操控这一主题。然而，为了发展和支持这一概念，本文研究了在声辐射力、斯托克斯阻力、附加质量力和巴塞特力作用下，粒子相位变化率与载体速度之间的关系。黏性流体中粒子的运动方程为[51]，

$$m_c\frac{dV_c}{dt}=-6\pi\eta aV_c-\frac{1}{2}m_f\frac{dV_c}{dt}-6\pi\eta a^2\int_0^t d\tau\frac{\frac{dV_c}{d\tau}}{\left[\pi\nu\left(t-\tau\right)\right]^{\frac{1}{2}}}+F_{acoustic} \tag{22}$$

等式（22）右侧的第一、第二和第三项分别是斯托克斯阻力、附加质量力和历史力，最后一项则是声辐射力。对于该方程，V_c 是载体的速度，η 是动力黏度，ν 是运动黏度，m_c 是载体（散射体）的质量，m_f 是被排开流体的质量。这里，我们使用拉普拉斯变换求解等式（22），并得出粒子速度的表达式。由于巴塞特力仅在物体高速加速时才具有显著大小，且考虑到将其纳入方程会徒增数学处理的繁琐，而我们只寻求物体的近似行为，因此忽略历史力的影响 [63]。进行拉普拉斯变换后，可得：

$$\left[\left(m_c+\frac{m_f}{2}\right)s+6\pi\eta a\right]\overline{V}_c=\overline{F}_{acoustic} \tag{23}$$

这里，$\overline{(.)}$表示变换后的函数。粒子速度的最终表达式为 $V_c=f*g=\int_0^t F(t-\tau)g(\tau)d\tau$，其中$(*)$是卷积积，$g=\mathcal{L}^{-1}\left\{1/\left[(m_c+m_f/2)\ s+6\pi\eta a\right]\right\}$，$F$是声辐射力，$\mathcal{L}^{-1}$ 表示其后函数的拉普拉斯逆变换。

IV. 结果与讨论

为直观展示本文介绍的公式推导和方法的结果，这里给出两个数值算例。两个算例考虑的是同一个物理问题，但其中一个以球体的表面速度来定义球体的驱动，且不考虑驱动的成因（根据第（III B）节公式推导得到的散射系数）；另一个则采用第（III D）节的公式推导，计算内部涂覆一层0.1 mm PZT4压电材料的不锈钢球壳的散射系数。两个算例均假设周围流体为水，压力振幅（p_{inc}）为100 kPa，声速为1497 m/s。在上述条件下，流体密度为997 kg/m^3。物体的外半径为1 mm，图（2）中的其他半径分别为 $b=0.9$ mm和 $c=0.8$ mm。不锈钢和PZT4的材料属性见附录（VI D）。为确保结果可靠，我们首先检查两个算例中的代码，并确认被动散射体的无量纲声辐射力和散射系数随 ka （无量纲频率）变化的曲线是否与文献一致。在下图中，工作频率范围选为20kHz$< f <$ 10MHz，该范围属于实用超声换能器的频率范围；对于 $a=1$mm，其对应值为 $0.1<ka<50$。图（3）展示了行进平面波照射下（a）弹性被动球体和（b）被动刚性球的z方向无量纲声辐射力随 ka 的变化。两种情况下，曲线均与文献结果吻合 [21, 43, 57]。为避免不必要的图示，这里不列出散射系数随 ka 变化的曲线。

为了实施这些方法，无论是使用压电弹性结构激励物体，还是仅参考其表面速度，我们都需要确定合适的电压和表面位移幅值。按照 [14, 43], 中的方法，计算最小抵消电压（或表面位移）可以作为一个合理的起点。实际上，要计算单模态主动体的最小抵消电压，可以对公式（12）进行一些变换，并将其写成$Y_z=A\alpha+B\beta+C$的形式，其中 α 和 β 分别是电压的实部和虚部。现在，将该方程设为零，则满足无力条件所需的最小电压幅值将是与直线 $A\alpha+B\beta+C=0$ [43]相切的、以原点为圆心的圆的半径。最小表面位移的幅值和相位也可以通过类似过程计算得到。

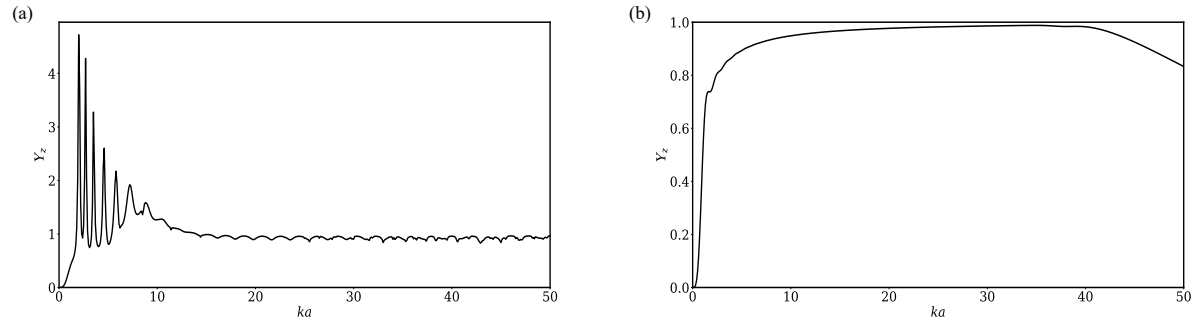


图 3. (a) 被动弹性球和 (b) 被动刚性球的 z方向声辐射力随无量纲频率的变化。

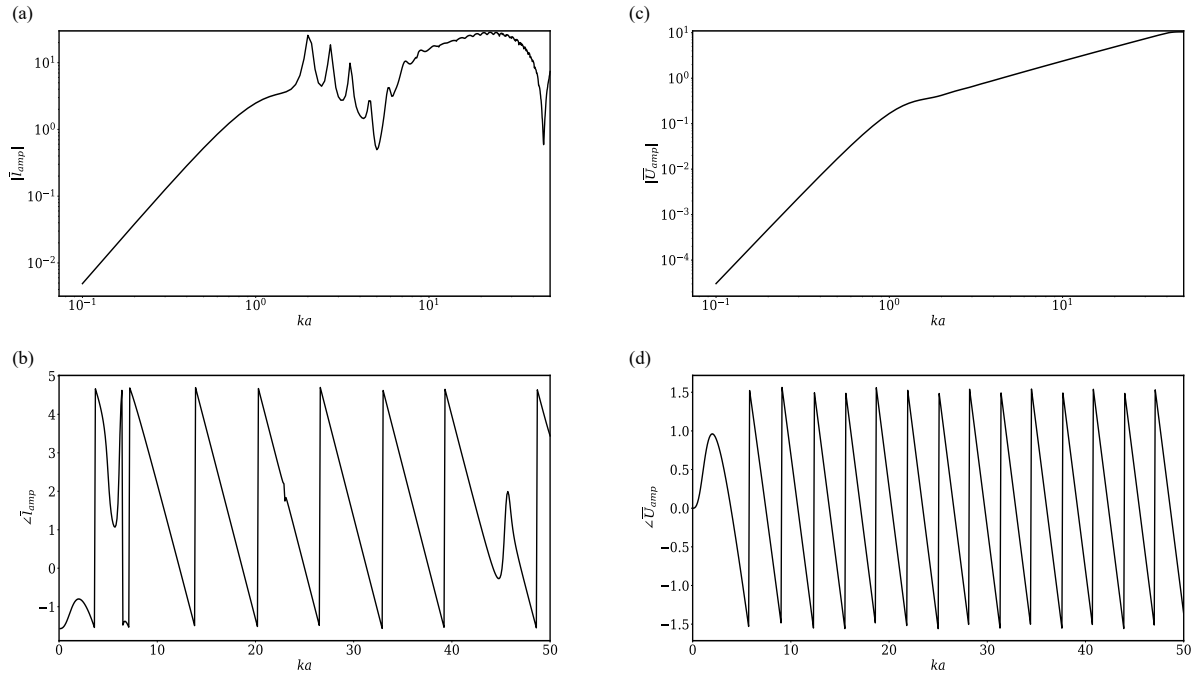


图 4. 对于弹性球，(a) 和 (b) 分别表示最小归一化抵消电压及其相位随无量纲频率的变化。对于刚性球，(c) 和 (d) 分别表示最小归一化表面位移及其相位随无量纲频率的变化。(a) 和 (c) 采用对数刻度表示。

在图（4）的左侧，图（a）和图（b）分别显示了最小归一化抵消电压幅值（$l_{amp} = e_{33} l_{amp}/(a|p_{inc}|)$）和相位随无量纲频率的变化。右侧的图（c）和图（d）分别显示了抵消z方向声辐射力所需的最小归一化表面位移幅值（$U_{amp} = v_{amp}/(\omega|U_{inc}|)$）和相位随 ka的变化。图（4）中的幅值结果（归一化电压或位移）可以乘以一个实数，例如 $\gamma > 1$，从而得到其余结果所使用的工作幅值。这里我们选择 $\gamma = 3$ ，以确保物体在每个频率下以单模态激励时，都有可能经历负、零和正力状态。本部分所选取的幅值将作为以呼吸模态和一阶模态激励物体时的工作幅值。

图（5）展示了在 $ka = 4.1$下一个完整波长范围内，z方向无量纲声辐射力随 $\phi_0/2\pi$ （可解释为物体相对于波源的位置）变化的情况。其中，（a）为采用压电弹性构型得到的结果，（b）为基于表面速度推导公式得到的结果。图（5）中的曲线证实了第（III C）节的说明：对于以单模态主动振动的散射体，一个完整波长内声辐射力的平均值始终为正，且等于力表达式的被动部分 [57]。为了展示所推导公式的实用性，接下来讨论一些图示，这些图展示了力在物体相对于波源的位置（或

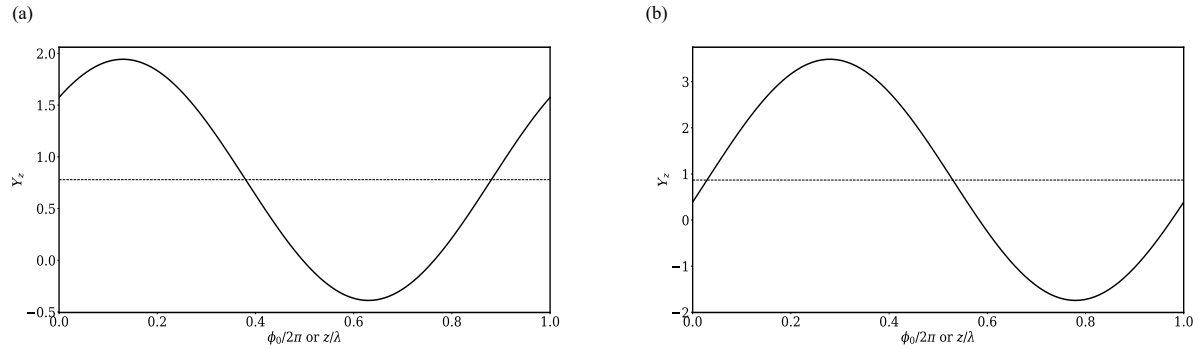


图 5. 在 $ka = 4.1$ （$\lambda \approx 0.25a$）条件下：(a) 弹性球在 $n = 0$ 中主动振动时的解所对应的 z方向无量纲声辐射力随 ϕ_0 的变化（ ϕ_0 也表示物体相对于波源的位置）；(b) 刚性球在 $n = 0$ 中主动振动时的解所对应的 z方向无量纲声辐射力随 ϕ_0 的变化（ ϕ_0 也表示物体相对于波源的位置）。两图中的虚线表示 Y_z 在一个完整波长内的平均值。

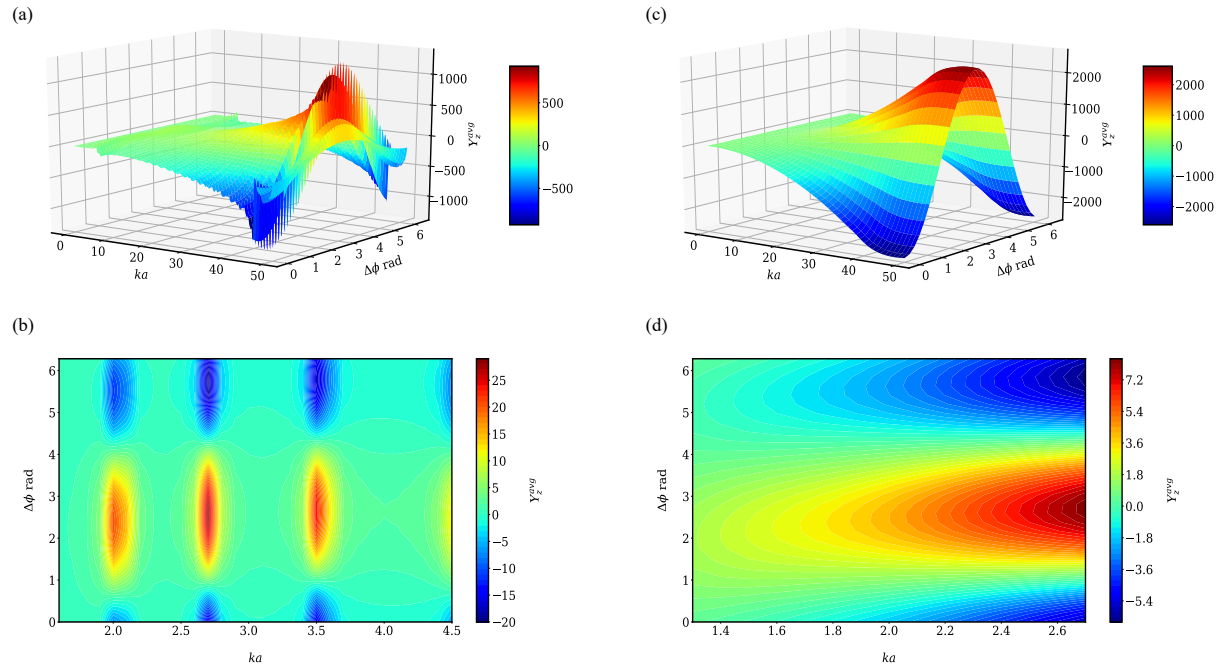


图 6. 弹性球 (a) 和刚性球 (c) 分别以其零阶和一阶模态主动振动时，平均 z方向声辐射力随无量纲频率和 $\Delta\phi$ 的变化。

其相对于入射波相位的相位）上的平均值如何随两个有效参数变化：频率和模态相位差。模态相位差定义为壳体呼吸模态与偶极模态振动之间的相位差。这些参数之所以称为有效参数，是因为它们易于调节；如果结果表明，在较宽的频率和相位差范围内，力的平均值在相应条件下均为负值，就可以设计一个实际系统，使其在特定频率和相位差下工作，从而使力的平均值为负。可以确信的是，在广泛的实际频率和相位差范围内都能实现这一理想情况，图（6）对此作了证明。将 ka 设定在相同的工作范围内，并令 $\Delta\phi$ 处于$[0, 2\pi]$ 范围内，同时根据图（4）的结果选择电压振幅或表面位移，即可绘制相对于 ϕ_0的平均无量纲力随无量纲频率以及 $n = 0$ 和 $n = 1$的双模态相位差的变化曲线。图（6）展示了z方向平均声辐射力随 ka 和 $\Delta\phi$ 变化的三维曲面：（a）为采用压电弹性解得到的结果，（c）为基于表面速度边界条件得到的结果。两个三维曲面在 ka 和 $\Delta\phi$方向上都呈现相似的总体趋势，但压电弹性解对应的曲面波动更大，这一点可通过比较子图（a）和

图（4）中的（c）图说明了这些波动的原因。（b）图和（d）图展示了上方三维曲面的等值线，但频率范围更窄。（b）图的起始无量纲频率设为$ka \approx 2$ （$f \approx 470$ kHz），因为观测到负平均力时的最小无量纲频率约为 $ka = 2$。（d）图的起始点也依据相同的标准选取，为 $ka \approx 1.2$ （$f \approx 286$ kHz）。（b）图和（d）图中等值线的最大无量纲频率是任意选取的。

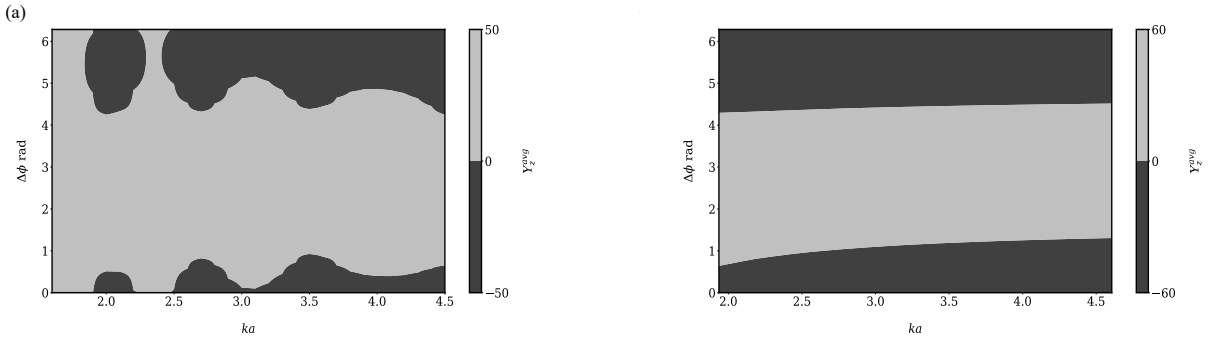


图7.（a）和（b）分别展示了采用电压和表面位移求解时，z方向平均声辐射力随 ka 和 $\Delta\phi$ 变化的等值线。较深色的区域表示物体在这些条件下受到负平均力，较浅色的区域表示受到正平均力。

图（6）子图（b）和（d）中的等值线在图（7）中再次绘制，但这次仅使用两种颜色。等值线中的深色指示平均力为负的区域（$(ka, \Delta\phi)$组合），而浅色表示平均力为正的条件。两种主色之间的边界表示平均力为零的状态。同样，图（a）和（b）总体趋势相似，但同时也展示了以下结果差异：方程基于压电层电压求解时，与基于表面速度处理时所得的结果不同。

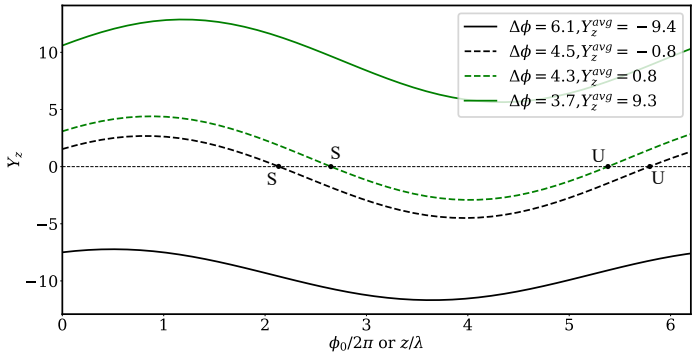


图 8. 四种不同 $\Delta\phi$下 $ka \approx 3$ ($\lambda \approx 1/3a$)处的z方向声辐射力。

需要注意的是，在入射波一个波长内，声辐射力的平均值始终为正， z/λ；对于载体处于单一振动模态（即单极或偶极模态）时，入射波场与载体辐射场之间的相位差也是如此， $\phi_0/2\pi$ 。而对于物体受到双模态激励的情况，图（8）展示了在选定频率 $ka = 3$ 下，对于所选模态相位差 $\Delta\phi$，声辐射力 Y_z 随 z/λ 或 $\phi_0/2\pi$ 变化的关系。图（8）中辐射力函数随相位差或空间位置变化的正弦模式，会呈现出不同状态，例如较大的正平均力、较大的负平均力，以及较小的正平均力或负平均力。根据图（6）可知，在特定频率下，模态相位差的选择决定平均力是正值还是负值；此外，根据平均力的大小，可以判断辐射力是仅取正值（即始终处于推力状态）、仅取负值（即始终处于拉力状态），还是如先前报道的情况，同时取正值和负值。后一种情况下会出现零力状态，并产生两个静止状态（即 $Y_z = 0$）：一个是不稳定静止状态，另一个是稳定静止状态；图（8）中分别以 S 和 U 标出， [57]。

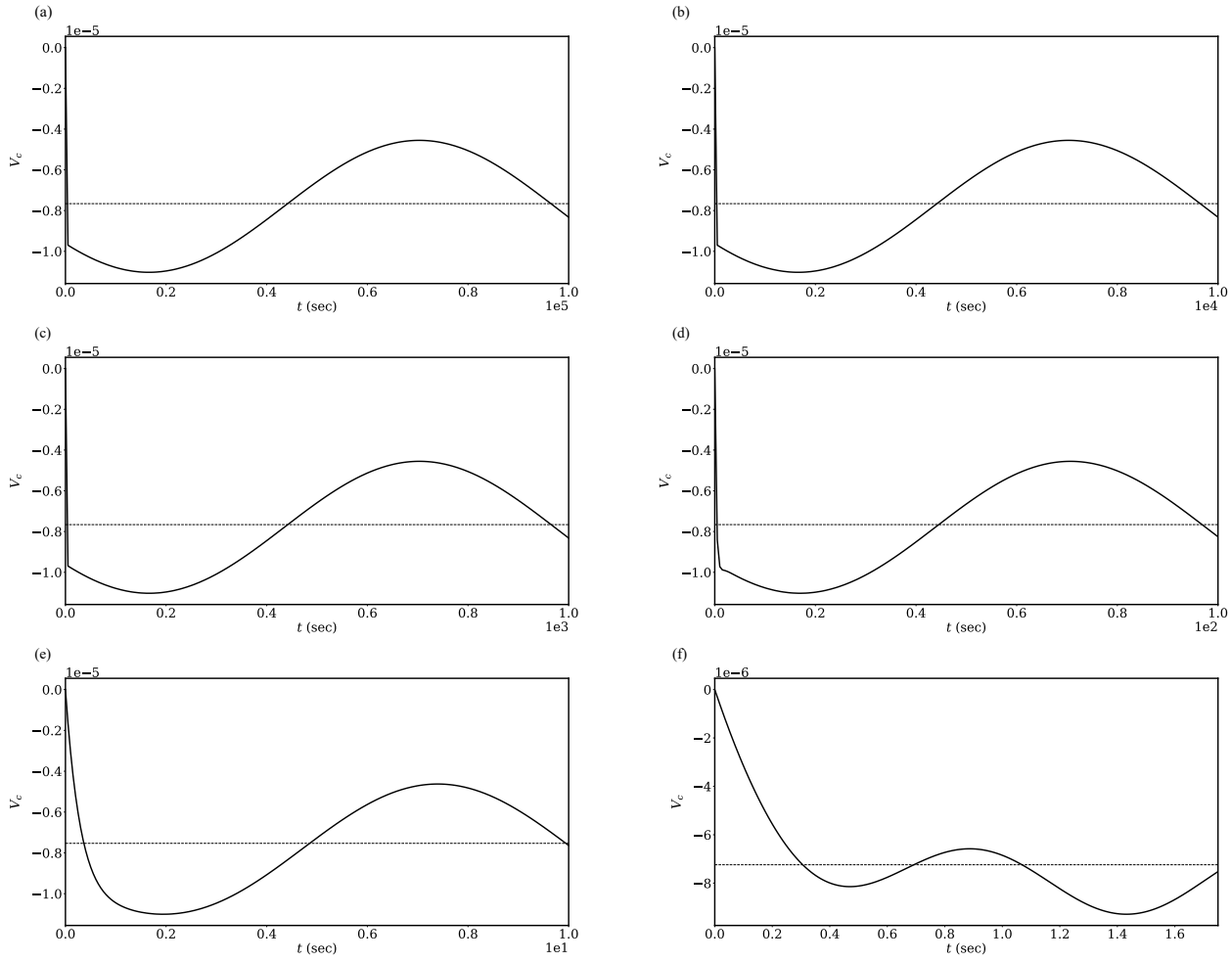


图9. 外半径为 $a = 1$ mm的球体在相变速度分别等于(a) $0.01V_{passive}$、(b) $0.1V_{passive}$、(c) $V_{passive}$、(d) $10V_{passive}$、(e) $100V_{passive}$ 和(f) $1000V_{passive}$时，载体在 $ka = 2.7$ 和 $\Delta\phi = 5.16$ rad下的速度随时间的变化。虚线表示载体的速度平均值。

在证明既能产生平均负声辐射力状态，也能产生平均正状态（无论是否存在静止状态）之后，现在是时候检验所提出的通过改变入射波场相位（即随时间变化）来操控激活载体的方法了。显然，必须考虑载体的动力学和游动性能。图（9.a）至图（9.f）展示了载体速度 V_c 随时间的变化；入射波相位的变化率定义为 $V_{phase} = d\phi_0/dt$，并选取为 $V_{phase}/v_{passive} = 0.01$，0。1，1，10，100，1000，其中 $V_{passive}$ 是载体处于被动状态时的速度，计算为 $V_{phase} = S_c E_{inc} Y_z^{passive}/$（$6\pi\eta a$）。仿真中假设载体处于静止状态，$V_c$（$t = 0$）$= 0$ 米/秒；所选频率对应于 $ka = 2.7$，所选模态相位差为 $\Delta\phi = 5.61$ 弧度。如图所示，对于所有入射波相位变化率，载体速度都围绕 $S_c E_{inc} Y_z/$（$6\pi\eta a$）波动（Y_z 为 z 方向上的力平均值）。不同 $V_{phase}/V_{passive}$ 取值下，变化范围 min（V_c）$< V_c$（t）$< max$（V_c）大致相同。载体速度变化的时间尺度与相位变化率成反比，如 $\propto$（$V_{phase}/V_{passive}$）$^{-1}$。总之可以看出，按照所提出的策略，借助斯托克斯游动条件下平均辐射力的诱导作用，载体以波动（即正弦模式）的速度运动，其速度围绕预先预测的游动速度变化；同时须注意，低雷诺数条件 $\rho_f a V_c/\eta \approx O$（$10^{-2}$）成立。

V. 结论

本文的主要成果是提出了一种简单的构型，可在一个完整波长范围内产生平均值为负的声辐射力。事实上，对声辐射力表达式进行简单推导后发现，单模态主动体与行进声波相互作用时只能受到负力，却无法获得负的力平均值；若要产生负的力平均值，力表达式中必须出现高阶三角项。本文提出同时以零阶和一阶模态激励物体，从而产生负的力平均值，并表明，双模态激励之间的相位差可作为控制参数，用于在声学操控过程中实现某些预期条件。本文通过两种方式实现了上述技术：一是仅考虑激励物体对球壳表面位移的影响，而不涉及物体的激励过程；二是采用压电弹性结构模拟该方法的一个实现示例。值得注意的是，本研究旨在丰富主动载体完全操控的概念和方法，实际应用中的问题则有待未来研究评估。

VI. 附录

A. 平均声辐射力公式中的系数

在本附录中，我们列出两种激励情况下 z 方向平均声辐射力公式中各系数的完整表达式：一种以表面速度激励，另一种以电压激励。以球体表面速度为基础建立公式时，各系数如下：

$$\begin{aligned}
A = v_{amp}\Bigg[&2\cos\Delta\phi\Big(\Re Z_2^1+\Re Z_2^1\Re Z_1^0+\Im Z_1^0\Im Z_2^1+\alpha_2\Re Z_2^1+\beta_2\Im Z_2^1\Big)+2\sin\Delta\phi\\
&\Big(\Im Z_2^1+\Im Z_2^1\Re Z_1^0-\Im Z_1^0\Re Z_2^1+\alpha_2\Im Z_2^1-\beta_2\Re Z_2^1\Big)+\Re Z_2^0+2\Re Z_1^1\Re Z_2^0+2\Im Z_2^0\Im Z_1^1\Bigg]\\
B = v_{amp}\Bigg[&2\cos\Delta\phi\Big(\Im Z_2^1+\Im Z_2^1\Re Z_1^0-\Im Z_1^0\Re Z_2^1+\alpha_2\Im Z_2^1-\beta_2\Re Z_2^1\Big)-2\sin\Delta\phi\\
&\Big(\Re Z_2^1+\Re Z_2^1\Re Z_1^0+\Im Z_1^0\Im Z_2^1+\alpha_2\Re Z_2^1+\beta_2\Im Z_2^1\Big)+\Im Z_2^0+2\Re Z_1^1\Im Z_2^0-2\Re Z_2^0\Im Z_1^1\Bigg]
\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}
C = v_{amp}^2\Bigg[&2\cos\Delta\phi\Big(\Im Z_2^1\Re Z_2^0+\Re Z_2^1\Im Z_2^0-\Im Z_2^0\Re Z_2^1-\Re Z_2^0\Im Z_2^1\Big)+2\sin\Delta\phi\Big(-\Re Z_2^1\Re Z_2^0+\Im Z_2^1\Im Z_2^0\\
&-\Im Z_2^0\Im Z_2^1+\Re Z_2^0\Re Z_2^1\Big)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$D = E = v_{amp}^2\Bigg[2\cos\Delta\phi\Big(\Im Z_2^1\Im Z_2^0+\Re Z_2^1\Re Z_2^0\Big)+2\sin\Delta\phi\Big(-\Re Z_2^1\Im Z_2^0+\Im Z_2^1\Re Z_2^0\Big)\Bigg]$$

此外，当激励由压电弹性系统表示时，平均声辐射力公式中的系数与式（24）中的系数类似，但为简洁起见，我们不再赘述。

B. 压电弹性结构矩阵的完整表示

本附录给出第（IIID）部分中使用的一些符号的显式表达式。式（17）中的向量为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix}\sigma_{rr} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\Theta\Theta} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\Theta} & \sigma_{\theta\Theta}\end{bmatrix}^T,\\
\boldsymbol{\Sigma} &= \begin{bmatrix}\Sigma_{rr} & \Sigma_{\theta\theta} & \Sigma_{\Theta\Theta} & \Sigma_{r\theta} & \Sigma_{r\Theta} & \Sigma_{\theta\Theta}\end{bmatrix}^T,\\
\boldsymbol{s} &= \begin{bmatrix}s_{rr} & s_{\theta\theta} & s_{\Theta\Theta} & s_{r\theta} & s_{r\Theta} & s_{\theta\Theta}\end{bmatrix}^T,\\
\boldsymbol{S} &= \begin{bmatrix}S_{rr} & S_{\theta\theta} & S_{\Theta\Theta} & S_{r\theta} & S_{r\Theta} & S_{\theta\Theta}\end{bmatrix}^T,\\
\boldsymbol{\Delta} &= \begin{bmatrix}\Delta_r & \Delta_\theta & \Delta_\Theta\end{bmatrix}^T
\end{aligned}\tag{25}$$

式（17）中的矩阵算子如下：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda} &= \begin{bmatrix}-\epsilon_{33}\nabla_2 & -\epsilon_{15}\frac{\partial}{\partial\theta} & -\frac{\epsilon_{15}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\end{bmatrix}^T,\\
\boldsymbol{\chi} &= \begin{bmatrix}e_{33}\nabla_2 & e_{31}\nabla_2 & e_{31}\nabla_2 & e_{15}\frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{e_{15}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\Theta} & 0\end{bmatrix}^T
\end{aligned}\tag{26}$$

此外，弹性矩阵和压电性也可以表示为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c} &= \begin{bmatrix} c_{33} & c_{31} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_{66} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{C} &= \begin{bmatrix} C_{33} & C_{31} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{66} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{e} &= \begin{bmatrix} e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2e_{15} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{27}
$$

在上述表示中， e_{ij} 是压电矩阵中的常数，ϵ_{ij} 是介电常数， $\nabla_2 = r\frac{\partial}{\partial r}$ 和 c_{ij}、 C_{ij} 是弹性常数。

式（18）中的$\mathbf{Q}$ 为:

$$
\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta & -\cot\Theta & \nabla_2 + 2 & 0 & \csc\theta\frac{\partial}{\partial\Theta} \\ 0 & 0 & \csc\theta\frac{\partial}{\partial\Theta} & 2 & \nabla_2 & 2\cot\Theta \\ \nabla_2 + 1 & -1 & -1 & \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta & \csc\theta\frac{\partial}{\partial\Theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{28}
$$

模态函数 $\mathcal{Z}_1^n$ 和 $\mathcal{Z}_2^n$ 如下:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}_1^n &= \frac{\begin{vmatrix} S_n(1,3) & S_n(1,4) & S_n(1,5) & \frac{\omega}{c_{44}}(2n+1)\rho_f\varphi_0 i^{n+1} j_n(ka) \\ S_n(2,3) & S_n(2,4) & S_n(2,5) & 0 \\ S_n(4,3) & S_n(4,4) & S_n(4,5) & \frac{\varphi_0}{i\omega a}k(2n+1)\rho_f\varphi_0 i^n j_n'(ka) \\ T_n(6,3) & T_n(6,4) & T_n(6,5) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_n(1,3) & S_n(1,4) & S_n(1,5) & -\frac{\omega}{c_{44}}(2n+1)\rho_f\varphi_0 i^{n+1} h_n^{(1)}(ka) \\ S_n(2,3) & S_n(2,4) & S_n(2,5) & 0 \\ S_n(4,3) & S_n(4,4) & S_n(4,5) & -\frac{\varphi_0}{i\omega a}k(2n+1)\rho_f\varphi_0 i^n h_n^{(1)'}(ka) \\ T_n(6,3) & T_n(6,4) & T_n(6,5) & 0 \end{vmatrix}}; \quad n > 0 \\
\mathcal{Z}_2^n &= \frac{\begin{vmatrix} S_n(1,3) & S_n(1,4) & S_n(1,5) & 0 \\ S_n(2,3) & S_n(2,4) & S_n(2,5) & 0 \\ S_n(4,3) & S_n(4,4) & S_n(4,5) & 0 \\ T_n(6,3) & T_n(6,4) & T_n(6,5) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_n(1,3) & S_n(1,4) & S_n(1,5) & -\frac{\omega}{c_{44}}(2n+1)\rho_f\varphi_0 i^{n+1} h_n^{(1)}(ka) \\ S_n(2,3) & S_n(2,4) & S_n(2,5) & 0 \\ S_n(4,3) & S_n(4,4) & S_n(4,5) & -\frac{\varphi_0}{i\omega a}k(2n+1)\rho_f\varphi_0 i^n h_n^{(1)'}(ka) \\ T_n(6,3) & T_n(6,4) & T_n(6,5) & 0 \end{vmatrix}}; \quad n > 0
\end{aligned} \tag{29}
$$

其中， $S_n(i,\ j)$ 是全局结构传递矩阵 [43] 的元素，其单层情形的推导见下一附录。此外， $\mathcal{Z}_1^0$ 和 $\mathcal{Z}_2^0$ 的表达式与 $n > 0$ 所示的表达式类似，但应去掉每个行列式的第二行 [43]。

C. 球体弹性理论的一般理论的公式推导

在本附录中，我们回顾一种利用完整弹性方程求解弹性球壳散射系数的方法。对于球对称各向同性介质，其控制运动方程、本构方程和应变-位移关系可表示为 [64]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma\sigma} &= \rho\ddot{\boldsymbol{u}}\\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{CS}\\ \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{Hu}\end{aligned} \tag{30}$$

其中，$\boldsymbol{u} = [u_r, u_\theta, u_\phi]$为位移向量，$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\phi}, \sigma_{\theta\phi}]$为应力向量，$\boldsymbol{S} = [S_{rr}, S_{\theta\theta}, S_{\phi\phi}, S_{r\theta}, S_{r\phi}, S_{\theta\phi}]$ 为应变向量，$\boldsymbol{C}$ 为各向同性材料的刚度矩阵，该矩阵有 12 个非零元素，且仅有 2 个独立变量。矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 众所周知，为简洁起见，此处不再赘述 [65, 66]。在当前理论中，位移分为两类。第一类中，径向位移和膨胀均为零；第二类中，位移的径向旋度为零。为降低当前偏微分方程的阶数并减弱其耦合，引入一种变量代换方法，以新的函数替代位移和两个剪应力，这些新函数称为 w，g，ψ，σ_1和 σ_2 [65]的位移势和应力势：

$$\begin{aligned} u_r = w, \quad u_\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} - \frac{\partial g}{\partial\theta}, \quad u_\phi = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial\phi} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\\ \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\phi} - \frac{\partial\sigma_2}{\partial\theta}, \quad \sigma_{r\phi} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_2}{\partial\phi} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{31}$$

利用引入的变量代换，所有其他项，如 $\sigma_{\theta\theta}$、$\sigma_{\theta\phi}$ 和 $\sigma_{\phi\phi}$，都可以用新变量重新表示。还可以利用当前几何结构中的对称性，将所有变量展开为球谐函数，例如：

$$\psi(r) = \sum_n \psi^n P_n(\cos\theta) \tag{32}$$

以消去所有角向偏导数。经过一番繁杂的推导，可得到两组归一化一阶常微分方程，如下：

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\boldsymbol{v}_1^n(\xi,\omega) &= \boldsymbol{m}_1^n\boldsymbol{v}_1^n(\xi,\omega)\\ \frac{d}{d\xi}\boldsymbol{v}_2^n(\xi,\omega) &= \boldsymbol{m}_2^n\boldsymbol{v}_2^n(\xi,\omega)\end{aligned} \tag{33}$$

其中，$n =$(1、2、.....)、$\boldsymbol{v}_1^n = [\sigma_1^n, \psi^n]$、$\boldsymbol{v}_2^n = [\sigma_{rr}^n, \sigma_2^n, g^n, w^n]^T$、$\xi = r/a$和 a是壳体的外半径。对于$n = 0$，由于式 (31) 中的场变量只能通过 ψ、g、σ_1和 σ_2的导数来定义，因此不失一般性，可将它们的零模态系数视为零，式 (34) 中的两个方程便简化为：

$$\frac{d}{d\xi}\boldsymbol{v}_2^0(\xi,\omega) = \boldsymbol{m}_1^0\boldsymbol{v}_2^0(\xi,\omega) \tag{34}$$

其中，$\boldsymbol{v}_2^n = \left[\sigma_{rr}^0, w^0\right]^T$。对于自由振动壳体，或受入射波冲击而产生辐射的壳体等各种情形，式（34）中的常微分方程都可以通过多种方法求解。这里，我们采用诺伊曼级数法来求解当前常微分方程组的基矩阵 [67, 68]。根据泰勒展开，并假设所有变量在弹性壳体中连续，可写出如下表达式：

$$\boldsymbol{v}_i^n(\xi) = \boldsymbol{v}_i^n(0) + \frac{\boldsymbol{v}_i^{n'}(0)}{1!}\xi + \frac{\boldsymbol{v}_i^{n''}(0)}{2!}\xi^2 + ... \tag{35}$$

其中，$i = 1$，2，该表达式表示 $\boldsymbol{v}_i^n$在 $r = 0$相邻点处的值，例如 $r = \xi$，所有导数均可由方程（34）求得。为使该方法更好地收敛，我们将整个壳体划分为相邻的层压层，因此可写为：

$$\boldsymbol{v}_i^n(\xi = \frac{pd}{a} - \frac{b}{a}) = \boldsymbol{S}_i^n\boldsymbol{v}_i^n(\xi = \frac{b}{a}) \tag{36}$$

其中， b 为壳体的内半径， p 为层压层的数量， d 为层压层的宽度，$\boldsymbol{S}_i^n = \Pi_{j=1}^p \boldsymbol{A}_{ij}^n(\xi_j)$和 $\boldsymbol{A}_{ij}^n(\xi) = exp(\xi \boldsymbol{m}_i^n)$ [68]。对于单个弹性层，可考虑以下边界条件： $\sigma_2(r = a,\ b) = \sigma_1(r = a,\ b) = 0$, $\sigma_{rr}(r = a) = -p_f(r = a)$ $\sigma_{rr}(r = b) = 0$, $w(r = a) = \frac{v_f}{-i\omega}$，其中 p_f和 v_f分别为流体的总压力场和速度。对于本文中的压电弹性结构，应在弹性层与环境的界面、两层之间以及压电层的内表面施加适当的边界条件。具体如下：I. 压电层/弹性层内外表面上无切向应力分量（$\sigma_2(r = a) = \Sigma_2(r = c) = 0$）；II. 内外表面的法向应力分量连续（$\sigma_{rr}(r = a) = -P$, $\Sigma_{rr}(r = c) = 0$），其中 P 为流体的总法向压力；III. 压电层与弹性层界面处的牵引力和位移向量连续（$r = b$）；IV. 弹性层与流体界面处，流体中的速度法向分量与固体中的速度法向分量连续（$r = a$）。

D. 材料属性

本附录列出了弹性材料和PZT4层的材料属性。对于PZT4层，$\rho_p = 7500$ Kg/m^3、 $C_{11} = 139$ GPa、 $C_{12} = 78$ GPa、 $C_{13} = 74.3$ GPa、 $C_{33} = 115$ GPa、 $C_{44} = 25.6$ GPa、 $C_{66} = 30.5$ GPa、 $\epsilon_{11} = 650\ 10^{-11}$F/m、 $\epsilon_{33} = 560\ 10^{-11}$F/m。对于所用的弹性材料， $\rho_p = 7850$ Kg/m^3、 $E = 207$ GPa，以及 $\nu = 0.29$。

参考文献

[1] G. Torr, 《声辐射力》, 《美国物理学杂志》52, 402（1984）。[2] V. Garc´es-Ch´avez、D. Roskey、M. D. Summers、H. Melville、D. McGloin、E. M. Wright 和 K. Dholakia, 《贝塞尔光束中的光学悬浮》, 《应用物理快报》85, 4001（2004）, https://doi.org/10.1063/1.1814820。[3] Y. Meng、X. Li、Z. Liang、J. Ng 和 J. Li, 《单个入射平面波实现声牵引》, 《物理评论应用》14, 014089（2020）。[4] D. Foresti、N. Bjelobrk、M. Nabavi 和 D. Poulikakos, 《线聚焦声悬浮用于粒子非接触运输的研究》, 《应用物理学杂志》109, 093503（2011）。[5] M. Lim、A. Souslov、V. Vitelli 和 H. Jaeger, 《超声悬浮颗粒筏的动力学》, 载于 *APS March Meeting Abstracts* 2019 2019 59 007 , 第（ ）卷，第 A – 页。[6] M. X. Lim、A. Souslov、V. Vitelli 和 H. M. Jaeger, 《声力与主动涨落促使悬浮颗粒物质形成团簇》, 《自然·物理》15, 460（2019）。[7] A. Haake 和 J. Dual, 《利用表面波激发的超声场定位微小粒子》, 《超声学》42, 75（2004）。[8] O. Brzobohat`y、V. Kar´asek、M. ˇSiler、L. Chv´atal、T. ˇCi˘zm´ar 和 P. Zem´anek, 《利用“牵引光束”实现光学输运、分选和自组装的实验演示》, 《自然·光子学》7, 123（2013）。[9] A. Marzo、M. Caleap 和 B. W. Drinkwater, 《具有可调轨道角动量、用于捕获米氏粒子的声学虚拟涡旋》, 《物理评论快报》120, 044301（2018）。[10] Y. Liu 和 J. Hu, 《驻波超声场泄漏对粒子的捕获》, 《应用物理学杂志》106, 034903 2009（ ）。[11] C. R. Courtney、C. E. Demore、H. Wu、A. Grinenko、P. D. Wilcox、S. Cochran 和 B. W. Drinkwater, 《利用灵巧声镊独立捕获和操控微粒》, 《应用物理快报》104, 154103（2014）。[12] A. Ozcelik、J. Rufo、F. Guo、Y. Gu、P. Li、J. Lata 和 T. J. Huang, 《面向生命科学的声镊》, 《自然·方法》15, 1021（2018）。[13] D. G. Grier, 《光学操控领域的一场革命》, 《自然》424, 810（2003）。[14] M. Rajabi、H. Khodavirdi 和 A. Mojahed, 《主动球形载体的声学操控》, 《超声学》105, 106112（2020）。[15] F. Guo、Z. Mao、Y. Chen、Z. Xie、J. P. Lata、P. Li、L. Ren、J. Liu、J. Yang、M. Dao、S. Suresh 和 T. J. Huang, 《利用表面声波对单细胞进行三维操控》, 《美国国家科学院院刊》113, 1522（2016）, https://www.pnas.org/content/113/6/1522.full.pdf。[16] L. V. King, 《球体上的声辐射压》, 《伦敦皇家学会会刊：A辑——数学与物理科学》147, 212（1934年）。[17] T. Hasegawa 和 K. Yosioka, 《固体弹性球所受的声辐射力》, 《美国声学学会杂志》46, 1139（1969）。[18] T. Hasegawa, 《球体声辐射压两种解法的比较》, 《美国声学学会杂志》61, 1445（1977）。

[19] P. J. Westervelt, 《声波引起的稳态力理论》, 《美国声学学会杂志》23, 312（1951）。[20] Y. A. Ilinskii、E. A. Zabolotskaya、B. C. Treweek 和 M. F. Hamilton, 《软弹性介质中弹性球所受的声辐射力》, 《美国声学学会杂志》144, 568（2018）。[21] G. T. Silva, 《任意波前声束所施加辐射力的表达式（l）》, 《美国声学学会杂志》130, 3541（2011）。[22] G. T. Silva, 《无黏流体中吸收性可压缩粒子所受的声辐射力和力矩》, 《美国声学学会杂志》136, 2405（2014）。[23] G. T. Silva 和 B. W. Drinkwater, 《任意波前波束对小型椭球刚性粒子施加的声辐射力：行波平面波和驻波平面波示例》, 《美国声学学会杂志》144, EL453（2018）。[24] T. Kozuka、K. Yasui、T. Tuziuti、A. Towata 和 Y. Iida, 《用于空气中操控的声驻波场》, Japanese Journal of Applied Physics 47, 4336（2008）。[25] T. Hasegawa、K. Saka、N. Inoue 和 K. Matsuzawa, 《平面行波声场中实心圆柱体所受的声辐射力》, 《美国声学学会杂志》83, 1770（1988）。[26] E. B. Lima、J. P. Le˜ao-Neto、A. S. Marques、G. C. Silva、J. H. Lopes 和 G. T. Silva, 《声波与椭球粒子的非线性相互作用：辐射力和辐射力矩效应》, 《物理评论应用》13, 064048（2020）。[27] T. S. Jerome、Y. A. Ilinskii、E. A. Zabolotskaya 和 M. F. Hamilton, 《可压缩椭球体上的声辐射力矩》, 《美国声学学会杂志》149, 2081（2021）。[28] P. L. Marston, 《贝塞尔光束对球体的轴向辐射力及其方向反转》, 《美国声学学会杂志》120, 3518（2006）, https://doi.org/10.1121/1.2361185。[29] L. Zhang 和 P. L. Marston, 《贝塞尔声束对球体产生负辐射力的几何解释》, Phys. Rev. E 84, 035601（2011）。[30] L. Zhang 和 P. L. Marston, 《一般无衍射波束施加的轴向辐射力》, 《美国声学学会杂志》131, EL329（2012）, https://doi.org/10.1121/1.3693387。[31] S. Xu、C. Qiu 和 Z. Liu, 《两束交叉平面波产生的横向稳定声牵引力》, EPL（欧洲物理快报）99, 44003（2012）。[32] P. L. Marston, 《贝塞尔光束中实心球和壳体上的负轴向辐射力》, 《美国声学学会杂志》122, 3162（2007）。[33] M. Gong、Y. Qiao、Z. Fei、Y. Li、J. Liu、Y. Mao、A. He 和 X. Liu, 《无衍射声束在特定区域产生负辐射力》, AIP Advances 11, 065029（2021）。[34] M. Gong、Y. Qiao、J. Lan 和 X. Liu, 《基于 X 波的远场粒子操控方案》, Physics of Fluids 32, 117104 2020（）。[35] Y. Meng、X. Li、Z. Liang、J. Ng 和 J. Li, 《单个入射平面波实现声牵引》, Phys. Rev. Applied 14, 014089 2020（）。[36] J. Chen、J. Ng、Z. Lin 和 C. Chan, 《光牵引力》, 《自然·光子学》5, 531（2011）。[37] P. L. Marston 和 L. Zhang, 《线性无源散射中负吸收功率的不合理后果：对辐射力和力矩的影响》, 《美国声学学会杂志》139, 3139（2016）, https://doi.org/10.1121/1.4954044。[38] L. Zhang 和 P. L. Marston, 《利用复相移和动量传递截面表示声辐射力》, 《美国声学学会杂志》140, EL178（2016）, https://doi.org/10.1121/1.4959966。[39] A. Mizrahi 和 Y. Fainman, 《增益介质结构上的负辐射压》, Opt. Lett. 35, 3405（2010）。[40] S. Sukhov 和 A. Dogariu, 《负非保守力：作用于任意物体的光学“牵引光束”》, Phys. Rev. Lett. 107, 203602（2011）。[41] H. Khodavirdi、A. A. Mokhtari 和 A. Srivastava, 《开放系统视角下的机械波散射》, Mechanics of Materials 172, 104399（2022）。[42] A. Mojahed 和 M. Rajabi, 《自驱动游动体：超声驱动的球形模型》, 《超声学》86, 1（2018）。[43] M. Rajabi 和 A. Mojahed, 《主动球形载体的声学操控：负辐射力的产生》, Annals of Physics 372, 182（2016）。[44] M. Rajabi 和 A. Mojahed, 《振荡球体的声学操控：轴向负声辐射力的出现》, 《声与振动杂志》383, 265（2016）。[45] M. Rajabi 和 A. Mojahed, 《利用内部球形振荡器驱动液体填充球壳的声学操控》, Acta Acustica United with Acustica 103, 210（2017）。[46] M. Rajabi 和 A. Mojahed, 《声学操控：贝塞尔光束与主动载体》, Physical Review E 96, 043001（2017）。[47] M. Rajabi 和 A. Mojahed, 《声辐射力控制：脉动球形载体》, 《超声学》83, 146（2018）。[48] H.-Q. Yu、J. Yao、D.-J. Wu、X.-W. Wu 和 X.-J. Liu, 《激光照射在弹性球上诱发的负声辐射力》, Physical Review E 98, 053105（2018）。[49] H.-Q. Yu、J. Yao、D.-J. Wu、X.-W. Wu 和 X.-J. Liu, 《激光照射调制平面行波中作用于液球的声辐射力》, AIP Advances 9, 045121（2019）。[50] S. A. Seah、B. W. Drinkwater、T. Carter、R. Malkin 和 S. Subramanian, 《通信：空气中毫米级物体的灵巧超声悬浮》, IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control 61, 1233（2014）。[51] J. Happel 和 H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*, 第1卷（Springer Science & Business Media，2012）。

[52] E. Skudrzyk, *The foundations of acoustics: basic mathematics and basic acoustics*（Springer Science & Business Media，2012）。[53] M. C. Junger 和 D. Feit, *Sound, structures, and their interaction*，第 225 卷（麻省理工学院出版社，剑桥，马萨诸塞州，1986）。[54] A. Erdelyi、W. Magnus、F. Oberhettinger、M. abramowitz 和 ia stegun，数学函数手册（1972）。[55] T. Hasegawa、Y. Hino、A. Annou、H. Noda、M. Kato 和 N. Inoue，作用于球壳和圆柱壳的声辐射压，《美国声学学会杂志》**93**，154（1993），https://doi.org/10.1121/1.405653。[56] G. T. Silva，任意波前声束施加的辐射力表达式（l），《美国声学学会杂志》**130**，3541（2011），https://doi.org/10.1121/1.3652894。[57] M. Rajabi 和 A. Mojahed，声辐射力控制：脉动球形载体，《超声学》**83**，146（2018），应用于材料科学的超声学进展。[58] C. Scandrett，浸没球壳的散射与主动声学控制，《美国声学学会杂志》**111**，893（2002），https://doi.org/10.1121/1.1428749。[59] W. Chen、L. Wang 和 Y. Lu，径向极化功能梯度压电陶瓷空心球的自由振动，《声与振动杂志》**251**，103（2002）。[60] W. Chen、Y. Lu、G. Ye 和 J. Cai，机械和电载荷作用下功能梯度压电陶瓷空心球中的三维电弹性场，《应用力学档案》**72**，39（2002）。[61] W. Chen，非均质球形各向同性压电弹性体的振动理论，《声与振动杂志》**236**，833（2000）。[62] Y. Tanigawa，非均质结构材料的一些基本热弹性问题，《应用力学评论》**48**，287（1995），https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanicsreviews/article-pdf/48/6/287/5437291/287 1.pdf。[63] R. Johnson，流体动力学手册。1998。[64] C. Scandrett，浸没球壳的散射与主动声学控制，《美国声学学会杂志》**111**，893（2002）。[65] H.-C. Hu *et al.*，关于球对称各向同性介质弹性理论的一般理论，《中国科学》**3**，247（1954）。[66] H. Ding 和 W. Chen，可压缩流体介质中浸没弹性球形各向同性空心球的固有频率，《声与振动杂志》**192**，173（1996）。[67] W. E. Boyce、R. C. DiPrima 和 D. B. Meade, *Elementary differential equations and boundary value problems*（约翰·威立父子出版公司，2021）。[68] W. Chen，层合压电陶瓷空心球的自由振动分析，《美国声学学会杂志》**109**，41（2001）。