arXiv:2302.00621v1 [math.NA] 1 Feb 2023

一种无需稳定化的一阶虚单元法

Stefano Berrone、Andrea Borio、Francesca Marcon、Gioana Teora *

摘要

本文介绍一种新的虚单元法（VEM），该方法基于通常的增强型一阶 VEM 空间，无需任何稳定化项。新方法采用经过修改的离散扩散算子形式，在保留微分算子所有性质的同时确保稳定性。

1 引言

近年来，在虚单元法（VEM）领域，人们越来越关注无需稳定化项的双线性形式的构造。在 [4], 中，提出并分析了一种最低阶无稳定化格式，证明可以基于适当高次多项式空间中虚基函数的多项式投影，构造强制性双线性形式。在 [5], 中，将所提出的格式与标准 VEM 进行了比较，结果表明，省去稳定化算子可以降低误差，并有助于强各向异性问题的收敛。

本文提出了对 [4], 中所引入方案的一种变体，该变体充分利用该文中发展的理论，选取能够保证强制性的尽可能小的多项式空间。

考虑一个有界开域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 以及以下标准的对流-扩散-反应问题：求 $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ 使得

$$(\mathcal{K}\nabla u, \nabla v)_\Omega + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u, v)_\Omega + (\gamma u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,, \qquad (1)$$

其中 $(\cdot,\cdot)_\Omega$ 表示 $\mathrm{L}^2(\Omega)$ 内积。为保证问题适定，我们对系数作出标准假设：所有系数均属于 $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$，$\mathcal{K}$ 是对称一致正

*作者均为 INdAM-GNCS 成员。作者谨此感谢 INdAM-GNCS 2022 年项目、MIUR“卓越系”计划项目（2018–2022），项目编号 CUP:E11G18000350001，以及 PRIN 2020 项目（编号 20204LN5N5 003）提供的部分经费支持。

定张量，$\mathrm{div}\boldsymbol{\beta} = 0$，且 $\inf_{x\in\Omega}\gamma(x) \geq 0$。这里我们考虑齐次狄利克雷边界条件，但也可以考虑更一般的边界条件。

2 局部空间与投影

我们考虑一族 Ω 的多边形剖分 $\mathcal{M}_h$，满足以下标准网格假设：$\exists\kappa > 0$，使得 $\forall E \in \mathcal{M}_h$，$E$ 关于半径为 $\rho \geq \kappa h_E$ 的球是星形的，并且 $\forall e \in \mathcal{E}_E$，其中 $\mathcal{E}_E$ 是 E 的边集，$|e| \geq \kappa h_E$，其中 h_E 表示 E 的直径。对于任意给定的 $E \in \mathcal{M}_h$，我们定义以下标准虚单元空间 [1]:

$$\mathcal{V}_h^E = \Big\{ v \in \mathrm{H}^1(E) \colon \Delta v \in \mathbb{P}_1(E)\,,\, \gamma^{\partial E}(v) \in C^0(\partial E)\,,\, \gamma^e(v) \in \mathbb{P}_1(e)\ \forall e \in \mathcal{E}_E, \\ \Big(v - \Pi_1^{\nabla,E} v, p\Big)_E = 0\ \forall p \in \mathbb{P}_1(E) \Big\}\,,$$

其中 $\gamma^\omega(v)$ 表示 v 在 ω 上的迹，且 $\Pi^{\nabla}_{,1}{}^{E} v \in \mathbb{P}_1(E)$ 的定义满足 $\Big(\nabla v - \nabla\Pi_1^{\nabla,E} v, \nabla p\Big)_E = 0\ \forall p \in \mathbb{P}_1(E)$ 和 $\int_{\partial E} v = \int_{\partial E} \Pi^{\nabla}_{,1}{}^{E} v$。$\mathcal{V}_h^E$ 的自由度是多边形 E 顶点处函数的取值。

对于任意给定的 $\ell \in \mathbb{N}$，我们定义以下 $\ell+1$ 次调和多项式空间:

$$\mathbb{H}_{\ell+1}(E) = \left\{ p \in \mathbb{P}_{\ell+1}(E) : \Delta p = 0, \int_E p = 0 \right\}.$$

令 $\nabla\mathbb{H}_{\ell+1}(E)$ 为 $\mathbb{H}_{\ell+1}(E)$ 中函数的梯度所构成的空间。我们定义投影算子 $\Pi^{\mathbb{H}}_{,\ell}{}^{E}$: $\big[\mathrm{L}^2(E)\big]^2 \to \nabla\mathbb{H}_{\ell+1}(E)$，使得 $\forall \boldsymbol{v} \in \big[\mathrm{L}^2(E)\big]^2$，

$$\Big(\Pi_\ell^{\mathbb{H},E}\boldsymbol{v}, \nabla p_{\ell+1}\Big)_E = (\boldsymbol{v}, \nabla p_{\ell+1})_E \quad \forall p_{\ell+1} \in \mathbb{H}_{\ell+1}(E)\,. \tag{2}$$

注意，由于根据定义 $\mathbb{H}_{\ell+1}(E)$ 不包含常数，因此式（2）中的 $\nabla p_{\ell+1}$ 永远不为零，且 $\dim\nabla\mathbb{H}_{\ell+1}(E) = \dim\mathbb{H}_{\ell+1}(E) = 2\ell+2$。此外，注意 $[\mathbb{P}_0(E)]^2 \subseteq \nabla\mathbb{H}_{\ell+1}(E)$，特别是 $[\mathbb{P}_0(E)]^2 = \nabla\mathbb{H}_1(E)$。

现在，给定函数 $v_h \in \mathcal{V}_h^E$，考虑计算$\Pi^{\mathbb{H}}_{,\ell}{}^{E}\nabla v_h$的问题。设 $\{h_i, i = 1,\ldots,2\ell+2\}$ 为 $\mathbb{H}_{\ell+1}(E)$ 的一组基函数。则 $\Pi^{\mathbb{H}}_{,\ell}{}^{E}\nabla v_h = \sum_{j=1}^{2l+2} d_j \nabla h_j$，其中数值 d_j 可通过求解以下方程组得到:

$$\sum_{j=1}^{2l+2} (\nabla h_j, \nabla h_i)_E\, d_j = (\nabla v_h, \nabla h_i)_E \quad \forall i = 1,\ldots,2\ell+2\,. \tag{3}$$

右端项可以计算，因为我们知道边界上的 v_h 解析表达式，并回想起 $\Delta h_i = 0$，再应用格林公式：$(\nabla v_h,\ \nabla h_i)_E = \left(v_h,\ \frac{\partial h_i}{\partial n}\right)_{\partial E}$，$\forall i = 1,\ \ldots\ldots,\ 2\ell+2$. 在每条边上，右端项是一个 $\ell+1$ 次多项式的积分，可以使用$\lceil \frac{\ell+2}{2} \rceil$ 个高斯求积节点精确计算。对于式（3）的左端项，与二维求积公式相比，一种降低计算成本的方法是注意到 $(\nabla h_j,\ \nabla h_i)_E = \left(h_j,\ \frac{\partial h_i}{\partial n}\right)_{\partial E}$，也就是一个分片 $2\ell+1$ 次多项式的积分。因此，可以在每条边士使用$\ell+1$个高斯求积节点计算该积分，将函数求值次数减少到 $\sim N_E\ell$。

3 离散变分形式

设 $\mathcal{V}_h = \{v_h \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\colon\ v_h \in \mathcal{V}_h^E\ \forall E \in \mathcal{M}_h\}$，并令 $\ell_E \geq 0$ 给定$\forall E \in \mathcal{M}_h$，不同多边形之间可以有所不同。于是，我们寻求满足下式的 $u_h \in \mathcal{V}_h$

$$\begin{aligned}\sum_{E\in\mathcal{M}_h} \left(\mathcal{K}\Pi_{\ell_E}^{\mathbb{H},E}\nabla u_h, \Pi_{\ell_E}^{\mathbb{H},E}\nabla v_h\right)_E + \left(\boldsymbol{\beta}\cdot\Pi_{\ell_E}^{\mathbb{H},E}\nabla u_h, \Pi_0^{0,E}v_h\right)_E \\ + \left(\gamma\Pi_0^{0,E}u_h, \Pi_0^{0,E}v_h\right)_E = \sum_{E\in\mathcal{M}_h}\left(f, \Pi_0^{0,E}v_h\right)_E \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h\,,\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\Pi^{0,E}_0$ 是到常数空间上的 L^2 投影算子。下面的结果为式（4）的适定性提供了关键要素。

定理1。设 $\forall E \in \mathcal{M}_h,\ \ 2\ell_E + 2 \geq N_E - 1,\ \ N_E$ 为 E的顶点数。则存在 α^*、$\alpha_* > 0$，它们取决于网格正则性参数 κ 以及 $\mathcal{K}$的局部变化，使得 $\forall u_h \in \mathcal{V}_h,\ \forall E \in \mathcal{M}_h$,

$$\alpha_* \left\|\sqrt{\mathcal{K}}\nabla u_h\right\|_E \leq \left\|\sqrt{\mathcal{K}}\Pi_{\ell_E}^{\mathbb{H},E}\nabla u_h\right\|_E \leq \alpha^* \left\|\sqrt{\mathcal{K}}\nabla u_h\right\|_E .$$

证明。 该结果直接由 [4]中建立的理论得到。 □

定理1为式（4）的扩散项具有强制性提供了一个充分条件。随后，采用与 [1]中相同的论证即可得到离散问题的适定性。利用 [1, 4]中的技巧，可以证明最优阶先验误差估计。特别地，我们得到

$$\left\|\sqrt{\mathcal{K}}\nabla(u-u_h)\right\|_\Omega = O(h)\,, \qquad \|u-u_h\|_\Omega = O(h^2)\,.$$

注 1。次数为 $\ell+1$ 的调和多项式空间的一组基可以用闭式表示，其形式由递推关系给出（见 *[6]*）。请注意，在实际应用中，可以忽略 $\mathbb{H}_{\ell+1}(E)$ 中的零积分要求，因为在基函数中强制要求零积分并不会改变所需计算的结果。

4 数值结果

在本节中，我们提出了一些数值实验来验证我们的方法。首先，我们给出数值证据，以验证局部双线性型的强制性；然后，我们展示一些收敛性测试，以评估理论估计并比较误差。

$$e_0 = \frac{\sqrt{\sum_{E\in\mathcal{T}_h} \left\| u - \Pi_1^{\nabla,E} u_h \right\|_E^2}}{\|u\|_\Omega}, \quad e_1 = \frac{\sqrt{\sum_{E\in\mathcal{T}_h} \left\| \sqrt{\mathcal{K}} \left(\nabla u - \nabla \Pi_1^{\nabla,E} u_h \right)^2 \right\|_E}}{\left\| \sqrt{\mathcal{K}} \nabla u \right\|_\Omega}, \tag{5}$$

与标准虚单元法 [2] 所得到的结果相比。

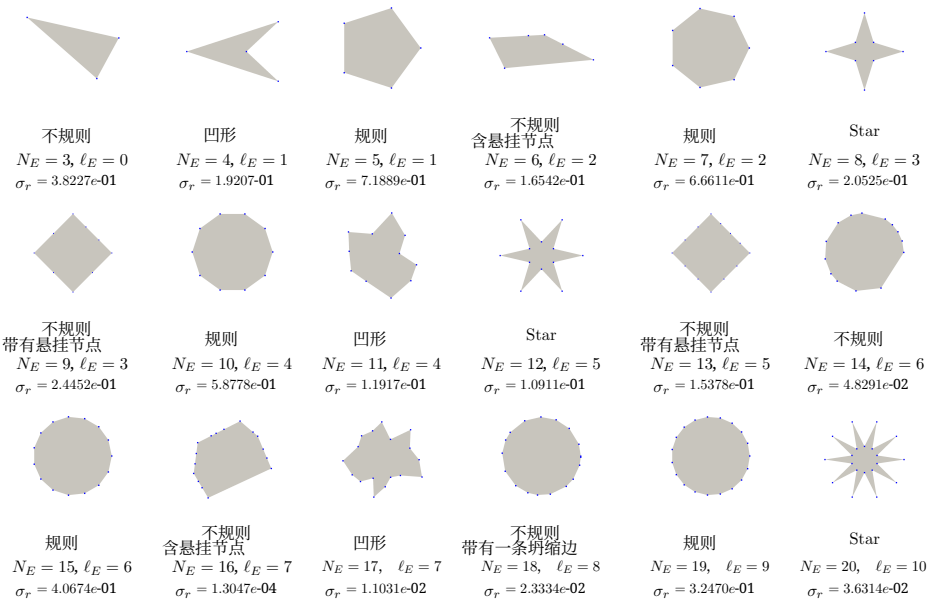
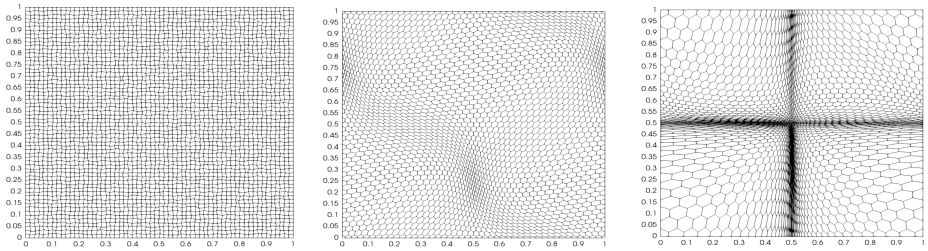


表1： σ_r 与不同类型多边形相关的单元刚度矩阵。

在第一个测试中，我们考虑一组具有不同几何特征的多边形，例如凹性、对称性和对齐边。对于每个多边形，根据定理1选择 ℓ_E ，我们评估离散扩散算子（4）的局部稳定性（$\mathcal{K} = 1$、 $\boldsymbol{\beta} = 0$和 $\gamma = 0$），方法是计算刚度矩阵的第二小奇异值，记为 σ_r。表1所示结果证实了该方法的稳定性，并表明其对几何复杂性的鲁棒性良好，因为该值 σ_r始终与零保持明显距离（刚度矩阵的最小奇异值始终为零）。

在第二个测试中，我们通过绘制相对误差 e_0 和 e_1 (5)，比较无稳定化虚单元法（简称 SFVEM）与采用 *dofi-dofi* 稳定化项的标准 VEM（简称 VEM） [1],



(a) (b) (c)

图1：数值实验中使用的网格。左：扭曲的正方形网格。中：扭曲的沃罗诺伊网格。右：高度扭曲的沃罗诺伊网格。

并计算它们在三组扭曲及高度扭曲网格上的收敛率。每组网格的第四次细化结果如图1所示。为了展示 SFVEM 相较于标准 VEM 的优势，如 [5]，中所建议的，我们考虑一个各向异性扩散张量 $\mathcal{K}$。设 Ω 为单位正方形，考虑系数为

$$\mathcal{K} = \mathbf{G}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.0e\text{-}09\end{bmatrix}\mathbf{G}^T, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}(x,y) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1(x,y)\\ \boldsymbol{\beta}_2(x,y)\end{bmatrix},$$

以及 $\gamma(x,\ y) = x(1-x)y(1-y)$，其中 $\mathbf{G}$ 是吉文斯旋转矩阵，且$\theta \in \mathbb{R}$。对于 R_1、$R_2 \in [0,1]$，我们定义 [3]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1(x,y;R_1) &= 250000x^4y^3(R_1-x)(1-x)^4\\ &\quad \left[4R_2\left(1-5y+9y^2-7y^3+2y^4\right)-5y+24y^2-42y^3+32y^4-9y^5\right],\\ \boldsymbol{\beta}_2(x,y;R_2) &= -\boldsymbol{\beta}_1(y,x;R_2),\end{aligned}$$

并且固定 $R_1 = 0.9$、$R_2 = 0.3$ 和 $\theta = \frac{\pi}{6\sigma}$ 我们选择 $f(x,\ y)$，使得精确解为 $u(x,\ y) = \boldsymbol{\beta}_1(x,\ y)$。

在图2中，我们绘制了误差 e_0 和 e_1 (5) 的收敛曲线，以及它们在 VEM 和 SFVEM 中的取值之比（每幅图的右轴）。图例给出了误差的收敛率（分别为α_0 和 α_1）。就 e_1 误差而言，两种方法的性能几乎相当，见图2(d)-2(f)。而在图2(a)-2(c)中，SFVEM 在所有网格上都能轻松达到渐近收敛率，并且 e_0 误差更小；相比之下，VEM 在高度扭曲的沃罗诺伊网格上仍处于预渐近阶段，其误差约为 SFVEM 的两到三倍。

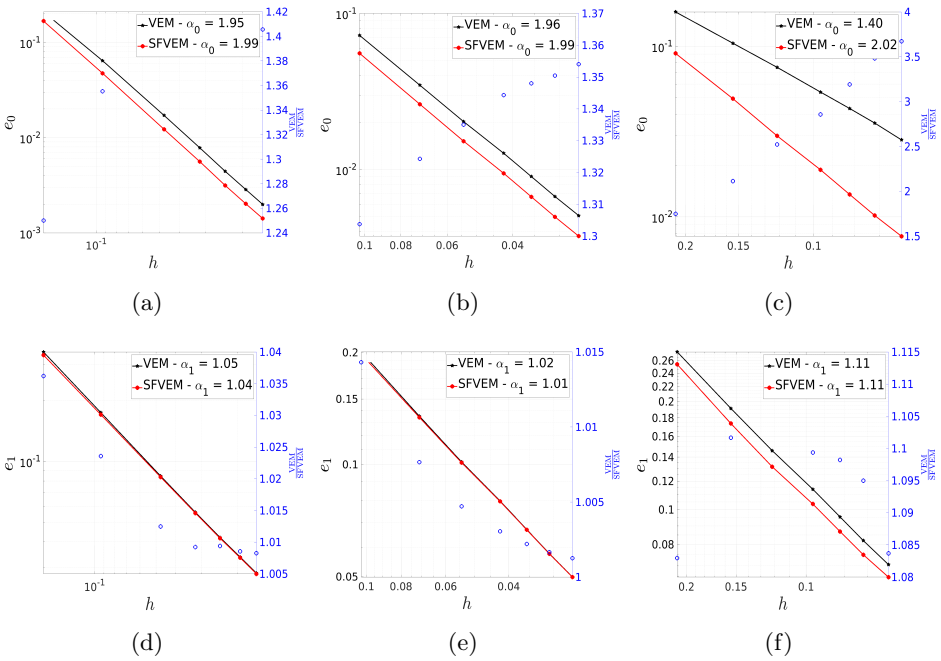


图2： h变化时， e_0 和 e_1 (5)的误差表现。左：扭曲的正方形网格。中：扭曲的沃罗诺伊网格。右：高度扭曲的沃罗诺伊网格。

5 结论

我们提出了一种新的一阶无稳定化虚拟元方法，该方法利用对调和多项式的投影构造自稳定双线性型。数值结果表明，该方法具有良好的稳定性和最优收敛阶。

参考文献

[1] L. Beir˜ao da Veiga、F. Brezzi、L. D. Marini 和 A. Russo. 多边形网格上一般二阶椭圆问题的虚拟元方法. 数学模型与应用科学方法, 26(04):729–750, 2015.[2] L. Beir˜ao da Veiga 和 G. Manzini. 椭圆问题虚单元法的残差型后验误差估计. *ESAIM: M2AN*, 49(2):577–599, 2015.[3] S. Berrone. 一般边界条件下 Oseen 方程后验误差估计的鲁棒性. 载于 数值数学与高级应用, 第657–668页. Springer Milan, 2003.[4] Stefano Berrone、Andrea Borio 和 Francesca Marcon. 泊松方程的最低阶无稳定化虚拟元方法，2021.[5] Stefano Berrone、Andrea Borio 和 Francesca Marcon. 各向异性椭圆问题中标准虚拟元与无稳定化虚拟元的比较. 应用数学快报, 129:107971, 2022.[6] J. Blair Perot 和 Chris Chartrand. 一种用于多边形的拟态方法. 计算物理学杂志, 424(C):109853, 2021.