基于后验参考映射、采用全局误差准则的有损量子信源编码

Touheed Anwar Atif、Mohammad Aamir Sohail 和 S. Sandeep Pradhan，密歇根大学电气工程与计算机科学系，美国密歇根州安娜堡，邮编 48109。

电子邮箱：touheed@umich.edu，mdaamir@umich.edu，pradhanv@umich.edu

arXiv:2302.00625v1 [quant-ph] 1 Feb 2023

摘要

我们研究有损量子信源编码问题，其任务是将给定量子信源压缩至低于其冯·诺依曼熵的码率。受经典情形下率失真问题与信道编码问题之间对偶关系的启发，我们提出了有损量子信源编码问题的一种新表述。该表述与现有量子率失真理论有两点不同。首先，我们要求压缩后的量子信源在重构时满足全局误差约束，而非标准率失真框架中采用的逐样本局部误差准则。其次，我们不采用失真可观测量，而是使用反向量子信道这一概念（我们称之为“后验参考映射”）来度量重构误差。基于这些设定，我们用给定后验参考映射的单字母相干信息刻画有损量子信源编码问题的渐近性能极限。我们展示了一种协议，可按指定码率进行编码和解码，并使重构满足给定的全局误差准则，从而达到渐近性能极限。该协议的构造通过将相干信息分解为两个 Holevo 信息量之差实现，其灵感来自此前关于量子通信问题的研究。为进一步支持这些发现，我们还为量子-经典和经典变体建立了类似的表述，并用相应定义的、类似于后验参考映射的信道所对应的单字母互信息量来表示渐近性能极限。我们还针对这三种表述给出了若干示例，并在可能的情况下阐明它们与标准率失真表述之间的联系。

I. 引言

从信息论的角度来看，一个基本问题是：渐近刻画压缩信源所需的码率，使其能够以某种可测量的程度恢复。量子信息论中的这类问题称为量子信源编码或量子数据压缩问题。在无损区域，Schumacher [1], [2] 证明，量子信源可以

以冯·诺依曼熵所给出的码率进行压缩，同时使重构与源状态之间的误差极小。该模型中的误差是针对整个块定义的，也称为块错误或全局错误。考虑块错误时，在无损区域还证明了一个强逆命题 [3], [4], 它指出，即使放宽渐近块错误概率不再要求（几乎）为零，也不可能实现任何低于冯·诺依曼熵的码率。

至于有损区域，其目标是在误差增加但仍受限的代价下降低码率，Barnum [5] 猜想最小相干信息可作为刻画渐近性能极限的候选量。推广经典率失真理论的表述， [6],Barnum 在 [5] 引入了一种局部失真准则，将基于原始信源的重构与参考系之间的边缘操作（偏迹）的平均逐符号纠缠保真度作为衡量标准。在 [7], Datta等人以纯化纠缠的形式获得了量子率失真函数的正则化表达式。此外，作者还提出了纠缠辅助量子率失真问题，并利用单字母表达式刻画了其渐近性能极限。Wilde等人进一步以正则化形成纠缠的形式细化了量子率失真函数的刻画，并将问题设置推广到包括 [8]辅助信息在内的各种场景。关于无记忆量子信道渐近模拟的研究 [9], [10] 已被证明有助于实现上述结果，尤其是纠缠辅助表述。 [11] 的作者提出了量子到经典率失真问题，并给出了单字母公式。 [12], [13] 考虑了量子态再分配任务的率失真版本，相关研究见 [14]。对一般混合量子源率失真框架的研究一直是 [15], [16]关注的重点。其他处理相关问题的工作包括 [17]–[23]。

在这项工作中，我们考虑有损量子信源编码问题的一种新表述，并刻画一个不大于冯·诺依曼熵的码率函数，同时允许重构中存在有界误差。我们采用全局误差准则，而非文献中研究的逐符号局部误差方法。我们考虑的问题不涉及编码器与解码器之间共享任何纠缠资源。我们通过以下观察来说明这一问题表述的动机。

量子率失真框架中的局部误差准则，源自 Shannon 的经典信源编码表述中相应的可加局部单字母失真准则 [6],，其中存在单字母刻画。考虑局部准则的动机，是无损源编码定理的强逆定理：该定理指出，即使将渐近块错误概率放宽到 $(0,1)$ [24,中的任意数值，熵界仍无法被突破1]定理 1。

在 [6], [24],信源编码问题与信道编码问题之间，人们发现了一种对偶关系。这两个问题可以从覆盖与打包的视角来理解。在这两个问题中，同一种信息度量，即互信息，刻画了渐近性能极限。经典-量子通信问题 [25], [26]与量子-经典信源编码问题 [11], [27], 之间也存在类似的对偶关系，两个问题的性能极限都可用单字母 Holevo 信息量来刻画 [28]。此后，相关研究在 [29]中得到进一步拓展。从这一角度看，在全量子情形下，众所周知，量子信道编码问题的渐近性能极限可由正则化相干信息刻画 [30]–[33]。Devetak 等人通过采用连贯的覆盖与打包方法，并将两者有机结合，给出了这一结果的证明；这一做法受到其关于私有信道容量问题的研究启发 [32]。正如 [30]所阐明的，相干信息可以从子空间打包的角度来理解。编码理论文献沿着这些思路对量子纠错码进行了广泛研究，例如量子汉明界 [34]。这引出了一个问题：为什么有损量子信源压缩问题中不存在基于相干信息的这类极限?

为了回答这个问题，我们进一步考察经典离散无记忆情形。我们发现，除了 Shannon 开创性地刻画率失真问题的工作 [6],[35], 之外，还有若干研究探讨了有损信源压缩问题。一个尤其受到关注的概念是反向信道 [24,问题 8.3], ，它刻画给定重构时信源的后验分布。 [36]–[38]研究了这一信道的结构。尽管将重构与信源联系起来、并实现率失真函数的前向信道不一定唯一，但由此得到的反向信道确实是唯一的。此外， [24,定理 2.3] 中的率失真可达性结果是通过构造一个错误概率较大的反向信道信道码，并将后者的编码器用作前者的解码器，反之亦然，从而证明的。为进一步凸显这种对偶性，受关于优良信道码输出统计的结果 [39], 启发， [40]证明了以下结论：任意率失真达成码对应的、给定重构向量时信源向量的 n字实际后验条件分布，在归一化散度意义下收敛于唯一的最小互信息反向信道条件分布的 n重乘积态。换言之，尽管编码器和解码器都是分块操作，但对于率失真达成码，所诱导的后验 n字信道在渐近极限下会变为离散无记忆信道。有关这一概念的进一步发展，参见 [41]–[44]。该信道在贝叶斯估计和检测理论中也发挥着根本作用 [45], ，例如最大后验概率（MAP）估计。因此，我们提出这样一个问题：能否利用此类信道来表述有损信源

编码问题?

本文的贡献：鉴于此，本文在无记忆设置下探讨了一种新的信源压缩问题表述。该表述基于后验信道的概念，该信道将重构的参考系映射为信源的参考系。我们不再使用单字母失真函数，而是给定一个单字母后验信道，用以表征编码和解码操作中所产生损失的性质。更准确地说，我们希望构造一个编码器和一个解码器，使得编码和解码的联合效果——即从信源序列生成重构序列——接近于 n-乘积后验信道作用于非乘积态重构序列的效果。在量子情形下，接近性通过迹距离衡量；在经典情形下，则通过全变差衡量，并体现为全局误差约束。一个相关概念是 Petz 恢复映射，它在信息论问题中已得到广泛关注 [46]–[48]。然而，我们采用了不同的方法，考虑一个作用于重构的参考系并生成信源的参考系的量子信道，即完全正迹保持映射；根据 Uhlmann 定理，可以保证该映射的存在。我们将其称为后验参考映射。

作为我们工作的主要贡献之一，我们利用后验参考映射的最小相干信息，对该信源编码问题的渐近性能极限给出了单字母刻画，其中最小化范围涵盖所有重构（见定理1）。此外，我们的工作确立了量子有损压缩与量子信道编码问题之间的对偶关系。我们的证明基于对量子信息论中两种基本工具——打包和覆盖——的协调运用，这表明我们的证明与 Devetak针对信道编码问题的证明存在对偶关系 [32] （另见 [31], [33]）。

我们还为量子-经典（QC）和经典有损信源编码问题提出了相应的新表述。在量子-经典设置中，我们利用后验经典-量子（CQ）信道的最小 Holevo 信息（或相应的量子互信息），给出了渐近性能极限的单字母刻画，其中最小化范围涵盖所有重构分布（见定理2）。在经典设置中，后验信道的最小互信息决定了经典信源编码问题渐近性能极限的单字母刻画（见定理3）。后验 CQ 信道和后验信道分别针对 QC 和经典设置定义，其定义方式与后验参考映射类似。

在这一频谱的一端，当后验参考映射被指定为恒等变换时，我们在量子情形下的速率表达式会简化为给定量子信源的冯·诺依曼熵，体现出与 Schumacher 无损压缩 [1] 的联系。事实上，可以证明这两种形式彼此等价。经典和

量子-经典形式也有相同结论，其码率分别等于信源的香农熵和冯·诺依曼熵。另一方面，当指定的后验参考映射使得对于重构的某个参考系，相干信息为负时，我们将有损量子信源编码问题的渐近性能极限刻画为零。

用于证明我们结果的技术可以概括如下。为证明定理 1的可达性，我们首先构造一个后验参考等距映射 V（如定义 1所述），并将其分解为相干测量。随后，我们利用 Winter测量压缩协议 [27],，并以相干方式应用该协议来压缩上述等距映射的输出。这需要运用 Uhlmann 定理 [49]（或 [50, 定理 9.2。1]），再加入额外的相位，以实现对后验参考映射的相干保真模拟。为进一步降低压缩码率，我们利用无噪声量子信道能够保留任意叠加态这一事实。因此，我们会进行额外编码，将 V 的输出信息以叠加态的形式嵌入其自身之中。这需要运用 HSW经典通信结果 [25], [26] 来构造信息解码POVM，并运用奈马克扩张定理根据POVM元素构造酉算子。删余所用的方法也是这项证明的另一项有趣之处。该协议目前只允许执行酉或等距映射操作，随后进行偏迹。当码中存在重复码字时，要保证这一点可能颇具挑战。Devetak的证明 [32]中也观察到了类似现象。

关于定理2的可达性，我们利用 Winter测量压缩协议[27] 来构造编码POVM。对于定理3，我们采用[51], [52] 中所述的似然编码器，以证明有损经典信源编码的可达性。

对于定理1的逆命题，我们使用相干信息的量子数据处理不等式、Fannes-Audenart不等式以及单调性结果。对于量子-经典设置，定理2 的逆命题证明 uses inequalities such as the quantum data processing inequality, the concavity of conditional quantum entropy, and the continuity of quantum mutual information (AFW inequality). In the classical setup, similar tools are used to prove a converse to Theorem 3。

本文组织如下。我们在第II节给出一些必要的定义和有用引理。在第 III节，我们阐述问题并给出关于量子有损压缩（定理 1）、QC有损压缩（定理 2）和经典有损压缩（定理3）的主要结果。第 IV节给出了与这三项结果相对应的例子。在第 V、VI和VII节，我们证明主要结果。在这些章节中，我们先给出可达性证明，再证明逆命题。最后，第VIII 节总结全文。

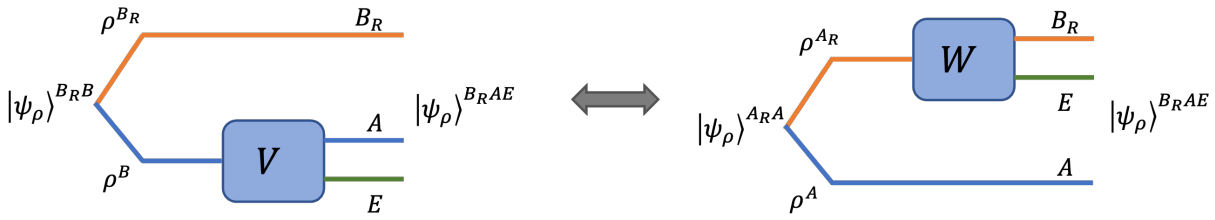

图 1. 展示如何根据等距映射 V（$\mathcal{N}_V$ 的斯廷斯普林扩张）和源状态 ρ^B 构造后验参考映射 W。

II. 预备知识与符号

我们在 [50] 中补充以下记号。令 I_A 表示作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}_A$上的恒等算子。 $\mathcal{H}_A$ 上的密度算子集合记为 $\mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$，线性算子记为 $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$。我们将 $\mathcal{H}_{A_R}$ 记作与 $\mathcal{H}_A$的参考空间相关联的希尔伯特空间，其中 $\dim \mathcal{H}_{A_R} = \dim \mathcal{H}_A$。本文仅关注由量子态 [27, 引理 14（良好近似纯化）],的典范纯化得到的参考系，并将 ρ^A 的典范纯化$|\psi_\rho\rangle^{A_RA}$ 定义为$|\psi_\rho\rangle^{A_RA} \triangleq (I_{A_R} \otimes \sqrt{\rho^A})\Gamma_{A_RA}$，其中 Γ_{A_RA} 表示未归一化的最大纠缠态。我们用 $\Psi_\rho^{A_RA}$表示与 $|\psi_\rho\rangle^{A_RA}$对应的密度算子。按照惯例，对于作用于同一希尔伯特空间的两个量子态，在定义其典范纯化时使用相同的 Γ 。我们将信源的有限字母表记为 X，并将有限字母表 X 上的概率分布集合记为 $\mathcal{P}(\mathrm{X})$。令 $[\Theta] \triangleq \{1, 2, \cdots, \Theta\}$。对于完全正迹保持映射 $\mathcal{N}: \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B$以及输入密度算子 $\rho^A \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_A)$，我们用 $I_c(\mathcal{N}, \rho^A)$表示 $\mathcal{N}$关于 ρ^A的相干信息。

定义 *1*（后验参考映射）。给定一个源 $\rho^B \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$ 和一个信道 $\mathcal{N}_V: \mathcal{H}_B \to \mathcal{H}_A$，令 $\rho^A \triangleq \mathcal{N}_V(\rho^B)$。设 $V: \mathcal{H}_B \to \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$ 是与完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_V$ 对应的斯廷斯普林等距映射，且 $\dim(\mathcal{H}_E) \geq \dim(\mathcal{H}_A)$，使得 $\mathcal{N}_V(\cdot) = Tr_E\{V(\cdot)V^\dagger\}$。如图 *1* 所示，将 V 关于 ρ^A 的“后验参考映射”定义为与等距映射 $W: \mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R} \otimes \mathcal{H}_E$ 对应的完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_W: \mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R}$，满足 $(W \otimes I_A)|\psi_\rho\rangle^{A_RA} = (I_{B_R} \otimes V)|\psi_\rho\rangle^{B_RB}$，其中 $|\psi_\rho\rangle^{A_RA}$ 和 $|\psi_\rho\rangle^{B_RB}$ 分别是 ρ^A 和 ρ^B 的典范纯化。

备注 1（后验参考映射的存在性）。利用纯化等价性，可以保证存在这样的后验参考等距映射 $W: \mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R} \otimes \mathcal{H}_E$。由于 V是一个等距映射，且 $\dim(\mathcal{H}_E) \geq \dim(\mathcal{H}_A)$，并且 $|\psi_\rho\rangle^{A_RA}$和$|\psi_\rho\rangle^{B_RAE} \triangleq (I_{B_R} \otimes V)|\psi_\rho\rangle^{B_RB}$是 ρ^A 的纯化（因为 $\mathrm{Tr}_E(V\rho^B V^\dagger) = \rho^A$），根据 *[50, 定理 5.1.1],*，存在一个等距映射W: $\mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R} \otimes \mathcal{H}_E$，使得 $(W \otimes I_A)|\psi_\rho\rangle^{A_RA} = |\psi_\rho\rangle^{B_RAE}$。

A. 有用引理

引理 1 （ [53], 定理 9.3.1 [50]）。 给定两个量子态 ρ， $\sigma \in \mathcal{D}$（$\mathcal{H}$），我们有

$$1-\sqrt{F(\rho,\sigma)} \leq \frac{1}{2}\|\rho-\sigma\|_1 \leq \sqrt{1-F(\rho,\sigma)}.$$

引理 2. 对于 ρ^B， $\sigma^B \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$，以下不等式成立：

$$F(|\psi_\rho\rangle, |\psi_\sigma\rangle) \geq \left(1-\frac{1}{2}\left\|\rho^B-\sigma^B\right\|_1\right)^2, \tag{1}$$

其中， $|\psi_\rho\rangle$ 和 $|\psi_\sigma\rangle$ 分别是 ρ^B 和 σ^B的典范纯化。

证明。 证明见附录A。 □

上述引理是对 [27] 中引理 14（“良好近似纯化”）的略微加强。

引理3 （奈马克扩张定理 [54], [55, 定理 2。1]）。 给定一个作用于系统 $\mathcal{H}_A$ 上的正算子值测度 $\{\Gamma_x\}_{x\in\mathsf{X}}$， 存在一个作用于系统 $\mathcal{H}_A$ 和辅助系统 $\mathcal{H}_{A'}$ 上的酉算子 $U_{AA'}$， 以及一个标准正交基 $\{|x\rangle^{A'}\}_{x\in\mathsf{X}}$， 使得

$$\mathrm{Tr}\left\{\overline{\Gamma}_x(\rho^A\otimes|0\rangle\langle 0|_{A'})\right\} = \mathrm{Tr}\left(\Gamma_x\rho^A\right),$$

其中 $\{\Gamma_x^{-} \triangleq U_{AA'}^{\dagger}(\mathbb{1}_A\otimes|x\rangle\langle x|^{A'})U_{AA'}\}$ 是作用于系统 $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_{A'}$上的正交投影算子。此外，$|0\rangle^{A'}$ 是 $\mathcal{H}_{A'}$中的某个固定态，且与 Γ_x 和 ρ^A相互独立。

III. Main Results

A. 有损量子信源编码

我们首先将量子信源编码问题表述如下。对于任意由 $\rho^B \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$表征的无记忆量子信源，记其典范纯化为 $|\psi_\rho\rangle^{BB_R}$。令$\rho^{B_R} \triangleq \mathrm{Tr}_B[\Psi_\rho^{B_RB}]$。

定义 2 （量子信源编码设置）。量子信源编码设置由三元组 $(\rho^B, \mathcal{H}_A, \mathcal{N}_W)$表征，其中 $\rho^B \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_B)$ 是一个密度算子， $\mathcal{H}_A$ 是一个重构希尔伯特空间，而 $\mathcal{N}_W$ 是从 $\mathcal{H}_{A_R}$ 到 $\mathcal{H}_{B_R}$ 的单字母完全正迹保持映射，其中 $\mathcal{H}_{A_R}$ 和 $\mathcal{H}_{B_R}$ 分别是对应于 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$的参考空间。

定义 3 (有损量子压缩协议)。 给定输入希尔伯特空间和重构希尔伯特空间 $(\mathcal{H}_B,\ \mathcal{H}_A)$，一个 $(n,\ \Theta)$ 有损量子压缩协议由一个编码完全正迹保持映射$\mathcal{N}_{(n)\mathcal{E}}\colon\ \mathcal{H}_{B^n} \to \mathcal{H}_M$和一个解码完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_{(n)\mathcal{D}}\colon\ \mathcal{H}_M \to \mathcal{H}_{A^n}$组成，且满足 $\dim(\mathcal{H}_M) = \Theta$，如图2所示。

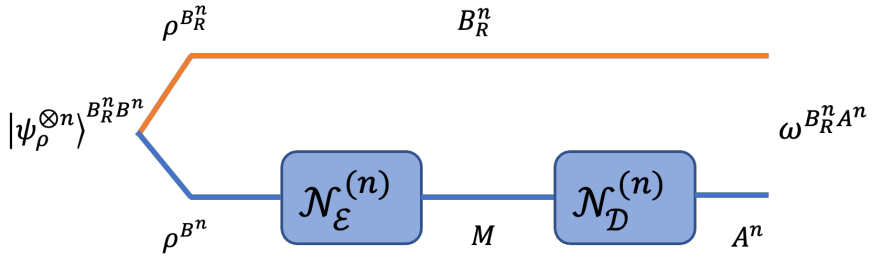

图 2. 有损量子压缩协议示意图

定义 4 (可达性)。 对于一个量子信源编码设置 $(\rho^B,\ \mathcal{H}_A,\ \mathcal{N}_W)$，如果对于所有 $\epsilon > 0$ 以及所有充分大的 n，都存在一个满足以下条件的 $(n,\ \Theta)$ 有损量子压缩协议，则称码率 R 可达

$$\left\|\omega^{B_R^n A^n} - (\mathcal{N}_W^{\otimes n} \otimes I_{A^n})\Psi_\omega^{A_R^n A^n}\right\|_1 \leq \epsilon, \tag{2}$$

以及 $\frac{1}{n}\log\,\Theta \leq R + \epsilon$，其中 $\omega^{B_R^n A^n} \triangleq (I \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{(n)})(I \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{(n)})(\Psi_\rho^{B_R^n B^n})$，并且 $\Psi_\rho^{B_R^n B^n}$ 和 $\Psi_\omega^{A_R^n A^n}$ 分别是 $\rho^{B^{\otimes n}}$ 和 ω^{A^n}的典范纯化。

换言之，该协议确保 $\mathcal{H}_A^{\otimes n}$ 上的重构与原始参考系 $\mathcal{H}_{B_R}^{\otimes n}$ 的联合量子态，接近于将 n-乘积后验信道作用于非乘积重构序列的参考系所产生的效果。我们的目标是用单字母量子信息量刻画所有可达码率的集合。

定理 1 (有损量子压缩定理)**.** 对于一个$(\rho^B, \mathcal{H}_A, \mathcal{N}_W)$ 量子信源编码设定，当且仅当 $S(\rho^B, \mathcal{N}_W)$ 非空时，码率 R 可达，并且

$$R \geq \min_{\rho^{A_R} \in \mathcal{S}(\rho^B, \mathcal{N}_W)} I_c^+(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R}),$$

其中，对于任意实数 x, $x^+ \triangleq$ 最大值$(x,0)$ 以及

$$\mathcal{S}(\rho^B, \mathcal{N}_W) \triangleq \{\rho^{A_R} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_R}) : \mathcal{N}_W(\rho^{A_R}) = \rho^{B_R}\}.$$

证明。 可达性的证明见第V-A 节和 V-B节，逆命题的证明见第 V-C节。

□

备注 2 (子空间覆盖)。 定理*1* 陈述中得到的渐近码率，可以用子空间覆盖论证来解释。假设给定一个信源 ρ^B 和一个完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_W$，对于所有 $\rho^{A_R} \in \mathcal{S}(\rho^B,\ \mathcal{N}_W)$，其相干信息均为正。令 $W\colon \mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R} \otimes \mathcal{H}_E$为 $\mathcal{N}_W$的斯廷斯普林扩张。这意味着 $I_c(\mathcal{N}_W,\ \rho^{A_R}) = S(B_R)_\sigma - S(E)_\sigma$，其中 $\sigma^{B_R E} \triangleq$

$W\rho^{A_R}W^\dagger$，对于 $\rho^{A_R}\in\mathcal{S}(\rho^B,\ \mathcal{N}_W)$。我们知道，$n$重构空间 $\rho^{B^{\otimes n}}$-乘积源状态可以通过 *Schumacher*压缩，以高概率压缩到归一化对数维数为 $S(B_R)_\sigma$ 的子空间。为了进一步降低码率，我们使用 W 相对于 ρ^{B_R} 的后验参考映射，使其作用于信源后产生量子态 ρ^A。重构空间中的每个基向量都可以视为覆盖参考空间中归一化对数维数为 $S(E)_\sigma$ 的一个子空间。因此，要以高概率覆盖整个信源空间，需要相干信息（即两个熵之差）所对应的码率。关于量子信道编码问题，也有类似的观察，见 *[30]*。

注 3 (与 Schumacher 无损压缩的比较)。 *Schumuacher* 压缩 *[1]* 要求 $\lim_{n\to\infty}\|\omega^{B_R^nA^n}-\Psi_\rho^{B_R^nB^n}\|=0$。在当前表述中，若选择恒等映射作为后验参考映射，即 $\mathcal{N}_W=I_{A_R\to B_R}$，则要求满足条件 $\lim_{n\to\infty}\|\omega^{B_R^nA^n}-\Psi_\omega^{A_R^nA^n}\|=0$。利用引理 2、迹范数的单调性以及三角不等式，可以证明这两个条件等价。因此，两种表述均给出相同的冯·诺依曼熵渐近性能极限。请注意，采用零失真度的平均单字母失真准则的标准信源编码表述，并不等价于 *Schumacher* 压缩。

注 4 (与平均单字母率失真的比较)。 给定任意一个 $(n,\ \Theta)$ 有损量子压缩协议，用于量子信源编码设置 $(\rho^B,\ \mathcal{H}_A,\ \mathcal{N}_W)$，且该协议达到了定理 *1*中的最优性，我们可以观察到以下结论成立。令 $\omega^{B_R^nA^n}\triangleq(I\otimes\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{(n)})(I\otimes\mathcal{N}_{(n)}\mathcal{E})(\Psi_\rho^{B_R^nB^n})$为该协议作用后得到的 n字参考系与重构的诱导量子态。由于协议满足(2)，由迹距离的单调性可得

$$\lim_{n\to\infty}\|\omega^{B_{Ri}A_i}-(\mathcal{N}_W\otimes I_A)(\Psi_\omega^{A_{Ri}A_i})\|_1=0,\quad\forall\,1\le i\le n,$$

其中 $\Psi_\omega^{A_{Ri}A_i}\triangleq\mathrm{Tr}_{A^{n\setminus i}A_R^{n\setminus i}}[\Psi_\omega^{A_R^nA^n}]$. 值得注意的是，$\Psi_\omega^{A_{Ri}A_i}$不一定是纯态。此外，这并不一定能保证参考系与重构之间的平均单字母失真满足问题标准表述中的要求 *[7,*引理*1],* 其中考虑了信源的单字母纯化。从这个角度来看，就衡量重构质量而言，当前的表述更为“乐观”。

备注 5 （与纠缠辅助的比较）**.** 我们注意到

$$I_c(\mathcal{N}_W,\rho^{A_R})=\frac{1}{2}\left[I(B_R;A)_\sigma-I(A;E)_\sigma\right]\le\frac{1}{2}I(B_R;A)_\sigma,$$

其中 $\sigma^{B_RAE}\triangleq(I\otimes V)\Psi_\rho^{B_RB}(I\otimes V)^\dagger$，且 $V\colon\ \mathcal{H}_B\to\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_E$ 是关于 ρ^{B_R} 的 W 后验参考映射。文献 *[7]* 表明，$\frac{1}{2}I(B_R;\ A)_\sigma$刻画了渐近性能

极限，即在无限纠缠辅助下，具有局部单字母失真函数的率失真问题的极限。因此，这也为相应的无辅助情形下的渐近性能极限提供了一个下界。幸运的是，这并未导致任何矛盾，因为当前的表述与前一种表述不同，显得更为乐观。

B. 有损量子-经典信源编码

本节给出有关量子到经典（QC）设置的主要结果。无记忆量子信息源由 $\rho^B \in \mathcal{D}$（$\mathcal{H}_B$）表征。

定义 5（QC信源编码设置）。 *QC*信源编码设置由三元组 （ρ^B，X $\mathcal{W}$）表征，其中 ρ^B 是作用于 $\mathcal{H}_B$ 上的源密度算符，X 是重构字母表，而 $\mathcal{W}$：$\mathsf{X} \to \mathcal{D}$（$\mathcal{H}_B$）是单字母后验经典 - 量子（*CQ*）信道。

定义 6（有损QC压缩协议）。 给定源密度算符 ρ^B 和重构字母表 X，一个 （n， Θ）有损*QC*压缩协议由 （i）一个正算子值测度$\Gamma^{(n)} \triangleq \{A_m\}_{m=1}^{\Theta}$和 （$ii$）一个解码映射 f： $\{1, 2, \cdots, \Theta\} \to \mathsf{X}^n$表征，如图 *3*所示。

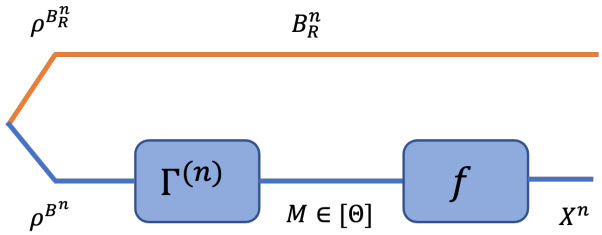

图 3. 量子-经典有损信源压缩协议示意图。

定义 7 (可达性)。 对于给定的*QC*信源编码设置$(\rho^B$，X $\mathcal{W})$，若对于所有 $\epsilon > 0$ 以及所有充分大的 n，都存在一个$(n,\ \Theta)$ 量子经典有损压缩协议，使得 $\frac{1}{n}$对数 $\Theta \leq R + \epsilon$，且 $\Xi(\Gamma^{(n)},\ f) \leq \epsilon$，则称码率 R 可达，_其中

$$\Xi(\Gamma^{(n)}, f) \triangleq \sum_{x^n} \left\| \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} A_{f^{-1}(x^n)} \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} - \mathrm{Tr}\left(A_{f^{-1}(x^n)} \rho^{B^{\otimes n}} \right) \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{W}_{x_i} \right\|_1 . \tag{3}$$

换言之，测量后参考态应呈现为 n-张量积后验 CQ 信道 $\mathcal{W}^{\otimes n}$。我们的目标是利用单字母量子信息量刻画所有可达速率构成的集合。

定理 2 (有损量子经典源压缩定理)。 对于 $(\rho^B,\mathsf{X}\ \mathcal{W})$ 量子经典源编码设置，当且仅当 $\mathcal{A}(\rho^B,\mathcal{W})$ 非空时，码率 R 可达，并且

$$R \geq \min_{P_X \in \mathcal{A}(\rho^B,\mathcal{W})} I(X;B_R)_\sigma,$$

其中量子 互信息是相对于经典-量子态计算的 ，

$$\sigma^{XB_R} \triangleq \sum_x P_X(x)\,|x\rangle\langle x|^X \otimes \mathcal{W}_x,$$

$\mathcal{A}$是定义如下的重构分布集合

$$\mathcal{A}(\rho^B,\mathcal{W}) \triangleq \{P_X \in \mathcal{P}(\mathsf{X}) : \sum_x P_X(x)\mathcal{W}_x = \rho^B\},$$

并且 $\{|x\rangle\}_{\{x\in\mathsf{X}\}}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_X$ 的标准正交基，其维数为$\dim(\mathcal{H}_X) = |\mathsf{X}|$。

证明。 可达性的证明见第 VI-A节，反向证明见第 VI-B节。

□

C. 有损经典源编码

考虑一个平稳离散无记忆信源 X，其信源分布为 P_X，定义在有限字母表X上。

ˆ**定义 8** （信源编码设定）。 一个信源编码设定由三元组$(P_X,\mathsf{X}W_{X|\hat{}X})$ˆ刻画，其中 P_X 是定义在有限字母表X上的信源分布，X 是重构字母表，而ˆ$W_{X|\hat{X}}$: X $\to$ X 是后验（反向）信道，即给定重构时信源的单字母条件分布。

我们用 P_X^n 和 $W_{X|\hat{}X}^n$表示独立同分布，即，

$$P_X^n(x^n) = \prod_{i=1}^n P_X(x_i) \text{ and } W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n) = \prod_{i=1}^n W_{X|\hat{X}}(x_i|\hat{x}_i).$$

定义 9 （有损信源压缩协议）。 对于给定的信源分布 P_X 和重构ˆ字母表 X，一个 $(n,\ \Theta)$ 有损信源压缩协议由以下部分组成：(i) 一个随机编码映射$\mathcal{E}^{(n)}$: $\mathsf{X}^n \longrightarrow [\Theta]$ 以及 (ii) 一个随机解码映射 $\mathcal{D}^{(n)}$: $[\Theta] \longrightarrow \hat{}\mathsf{X}^n$，如图 4所示。

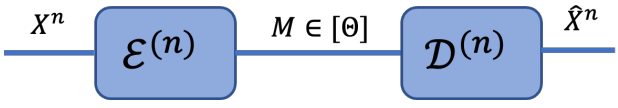

图 4。有损经典源压缩协议示意图。

定义 10（可达性）。 给定一个信源编码设定$(P_X, \mathsf{X}, W_{\hat{X}|X})$，若对于所有 $\epsilon > 0$ 以及所有充分大的 n，都存在一个(n, Θ) 有损信源压缩协议，使得 $\frac{1}{n}\log\Theta \leq R + \epsilon$，且 $\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}) \leq \epsilon$，则称码率 R 可达，其中

$$\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}) \triangleq \frac{1}{2}\sum_{x^n\hat{x}^n}\left|P_{X^n\hat{X}^n}(x^n,\hat{x}^n) - P_{\hat{X}^n}(\hat{x}^n)\prod_{i=1}^{n}W_{X|\hat{X}}(x_i|\hat{x}_i)\right|, \tag{4}$$

and

$$P_{X^n\hat{X}^n}(x^n,\hat{x}^n) = P_X^n(x^n)\sum_{m\in[\Theta]}\mathcal{E}^{(n)}(m|x^n)\mathcal{D}^{(n)}(\hat{x}^n|m),\ \textit{for all}\ (x^n,\hat{x}^n)\in\mathsf{X}^n\times\hat{\mathsf{X}}^n,$$

是系统诱导分布，而 $P_{\hat{X}^n}W^n_{\hat{X}|X}$ 是近似分布。

换句话说，给定重构后的信源后验分布应当类似于 n- 乘积态后验信道 $W^n_{\hat{X}|X}$。我们的目标是利用单字母信息量刻画所有可达码率的集合。

定理 3 (有损信源压缩定理)。 对于一个$(P_X, \mathsf{X}, W_{\hat{X}|X})$ 信源编码设定，若且唯若 $\mathcal{A}(P_X, W_{\hat{X}|X})$ 非空，码率 R 才称为可达，并且

$$R \geq \min_{P_{\hat{X}}\in\mathcal{A}(P_X,W_{\hat{X}|X})} I(X;\hat{X}), \tag{5}$$

其中 $\mathcal{A}$ 是由下式定义的重构分布集合

$$\mathcal{A}(P_X, W_{\hat{X}|X}) \triangleq \{P_{\hat{X}}\in\mathcal{P}(\hat{\mathsf{X}}) : \sum_{\hat{x}}P_{\hat{X}}(\hat{x})W_{\hat{X}|X}(\hat{x}|x) = P_X(x),\ \textit{for all}\ x\in\mathsf{X}\}.$$

证明。 可达性的证明见第VII-A节，反向证明见第七节 B。

□

备注 6 (与 Shannon 无噪声信源压缩的比较)。 无噪声信源压缩要求$\lim_{n\to\infty}P(X^n \neq X^n) = 0$。在当前表述中，若选择恒等后验信道，即 $W_{\hat{X}|X}(\hat{x}|x) = \mathbb{1}_{\{x=\hat{x}\}}$，对所有 $x\in\mathsf{X}$、$\hat{x}\in\hat{\mathsf{X}}$，我们要求$\lim_{n\to\infty}\left\|P_{X^n\hat{X}^n} - P_{\hat{X}^n}W^n_{\hat{X}|X}\right\|_{\mathrm{TV}} = 0$。不难看出，这两个条件等价，并且两种表述都得到相同的渐近性能极限，即香农熵。然而，采用零失真度下平均单字母失真准则的标准信源编码表述，并不等价于无噪声信源压缩。

IV. 示例

例1（使用比特翻转信道的量子信源编码）。 在此例中，我们分析与量子信源编码设置相对应的有损量子压缩协议的性能

$(\rho^B, \mathcal{H}_A, \mathcal{N}_W)$，其中，$\rho^B$选为最大混合态（$\rho^B = I_B/2$），而 $\mathcal{N}_W$：$\mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R}$指定为比特翻转信道。对于 $\mathcal{N}_W$，其等距映射 W：$\mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R} \otimes \mathcal{H}_E$ 可指定为

$$W = \sqrt{1-p} I \otimes |0\rangle^E + \sqrt{p} X \otimes |1\rangle^E,$$

其中，对所有 $p \in (0, 1/2)$ 均有 $\mathcal{N}_W(\rho^{A_R}) = \mathrm{Tr}_E(W \rho^{A_R} W^\dagger)$。注意，$\rho^B$ 的典范纯化 $|\psi_\rho\rangle^{B_R B}$ 为

$$|\psi_\rho\rangle^{B_R B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle^{B_R} |0\rangle^B + |1\rangle^{B_R} |1\rangle^B \right), \tag{6}$$

其中 $|0\rangle^{B_R} \triangleq (I \otimes \langle 0|^B) |\Gamma\rangle^{B_R B}$。这意味着，$\rho^{B_R} = I_{B_R}/2$。要计算该信源编码设定下此协议的渐近性能（由定理 *1* 刻画），我们首先需要确定一个 $a\rho^{A_R}$，使得 $\mathcal{N}_W(\rho^{A_R}) = \rho^{B_R}$。简单计算可得 $\mathcal{S}(\rho^B, \mathcal{N}_W) = \{I_{A_R}/2\}$。由此得到

$$\min_{\rho^{A_R} \in \mathcal{S}(\rho^B, \mathcal{N}_W)} I_c^+(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R}) = I_c(\mathcal{N}_W, I_{A_R}/2) = S(B_R)_\sigma - S(E)_\sigma,$$

其中 $\sigma^{B_R E} = W \rho^{A_R} W^\dagger$。注意，$\sigma^{B_R} = I_{B_R}/2$ 和 $\sigma^E = (1-p)\, |0\rangle\langle 0|^E + p\, |1\rangle\langle 1|^E$,，由此得到 $I_c(\mathcal{N}_W, I_{A_R}/2) = 1 - h_b(p)$，其中 $h_b(p) \triangleq -p \log(p) - (1-p) \log(1-p)$。因此，最大混合源可以以 $1 - h_b(p)$ 的码率进行压缩，同时满足式 *(2)* 中定义的误差准则。

示例 2（使用去极化信道的量子信源编码）。 在本例中，我们研究另一种候选信道——去极化信道的性能。我们再次以压缩最大混合态 $\rho^{B_R} = \frac{I_{B_R}}{2}$为目标，其中 $\mathcal{N}_W$ 定义为

$$\mathcal{N}_W(\rho^{A_R}) = \left(1 - \frac{3p}{4}\right) \rho^{A_R} + \frac{p}{4}(X \rho^{A_R} X^\dagger + Y \rho^{A_R} Y^\dagger + Z \rho^{A_R} Z^\dagger).$$

对于某个 $p \in [0,1].$，通过简单计算可知，为满足 $\mathcal{N}_W(\rho^{A_R}) = \rho^{B_R} = \frac{I_{B_R}}{2}$，有 $\mathcal{S}(\rho^B, \mathcal{N}_W) = \{I_{A_R}/2\}$，对所有 $p \in (0, 1)$ 均成立。与上例类似，求出 $\mathcal{N}_W$ 的等距扩张可得

$$\min_{\rho^{A_R} \in \mathcal{S}(\rho^B, \mathcal{N}_W)} I_c^+(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R}) = I_c^+(\mathcal{N}_W, I_{A_R}/2) = \max\left\{0, 1 - h_b(3p/4) - \frac{3p}{4}\log(3)\right\}.$$

示例 3（用于量子信源压缩的汉明码）。 在本例中，我们考察汉明码在采用标准单字母（局部）纠缠保真度准则评估时的表现。汉明码是完美码，并达到覆盖半径 *[56]*的德尔萨特上界。再次令 $\rho^B = \frac{I_B}{2}$。设最大纠缠双部量子态 $|\psi_m\rangle^{B_R B}$定义为

$$|\psi_m\rangle^{B_R B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle^{B_R B} + |11\rangle^{B_R B} \right), \tag{7}$$

是 ρ^B 的纯化。令 $\mathbb{F}_2$ 表示二元有限域，并令 $G \in \mathbb{F}_2^{k \times n}$ 为汉明码的生成矩阵。为了对 ρ^B 进行编码，我们采用对偶性视角，并使用汉明码的解码器。于是，编码定义为 $\mathcal{E}(x^n) \triangleq \mathit{argmin}_{u^k}\{w_H(u^k\, G \oplus x^n)\}$,，对所有 $x^n \in \mathbb{F}_2^n$,均成立，其中 w_H

表示汉明重量。类似地，解码器可以描述为将 $\mathcal{D}\circ\mathcal{E}((x^n)) = \mathcal{E}(x^n)G$ 映射为。我们将此编码描述为等距作用 $V_H\colon \mathcal{H}_B^{\otimes n} \to \mathcal{H}_A^{\otimes n}\otimes\mathcal{H}_E^{\otimes n}$，它将基 $|x^n\rangle^{B^n}$ 映射到向量 $|\mathcal{E}(x^n)\rangle^{A^n}\otimes|x^n\oplus\mathcal{E}(x^n)\rangle^{E^n} \in \mathcal{H}_A^{\otimes n}\otimes\mathcal{H}_E^{\otimes n}$，其中子系统 $\mathcal{H}_A^{\otimes n}$ 存储重构，而 $\mathcal{H}_E^{\otimes n}$ 最终会被迹掉，并假设 $\mathcal{H}_A$ 是 $\mathcal{H}_B$ 的一个同构副本。这意味着，编码态可以表征为

$$\rho^{B_R^n A^n} = \mathrm{Tr}_{E^n}\left\{V_H \left|\psi_m^{\otimes n}\right\rangle\!\!\left\langle\psi_m^{\otimes n}\right|^{B_R^n B^n} V_H^\dagger\right\}.$$

利用

$$\begin{aligned} V_H \left|\psi_m^{\otimes n}\right\rangle^{B_R^n B^n} &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x^n} |x^n\rangle_{B_R^n} |\mathcal{E}(x^n)\rangle_{A^n} |x^n\oplus\mathcal{E}(x^n)\rangle_{E^n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{c^n\in\mathcal{C}} \sum_{e^n\in\mathbb{F}_2^n : w_H(e^n)\le 1} |c^n\oplus e^n\rangle_{B_R^n} |c^n\rangle_{A^n} |e^n\rangle_{E^n}, \end{aligned}$$

我们可以将 $\rho^{B_R^n A^n}$ 简化为

$$\rho^{B_R^n A^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{c^n, c'^n, e^n} |c^n\oplus e^n\rangle\langle c'^n\oplus e^n| \otimes |c^n\rangle\langle c'^n|, \tag{8}$$

其中，$\mathcal{C}$ 表示汉明码的码字集合。为计算单字母纠缠保真度，我们计算

$$\rho^{B_{R_i} A_i} = \mathrm{Tr}_{B_R^{n\setminus i} A^{n\setminus i}}\left\{\rho^{B_R^n A^n}\right\} = \frac{1}{2^n}\sum_{c^n, e^n} |c_i\oplus e_i\rangle\langle c_i\oplus e_i| \otimes |c_i\rangle\langle c_i|, \tag{9}$$

其中，对除与 $B_R^{n\setminus i} A^{n\setminus i}$对应的子系统之外的所有子系统进行偏迹；第二个等号是利用了任意汉明码的最小汉明距离为三这一事实得出的。由此可得，

$$\langle\psi_m^{B_R B}|\rho^{B_{R_i} A_i}|\psi_m^{B_R B}\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{c^n e^n}\left[\mathbb{1}_{\{c_i\oplus e_i=0, c_i=0\}} + \mathbb{1}_{\{c_i\oplus e_i=1, c_i=1\}}\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{c^n e^n}\mathbb{1}_{\{e_i=0\}}. \tag{10}$$

因此，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \langle\psi_m{}^{B_R B}|\rho^{B_{R_i} A_i}|\psi_m{}^{B_R B}\rangle = \frac{1}{2^{n+1}n}\sum_{c^n e^n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{e_i=0\}} = \frac{|\mathcal{C}|n^2}{2^{n+1}n} = \frac{n}{2\cdot 2^{n-k}}. \tag{11}$$

We 我们知道，对于汉明码 $k = 2^r - r - 1$ 和 $n = 2^r - 1$，可将其简化为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \langle\psi_m{}^{B_R B}|\rho^{B_{R_i} A_i}|\psi_m{}^{B_R B}\rangle = \frac{2^r - 1}{2\cdot 2^r}, \tag{12}$$

并且当 r 趋于无穷时趋于一半。注意，$r\to\infty$ 既体现了该码的渐近性能，也是码率 k/n 达到 *1* 的条件。因此，渐近性能是不连续的，因为当码率恰好为 *1* 时，可以使用平凡的恒等编码，使平均单字母保真度达到 *1*。此外，注意 $S(E^n) = \log(n+1) = r$。因此，归一化

所耗散的量子比特数量为 $^{S_{(E^n)\,n}}$，当 $r \to \infty$ 时趋于零，这表明重构与参考系之间存在显著纠缠。

如例*1*所示，当按照(2)中提出的定义来度量误差时，可以连续地压缩最大混合源，

例4。（采用二元对称后验经典量子信道对二元量子信源进行有损量子经典源编码）我们构造一个与 *[11]*中研究的类似的例子。在这里，我们分析与有损源编码设置$(\rho^B,\ \mathsf{X}\ \mathcal{W})$相对应的有损量子经典源压缩协议的性能。量子信源 ρ^B 以概率 p 生成量子态 $|+\rangle$，并以概率$(1-p)$生成 $|0\rangle$，其中 $p \in [0, 1/2]$，因此源密度算符可写为

$$\rho^B = p\,|+\rangle\langle+| + (1-p)\,|0\rangle\langle 0|\,,$$

重构 集合$\mathsf{X} = \{0, 1\}$，以及后验经典量子信道 $\mathcal{W}_x = (1-q)\ \omega_x + q\ \omega_{\bar{x}}$，其中

$$\omega_0 = \frac{1}{4}\,|+\rangle\langle+| + \frac{3}{4}\,|0\rangle\langle 0|\,, \quad \omega_1 = \frac{3}{4}\,|+\rangle\langle+| + \frac{1}{4}\,|0\rangle\langle 0|\,,$$

$q \in [0, 1/2]$，且 $\bar{x} \triangleq x \oplus 1$。为确定集合 $\mathcal{A}$，我们假设 $P_X(0) = r$，该条件刻画了集合 $\mathcal{A}$，并求解以下

$$\rho^B = r\mathcal{W}_0 + (1-r)\mathcal{W}_1, \quad 0 \le r \le 1. \tag{13}$$

由此可得，

$$\mathcal{A}(\rho^B, \mathcal{W}) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2} + \frac{1-2p}{1-2q}\right\} & \textit{if } 0 \le q \le 2\min\left\{\left(\frac{3}{4}-p\right), \left(p-\frac{1}{4}\right)\right\}, q < \frac{1}{2} \\ [0,1] & \textit{if } q = p = 0.5 \\ \phi & \textit{otherwise,} \end{cases}$$

其中 ϕ 表示空集。现在，我们来计算定理*2*所描述的渐近性能。对于上述信源编码设置，有

$$I(X; B_R)_\sigma = S(\rho^B) - rS(\mathcal{W}_0) - (1-r)S(\mathcal{W}_1). \tag{14}$$

其中

$$\sigma^{XB_R} \triangleq r\,|0\rangle\langle 0| \otimes \mathcal{W}_0 + (1-r)\,|1\rangle\langle 1| \otimes \mathcal{W}_1.$$

图 *5* 展示了参数 q取不同值、信源为 ρ^B 且满足 $p = 0.4$ 和 0。5时的量子经典有损源压缩率曲线。注意，该曲线随 q单调递减，这符合预期。

例5。（以二元对称信道（*BSC*）作为后验信道的二元源有损经典源编码）在本例中，我们分析有损源压缩协议的性能

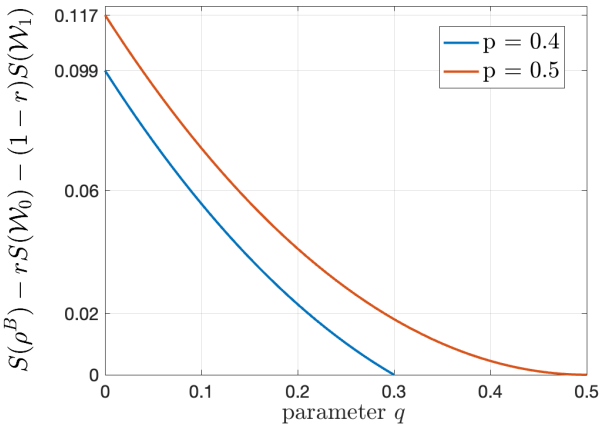

图 5. 有损　　二元量子信源在二元对称后验经典量子信道下的量子经典源编码示例　　.

ˆ　　ˆ对应于有损源编码设置 $(P_X, \mathsf{X} W_{X|\hat{X}})$，其中 $P_X \sim$ 伯努利(p)，$\mathsf{X} = \{0,1\}$，$W_{X|\hat{X}} \sim$二元对称信道(q)，以及 $p,\ q \in [0,1/2]$。为确定集合 $\mathcal{A}$，我们假设 $P_{\hat{X}}(0) = r$，这刻画了集合 $\mathcal{A}$，并求解以下线性方程组：

$$p = r(1-q) + (1-r)q \quad \textit{and} \quad (1-p) = rq + (1-r)(1-q). \tag{15}$$

这给出：

$$\mathcal{A}(P_X, W_{X|\hat{X}}) = \begin{cases} \left\{\frac{p-q}{1-2q}\right\} & \textit{if } 0 \le q \le \min\{p,(1-p)\}, q < \frac{1}{2} \\ [0,1] & \textit{if } q = p = 0.5 \\ \phi & \textit{otherwise,} \end{cases}$$

其中 ϕ 表示空集。现在我们计算定理 *3*中描述的渐近性能。对于上述信源编码设定，我们有

$$I(X;\hat{X}) = H(X) - H(X|\hat{X}) = h_b(p) - h_b(q). \tag{16}$$

此外，注意到，式 (16) 中的码率与伯努利*(p)*信源在 $D < p$ *[57,* 定理 *10.3* 的汉明失真准则下的率失真函数相同。*1]*。

V. 定理 1的证明

A. 可达性证明概述

在正式给出可达性证明之前，我们先简要概述其思路。这里给出的证明受到 Devetak 在 [32] 关于量子信道通信问题的工作启发（详见 [50, 第 24]章）。该工作的一项重要组成部分，是将相干信息分解为两个 Holevo 信息量之差。我们打算进行类似的

分解，但从给定映射 $\mathcal{N}_W$的角度出发。为此，对于给定信源 ρ^B，我们首先寻找一个$\rho^{A_R} \in \mathcal{D}$（$\mathcal{H}_{A_R}$），使其满足 $\mathcal{N}_W$（ρ^{A_R}） $= \rho^{B_R}$.。找到之后，利用谱分解，将 ρ^{A_R}展开为 $\rho^{A_R} = \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A |a\rangle\langle a|^{A_R}$,，其中 $\mathcal{A}$是某个有限集。注意，由于$|a\rangle\langle a|^{A_R}$是纯态， S（$\mathcal{N}_W$（$|a\rangle\langle a|^{A_R}$）$= S$（$\mathcal{N}_W^c$（$|a\rangle\langle a|^{A_R}$）），其中$\mathcal{N}_W^c$： $\mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_E$是 $\mathcal{N}_W$的互补完全正迹保持映射，由对应于$\mathcal{N}_W$的斯廷斯普林扩张 W： $\mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R} \otimes \mathcal{H}_E$ 定义。这也意味着

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A S(\mathcal{N}_W(|a\rangle\langle a|^{A_R})) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A S(\mathcal{N}_W^c(|a\rangle\langle a|^{A_R})).$$

此外，由于 CPTP 映射的线性性，我们可知

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A \mathcal{N}_W(|a\rangle\langle a|^{A_R}) = \mathcal{N}_W(\rho^{A_R}) \quad \text{and} \quad \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A \mathcal{N}_W^c(|a\rangle\langle a|^{A_R}) = \mathcal{N}_W^c(\rho^{A_R}).$$

这意味着，我们可以将 I_c（$\mathcal{N}_W$， ρ^{A_R}）改写为

$$\begin{aligned} I_c(\mathcal{N}, \rho^{A_R}) &= S(\mathcal{N}_W(\rho^{A_R})) - S(\mathcal{N}_W^c(\rho^{A_R})) \\ &= \left[S(\mathcal{N}_W(\rho^{A_R})) - \sum_{a\in\mathcal{A}} S(\lambda_a^A \mathcal{N}_W(|a\rangle\langle a|^{A_R}))\right] - \left[S(\mathcal{N}_W^c(\rho^{A_R})) - \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A S(\mathcal{N}_W^c(|a\rangle\langle a|^{A_R}))\right] \\ &= \chi\left(\left\{\lambda_a^A, \mathcal{N}_W(|a\rangle\langle a|^{A_R})\right\}\right) - \chi\left(\left\{\lambda_a^A, \mathcal{N}_W^c(|a\rangle\langle a|^{A_R})\right\}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

现在，我们的目标是证明可以达到等于上述差值的码率。得到类似的分解后，Devetak 通过应用经典-量子装箱引理的相干版本 [50, 第 16] 章，再应用量子-经典覆盖引理 [50, 第17]章，达到了性能极限。受此启发，并利用这两个问题之间的对偶关系，我们实现了式（17）中的差值。具体而言，我们首先尝试应用量子-经典覆盖引理的相干版本（或测量压缩结果 [27]）。为此，如图 1所示，我们首先得到与等距映射 V对应的后验参考映射 W。然后，我们将V对量子态 ρ^B 的作用识别为相干量子测量。接着，利用 [27], 中构造的近似正算子值测度，我们执行相干覆盖，从而压缩所得到的测量，进而以第一个 Holevo 信息所给出的码率压缩 V的输出。在忠实模拟 的作用 V的同时完成压缩，从而得到满足误差准则的重构（如式（2）所示）。该过程详述于步骤 1.1，其中构造编码器以执行相干覆盖；其覆盖效果则在步骤 2.1 中分析，并达到与第一个 Holevo 信息相对应的码率。

为了获得所需的相干信息，必须进一步降低与第二个 Holevo 信息对应的码率。这需要将更多数据或量子比特扩散到环境中（偏迹）。

然而，正如下文的证明将要说明的，这种操作会破坏信源中存在的量子关联，甚至可能使其变成经典混合态。因此，在进行这种偏迹操作之前，我们在步骤 1.2（第 V-B 节）中构造一种幺正操作，将信息以纠缠的形式浓缩到更少的量子比特中，从而进一步降低码率。这包括利用子系统 E 的相干测量后态，作为编码器可用的辅助信息。第 V-B 节的步骤 2.2 详细介绍了这一过程，并实现了所需的码率。最后，还需要一个额外步骤（步骤 2.3），以证明达到（2）所要求的接近性。

证明中另一个引人注目的方面是所采用的删余技巧。由协议的定义可知，它只允许进行酉或等距操作，随后进行偏迹。当一个码中包含重复码字时，要保证这一点可能很困难。消除所有重复项的一种方法是进行删余。具体而言，先找到一个满足所有约束、同时允许少量重复的好码，然后仅删去这部分重复码字。然而，如果约束的数量呈指数级增长，找到一个好码就会变得很有挑战性。Devetak 的问题中，指数级多个覆盖约束对应的错误概率呈双指数衰减，Devetak 得以利用这一点。而在当前问题中，我们面对的是指数级多个装箱约束，其误差仅呈指数衰减。为解决这一问题，我们构造证明，使其只需满足一个装箱约束：所有指数级多个装箱约束的平均值。这样便能找到一个好码，并成功进行删余。现在，我们正式构造证明该定理陈述所需的论证。

B. 可达性证明

证明主要由四个部分组成。第一部分中，我们构造证明所需的单字母系综。接下来，我们给出随机编码设置，以及生成码字所用的系综分布。我们还在此说明优良码必须满足的约束，并论证存在一个以非零概率满足这些约束的码。我们进一步采用删余策略，使所有码字各不相同。第三部分中，我们构造一个协议，逐一推导编码器和解码器的所有操作，并将其描述为酉演化（或等距演化）。请注意，协议（定义 3）允许的唯一操作是量子信道，这些信道可描述为酉演化或等距演化后接偏迹操作。与此同时，我们还给出下一部分所需的引理。最后一部分分析编码和解码操作对信源 ρ^B的作用，然后按照定义 3中的方式界定迹距离。

为此，固定两个正整数 M 和 K，以及 $\epsilon \in (0,1)$。令 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示集合$[0, M-1]$和 $[0, K-1]$。给定量子信源编码设置（$\rho^B, \mathcal{H}_A, \mathcal{N}_W$），令 $|\psi_\rho\rangle^{B_R B}$为 ρ^B 的典范纯化，并令 $\rho^{B_R} \triangleq \mathrm{Tr}_B\{\Psi_\rho{}^{B_R B}\}$。此外，令 $\mathcal{H}_{A_R}$ 为与 $\mathcal{H}_A$相关联的参考空间。现在选取 $\rho^{A_R} \in S(\rho^B, \mathcal{N}_W)$。令 $\mathcal{H}_E$表示满足以下条件的希尔伯特空间：$W: \mathcal{H}_{A_R} \to \mathcal{H}_{B_R} \otimes \mathcal{H}_E$ 构成 $\mathcal{N}_W$ 的等距扩张（或斯廷斯普林扩张），根据[50, 定义 5.2。1] 且 $\dim(\mathcal{H}_E) \geq \dim(\mathcal{H}_{B_R})$。如图 1 所示，根据定义 1，将 W 相对于 ρ^{B_R} 的后验参考等距映射定义为满足条件（$W \otimes I_A$） $|\psi_\rho\rangle^{A_R A} = (I_{B_R} \otimes V)$ $|\psi_\rho\rangle^{B_R B}$的等距映射 $V: \mathcal{H}_B \to \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$，其中 $|\psi\rangle^{A_R A}$是 ρ^{A_R}的典范纯化。令 $\rho^A \triangleq \mathrm{Tr}_{B_R E}\{($ $I \otimes V)\Psi_\rho{}^{B_R B}(I \otimes V)^\dagger\}$。

1）定义系综：本节将构造与第 V-A 节中讨论的相干信息分解所使用的两个 Holevo 信息量相对应的单字母系综。首先，根据 W 的定义可得，

$$(I_{B_R} \otimes V)\,|\psi_\rho\rangle^{B_R B} = (W \otimes I_A)\,|\psi\rangle^{A_R A} = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sqrt{\lambda_a^A} W\,|a\rangle^{A_R} \otimes |a\rangle^A\,, \tag{18}$$

其中，我们将 $\rho^A = \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A\,|a\rangle\langle a|^A$ 表示为其谱分解，并对某个有限集 $\mathcal{A}$ 中的 $a \in \mathcal{A}$ 定义 $|a\rangle^{A_R} \triangleq (I_{A_R} \otimes \langle a|^A)\ |\Gamma\rangle^{A_R A}$。此外，还可得，

$$W\,|a\rangle^{A_R} = \frac{(\langle a|^A \otimes I_{B_R E})(I_{B_R} \otimes V)\,|\psi_\rho\rangle^{B_R B}}{\sqrt{\lambda_a^A}}. \tag{19}$$

利用 ρ^B 的谱分解 $\rho^B = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b^B\,|b\rangle\langle b|^B,$，其中 $b \in \mathcal{B}$，且 $\mathcal{B}$ 属于某个有限集，我们可以将 V 对 ρ^B 的作用改写为

$$\begin{aligned}(I_{B_R} \otimes V)\,|\psi_\rho\rangle^{B_R B} &= \sum_{b\in\mathcal{B}} \sqrt{\lambda_b^B}\,|b\rangle^{B_R} \otimes V\,|b\rangle^B \\ &= \left(I_{B_R} \otimes I_E \otimes \sum_{a\in\mathcal{A}} |a\rangle\langle a|^A\right) \sum_{b\in\mathcal{B}} \sqrt{\lambda_b^B}\,|b\rangle^{B_R} \otimes V\,|b\rangle^B \\ &= \sum_{a\in\mathcal{A}} \sum_{b\in\mathcal{B}} \sqrt{\lambda_b^B}\,|b\rangle^{B_R} M_a\,|b\rangle^B \otimes |a\rangle^A\,,\end{aligned} \tag{20}$$

其中定义$|b\rangle^{B_R} \triangleq (I_{B_R} \otimes \langle b|^B)\ |\Gamma\rangle^{B_R B}$，并将 $M_a:\ \mathcal{H}_B \to \mathcal{H}_E$ 定义为

$$M_a \triangleq \left(I_E \otimes \langle a|^A\right)V. \tag{21}$$

通过定义正算子值测度 $\Lambda \triangleq \{M_a^\dagger M_a\}_{a\in\mathcal{A}}$，我们可以确定一个与 Λ 对应的相干测量（等距映射）U_Λ，其中$U_\Lambda \triangleq \sum_{a\in\mathcal{A}} M_a \otimes |a\rangle^A$，因此可以将 V 的作用表示为

$$(I_{B_R} \otimes V)\,|\psi_\rho\rangle^{B_R B} = (I_{B_R} \otimes U_\Lambda)\,|\psi_\rho\rangle^{B_R B}\,. \tag{22}$$

现在我们的目标是忠实地模拟等距映射（或相干测量）的作用 U_Λ，同时使用在 $\mathcal{H}_{A^n}$中指数级更小的子空间。等价地，我们希望尽可能减少在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{A^n}$中表示量子态所需的量子比特数。采用 Schumacher 压缩 [1]，只能以冯·诺依曼熵为码率，忠实地模拟 U_Λ。然而，由于 U_Λ 是相干测量，我们采用测量压缩协议的相干版本 [27]，并展示如何在进一步降低资源需求的同时忠实地模拟该等距映射。具体而言，我们构造一个近似相干测量（以下简称覆盖等距映射） $U_{\mathcal{M}}$，以忠实地模拟 U_Λ 的作用，同时所需码率等于与典范系综 $\{\lambda_a^A, \hat{}\rho_a^{B_R}\}$相对应的 Holevo量，其中

$$\hat{\rho}_a^{B_R} \triangleq \frac{\sqrt{\rho^{B_R}}(M_a^\dagger M_a)^T\sqrt{\rho^{B_R}}}{\lambda_a^A} \quad \text{and} \quad (M_a^\dagger M_a)^T \triangleq \sum_{b,b'} |b\rangle \langle b'|^{B_R} \langle b'|(M_a^\dagger M_a)\,|b\rangle^B . \tag{23}$$

注意，利用 M_a 式（21）的定义，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\Big\{M_{a'}^\dagger M_a \rho^B\Big\} &= \mathrm{Tr}\Big\{(I_{B_R E}\otimes\langle a|)V\,|\psi_\rho\rangle\langle\psi_\rho|^{B_R B}\,V^\dagger(|a'\rangle\otimes I_{B_R E})\Big\} \\
&= \sum_b \sqrt{\lambda_a^A\lambda_{a'}^A}\,\mathrm{Tr}\Big\{\langle b|\,W|a'\rangle\,\langle a|\,W^\dagger\,|b\rangle\Big\} \\
&= \sum_b \sqrt{\lambda_a^A\lambda_{a'}^A}\,\langle a|\,W^\dagger\,|b\rangle\langle b|\,W|a'\rangle = \lambda_a^A\cdot\mathbb{1}_{\{a=a'\}},
\end{aligned} \tag{24}$$

对于所有 a，$a'\in\mathcal{A}$，其中，第一个等号使用了 M_a的定义，第二个等号则由关系式（18）得出。利用式（19）中的简化形式，可以注意到

$$W\,|a\rangle^{A_R} = \frac{(I_{B_R}\otimes M_a)\,|\psi_\rho\rangle^{B_R B}}{\sqrt{\lambda_a^A}}. \tag{25}$$

F对于第二个 Holevo 信息，我们将打包系综 $\{\lambda_a^E, \tau_a^E\}$ 定义为

$$\tau_a^E \triangleq \frac{\mathrm{Tr}_{B_R}\,(I_{B_R}\otimes M_a)\Psi_\rho^{B_R B}(I_{B_R}\otimes M_a)^\dagger}{\lambda_a^E} = \frac{M_a\rho^B M_a^\dagger}{\lambda_a^E}, \quad \text{and} \quad \lambda_a^E \triangleq \lambda_a^A. \tag{26}$$

讨　论如何利用该系综降低码率的内容将在下文中接　　1.

2）随机编码与删余：本节构造随机编码论证，并同时定义构造优质随机码所需满足的所有条件。随后，我们随机生成一个满足这些约束的码。然后对该码进行删余，以确保其中没有重复项。为了构造一个逼近相干测量$U_{\mathcal{M}}$，按照以下修剪分布随机且独立地选取 $|\mathcal{M}|\times|\mathcal{K}|$ 个序列 $A^n(m,k)$

$$\mathbb{P}\left(A^n(m,k)=a^n\right) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{a^n}^A}{(1-\varepsilon)} & \text{for} \quad a^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(A) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{27}$$

其中，$\varepsilon = \sum_{a^n \notin \mathcal{T}^{(n)\,\delta}(A)} \lambda_{a^n}^A$，$\mathcal{T}^{(n)\,\delta}(A)$ 是分布 λ_a^A在集合$\mathcal{A}$上的 δ-典型集合，且$\lambda_{a^n}^A \triangleq \Pi_{i=1}^n \lambda_{a_i}^A$。令 $\mathcal{C}^{(m)}$ 表示给定 m时的码本 $\{A^n(m,k)\}_{k\in\mathcal{K}}$，并令 $\mathcal{C}$ 表示所有码本 $\{\mathcal{C}^{(m)}\}_{m\in\mathcal{M}}$的集合。此外，对于每个 $a^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(A)$ 定义

$$\tilde{\rho}_{a^n}^{B_R} \triangleq \hat{\pi}\pi_{\rho^{B_R}}\pi_{a^n}\hat{\rho}_a^{B_R}\pi_{a^n}\pi_{\rho^{B_R}}\hat{\pi}, \tag{28}$$

以及 $\tilde{\rho}_{a^n}^{B_R} = 0$，对于 $a^n \notin \mathcal{T}_\delta^{(n)}(A)$，其中 $\hat{}\rho_a^{B_R} \triangleq \bigotimes_i \hat{}\rho_{a_i}^{B_R}$、$\pi_{\rho^{B_R}}$ 和 π_{a^n} 是 $\delta-$典型投影算子和条件典型投影算子，其定义与 [50, Def. 15.1.3] 和 [50, Def. 15.2.4]，中相同，分别相对于 $\rho^{B_R} = \sum_{a\in\mathcal{A}} \lambda_a^A \hat{}\rho_a^{B_R}$ 和 $\hat{}\rho_a^{B_R}$；而 $\hat{}\pi$ 是 [27] 中定义的截断投影算子。使用平均温和测量引理 [50, Lemma 9.4.3], ，对于任意给定的 $\epsilon \in (0,1)$，当 n 充分大且 δ 充分小时，我们有

$$\sum_{a^n\in\mathcal{A}^n} \lambda_{a^n}^A \|\hat{\rho}_{a^n}^{B_R} - \tilde{\rho}_{a^n}^{B_R}\|_1 \leq \epsilon. \tag{29}$$

上述结论的详细证明见 [58, Eq. 35]。利用这些定义，构造算子

$$A_{a^n}^{B_R^n} \triangleq \gamma_{a^n}\left(\sqrt{\rho^{B_R\otimes n}}^{-1}\tilde{\rho}_a^{B_R}\sqrt{\rho^{B_R\otimes n}}^{-1}\right), \quad \gamma_{a^n} \triangleq \frac{1-\varepsilon}{1+\eta}\frac{1}{|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}|\{(m,k): A^n(m,k)=a^n\}|, \tag{30}$$

且 $\eta \in (0,\ 1)$ 是一个决定未获得子 POVM 概率的参数。注意，在 $A_{a^n}^{B_R^n}$ 的定义中，右侧作用于 $\mathcal{H}_{B_R^n}$，然而，我们定义属于$\mathcal{L}(\mathcal{H}_{A^n})$的 A_{a^n}。为此，我们将 $A_{a^n}^{B_R^n}$变换为

$$A_{a^n} = \sum_{b^n,\bar{b}^n} \langle b^n|A_{a^n}^{B_R^n}|\bar{b}^n\rangle_{B_R} |b^n\rangle\langle\bar{b}^n|_B.$$

然后构造子 POVM $\Gamma^{(n)}$ 如下

$$\Gamma^{(n)} \triangleq \{A_{a^n} : a^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(A)\}. \tag{31}$$

令 $\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}$ 表示与 $\Gamma^{(n)}$ 构成子 POVM 这一事件相对应的指示随机变量。我们有如下结果。

命题 1。对于任意 $\epsilon\in(0,\ 1)$、任意 $\eta\in(0,\ 1)$、任意充分小的 $\delta\in(0,\ 1)$ 以及任意充分大的 n，若 $\frac{1}{n}(\log M + \log K) > \chi(\lambda_a^{B_R},\ \hat{}\rho_a^{B_R})$，则有 $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\right] > 1-\epsilon$。

证明。结果由 [27]得出。 □

定义依赖于码的随机变量E_1 和E_2 如下

$$E_1 \triangleq \sum_{m\in\mathcal{M}}\sum_{k\in\mathcal{K}}(|\mathcal{M}||\mathcal{K}|)^{-1}\,\mathrm{Tr}\left\{\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}\right\}, \quad \text{and} \quad E_2 \triangleq \sum_{m\in\mathcal{M}}\sum_{k\in\mathcal{K}}(|\mathcal{M}||\mathcal{K}|)^{-1}\left\|\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R} - \hat{\rho}_{m,k}^{B_R}\right\|_1,$$

其中 $\hat{\rho}_{m}^{B_R}$、$_k$和 $\tilde{\rho}_{m}^{B_R}$、$_k$ 是简写符号，分别表示 $\tilde{\rho}_{a^n(m,\ k)}^{B_R}$ 和 $\tilde{\rho}_{a^n(m,\ k)}^{B_R}$。此外，利用 [58, 式（28）和式（35）], 对所有 $\epsilon \in (0,\ 1)$均成立的结果，可得 $\mathbb{E}[E_1] \geq 1-\epsilon$，以及$\mathbb{E}[E_2] \leq \epsilon$，对所有充分大的 n 和所有充分小的 $\delta > 0$均成立。

现在，考虑系综 $\{\lambda_a^E, \tau_a^E\}$，我们使用码本$\mathcal{C}$和式（27）中定义的分布构造算子$\{\tau_{a^n(m,\ k)}^E\}$，其中 $\tau_{a^n}^E \triangleq \bigotimes_i \tau_{a_i}^E$。对于该系综，我们构造一组 n字母正算子值测度，每个 $m \in \mathcal{M}$对应一个，能够解码消息 $k \in \mathcal{K}$。具体而言，我们采用如下定义的 Holevo POVM [28]：

$$\xi_k^{(m)} \triangleq \pi^\tau \pi_k^{(m)} \pi^\tau \quad \text{and} \quad \Xi_k^{(m)} \triangleq \left(\sum_{k' \in \mathcal{K}} \xi_{k'}^{(m)}\right)^{-1/2} \xi_k^{(m)} \left(\sum_{k' \in \mathcal{K}} \xi_{k'}^{(m)}\right)^{-1/2}, \tag{32}$$

其中，π^τ 是为密度算子 $\tau \triangleq \sum_{a \in \mathcal{A}} \lambda_a^E \tau_a^E$定义的 δ–典型投影算子（如 [50, 定义 15.1.3]中所示），$\pi_k^{(m)}$ 表示算子 $\tau_{a^n(m,\ k)}$对应的强条件典型投影算子（如 [50, 定义 15.2.4]中所示）。对于这些正算子值测度，我们知道，可以使平均错误概率任意小。更形式化地说，有如下结论。

命题 2。给定系综 $\{\lambda_a^E, \tau_a^E\}$和正算子值测度的集合 $\{\Xi_k^{(m)}\}_k$，对于任意 $\epsilon \in (0, 1)$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathrm{Tr}\left\{\Xi_k^{(m)} \tau_k^{(m)}\right\}\right] \geq 1-\epsilon, \tag{33}$$

对于充分小的 $\delta > 0$、所有充分大的 n以及所有 $m \in \mathcal{M}$，若 $\frac{1}{n}$对数 $K < \chi(\{\lambda_a^E, \tau_a^E\})$，其中 $\tau_k^{(m)}$ 是 $\tau_{a^n(m,\ k)}$的简写。

证明。该证明由量子信道上的经典通信 [28] 或 [50,引理 16.3 的装填引理的结果直接得到，同时作如下对应。对于每个 $m \in \mathcal{M}$，将 $\mathcal{M}$对应为 $\mathcal{K}$，将 X对应为 $\mathcal{T}_{(n)\delta}(\mathcal{A})$，将 $\{\sigma_{C_m}\}_m$对应为 $\{\tau_k^{(m)}\}_k$，将 Π对应为 π^τ，将 Π_x对应为 $\pi_k^{(m)}$，将 d对应为 $2^{n(S(E|A)_{\bar{\tau}}+\bar{\delta})}$，将 D对应为 $2^{n(S(E)_{\bar{\tau}}-\bar{\delta})}$，并将 Λ_m对应为 $\Xi_k^{(m)}$，其中 $\bar{\tau}^{AE} \triangleq \sum_a \lambda_a^E |a\rangle\langle a|_A \otimes \tau_a^E$和 $\bar{\delta}(\delta) \searrow 0$作为 $\delta \searrow 0$。

□

上述结果还蕴含一个较弱的平均结果，这对于此处已足够。对于足够小的 $\delta > 0$，以及所有足够大的 n，若 $\frac{1}{n}\log K < \chi(\{\lambda_a^E, \tau_a^E\})$，则可表述为 $\mathbb{E}[E_3] \geq 1-\epsilon$，其中

$$E_3 \triangleq \frac{1}{MK} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathrm{Tr}\left\{\Xi_k^{(m)} \tau_k^{(m)}\right\}. \tag{34}$$

最后，为了找到一个好的码，我们还需要满足最后一个性质：所有码字都互不相同。在对偶问题——量子信道通信问题中，[32], Devetak 利用覆盖误差的双指数衰减，证明了对于指数多个覆盖约束，存在一个删余码。然而，在当前问题中，我们有指数多个打包

约束，每个约束的误差都仅呈指数衰减。为了解决这一问题，我们提出了一种证明方法，只需考虑打包约束的平均值。然而，在这种情况下，删余策略应当如何制定并不明确。为此，我们引入另一个事件，用以刻画码本中码字不互异的情况，并针对这一事件进行删余。具体而言，如果存在 $(m',k') \neq (m,k)$ 使得 $A^n(m,k) = A^n(m',k')$。则称码字 $A^n(m,k)$ 为坏码字。令

$$E_4 \triangleq \frac{1}{MK} \sum_{m\in\mathcal{M}} \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\{A^n(m,k) \text{ is bad}\}}.$$

计算其期望，得到

$$\mathbb{E}[E_4] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{MK} \sum_{m\in\mathcal{M}} \sum_{k\in\mathcal{K}} \mathbb{1}_{\{\exists (m',k')\neq(m,k) \text{ such that } A^n(m,k)=A^n(m',k')\}}\right]$$

$$\overset{a}{\leq} \frac{1}{MK} \sum_{\substack{m,m'\in\mathcal{M}\\ k,k'\in\mathcal{K}\\ (m,k)\neq(m',k')}} \sum_{a^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(A)} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{A^n(m,k)=a^n\}}\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{A^n(m',k')=a^n\}}\right] \overset{b}{\leq} MK2^{-n(S(\lambda_a^A)-\delta_1)} \leq \epsilon, \quad (35)$$

对于所有充分大的 n 和充分小的 $\delta > 0$，若 $\frac{1}{n}(\log M + \log K) < S(\lambda_a^A)$，则成立，其中 (a) 利用了码字的相互独立性，而 (b) 将 δ_1 定义为 $\delta_1(\delta,\ \varepsilon) \searrow 0$，将 δ定义为，$\varepsilon \searrow 0$。利用马尔可夫不等式和并集界，可得

$$\mathbb{P}\Big(\{\mathbb{1}_{\{\text{sP}\}} = 1\} \cap \{E_1 \geq 1-\sqrt{\epsilon}\} \cap \{E_2 \leq \sqrt{\epsilon}\} \cap \{E_3 \geq 1-\sqrt{\epsilon}\} \cap \{E_4 \leq \sqrt{\epsilon}\}\Big) \geq 1 - 5\sqrt{\epsilon}.$$

因此，对于所有 $\epsilon \in (0,\ 1/25)$，以及所有充分小的 $\delta > 0$，对于所有充分大的 n，存在一个码 $\mathcal{C}$，使其同时满足条件 $\{\mathbb{1}_{\{\text{sP}\}} = 1\}$、$\{E_1 \geq 1-\sqrt{\epsilon}\}$、$\{E_2 \leq \sqrt{\epsilon}\}$、$\{E_3 \geq 1-\sqrt{\epsilon}\}$ 和 $\{E_4 \leq \epsilon\}$，当

$$\frac{1}{n}(\log M + \log K) > \chi(\lambda_a^{B_R}, \hat{\rho}_a^{B_R}), \quad \frac{1}{n}\log K < \chi(\{\lambda_a^E, \tau_a^E\}), \quad \frac{1}{n}(\log M + \log K) < S(\lambda_a^A). \quad \text{(S-0)}$$

此时，我们选取一个满足上述所有条件的码 $\mathcal{C}$，并在接下来的分析中固定使用它。

为证明所选的码实现定理陈述中给出的渐近性能，我们针对随机变量 E_4 对码 $\mathcal{C}$ 进行删余，确保该码中的码字各不相同。码本中的码字互不相同这一假设在证明的多个环节都至关重要，并将在必要时特别指出。由于 $\{E_4 \leq \sqrt{\epsilon}\}$ 确保 $\mathcal{C}$ 中至多有 $\sqrt{\epsilon}MK$ 个码字不互异，我们从 $\mathcal{C}$中移除 $\sqrt{\epsilon}MK$ 个码字。具体而言，先移除所有不互异的码字，然后（若有需要）再从互异的码字中任意移除一些，直至剩下总计 $(1-\sqrt{\epsilon})MK$ 个码字。将删余后剩余的码字集合记为 $\mathcal{C}_\mathcal{E}$，并将集合 $\mathcal{C}_\mathcal{E}^{(m)}$ 定义为 $\mathcal{C}_\mathcal{E}^{(m)} \triangleq \mathcal{C}_\mathcal{E} \cap \mathcal{C}^{(m)}$。注意，$\mathcal{C}_\mathcal{E}$中的所有码字均互不相同。然而，与在 $\mathcal{C}^{(m)}$ 的大小（一致于

K 对所有 $m \in \mathcal{M}$ 均成立）相一致的 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ 不同，其大小会变化。因此，我们将 K'_m 定义为 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{(m)}$ 的大小，并将 M'定义为集合族 $\{\mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{(m)}\}_{m\in\mathcal{M}}$中非空集合的数量。注意，对于某些 $m \in \mathcal{M}$， K'_m 可能为零。令 $\mathcal{M}'$ 表示 $\mathcal{M}$ 中满足 $K'_m > 0$的子集，并令 $\mathcal{H}'_M$ 表示相应的希尔伯特空间，其维数 $\dim(\mathcal{H}'_M)$ 为 $= M'+1$。显然，$\sum_{m\in\mathcal{M}'} K'_m = (1-\sqrt{\epsilon})MK$。此外，将与删余码本对应的指标集合定义为 $\mathcal{I}_E^{(m)} \triangleq \{k : \ a^n(m,k) \ \in \mathcal{C}_{\mathcal{E}}^{(m)}\}$ 以及$\mathcal{I}_E \triangleq \{(m,k): \ a^n(m,k) \in \bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}\}$。进一步，对于删余后的码，有

$$E'_1 \triangleq \frac{1}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|} \sum_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k\in\mathcal{I}_E^{(m)}} \mathrm{Tr}\left\{\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}\right\} \geq 1-2\sqrt{\epsilon}, \tag{36}$$

$$E'_2 \triangleq \frac{1}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|} \sum_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k\in\mathcal{I}_E^{(m)}} \left\|\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R} - \hat{\rho}_{m,k}^{B_R}\right\|_1 \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{1-\sqrt{\epsilon}} \leq 2\sqrt{\epsilon}, \tag{37}$$

$$E'_3 \triangleq \frac{1}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|} \sum_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k\in\mathcal{I}_E^{(m)}} \mathrm{Tr}\left\{\Xi_k^{(m)}\tau_k^{(m)}\right\} \geq 1-2\sqrt{\epsilon}, \tag{38}$$

其中，上述不等式成立，是因为码本 $\mathcal{C}$ 满足 $\{E_1 \geq 1-\sqrt{\epsilon}\}$， $\{E_2 \leq \sqrt{\epsilon}\}$和 $\{E_3 \geq \bar{1}-\sqrt{\epsilon}\}$，且码中仅有 $\sqrt{\epsilon}$ 的部分被删余。注意, -事件 $\{\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} = 1\}$对于删余后的 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$仍然成立。定义集合

$$\Gamma_{\mathcal{E}}^{(n)} \triangleq \{A_{a^n(m,k)}\}_{m\in\mathcal{M}',k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}.$$

集合 $\Gamma_{\mathcal{E}}^{(n)}$ 通过算子 $I - \sum_{m\in\mathcal{M}'}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}} A_{a^n(m,\ k)}$补全，该算子与序列 a_0^n 相关联，而该序列从 $\mathcal{A}^n \backslash \mathcal{T}_\delta^{(n)}$ (A)中任意选取，即

$$A_{a_0^n} \triangleq I - \sum_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}} A_{a^n(m,k)}.$$

针对这个删余码，我们现在构造编码和解码操作。

3）编码与解码等距映射：编码等距映射 $U_{\mathcal{E}}$ 由以下三个等距变换依次复合构成：(i) 覆盖等距映射 $U_{\mathcal{M}}$： $\mathcal{H}_{B^n} \to \mathcal{H}_{B^n} \otimes \mathcal{H}'_M \otimes \mathcal{H}_K$；(ii) 旋转等距变换$U_{\mathcal{R}}$：
$\mathcal{H}_{B^n} \otimes \mathcal{H}'_M \otimes \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_{E^n} \otimes \mathcal{H}'_M \otimes \mathcal{H}_K$；以及 (iii) 打包等距变换 $U_{\mathcal{P}}$： $\mathcal{H}_{E^n} \otimes \mathcal{H}_{\bar{E}} \otimes \mathcal{H}'_M \otimes \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_{E^n} \otimes \mathcal{H}_{\bar{E}} \otimes \mathcal{H}'_M \otimes \mathcal{H}_K$，其中 $\mathcal{H}'_M$， $\mathcal{H}_K$和 $\mathcal{H}_{\bar{E}}$是辅助希尔伯特空间，其维数分别为 $M'+1$， $K+1$和 $K+1$。

步骤 1.1：覆盖等距映射

为定义覆盖等距映射 $U_{\mathcal{M}}$，我们将完备化 $[\Gamma_{\mathcal{E}}^{(n)}]$ 定义为

$$U_{\mathcal{M}} \triangleq \sum_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}} \sqrt{A_{a^n(m,k)}} \otimes |m\rangle \otimes |k\rangle + \sqrt{A_{a_0^n}} \otimes \left|M'\right\rangle_M \otimes |K\rangle_K. \tag{39}$$

注意，对于选定的码，事件 $\{\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} = 1\}$ 使得 $U_{\mathcal{M}}$ 成为有效的等距映射。为便于记号，以下我们用 $M_{m,\ k}$， $\lambda_{m\ ,\ k}^{B_R}$，和 $A_{m,\ k}$ 表示为码字 $A^n(m,\ k)$构造的相应字母对象。

步骤 1.2：旋转等距变换

尽管上述覆盖酉算子旨在覆盖信源，但它只对参考系统起作用。为了能够进行下一步的打包，我们希望将测量后状态用作辅助信息。如果测量后状态看起来也接近乘积态，这便有可能实现。为此，我们采用旋转酉算子。关于测量后获得的经典-量子态， [59, 事实 6] 中讨论了类似操作。下面的构造将此推广到测量的相干应用。更形式化地，对于删余码 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$，我们构造如下量子态

$$|\hat{\sigma}\rangle^{B_R^n E^n MK} \triangleq \sum_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}} \frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}} \frac{(I\otimes M_{m,k})}{\sqrt{\lambda_{m,k}}} \left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle^{B_R^n B^n} \otimes |m,k\rangle \text{ and}$$

$$|\tilde{\sigma}\rangle^{B_R^n B^n MK} \triangleq \sum_{m\in\mathcal{M}'} \sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}} \frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}} \frac{(I\otimes \sqrt{A_{m,k}})}{\sqrt{\delta_{m,k}}} \left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle^{B_R^n B^n} \otimes |m,k\rangle\,, \tag{40}$$

其中 $\delta_{m,\,k} \triangleq \mathrm{Tr}\left\{A_{m,\,k}\rho^{B^{\otimes n}}\right\} = \gamma \mathrm{Tr}\left\{\tilde{\rho}_{m,\,k}^{B_R}\right\}$，且 $\gamma \triangleq \frac{1-\varepsilon}{1+\eta}\frac{1}{|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}$.为简洁起见，当对属于与删余码本 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ 对应的集合 $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ 的码字求和时，我们省略对 m 或 k 求和时的集合。显然， $|\hat{\sigma}\rangle^{B_R^n E^n MK}$ 和 $|\tilde{\sigma}\rangle^{B_R^n B^n MK}$ 都是合法的量子态。现在，为了构造 $U_{\mathcal{R}}$，考虑以下用于给出保真度上界的引理。

引理 4. 对于任意 $\epsilon,\ \eta \in (0,\ 1)$，存在一组等距变换 $\{U_r(m,\ k)\colon\ \mathcal{H}_{B^n} \to \mathcal{H}_{E^n}\}$以及一组相位 $\theta_{m,\,k}$，使得对于所有充分大的 n 和所有充分小的 $\delta > 0$，均有 $F(|\hat{\sigma}\rangle^{B_R^n E^n MK},\ (I_{B_R}\otimes U_{\mathcal{R}})|\tilde{\sigma}\rangle^{B_R^n B^n MK}) \geq 1 - 4\sqrt{\epsilon}$，其中

$$U_{\mathcal{R}} \triangleq \sum_{m\in\mathcal{M}'\cup\{M'\}} \sum_{k\in\mathcal{K}\cup\{K\}} e^{-i\theta_{m,k}} U_r(m,k)\otimes |m\rangle\langle m|_M \otimes |k\rangle\langle k|_K\,. \tag{41}$$

且 $U_r(m,k) = I$ 且 $\theta_{m,\,k} = 0$ 对所有满足 $a^n(m,k) \notin \mathcal{C}_{\mathcal{E}}$的$(m,k) \in (\mathcal{M}\times\mathcal{K})$.

证明。 利用（36）、（37）以及引理 7即可得到该引理的证明。为完整起见，我们在附录 B中详细给出证明。 □

步骤 1.3：打包等距变换

注意到，通过相干地执行覆盖和旋转操作，可以证明信源ρ_B 能够由量子寄存器 $\{|m,k\rangle\}$成功恢复。这意味着量子态$\{|m,k\rangle\}$ 可供解码器使用，从而按照定义 3忠实地重构信源。因此，我们需要的码率为 $\frac{1}{n}\log M + \frac{1}{n}\log K$，且必须大于 Holevo 信息$\chi(\lambda_a^{B_R},\ \hat{\rho}_a^{B_R})$，如命题 1所要求。然而，我们希望进一步将码率从该 Holevo 信息降低到定理陈述中给出的相干信息。

或许可以这样问：为什么我们不能直接将 $\mathcal{H}_K$ 系统中的信息释放到环境中（偏迹）？但正如纯量子设置所预期的那样，这会导致协议变得不相干。更准确地说，编码器所持有的子系统 $\mathcal{H}_{E^n}$ 与子系统 $\mathcal{H}_K$ 纠缠在一起；若不先使这两个系统解耦就对后者进行偏迹，前者便会变成混合态。一旦这种纠缠消失，解码器就无法利用这样的（混合）量子态忠实地重构信源。

因此，这里的一个主要任务是在将系统 $\mathcal{H}_K$ 释放到环境之前，成功地将其解耦。为此，我们引入相干装箱或相干分箱的概念。这一概念基于这样一种思想： $\mathcal{H}_{E^n}$ 中经测量后的系统包含有关量子态 $|k\rangle_K$的信息，因此，在给定量子态 $|m\rangle$的条件下，可以从子系统 $\mathcal{H}_{E^n}$中的量子态恢复出一份量子态 $|k\rangle$ 的副本，尽管错误概率很小。借助这份副本，我们打算将现有的 $|k\rangle$ 副本与后者解耦。然而，这份新副本可以擦除（解耦）原副本，但自身仍会保留下来。因此，正如后文将会明了的，我们会以内在的方式擦除 $\mathcal{H}_K$ 中的信息，而不产生任何额外副本。

为此，我们采用由子 POVM $\{\Xi_k^{(m)}\}_{k\in\mathcal{I}_\mathcal{E}^{(m)}}$ 组成的装箱码，它们是为系综 $\{\lambda_a^E, \tau_a^E\}$生成的。对于每个 $m \in \mathcal{M}'$，我们将此子 POVM 补全为

$$\Xi_K^{(m)} \triangleq I - \sum_{k\in\mathcal{I}_\mathcal{E}^{(m)}} \Xi_k^{(m)}.$$

此外，我们还使用奈马克扩张定理（另见引理 3）。该引理为我们提供了一组正交投影算子 $\{\Pi_k^{(m)}\}$，每个算子都作用于 $\mathcal{H}_{E^n} \otimes \mathcal{H}_{\bar{E}}$，并对应于集合 $\{\Xi_k^{(m)}\}_k$，使得

$$\mathrm{Tr}\Big\{\Pi_k^{(m)}(\tau_k^{(m)} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\bar{E}})\Big\} = \mathrm{Tr}\Big\{\Xi_k^{(m)}\tau_k^{(m)}\Big\}, \tag{42}$$

对于所有 $m \in \mathcal{M}'$和 $k \in \mathcal{I}_\mathcal{E}^{(m)} \cup \{K\}$，且 维数 $\mathcal{H}_{\bar{E}} = K + 1$。最后，我们将打包酉算子 $U_\mathcal{P}$定义为

$$U_\mathcal{P} \triangleq \sum_{m\in\mathcal{M}'} \left[\sum_{k\in\mathcal{I}_\mathcal{E}^{(m)}\cup\{K\}} \Pi_k^{(m)} \otimes \left(\sum_{k'\in\mathcal{K}\cup\{K\}} e^{i\alpha_{k'}^{(m)}} \left|(k-k') \bmod (K+1)\right\rangle\langle k'|\right)\right] \otimes |m\rangle\langle m|$$
$$+ I_{E^n\bar{E}K} \otimes \left|M'\right\rangle\!\left\langle M'\right|, \tag{43}$$

其中，引入相位 $\{\alpha_k^{(m)}\}$ 是为了后续处理方便，具体将在下文中给出[1]。注意，在上述定义中使用 $\Pi_k^{(m)}$而非 $\Xi_k^{(m)}$，可确保 $U_\mathcal{P}U_\mathcal{P}^\dagger = I$，这意味着 $U_\mathcal{P}$是一个有效的酉算子。

[1]接下来，我们 为简洁起见，默认使用模运算，而不再明确提及 .

因此，我们可以将编码完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{(n)}$ 表示为

$$\left(I_{B_R^n}\otimes\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{(n)}\right)\left(\left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle\!\left\langle\psi_\rho^{\otimes n}\right|^{B_R^nB^n}\right)$$
$$\triangleq \mathrm{Tr}_{\bar{E}E^nK}\left((I\otimes U_{\mathcal{P}}U_{\mathcal{R}}U_{\mathcal{M}})\left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle\!\left\langle\psi_\rho^{\otimes n}\right|^{B_R^nB^n}\otimes|0\rangle\!\langle 0|_{\bar{E}}(I\otimes U_{\mathcal{P}}U_{\mathcal{R}}U_{\mathcal{M}})^\dagger\right). \quad (44)$$

量子态 $\mathcal{H}'_M$ 现在被发送到解码器。

步骤 1.4：解码等距映射：

对$\mathcal{H}'_M$中的量子态应用以下解码等距映射：

$$U_{\mathcal{D}}\triangleq\sum_{m\in\mathcal{M}'}\left(\frac{1}{\sqrt{K'_m}}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}e^{-i\beta_k^{(m)}}|a^n(m,k)\rangle\right)\langle m|+|a_0^n\rangle\langle M'|, \quad (45)$$

其中，相位 $\{\beta_k^{(m)}\}$ 将在后续部分中确定。注意，为了证明 $U_{\mathcal{D}}$ 是一个有效的等距操作，我们需要向量 $\{|a^n(m,k)\rangle\}$ 彼此不同。通过对码本进行删减以生成 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$，并且只使用来自 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ 的码字，即可确保这些向量彼此不同。根据编码器和解码器的定义，我们继续对该协议产生的误差进行界定（如定义2中所定义）。

4）迹距离：我们首先定义以下术语

$$|\omega\rangle^{B_R^nE^n\bar{E}A^nK}\triangleq(I\otimes U_{\mathcal{D}})(I\otimes U_{\mathcal{P}})(I\otimes U_{\mathcal{R}}U_{\mathcal{M}})\left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle^{B_R^nB^n}|0\rangle_{\bar{E}},$$
$$|\zeta\rangle^{B_R^nE^nA^n}\triangleq(W^{\otimes n}\otimes I)|\psi_\omega\rangle^{A_R^nA^n}, \quad (46)$$

其中，[2] $|\psi_\omega\rangle^{A_R^nA^n}$ 是 ω^{A^n}的典范纯化。令

$$G\triangleq\|\omega^{B_R^nA^n}-\zeta^{B_R^nA^n}\|_1.$$

根据定义2，我们的目标现在是证明，对于所有充分大的 G ，码 n 对应的码 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$可以任意小。

步骤 2.1：与$(I\otimes U_{\mathcal{D}})(I\otimes U_{\mathcal{P}})$ $|\sigma\rangle$ 的接近性：

回顾（40）中的 $|\sigma\rangle$ 和 $|\tilde{\sigma}\rangle$ 的定义，并令$|\omega_1\rangle\triangleq(I\otimes U_{\mathcal{R}}U_{\mathcal{M}})|\psi_\rho\rangle^{B_R^nB^n}$ 和 $\varepsilon_1\triangleq(1-\varepsilon)/(1+\eta)$。考虑

$$\sqrt{F\left(|\omega_1\rangle^{B_R^nE^nMK},(I\otimes U_{\mathcal{R}})|\tilde{\sigma}\rangle^{B_R^nE^nMK}\right)}$$
$$=\sum_{m,k}\frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}\frac{\langle\psi_\rho|(I\otimes U_r(m,k)\sqrt{A_{m,k}})^\dagger((I\otimes U_r(m,k)\sqrt{A_{m,k}})|\psi_\rho\rangle}{\sqrt{\delta_{m,k}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}}\sum_{m,k}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}\sqrt{\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{m,k}\}}\geq\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}}\sum_{m,k}\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{m,k}\}\geq\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{1-\sqrt{\epsilon}}(1-2\sqrt{\epsilon}), \quad (47)$$

[2]为简洁起见，在上下文含义明确时，我们省略 $\left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle^{B_R^nB^n}$ 中的 $\otimes n$。

这里注意到，与 $\sqrt{A_{a_0^n}}\otimes|M'\rangle_M\otimes|K\rangle_K$ of$|\omega_1\rangle^{B_R^nE^nMK}$ 对应的项和量子态 $\overline{(U_{\mathcal{R}}}\otimes I)\,|\tilde{\sigma}\rangle^{B_R^nE^nMK}$ 之间不存在重叠，最后一个不等式由（36）得出。

利用引理 1以及不等式（47），可得 [3]

$$\left\|{\omega_1}^{B_R^nE^nMK}-(I\otimes U_{\mathcal{R}})\tilde{\sigma}^{B_R^nE^nMK}(I\otimes U_{\mathcal{R}})^\dagger\right\|_1 \leq 2\sqrt{1-(1-\sqrt{\epsilon})(1-2\sqrt{\epsilon})^2\left(1-\frac{\eta+\varepsilon}{1+\eta}\right)}\leq 2\sqrt{\frac{\eta+\varepsilon}{1+\eta}+5\sqrt{\epsilon}}\leq 6\sqrt[4]{\epsilon}, \tag{48}$$

对于所有充分大的 n 和充分小的 $\eta,\ \delta>0$。此外，利用迹距离的酉不变性，可得量子态的接近性：

$$\left\|(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}})\omega_1{}^{B_R^nE^nMK}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\bar{E}}\,(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}})^\dagger -(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}}U_{\mathcal{R}})\tilde{\sigma}^{B_R^nE^nMK}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\bar{E}}\,(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}}U_{\mathcal{R}})^\dagger\right\|_1\leq 6\sqrt[4]{\epsilon}. \tag{49}$$

利用引理 4 以及迹范数在等距变换下保持不变这一事实，可得

$$\begin{aligned}&\left\|(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}})\hat{\sigma}^{B_R^nE^nMK}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\bar{E}}\,(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}})^\dagger\right.\\&\qquad\left.-(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}}U_{\mathcal{R}})\tilde{\sigma}^{B_R^nE^nMK}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\bar{E}}\,(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}}U_{\mathcal{R}})^\dagger\right\|_1\\&=\left\|\hat{\sigma}-(I\otimes U_{\mathcal{R}})\tilde{\sigma}(I\otimes U_{\mathcal{R}})^\dagger\right\|_1\leq 2\sqrt{1-F\left(|\hat{\sigma}\rangle,(I\otimes U_{\mathcal{R}})\,|\tilde{\sigma}\rangle\right)}\leq 4\sqrt[4]{\epsilon}.\end{aligned} \tag{50}$$

利用三角不等式以及不等式（49）和（50），可得

$$\left\|\omega^{B_R^nE^n\bar{E}A^nK}-(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}})(\hat{\sigma}^{B_R^nE^nMK}\otimes|0\rangle\langle 0|_{\bar{E}})(I\otimes U_{\mathcal{D}}U_{\mathcal{P}})^\dagger\right\|_1\leq 10\sqrt[4]{\epsilon}, \tag{S-1}$$

对于所有充分大的 n 和充分小的 $\eta,\ \delta>0$，由此完成步骤 2.1 .

对于下一步，定义 $|\hat{\zeta}\rangle^{B_R^nE^n\bar{E}MK}$ 如下

$$|\hat{\zeta}\rangle^{B_R^nE^n\bar{E}MK}\triangleq\sum_{m\in\mathcal{M}'}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}\frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}e^{i\beta_k^{(m)}}\frac{(I\otimes M_{m,k})\,|\psi_\rho\rangle}{\sqrt{\lambda_{m,k}}}\otimes|m\rangle_M\otimes|0\rangle_K\otimes|0\rangle_{\bar{E}}, \tag{51}$$

其中相位 $\beta_k^{(m)}$ 稍后将予以说明。注意，由于 (i) $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ 中的码字彼此不同，且 (ii) 恒等式 (24) 成立，$|\hat{\zeta}\rangle^{B_R^nE^n\bar{E}MK}$ 是一个有效的纯态。此外，在其定义中，子系统 $\mathcal{H}_K$ 中的信息与其余子系统相解耦。由于 $U_{\mathcal{P}}$ 作用于 $\mathcal{H}_{E^n}\otimes\mathcal{H}_{\bar{E}}$，因此附加了一个纯辅助系统，以便进行适当的比较。我们旨在证明，该量子态接近于 $(I\otimes U_{\mathcal{P}})$ 作用于量子态 $|\hat{\sigma}\rangle\,|0\rangle_{\bar{E}}$所得的结果。

[3]有时，在上下文含义明确的情况下会省略子空间记号。

步骤 2.2： $(I\otimes U_{\mathcal{P}})\left|\hat{\sigma}\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}}$ **与** $\left|\zeta\right\rangle$ **的接近性**

我们先将$(I\otimes U_{\mathcal{P}})\left|\hat{\sigma}\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}}$简化为

$$(I\otimes U_{\mathcal{P}})\left|\hat{\sigma}\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}}=\sum_{m\in\mathcal{M}'}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}\frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}e^{i\alpha_k^{(m)}}\left|\phi_k^{(m)}\right\rangle\otimes\left|m\right\rangle_M,$$

其中

$$\left|\phi_k^{(m)}\right\rangle\triangleq\sum_{k'\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}\cup\{K\}}\frac{(I\otimes\Pi_{k'}^{(m)}M_{m,k})\left|\psi_\rho\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}}}{\sqrt{\lambda_{m,k}}}\otimes\left|k'-k\right\rangle_K,\ \text{for all } k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}\text{ and } m\in\mathcal{M}'.\quad(52)$$

类似地，令

$$\left|\hat{\zeta}\right\rangle=\sum_{m,k}\frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}e^{i\beta_k^{(m)}}\left|\chi_k^{(m)}\right\rangle\otimes\left|m\right\rangle_M,\quad\left|\chi_k^{(m)}\right\rangle\triangleq\frac{(I\otimes M_{m,k})\left|\psi_\rho\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}}}{\sqrt{\lambda_{m,k}}}\otimes\left|0\right\rangle_K,\quad(53)$$

对所有 $m\in\mathcal{M}'$ 和 $k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}$，相位 $\{\beta_k^{(m)}\}$ 与构造解码等距映射 $U_{\mathcal{D}}$时采用的相位相同。此外，由式(42可知，对所有 $m\in\mathcal{M}'$,

$$\frac{1}{K'_m}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}\langle\phi_k^{(m)}|\chi_k^{(m)}\rangle=\frac{1}{K'_m}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}\mathrm{Tr}\left\{\Xi_k^{(m)}\tau_k^{(m)}\right\}.\quad(54)$$

现在，$\left|\zeta\right\rangle$ 与$(I\otimes U_{\mathcal{P}})\left|\hat{\sigma}\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}}$之间的保真度可写为

$$\sqrt{F\left((I\otimes U_{\mathcal{P}})\left|\hat{\sigma}\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}},\left|\hat{\zeta}\right\rangle\right)}=\frac{1}{M'}\left|\sum_{m\in\mathcal{M}'}\langle\phi_m|\chi_m\rangle\right|,\quad(55)$$

其中，对所有 $m\in\mathcal{M}'$,

$$\left|\phi_m\right\rangle\triangleq c\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}e^{i\alpha_k^{(m)}}\left|\phi_k^{(m)}\right\rangle\quad\text{and}\quad\left|\chi_m\right\rangle\triangleq c\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}e^{i\beta_k^{(m)}}\left|\chi_k^{(m)}\right\rangle,$$

以及 $c\triangleq\sqrt{\frac{M'}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}$。为了给出保真度的下界，我们提出以下命题。

命题 3. 对于任意 $\epsilon\in(0,1)$，存在相位 $\{\alpha_k^{(m)}\}$, 和 $\{\beta_k^{(m)}\}$，使得

$$\left|\frac{1}{M'}\sum_{m\in\mathcal{M}'}\langle\phi_m|\chi_m\rangle\right|\geq1-2\sqrt{\epsilon},\quad(56)$$

对于所有足够小的 $\delta>0$ 和所有足够大的 n。

证明。 证明见附录 D。 □

注意 ，利用引理中的关系1以及命题 3 和（55），我们得 et

$$\left\|(I\otimes U_{\mathcal{P}})\hat{\sigma}\otimes|0\rangle\langle0|_{\bar{E}}(I\otimes U_{\mathcal{P}})^\dagger-\hat{\zeta}\right\|_1\leq2\sqrt{1-F\left((U_{\mathcal{P}}\otimes I)\left|\hat{\sigma}\right\rangle\left|0\right\rangle_{\bar{E}},\left|\hat{\zeta}\right\rangle\right)}\leq4\sqrt[4]{\epsilon},\quad(S\text{-}2)$$

对于所有充分大的 n 以及充分小的 η，$\delta>0$。注意到 $\left|\hat{\zeta}\right\rangle^{B_R^nE^nMK}=\left|\hat{\zeta}\right\rangle^{B_R^nE^nM}\otimes|0\rangle_{K\bar{E}}$，因此 $\left|\hat{\zeta}\right\rangle^{B_R^nE^nM}$ 在对$\mathcal{H}_K\otimes\mathcal{H}_{\bar{E}}$子系统进行偏迹后仍保持纯态。最后，我们需要证明量子态 $(I\otimes U_{\mathcal{D}})\left|\hat{\zeta}\right\rangle^{B_R^nE^nM}$ 与量子态 $\left|\zeta\right\rangle^{B_R^nE^nA^n}$ 的接近性。

步骤 2.3：$(I\otimes U_{\mathcal{D}})|\hat{\zeta}\rangle^{B_R^nE^nM}$ 与 $|\zeta\rangle^{B_R^nE^nA^n}$ ： 的接近性

我们首先将σ^{A^n} 定义为

$$\sigma^{A^n}\triangleq \mathrm{Tr}_{B_R^nE^n}\{(I\otimes U_{\mathcal{D}})\hat{\zeta}^{B_R^nE^nM}(I\otimes U_{\mathcal{D}})^\dagger\},$$

并进行如下化简

$$\begin{aligned}\sigma^{A^n}&=U_{\mathcal{D}}\Bigg(\sum_{m,m'}\sum_{k,k'}\frac{1}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}e^{-i(\beta_k^{(m)}-\beta_{k'}^{(m')})}\frac{\mathrm{Tr}\left(M_{mk}\rho^BM_{m'k'}^\dagger\right)}{\sqrt{\lambda_{mk}\lambda_{m'k'}}}|m\rangle\langle m'|\Bigg)U_{\mathcal{D}}^\dagger\\&=U_{\mathcal{D}}\left(\sum_m\frac{K'_m}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}|m\rangle\langle m|\right)U_{\mathcal{D}}^\dagger=\sum_m\frac{K'_m}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}|b^n(m)\rangle\langle b^n(m)|^{A^n},\end{aligned}\tag{57}$$

其中，第二个等号利用了（24）以及一个关键条件：删余后得到的码本 $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ 中的元素互不相同；最后一个等号则将 $|b^n(m)\rangle^{A^n}$ 定义为

$$|b^n(m)\rangle^{A^n}\triangleq\frac{1}{\sqrt{K'_m}}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}e^{-i\beta_k^{(m)}}|a^n(m,k)\rangle^{A^n},\tag{58}$$

对所有 $m\in\mathcal{M}'$均成立。这意味着，我们可以将 σ^{A^n} 的典范纯化写为

$$\begin{aligned}|\psi_\sigma\rangle^{A_R^nA^n}\triangleq(I_{A_R^n}\otimes\sqrt{\sigma^{A^n}})\left|\Gamma^{\otimes n}\right\rangle^{A_R^nA^n}&=\sum_m\sqrt{\frac{K'_m}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}|b^n(m)\rangle^{A_R^n}\otimes|b^n(m)\rangle^{A^n}\\&=(I\otimes U_{\mathcal{D}}^{A^n})\sum_m\sqrt{\frac{K'_m}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}|b^n(m)\rangle^{A_R^n}\otimes|m\rangle^M,\end{aligned}\tag{59}$$

其中，第一个等号是根据如下定义得到的：$|b^n(m)\rangle^{A_R^n}\triangleq(I_{A_R^n}\otimes\langle b^n(m)|^{A^n})\,|\Gamma^{\otimes n}\rangle^{A_R^nA^n}$。利用（25）中的关系以及（58）中的定义，我们可以写出

$$W^{\otimes n}|b^n(m)\rangle^{A_R^n}=\frac{1}{\sqrt{K'_m}}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}e^{i\beta_k^{(m)}}W^{\otimes n}|a^n(m,k)\rangle^{A_R^n}=\frac{1}{\sqrt{K'_m}}\sum_{k\in\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}}e^{i\beta_k^{(m)}}\frac{(I_{B_R}\otimes M_{m,k})\left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle^{B_R^nB^n}}{\sqrt{\lambda_{m,k}^A}},$$

对所有 $m\in\mathcal{M}'$均成立，由此可得

$$\begin{aligned}(W^{\otimes n}\otimes I_{A^n})|\psi_\sigma\rangle^{A_R^nA^n}&=(I\otimes U_{\mathcal{D}}^{A^n})\sum_m\sqrt{\frac{K'_m}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}W^{\otimes n}|b^n(m)\rangle^{A_R^n}\otimes|m\rangle^M\\&=(I\otimes U_{\mathcal{D}}^{A^n})\sum_{m,k}\frac{1}{\sqrt{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}}e^{i\beta_k^{(m)}}\frac{(I_{B_R}\otimes M_{m,k})\left|\psi_\rho^{\otimes n}\right\rangle^{B_R^nB^n}}{\sqrt{\lambda_{m,k}^A}}\otimes|m\rangle^M\\&=(I\otimes U_{\mathcal{D}}^{A^n})|\hat{\zeta}\rangle^{B_R^nE^nM},\end{aligned}\tag{60}$$

其中，最后一个等式由（ $|\hat{\zeta}\rangle^{B_R^nE^nM}$ ）中的定义可得。注意到

$$|\zeta\rangle^{B_R^nE^nA^n}=(W^{\otimes n}\otimes I_{A^n})|\psi_\omega\rangle^{A_R^nA^n},$$

我们还需要证明 $|\psi_\sigma\rangle^{A_R^n A^n}$ 与 $|\psi_\omega\rangle^{A_R^n A^n}$的接近性。利用（S-1）和（S-2）、三角不等式、迹距离的单调性以及适当纯化的选取，对于所有充分大的 n 和充分小的 $\eta,\ \delta>0$，可得

$$\|\omega^{A^n}-\sigma^{A^n}\|_1 \le \|\omega^{B_R^n E^n A^n}-(I\otimes U_{\mathcal{D}})\hat{\zeta}^{B_R^n E^n M}(I\otimes U_{\mathcal{D}})^\dagger\|_1 \le 14\sqrt[4]{\epsilon}.$$

这意味着，

$$\begin{aligned}\left\|(I\otimes U_{\mathcal{D}}^{A^n})\hat{\zeta}^{B_R^n E^n M}(I\otimes U_{\mathcal{D}}^{A^n})^\dagger-\zeta^{B_R^n E^n A^n}\right\|_1 &\overset{a}{=} \left\|\psi_\sigma{}^{A^n A_R^n}-\psi_\omega{}^{A^n A_R^n}\right\|_1\\ &\overset{b}{\le} 2\sqrt{1-F(|\psi_\sigma\rangle^{A^n A_R^n},|\psi_\omega\rangle^{A^n A_R^n})}\\ &\overset{c}{\le} 2\sqrt{\|\omega^{A^n}-\sigma^{A^n}\|_1}\le 2\sqrt{14\sqrt[4]{\epsilon}}\le 8\sqrt[8]{\epsilon},\end{aligned}\tag{S-3}$$

对于所有充分大的 n 和充分小的 $\eta,\ \delta>0$，其中（a）由迹距离的等距不变性得出，（b）使用引理1，而（c）使用引理2，至此完成这一步。

总而言之，结合（S-0）、（S-1）、（S-2）和（S-3）的结果，我们证明了存在一个码$\mathcal{C}$ 满足 $G\le 14\sqrt[4]{\epsilon}+8\sqrt[8]{\epsilon}$，且具有以下速率约束：

$$S(\lambda_a^A)>\frac{1}{n}(\log M+\log K)>\chi(\lambda_a^{B_R},\hat{\rho}_a^{B_R}),\ \ \frac{1}{n}\log K<\chi(\{\lambda_a^E,\tau_a^E\}),\ \ \frac{1}{n}\log M\ge 0,\ \ \ \frac{1}{n}\log K\ge 0,$$

对于所有充分大的 n 和充分小的 $\eta,\ \delta>0$，其中我们也纳入了必要的非负性约束。使用傅里叶–莫茨金消元消去$\frac{1}{n}\log K$ [60]，得到 _

$$\frac{1}{n}\log M>\chi(\lambda_a^{B_R},\hat{\rho}_a^{B_R})-\chi(\{\lambda_a^E,\tau_a^E\}),\quad \text{and}\quad \frac{1}{n}\log M\ge 0,$$

其中我们去除了冗余约束。至此，证明完成。

注7（零性能速率）。当 *Holevo* 信息量满足 $\chi(\lambda_a^{B_R},\hat{\rho}_a^{B_R})<\chi(\{\lambda_a^E,\tau_a^E\})$ 时，相干信息 $I_c(\mathcal{N}_W,\rho^{A_R})$ 为负。根据定理的表述，这些情形的渐近性能极限为零。因此，我们必须证明零速率是可行的。换言之，我们必须构造一个协议（见定义（3）），使其满足（2），且其码率可以任意接近零。如果选择 $M=1$ *and* $\frac{1}{n}\log K=\chi(\lambda_a^{B_R},\hat{\rho}_a^{B_R})+\delta_0<\chi(\{\lambda_a^E,\tau_a^E\})$，则前述证明所施加的约束仍然满足，同时在充分小的 δ_0 下可达到 $\log(2)/n$ 的码率。对于任意给定的 ϵ，当 n 足够大且 $\eta,\delta>0$. 足够小时，该码率（$1/n$）可以任意接近零（即小于所给定的 ϵ）。类似地，当相干信息 $I_c(\mathcal{N}_W,\rho^{A_R})$ 恰好为零，即 $\chi(\lambda_a^{B_R},\hat{\rho}_a^{B_R})=\chi(\{\lambda_a^E,\tau_a^E\})$ 时，我们选择 M *and* K 使得 $\frac{1}{n}\log M=2\delta_0$，且 $\frac{1}{n}\log K=\chi(\{\lambda_a^E,\tau_a^E\})-\delta_0$。这给出了一个为 $2\delta_0$ 的码率，同样可以使其任意接近零。因此，即使相干信息不一定为正，定理中的码率仍然可以达到。

_ _

C. 逆向证明

令 R 为一个可达速率。根据定义4，给定三元组（$\rho_B, \mathcal{H}_A, \mathcal{N}_W$），对于所有 $\epsilon > 0$ 以及所有充分大的 n，存在一个（n，Θ）有损压缩协议，其编码完全正迹保持映射为 $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{(n)}$，解码完全正迹保持映射为 $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{(n)}$，并满足以下约束：

$$c_0 : \frac{1}{n}\log\Theta \leq R + \epsilon, \quad \text{and} \quad c_1 : \|\omega^{B_R^n A^n} - \upsilon^{B_R^n A^n}\|_1 \leq \epsilon, \tag{61}$$

其中 $\omega^{B_R^n A^n} \triangleq (I \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{D}}^{(n)})(I \otimes \mathcal{N}_{\mathcal{E}}^{(n)})(|\psi_\rho\rangle^{B_R^n B^n})$,

$$\upsilon^{B_R^n A^n} = \mathrm{Tr}_{E^n}\left\{\upsilon^{B_R^n A^n E^n}\right\} \triangleq \mathrm{Tr}_{E^n}\left\{(W^{\otimes n} \otimes I)\Psi_\omega^{A_R^n A^n}(W^{\otimes n} \otimes I)^\dagger\right\},$$

且 $|\psi_\omega\rangle^{A^n A_R{}^n}$ 是 ω^{A^n} 的典范纯化，W 是完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_W$ 的斯廷斯普林扩张。令 $\omega^{A_R^n} \triangleq \mathrm{Tr}_{A^n}(\Psi_\omega^{A^n A_R^n})$。

步骤 1：量子数据处理不等式：令 M 表示编码器输出端的量子态。令 $V(n)\,\varepsilon$：$\mathcal{H}_{B^n} \to \mathcal{H}_M \otimes \mathcal{H}_{\tilde{E}_1}$ 和 $V(n)\,\mathcal{D}$：$\mathcal{H}_M \to \mathcal{H}_{A^n} \otimes \mathcal{H}_{\tilde{E}_2}$ 分别为编码映射 $\mathcal{N}(n)\,\varepsilon$ 和解码映射 $\mathcal{N}(n)\,\mathcal{D}$ 的斯廷斯普林扩张，其中 $\dim(\mathcal{H}_{\tilde{E}_1}) \geq \dim(\mathcal{H}_M)$ 且 $\dim(\mathcal{H}_{\tilde{E}_2}) \geq \dim(\mathcal{H}_{A^n})$，如图 6(a) 所示。令

$$\begin{aligned}
\omega_1{}^{B_R^n M \tilde{E}_1} &\triangleq (I_{B_R^n} \otimes V_{\mathcal{E}}^{(n)})(\Psi_\rho^{B_R^n B^n})(I_{B_R^n} \otimes V_{\mathcal{E}}^{(n)})^\dagger \\
\omega^{B_R^n \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 A^n} &\triangleq (I_{B_R^n \tilde{E}_1} \otimes V_{\mathcal{D}}^{(n)})(\omega_1{}^{B_R^n \tilde{E}_1 M})(I_{B_R^n \tilde{E}_1} \otimes V_{\mathcal{D}}^{(n)})^\dagger.
\end{aligned} \tag{62}$$

令 $|\psi_{\omega_1}\rangle^{M_R M}$ 表示量子态 ω_1^M 的典范纯化。令 $W(n)\,\varepsilon$：$\mathcal{H}_{M_R} \to \mathcal{H}_{B_R^n} \otimes \mathcal{H}_{\tilde{E}_1}$ 表示 $V_{\mathcal{E}}^{(n)}$ 关于 ω_1^M 的后验参考等距映射（见定义 1），如图 6(b) 所示。此外，令 $W_{\mathcal{D}}^{(n)}$：$\mathcal{H}_{A_R^n} \to \mathcal{H}_{M_R} \otimes \mathcal{H}_{\tilde{E}_2}$ 表示 $V(n)\,\mathcal{D}$ 关于 w^{A^n} 的后验参考等距映射，如图 6(c) 所示。令 $\mathcal{N}_{W_\varepsilon}(\cdot) = \mathrm{Tr}_{\tilde{E}_1}(W(n)\,\varepsilon \cdot (W(n)\,\varepsilon)^\dagger)$ 和 $\mathcal{N}_{W_\mathcal{D}}(\cdot) = \mathrm{Tr}_{\tilde{E}_2}(W_{\mathcal{D}}^{(n)} \cdot (W(n)\,\mathcal{D})^\dagger)$ 为诱导的完全正迹保持映射。令

$$\tilde{\omega}_1^{M_R \tilde{E}_2 A^n} \triangleq (W_{\mathcal{D}}^{(n)} \otimes I_{A^n})(\Psi_\omega^{A_R^n A^n})(W_{\mathcal{D}}^{(n)} \otimes I_{A^n})^\dagger.$$

利用相干信息的量子数据处理不等式 [50, 定理 11.3。2], , 我们得到

$$I_c(\mathcal{N}_{W_\mathcal{D}}, \omega^{A_R^n}) \geq I_c(\mathcal{N}_{W_\varepsilon} \circ \mathcal{N}_{W_\mathcal{D}}, \omega^{A_R^n}).$$

将相干信息展开为冯·诺依曼熵的形式，可得

$$S(M_R)_{\tilde{\omega}_1} - S(\tilde{E}_2)_{\tilde{\omega}_1} \geq S(B_R^n)_\omega - S(\tilde{E}_1\tilde{E}_2)_\omega,$$

这意味着

$$S(M)_{\omega_1} \geq S(B_R^n)_\omega - S(B_R^n A^n)_\omega. \tag{63}$$

步骤 2：含义　约束的 c_0 和 c_1： 考虑以下不等式序列　　：

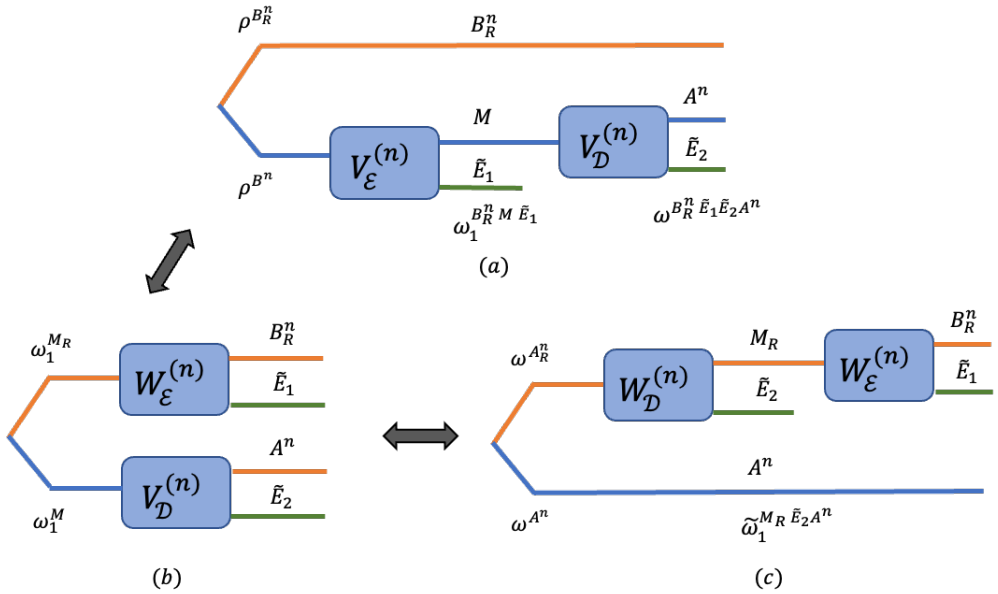

图 6. 有损量子源编码协议及其关联的 CPTP映射和 Stinespring扩张。

$$nR \geq \log \Theta - n\epsilon \geq S(M)_{\omega_1} - n\epsilon \tag{64}$$

$$\overset{a}{\geq} S(B_R^n)_\omega - S(B_R^n, A^n)_\omega - n\epsilon \tag{65}$$

$$\overset{b}{\geq} S(B_R^n)_\omega - S(B_R^n, A^n)_\upsilon - n\epsilon - n\tilde{\epsilon}_1 \tag{66}$$

$$= S(B_R^n)_\omega - S(E^n)_\upsilon - n\epsilon - n\tilde{\epsilon}_1 \tag{67}$$

$$\overset{c}{\geq} S(B_R^n)_\omega - \sum_{i=1}^{n} S(E_i)_\upsilon - n\epsilon - n\tilde{\epsilon}_1 \tag{68}$$

$$\overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} S(B_{Ri})_\omega - \sum_{i=1}^{n} S(E_i)_\upsilon - n\epsilon - n\tilde{\epsilon}_1 \tag{69}$$

$$\overset{e}{\geq} \sum_{i=1}^{n} S(B_{Ri})_\upsilon - \sum_{i=1}^{n} S(E_i)_\upsilon - n\epsilon - n\tilde{\epsilon}_1 - n\tilde{\epsilon}_2 \tag{70}$$

$$\overset{f}{=} \sum_{i=1}^{n} I_c(\mathcal{N}_W, \omega^{A_{Ri}}) - n\epsilon - n\tilde{\epsilon}_1 - n\tilde{\epsilon}_2 \tag{71}$$

$$\overset{g}{\geq} n \min_{\rho^{A_R} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_R}): \|\rho^{B_R} - \mathcal{N}_W(\rho^{A_R})\|_1 \leq \epsilon} I_c(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R}) - n\epsilon - n\tilde{\epsilon}_1 - n\tilde{\epsilon}_2, \tag{72}$$

其中，不等式的推导如下。(a)由(63)得出。(b)由条件 c_1和 Fannes-Audenaert不等式 [50,定理 11.10.1]通过定义$\tilde{\epsilon}_1 \triangleq \epsilon$对数 $|\mathcal{H}_A||\mathcal{H}_B| + h_b(\epsilon)$得出。由熵的次可加性得出。(d)由量子源的无记忆性得出。由条件 c_2 和 Fannes-Audenaert不等式 [50,定理 11.10.1],得出，其中条件

(e)

(e)

$$c_2 : \|\omega^{B_{Ri}} - \upsilon^{B_{Ri}}\|_1 \leq \epsilon, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n,$$

由 c_1 结合偏迹下迹距离的单调性可得。 $\tilde{\epsilon}_2$ 定义为$\tilde{\epsilon}_2 \triangleq \epsilon \log |\mathcal{H}_B| + h_b(\epsilon)$。(f)由以下事实可得: $\upsilon^{B_{R_i}E_i} = W\omega^{A_{R_i}}W^\dagger$。(g)由条件$c_2$ 可得，该条件也可以表述为

$$c_2 : \|\rho^{B_R} - \mathcal{N}_W(\omega^{A_{R_i}})\|_1 \leq \epsilon, \quad \forall\, 1 \leq i \leq n,$$

以及相干信息具有连续性这一事实，并且约束集合是闭且有界的。连续性可由以下论证得出：对于固定的完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_W$，定义函数f: $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_R}) \to \mathbb{R}$为 $f(\rho^{A_R}) = I_c(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R})$。对于固定的 $\mathcal{N}_W$，通过写出 $I_c(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R}) = S(B_R)_{W\rho^{A_R}W^\dagger} - S(E)^{W\rho^{A_R}W^\dagger}$，并利用 Fannes–Audenaert 不等式 [50, 定理 11.10.2], ，即可证明 f的连续性，其中 W 是给定完全正迹保持映射 $\mathcal{N}_W$的 Stinespring 扩张。

步骤 3：连续性论证：我们已经证明

$$R \in \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{I}_\epsilon,$$

其中，我们对所有 $\epsilon \geq 0$ 定义了

$$\mathcal{I}_\epsilon \triangleq \left\{R : \exists\, \rho^{A_R} \in \mathcal{S}_\epsilon(\rho^B, \mathcal{N}_W) \text{ such that } R \geq I_c(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R}) - g(\epsilon)\right\}, \tag{73}$$

and

$$\mathcal{S}_\epsilon(\rho^B, \mathcal{N}_W) \triangleq \left\{\rho^{A_R} \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{A_R}) : \|\mathcal{N}_W(\rho^{A_R}) - \rho^{B_R}\|_1 \leq \epsilon\right\}, \tag{74}$$

$g\ (\epsilon) \triangleq \epsilon + \tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2$. 条件 c_2 确保对于所有 $\epsilon > 0$，集合 $\mathcal{S}_\epsilon$ 均非空。现在，通过论证 $\mathcal{I}_\epsilon$ 在 $\epsilon = 0$ 处的连续性，我们得到所需结果。

引理 5。 对于上述 $\mathcal{S}_\epsilon$ 和 $\mathcal{I}_\epsilon$ 的定义， $\mathcal{S}_0$（ρ^B， $\mathcal{N}_W$）非空，并且

$$\mathcal{I}_0 = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{I}_\epsilon.$$

证明。 这是文献中使用的标准论证 [51], [61], [62]。为完整起见，证明见附录E。

□

证明完毕。

VI. 定理证明 2

A. 可达性证明

对于给定的$(\rho^B, \mathsf{X}\ \mathcal{W})$ 量子经典源编码设置，我们选择一个重构分布 $P_X \in \mathcal{A}(\rho^B, \mathcal{W})$。为指定正算子值测度 $\Gamma^{(n)}$和解码映射 f: $\{1, 2, \cdots, \Theta\} \to \mathsf{X}^n$，我们构造一个码本 $\mathcal{C}$。从现在起，令 $\Theta = 2^{nR}$。

1）码本设计：我们通过随机且相互独立地选取 2^{nR} 个序列 $\{X^n(m)\}_{m\in[2^{nR}]}$，生成一个由 n 长度码字组成的码本 $\mathcal{C}$，其选取遵循以下修剪分布：

$$\mathbb{P}(X^n(m)=x^n)=\begin{cases}\dfrac{P_X^n(x^n)}{(1-\varepsilon)} & \text{for} \quad x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}, \tag{75}$$

其中，$P_X^n(x^n)=\prod_{i=1}^n P_X(x_i)$、$\mathcal{T}(n)\,\delta(X)$ 是分布 P_X 在集合 X 上对应的 δ-典型集合，而 $\varepsilon(\delta,n)\triangleq\sum_{x^n\notin\mathcal{T}(n)\,\delta(X)}P_X^n(x^n)$。注意，当 $\delta>0$ 足够小时，$\varepsilon(\delta,n)\searrow 0$，并且对于所有充分小的 $\delta>0$ 都成立。在量子经典有损源压缩协议开始之前，生成的码本 $\mathcal{C}$ 会同时告知编码器和解码器。

2）正算子值测度的构造：我们采用 Winter 的正算子值测度构造 [27]。令 π_{ρ^B} 和 π_{x^n} 分别表示 δ-典型投影算子和条件 δ-典型投影算子，其定义与 [50, 定义 15.1.3] 和 [50, 定义 15.2.4], 中相同，分别对应于 ρ^B 和 $\mathcal{W}$。考虑以下迹小于一的正算子，并利用这些算子的随机选取来构造子 POVM $\{A_{x^n}\}$。对于所有 $x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}$（$X$），定义：

$$\xi_{x^n}\triangleq\pi_{\rho^B}\pi_{x^n}\mathcal{W}_{x^n}\pi_{x^n}\pi_{\rho^B}, \tag{76}$$

且 $\xi_{x^n}=0$ 对于 $x^n\notin\mathcal{T}(n)\,\delta(X)$，其中$\mathcal{W}_{x^n}\triangleq\bigotimes_i\mathcal{W}_{x_i}$。现在，我们将 ξ 定义为 ξ_{x^n} 关于修剪分布的期望 $\mathbb{P}$，修剪分布如式（75）所定义：

$$\xi\triangleq\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\xi_{x^n}\right]=\sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)}\frac{P_X^n(x^n)}{1-\varepsilon}\xi_{x^n}.$$

令$\hat{}\pi$ 为截断投影算子，它投影到由 ξ 的本征态张成的子空间上，这些本征态对应的本征值大于 ϵd, 其中 $d\triangleq 2^{-n(H(\rho^B)+\delta_1)}$ 以及 δ_1 将在稍后指定。采用上述记号，我们定义

$$\tilde{\rho}_{x^n}\triangleq\hat{\pi}\xi_{x^n}\hat{\pi}\quad\text{and}\quad\tilde{\rho}\triangleq\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{\rho}_{x^n}\right]=\hat{\pi}\xi\hat{\pi}. \tag{77}$$

利用平均温和测量引理 [50, 引理 9.4。3], , 对于任意给定的 $\epsilon\in(0,\ 1)$，以及所有充分大的 n 和所有充分小的 δ，有

$$\sum_{x^n\in\mathsf{X}^n}\frac{P_X^n(x^n)}{1-\varepsilon}\|\tilde{\rho}_{x^n}-\mathcal{W}_{x^n}\|_1\leq\epsilon. \tag{78}$$

上述陈述的详细证明见 [58, 式. 35]。根据上述定义，对于所有$x^n\in\mathsf{X}^n$，我们构造如下算子：

$$A_{x^n}\triangleq\gamma_{x^n}\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}^{-1}\tilde{\rho}_{x^n}\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}^{-1},\ \text{where}\ \gamma_{x^n}\triangleq\frac{1}{2^{nR}}\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\sum_{m=1}^{2^{nR}}\mathbb{1}_{\{X^n(m)=x^n\}},$$

且 $\eta \in (0,1)$ 是一个参数，用于确定未能得到子 POVM 的概率。令 $\mathbb{1}\{\mathrm{sP}\}$表示与以下事件对应的指示随机变量： $\{A_{x^n}\colon\ x^n \in \mathcal{T}_{(n)\,\delta}(X)\}$ 构成一个子 POVM。若 $\mathbb{1}\{\mathrm{sP}\} = 1$，则按如下方式构造子 POVM $\Gamma^{(n)}$ ：

$$\Gamma^{(n)} \triangleq \{A_{x^n} : x^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X)\}. \tag{79}$$

由于 $\Gamma^{(n)}$ 是一个子 POVM，我们添加一个额外的算子 $A_{x_0^n} \triangleq \left(I - \sum_{x^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X)} A_{x^n}\right)$，并将其与任意序列 $x_0^n \in \mathsf{X}^n \backslash \mathcal{T}_{(n)\,\delta}(X)$相关联，从而构成一个有效的正算子值测度$\left[\Gamma^{(n)}\right]$，其元素至多有 $(2^{nR}+1)$ 个。若 $\mathbb{1}\{\mathrm{sP}\} = 0$，则我们定义 $\Gamma^{(n)} = \{I\}$ 并将其与 x_0^n相关联。由此定义了该正算子值测度及相应的解码器。现在我们给出一个 [27], 命题，稍后在分析中会用到。

命题 4。 对于任意 ϵ， $\eta \in (0,1)$，对任意充分小的 $\delta > 0$，以及充分大的 n，有$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\right] \geq 1 - \epsilon$，若 $R > I(X;\ B_R)_\sigma$，其中量子互信息是相对于 *CQ* 态计算的，

$$\sigma^{XB_R} \triangleq \sum_x P_X(x)\,|x\rangle\langle x|^X \otimes \mathcal{W}_x,$$

且 $\{|x\rangle\}_{\{x\in\mathsf{X}\}}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}_X$ 的标准正交基，其中 $\dim(\mathcal{H}_X) = |\mathsf{X}|$。

3) 误差分析： 我们证明，对于上述正算子值测度和解码器，未归一化的测量后参考态 $\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}A_{x^n}\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}$ 之和，在对随机码本取平均后，与未归一化的 n 重乘积态后验参考态 $\mathrm{Tr}\left(A_{x^n}\rho^{B^{\otimes n}}\right)\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{W}_{x_i}$ 在迹距离意义下接近。换言之，我们希望对以下误差项给出界：

$$\mathbb{E}[\Xi(\Gamma^{(n)})] = \mathbb{E}\left[\sum_{x^n}\left\|\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}A_{x^n}\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} - \mathrm{Tr}\left(A_{x^n}\rho^{B^{\otimes n}}\right)\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{W}_{x_i}\right\|_1\right].$$

我们首先利用指示函数$\mathbb{1}\{\mathrm{sP}\}$ 将误差 $\Xi(\Gamma^{(n)})$ 拆分为两项:

$$\begin{aligned}\Xi(\Gamma^{(n)}) &= \mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\Xi(\Gamma^{(n)}) + \left(1 - \mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\right)\Xi(\Gamma^{(n)}),\\ &\leq \mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\Xi(\Gamma^{(n)}) + 2\left(1 - \mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\right),\end{aligned} \tag{80}$$

其中，(80) 是通过将两个密度算子之间的迹距离上界为二（即其最大值）得到的。

步骤 1：分离未覆盖所引起的误差项

利用三角不等式，我们现在在条件 $\mathbb{1}\{\mathrm{sP}\} = 1$ 下展开 $\Xi(\Gamma^{(n)})$ 。

$$\Xi(\Gamma^{(n)}) \leq \sum_{x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \left\| \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} A_{x^n} \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} - \operatorname{Tr}\left(A_{x^n} \rho^{B^{\otimes n}}\right) \mathcal{W}_{x^n} \right\|_1 + \left\| \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} A_{x_0^n} \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} \right\|_1 + \operatorname{Tr}\left(A_{x_0^n} \rho^{B^{\otimes n}}\right) \left\| \mathcal{W}_{x_0^n} \right\|_1,$$

$$= \sum_{x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \left\| \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} A_{x^n} \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} - \operatorname{Tr}\left(A_{x^n} \rho^{B^{\otimes n}}\right) \mathcal{W}_{x^n} \right\|_1 + 2 \operatorname{Tr}\left(A_{x_0^n} \rho^{B^{\otimes n}}\right) = \zeta + 2\tilde{\zeta}, \quad (81)$$

其中，我们定义了：

$$\zeta \triangleq \sum_{x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \left\| \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} A_{x^n} \sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}} - \operatorname{Tr}\left(A_{x^n} \rho^{B^{\otimes n}}\right) \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{W}_{x_i} \right\|_1,$$

$$\text{and } \tilde{\zeta} \triangleq \operatorname{Tr}\left(A_{x_0^n} \rho^{B^{\otimes n}}\right) = \operatorname{Tr}\left\{ \left(I - \sum_{x \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} A_{x^n} \right) \rho^{B^{\otimes n}} \right\}.$$

˜误差项 ζ 刻画了未覆盖 n-张量化后验参考态所引起的误差。我们给出以下命题来界定这一误差项。

命题 5。 对于所有 $\epsilon \in (0,\ 1)$，以及所有充分小的 η，$\delta > 0$ 和充分大的 n，我们有 $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} \tilde{\zeta}\right] \leq \epsilon$.

证明。 证明见附录F。 □

步骤 2：界定覆盖所引起的误差

现在我们界定项 ζ，它刻画了覆盖所引起的误差。在条件 $\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} = 1$ 下，我们将 ζ 重写为

$$\zeta = \sum_{x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \gamma_{x^n} \operatorname{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\} \left\| \frac{\tilde{\rho}_{x^n}}{\operatorname{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\}} - \mathcal{W}_{x^n} \right\|_1. \quad (82)$$

现在我们给出以下命题来界定误差项 ζ。

命题 6. 对于所有 ϵ，$\eta \in (0,\ 1)$，对于所有充分小的 $\delta > 0$ 和充分大的 n，我们有 $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} \zeta\right] \leq \epsilon$.

证明。 证明见附录 G。 □

最后，利用命题 4、5 和 6，我们对 $\mathbb{E}\left[\Xi(\Gamma^{(n)})\right]$ 进行界定，对于所有 $\epsilon \in (0,\ 1)$，

$$\mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\Xi(\Gamma^{(n)})\right] \leq \mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} \Xi(\Gamma^{(n)}) + 2\left(1 - \mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\right)\right] \leq \mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} \Xi(\Gamma^{(n)})\right] + 2\epsilon \leq 6\epsilon.$$

由于 $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\Xi(\Gamma^{(n)})\right] \leq 6\epsilon$，存在一个码本 $\mathcal{C}$ 以及与之关联的正算子值测度 $\Gamma^{(n)}$，使得 $\Xi(\Gamma^{(n)}) \leq 6\epsilon$。至此，可达性证明完成。

B. 逆向证明

设 R 为一个可达速率。那么根据定义 7，给定一个三元组 $(\rho^B,\mathsf{X}\ \mathcal{W})$，对于所有 $\epsilon>0$，以及所有充分大的 n，都存在一个带有正算子值测度 $\Gamma^{(n)}=\{A_m\}_{m\in[\Theta]}$和解码映射 f 的(n,Θ) QC 有损压缩协议，满足以下约束：

$$\sum_{x^n}\left\|\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}A_{f^{-1}(x^n)}\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}-\operatorname{Tr}\left(A_{f^{-1}(x^n)}\rho^{B^{\otimes n}}\right)\bigotimes_{i=1}^{n}\mathcal{W}_{x_i}\right\|_1\leq\epsilon,\ \text{and}\ \frac{1}{n}\log\Theta\leq R+\epsilon.$$

Let M 表示传输消息，并定义如下经典-量子态：

$$\begin{aligned}\omega^{X^nB_R^n}&\triangleq\sum_{x^n}|x^n\rangle\langle x^n|\otimes\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}A_{f^{-1}(x^n)}\sqrt{\rho^{B^{\otimes n}}}\ \text{and}\\ \tau^{X^nB_R^n}&\triangleq\sum_{x^n}\operatorname{Tr}\left(A_{f^{-1}(x^n)}\rho^{B^{\otimes n}}\right)|x^n\rangle\langle x^n|\otimes\mathcal{W}_{x^n},\end{aligned}\tag{83}$$

其中 $\omega^{X^nB_R^n}$ 和 $\tau^{X^nB_R^n}$ 分别是根据定义7，量子经典有损压缩协议和理想量子经典有损压缩协议所产生的经典-量子态。根据三角不等式，我们有 $\left\|\omega^{X^nB_R^n}-\tau^{X^nB_R^n}\right\|_1\leq\epsilon$。现在我们给出码率 R 的下界。我们有以下不等式：

$$\begin{aligned}nR&=\log\Theta-n\epsilon\geq H(M)-n\epsilon\geq I(M;B_R^n)_\omega-n\epsilon\\&\overset{a}{\geq}I(X^n;B_R^n)_\omega-n\epsilon,\\&\overset{b}{\geq}nS(B_R)_\omega-\sum_{i=1}^{n}S((B_R)_i|X_i)_\omega-n\epsilon\\&\overset{c}{\geq}nS(B_R)_{\omega_Q}-nS(B_R|X)_{\omega_Q}-n\epsilon=nI(X;B_R)_{\omega_Q}-n\epsilon,\\&\overset{d}{\geq}nI(X;B_R)_{\tau_Q}-n\tilde{\epsilon}(\epsilon)-n\epsilon,\end{aligned}\tag{84}$$

下面说明这些不等式的推导依据：(a) 由量子数据处理不等式得出 [50,第 11.9 节。2], (b) 由条件化不会增加量子熵这一事实得出，(c) 由条件量子熵的凹性得出 [50,练习 11.7。5] 并通过定义

$$\omega^{X_Q(B_R)_Q}\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Tr}_{X^{n\setminus i}(B_R)^{n\setminus i}}\left\{\omega^{X^nB_R^n}\right\}\ \text{and}\ \ \text{noting that}\ \omega^{(B_R)_Q}=\rho^B,$$

而(d) 由量子互信息的连续性（AFW 不等式）得出 [50, 练习 11.10。2],通过定义

$$\tau^{X_Q(B_R)_Q}\triangleq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Tr}_{X^{n\setminus i}(B_R)^{n\setminus i}}\left\{\tau^{X^nB_R^n}\right\}=\sum_x\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{x^{n\setminus i}}\operatorname{Tr}\left\{A_{f^{-1}(x^n)}\rho^{B^{\otimes n}}\right\}\right)|x\rangle\langle x|\otimes\mathcal{W}_x,$$

以及 $\tilde{\epsilon}\triangleq\frac{3}{2}\epsilon\log(\dim\mathcal{H}_B)+(2+\epsilon)h_b\left(\frac{\epsilon}{2+\epsilon}\right)$，并注意到

$$\left\|\rho^B-\operatorname{Tr}_{X_Q}\{\tau^{X_Q(B_R)_Q}\}\right\|_1\leq\left\|\omega^{X_Q(B_R)_Q}-\tau^{X_Q(B_R)_Q}\right\|_1\leq\left\|\omega^{X^nB_R^n}-\tau^{X^nB_R^n}\right\|_1\leq\epsilon,\tag{85}$$

其中 $\mathrm{Tr}_{X_Q}\{\tau^{X_Q(B_R)^Q}\}=\sum_x P_{X_Q}(x)\mathcal{W}_x$，并且

$$P_{X_Q}(x)\triangleq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{x^{n\setminus i}}\mathrm{Tr}\Big\{A_{f^{-1}(x^n)}\rho^{B^{\otimes n}}\Big\}\right).$$

注意到 $\sum_x P_{X_Q}(x)=1$。到目前为止，我们已经证明

$$R\in\bigcap_{\epsilon>0}\mathcal{I}_\epsilon,$$

其中，我们对所有 $\epsilon\geq 0$ 定义了，

$$\mathcal{I}_\epsilon(\rho^B,\mathcal{W})\triangleq\{R:\exists\, P_X\in\mathcal{A}_\epsilon \text{ such that } R\geq I(X,B_R)_\sigma-g(\epsilon)\},$$

$$\mathcal{A}_\epsilon(\rho^B,\mathcal{W})\triangleq\{P_X\in\mathcal{P}(\mathsf{X}):\|\sum_x P_X(x)\mathcal{W}_x-\rho^B\|_1\leq\epsilon\},\text{ and }\sigma^{XB_R}\triangleq\sum_x P_X(x)\,|x\rangle\langle x|^X\otimes\mathcal{W}_x,$$

$g(\epsilon)\triangleq\tilde{\epsilon}+\epsilon$。方程 (85) 保证集合 $\mathcal{A}_\epsilon$ 对于 $\epsilon>0$ 非空。利用与引理 5 类似的率区域连续性，我们得到 $\bigcap_{\epsilon>0}\mathcal{I}_\epsilon=\mathcal{I}_0$，且 $\mathcal{A}_0$ 非空，因此 $R\in\mathcal{I}_0$。至此，反向证明完成。

VII. 定理3 的证明

本节首先讨论可达性部分，即任何满足 (R 5) 的码率均可达。随后我们证明逆命题，即任何可达的有损源压缩协议都必须满足 (5)。

A. 可达性证明

$\hat{}$对于给定的信源分布 P_X、重构字母表 X 和后验信道 $W_{X|\hat{}X}$，我们选择一个重构分布 $P_{\hat{}X}\in\mathcal{A}(P_X,W_{X|\hat{}X})$。为指定编码器 $\mathcal{E}^{(n)}:\mathsf{X}^n\longrightarrow[\Theta]$和解码器 $\mathcal{D}^{(n)}:[\Theta]\longrightarrow\hat{}\mathsf{X}^n$，我们构造一个码本 $\mathcal{C}$。从现在起，令 $\Theta=2^{nR}+1$。

1）码本构造：我们通过按照以下“剪枝”分布随机且独立地选择每个码字，来构造码本 $\mathcal{C}\triangleq\{\hat{}X^n(1),\hat{}X^n(2)\cdots,\hat{}X^n(2^{nR})\}$:

$$\mathbb{P}(\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n)=\begin{cases}\dfrac{P^n_{\hat{X}}(\hat{x}^n)}{1-\varepsilon} & \text{if } \hat{x}^n\in\mathcal{T}^{(n)}_\delta(\hat{X}),\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

其中 $P^n{}_{\hat{}X}(\hat{}x^n)=\Pi_{i=1}^n P_{\hat{}X}(\hat{}x_i)$，$\mathcal{T}(n)_\delta(\hat{}X)$ 是与集合 $\hat{}\mathsf{X}$ 上的分布 $P_{\hat{}X}$ 对应的 δ-典型集合，而 $\varepsilon(\delta,n)\triangleq\sum_{\hat{x}^n\notin\mathcal{T}(n)_\delta(\hat{}X)}P^n{}_{\hat{}X}(\hat{}x^n)$。在有损源压缩协议开始之前，编码器和解码器双方都会获知码本 $\mathcal{C}$。

2）编码器描述：对于观测到的信源序列 x^n，构造一个随机编码器，根据次概率质量函数 $m \in [2^{nR}]$ 选择一个索引 $E_{M|X^n}(m|x^n)$[4]，，该编码器类似于 [51], [52] 中使用的似然编码器。现在我们为 $x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)$ 和 $m \in [2^{nR}]$ 指定 $E_{M|X^n}(m|x^n)$，其中$\hat{}$ $\hat{}\delta = \delta(|\mathsf{X}| + |\mathsf{X}|)$。对于稍后指定的 $\eta \in (0, 1)$，以及 $\delta > 0$，定义

$$E_{M|X^n}(m|x^n) \triangleq \sum_{\hat{x}^n} \frac{1}{2^{nR}} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)} \frac{W^n_{X|\hat{X}}(x^n|\hat{x}^n)}{P^n_X(x^n)} \mathbb{1}_{\{\hat{x}^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\delta}(\hat{X})\}} \mathbb{1}_{\{x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\delta}(X|\hat{x}^n)\}} \mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}. \tag{86}$$

与 [52], 中的编码器规范类似，我们也放宽了约束，不再要求 $E_{M|X^n}(\cdot|x^n)$ 严格为概率质量函数，即 $\sum_{m=1}^{2^{nR}} E_{M|X^n}(m|x^n) = 1$。令 $\mathbb{1}\{\text{sPMF}\}$ 表示指示随机变量，当且仅当 $\{E_{M|X^n}(m|x^n)\}_{m\in[\Theta]}$ 对所有 $x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)$ 构成次概率质量函数时取值为真。若 $\mathbb{1}\{\text{sPMF}\} = 1$，则按如下方式构造该次概率质量函数：

$$P_{M|X^n}(m|x^n) \triangleq E_{M|X^n}(m|x^n), \text{ for all } x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X) \text{ and } m \in [\Theta].$$

随后，我们为所有 $x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)$ 添加一个与 $m = 0$ 相关联的额外概率质量函数元素 $P_{M|X^n}(0|x^n) = E_{M|X^n}(0|x^n) \triangleq \left(1 - \sum_{m=1}^{2^{nR}} E_{M|X^n}(m|x^n)\right)$，从而对所有 $x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)$ 和 $m \in \{0\} \cup [2^{nR}]$ 构成有效概率质量函数 $P_{M|X^n}(m|x^n)$。若 $x^n \notin \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)$，则定义 $P_{M|X^n}(m|x^n) = \mathbb{1}_{\{m=0\}}$。我们给出一个命题，该命题将在后续分析中发挥作用。

命题 7. 对于所有 ϵ，$\eta \in (0, 1)$，对于所有充分小的 $\delta > 0$ 和充分大的 n，我们有 $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\text{概率质量函数}\}}\right] \geq 1 - \epsilon$，即

$$\Pr\left(\bigcap_{x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)} \left(\sum_{m=1}^{2^{nR}} E_{M|X^n}(m|x^n) \leq 1\right)\right) \geq 1 - \epsilon,$$

$\hat{}$如果 $R > I(X;X)$。

证明。 证明见附录H。 □

现在我们总结在 $\mathbb{1}\{\text{sPMF}\} = 1$ 条件下，$P_{M|X^n}$ 和 $m \in \{0\} \cup [2^{nR}]$ 的情形，

$$P_{M|X^n}(m|x^n) \triangleq \begin{cases} \mathbb{1}_{\{m=0\}} & \text{if } x^n \notin \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X), \\ E_{M|X^n}(m|x^n) & \text{if } x^n \in \mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X). \end{cases} \tag{87}$$

如果 $\mathbb{1}\{\text{sPMF}\} = 0$，那么对于所有 $x^n \in \mathsf{X}^n$，$P_{M|X^n}(m|x^n) = \mathbb{1}_{\{m=0\}}$。编码器的描述至此结束。

[4]若有限字母表 X 上的非负函数 $q_X(x)$ 满足 $\sum_{x\in\mathsf{X}} q_X(x) \leq 1$，则称其为次概率质量函数。

3) 解码器描述：现在描述解码器。对于编码器传送的观测索引 $m \in \{0\} \cup [2^{nR}]$，若 $m \neq 0$，解码器输出 $\hat{}X^n(m)$。否则，解码器输出一个固定的$\hat{}x_0^n \in \hat{}\mathsf{X}^n \backslash \mathcal{T}_\delta^{(n)}$ ($\hat{}X$)，即，

$$\mathcal{D}^{(n)}(m) \triangleq \begin{cases} \hat{X}^n(m) & \text{if } m \neq 0, \\ \hat{x}_0^n & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{88}$$

4）误差分析：我们证明，对于上述编码器和解码器，对随机码本取平均后，$P_{X^n\hat{}X^n}$ 与近似分布 $P_{\hat{}X^n}W_{X|\hat{}X}^n$之间的全变差很小。我们首先利用指示函数 $\mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}$ 将误差 $\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)})$ 拆分为两项：

$$\begin{aligned} \Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}) &= \mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}) + \left(1 - \mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\right)\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}), \\ &\leq \mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}) + \left(1 - \mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\right). \end{aligned} \tag{89}$$

步骤 1：分离由未覆盖引起的误差项

利用三角不等式，我们现在在条件 $\mathbb{1}_{\{\text{s概率质量函数}\}} = 1$ 下展开 $\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)})$。

$$\begin{aligned} &2\,\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}) \\ &= \sum_{x^n\hat{x}^n} \left| P_X^n(x^n) \sum_{m\in\{0\}\cup[2^{nR}]} P_{M|X^n}(m|x^n)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} - \sum_{m\in\{0\}\cup[2^{nR}]} P_M(m)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n) \right| \\ &\overset{a}{\leq} \sum_{\substack{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X) \\ \hat{x}^n}} \left| P_X^n(x^n) \sum_{m\in[2^{nR}]} E_{M|X^n}(m|x^n)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} - \sum_{m\in[2^{nR}]} P_M(m)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n) \right| \\ &\qquad + \sum_{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} \left| P_X^n(x^n)E_{M|X^n}(0|x^n) - P_M(0)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}_0^n) \right| \\ &\qquad + \sum_{\substack{x^n\notin\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X) \\ \hat{x}^n}} \left| P_X^n(x^n)\mathbb{1}_{\{\hat{x}^n=\hat{x}_0^n\}} - \sum_{m\in\{0\}\cup[2^{nR}]} P_M(m)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} \right| \\ &\overset{b}{\leq} \zeta + \tilde{\zeta} + \sum_{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_M(0)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}_0^n) + \sum_{x^n\notin\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_M(0)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}_0^n) + \sum_{x^n\notin\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_X^n(x^n) \\ &\qquad + \sum_{m\in[2^{nR}]} \sum_{\substack{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X}) \\ x^n\notin\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)}} P_M(m)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} \\ &\overset{c}{\leq} \zeta + \tilde{\zeta} + \sum_{x^n\notin\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_X^n(x^n) + P_M(0) + \epsilon \\ &= \zeta + 2\tilde{\zeta} + 2\sum_{x^n\notin\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_X^n(x^n) + \epsilon \overset{d}{\leq} \zeta + 2\tilde{\zeta} + 3\epsilon, \end{aligned} \tag{90}$$

对所有充分大的 n 以及所有 $\delta>0$，其中 (a) 和 (b) 由三角不等式得出，并定义

$$\zeta \triangleq \sum_{\substack{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)\\ \hat{x}^n}} \left| P_X^n(x^n) \sum_{m\in[2^{nR}]} E_{M|X^n}(m|x^n)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} - \sum_{m\in[2^{nR}]} P_M(m)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}} W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\right|,$$

$$\text{and } \tilde{\zeta} \triangleq \sum_{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_X^n(x^n)E_{M|X^n}(0|x^n) = \sum_{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_X^n(x^n)\left(1-\sum_{m=1}^{2^{nR}} E_{M|X^n}(m|x^n)\right), \tag{91}$$

(c) 对于所有充分大的 n，由条件典型性论证可得；最后，(d) 对于所有充分大的 n，由标准典型性论证可得。误差项 ζ 刻画了未能覆盖 n-乘积态后验测试信道所导致的误差。我们给出以下命题来界定该误差项。

命题 8. 对于所有 $\epsilon\in(0,1)$，以及所有充分小的 $\eta,\delta>0$ 和充分大的 n，有$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\text{概率质量函数}\}}\tilde{\zeta}\right]\leq\epsilon$，若 $R>I(X;\hat{}X)$。

证明。 证明见附录 I。 □

步骤 2：界定覆盖所导致的误差

现在我们界定项 ζ，它刻画了覆盖所导致的误差。利用三角不等式，可得

$$\begin{aligned}\zeta &= \sum_{\substack{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)\\ \hat{x}^n}} \left| \sum_{m\in[2^{nR}]} \left(P_X^n(x^n)E_{M|X^n}(m|x^n) - P_M(m)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\right)\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}\right|,\\ &\leq \sum_{m\in[2^{nR}]}\sum_{\substack{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)\\ \hat{x}^n}} \left|P_X^n(x^n)E_{M|X^n}(m|x^n) - P_M(m)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\right|\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}.\end{aligned}$$

现在我们给出以下命题来界定误差项 ζ。

命题 9. 对于所有 $\epsilon,\eta\in(0,1)$，对于所有充分小的 $\delta>0$ 和充分大的 n，我们有 $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\zeta\right]\leq\epsilon.$

证明。 证明见附录J。 □

Fin此外，利用命题 7、8 和 9，对于所有 $\epsilon\in(0,1)$，我们界定 $\mathbb{E}\left[\Xi(\mathcal{E}^{(n)},\mathcal{D}^{(n)})\right]$，

$$\mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\Xi(\mathcal{E}^{(n)},\mathcal{D}^{(n)})\right] \leq \mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\Xi(\mathcal{E}^{(n)},\mathcal{D}^{(n)}) + \left(1-\mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\right)\right] \leq 9\epsilon/2.$$

由于 $\mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\Xi(\mathcal{E}^{(n)},\mathcal{D}^{(n)})\right]\leq 9\epsilon/2$，存在一个码 $\mathcal{C}$，使得其对应的 $\Xi(\mathcal{E}^{(n)},\mathcal{D}^{(n)})\leq 9\epsilon/2$。至此，可达性证明完成。

B. 逆向证明

ˆ设 R 为一个可达速率。根据定义 4，给定一个三元组 $(P_X, \mathsf{X} W_{X|\hat{X}})$，对于所有 $\epsilon > 0$，以及所有充分大的 n，都存在一个 (n, Θ) 有损压缩协议，其编码映射为 $\mathcal{E}^{(n)}$，解码映射为 $\mathcal{D}^{(n)}$，并满足以下约束：

$$\Xi(\mathcal{E}^{(n)}, \mathcal{D}^{(n)}) = \left\| P_{X^n \hat{X}^n} - P_{\hat{X}^n} W^n_{X|\hat{X}} \right\|_{\mathrm{TV}} \le \epsilon, \text{ and } \frac{1}{n} \log \Theta \le R + \epsilon.$$

令 M 表示传输消息。现在我们给出码率 R 的下界。我们有以下不等式：

$$\begin{aligned}
nR &= \log \Theta - n\epsilon \ge H(M) - n\epsilon \ge I(X^n, M) - n\epsilon \\
&\overset{a}{\ge} I(X^n, \hat{X}^n) - n\epsilon \\
&\ge \sum_i H(X_i) - \sum_i H(X_i|\hat{X}_i) - n\epsilon \\
&= \sum_i I(X_i; \hat{X}_i) - n\epsilon \\
&\overset{b}{\ge} nI(X_Q; \hat{X}_Q) - n\epsilon \\
&\overset{c}{=} nI(P_{\hat{X}_Q}, P_{X_Q|\hat{X}_Q}) - n\epsilon \\
&\overset{d}{\ge} nI(P_{\hat{X}_Q}, W_{X|\hat{X}}) - n\tilde{\epsilon}(\epsilon) - n\epsilon,
\end{aligned}$$

其中，这些不等式的依据如下：(a) 由数据处理不等式得出，(b) 由固定信源时互信息关于变化信道的凸性得出，并定义

$$P_{X_Q \hat{X}_Q} = \sum_i \frac{1}{n} P_{X_i \hat{X}_i} \quad \text{and noting that} \quad P_{X_Q} = P_X,$$

(c) 由互信息记号变换 [24], 得出，而 (d) 由互信息的连续性 [57，定理 17.3.3]以及引理6（见下文）得出，并定义 $\tilde{\epsilon} \triangleq -2\epsilon \log \frac{\epsilon}{4\epsilon^2 |\mathsf{X}\hat{\mathsf{X}}|}$。

引理 6. 分布 $P_{X^n \hat{X}^n}$ 和 $P_{\hat{X}^n} W^n_{X|\hat{X}}$ 满足

$$\|P_X - \sum_{\hat{x}} P_{\hat{X}_Q}(\hat{x}) W_{X|\hat{X}}(\cdot|\hat{x})\|_{\mathrm{TV}} \le \|P_{X_Q \hat{X}_Q} - P_{\hat{X}_Q} W_{X|\hat{X}}\|_{\mathrm{TV}} \le \|P_{X^n \hat{X}^n} - P_{\hat{X}^n} W^n_{X|\hat{X}}\|_{\mathrm{TV}}.$$

证明。 证明见附录K。 □

至此，我们已证明

$$R \in \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{I}_\epsilon,$$

其中，我们对所有 $\epsilon \geq 0$ 定义了，

$$\mathcal{I}_\epsilon(P_X, W_{X|\hat{X}}) \triangleq \{R : \exists P_{\hat{X}} \in \mathcal{A}_\epsilon(P_X, W_{X|\hat{X}}) \text{ such that } R \geq I(P_{\hat{X}}, W_{X|\hat{X}}) - g(\epsilon)\},$$

$$\mathcal{A}_\epsilon(P_X, W_{X|\hat{X}}) \triangleq \{P_{\hat{X}} \in \mathcal{P}(\hat{\mathsf{X}}) : \| \sum_{\hat{x}} P_{\hat{X}}(\hat{x}) W_{X|\hat{X}}(\cdot|\hat{x}) - P_X \|_{\mathrm{TV}} \leq \epsilon\},$$

$g(\epsilon) \triangleq \tilde{\epsilon} + \epsilon$。引理 6 确保集合 $\mathcal{A}_\epsilon$ 对于 $\epsilon > 0$非空。利用与引理 5类似的率区域连续性，我们得到 $\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{I}_\epsilon = \mathcal{I}_0$ 和 $\mathcal{A}_0$ 非空，因此 $R \in \mathcal{I}_0$。至此，反向证明完成。

VIII. 结论

在这项工作中，我们探讨了有损量子信源编码问题的一种新表述。使我们的表述区别于标准率失真问题的两个要素是：(i) 使用全局误差准则衡量重构质量；(ii) 引入后验参考信道的概念，该信道定义为作用于重构的参考系、以产生信源参考系的完全正迹保持映射。全局误差准则并非采用单字母失真函数，而是衡量使用给定单字母后验信道所产生的误差。给定的信道刻画了编码和解码操作中所产生损失的性质。

作为首个主要结果，我们利用后验参考映射的最小相干信息，对该信源编码问题的渐近性能极限给出了单字母刻画，其中最小化是在所有重构上进行的。尽管这一表述采用全局误差准则，却为有损信源编码理论提供了一种“乐观”的视角。就此而言，我们的结果补足了量子信道编码问题中缺失的对偶关系，也拓宽了有损量子信源压缩的研究框架。将这一表述应用于有损信源编码问题的其他变体，是值得探索的研究方向。同样，探索建立这一极限的可达性与逆命题的其他方法也将颇有意义。

随后，我们研究了量子-经典（QC）设置，并提出了相应的有损 QC 信源编码问题。我们利用后验经典-量子（CQ）信道的最小 Holevo 信息（或相应的量子互信息），对该问题的渐近性能极限给出了单字母刻画，其中最小化是在所有重构分布上进行的（见定理 2）。最后，我们对经典设置提出了相应的新表述，并确立了后验信道的最小互信息是经典信源编码问题渐近性能极限的单字母刻画。

附录

A. 引理 2 的证明

注意

$$|\psi_\rho\rangle \triangleq (I_R \otimes \sqrt{\rho^B})\,|\Gamma\rangle^{RB}, \quad |\psi_\sigma\rangle \triangleq (I_R \otimes \sqrt{\sigma^B})\,|\Gamma\rangle^{RB},$$

其中，$|\Gamma\rangle_{RB}$是未归一化最大纠缠纯态：$|\Gamma\rangle_{RB} = \sum_i |i\rangle_R |i\rangle_B$。考虑规范纯化态 $|\psi_\rho\rangle$ 与 $|\psi_\sigma\rangle$之间的保真度：

$$\begin{aligned} F(|\psi_\rho\rangle, |\psi_\sigma\rangle) &\overset{a}{=} |\langle\psi_\rho|\psi_\sigma\rangle|^2 = |\langle\Gamma|^{RB} (I_R \otimes \sqrt{\rho^B}\sqrt{\sigma^B})\,|\Gamma\rangle^{RB}|^2, \\ &\overset{b}{=} |\operatorname{Tr}\left(\sqrt{\rho^B}\sqrt{\sigma^B}\right)|^2 \overset{c}{\geq} \left(1 - \frac{1}{2}\left\|\rho^B - \sigma^B\right\|_1\right)^2 \geq 1 - \left\|\rho^B - \sigma^B\right\|_1, \end{aligned}$$

其中(a) 由纯态保真度的定义得出，(b) 由迹的定义得出，(c) 由 Power-Størmer 不等式 [63, 引理 4.1], 得出；也就是说，对于任意半正定矩阵 A和 B，我们有

$$\operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B) - \|A - B\|_1 \leq 2\operatorname{Tr}\left(\sqrt{A}\sqrt{B}\right).$$

B. 引理 4

我们首先给出以下引理。

引理 7 （覆盖叠加态）。考虑一个有限集 $\mathcal{U}$，以及一对集合族 $\{\rho_u\}_{u\in\mathcal{U}}$和$\{\sigma_u\}_{u\in\mathcal{U}}$，其中 ρ_u，$\sigma_u \in \mathcal{D}$（$\mathcal{H}_A$）对所有 $u \in \mathcal{U}$均成立。设 $\{\Psi_u^\rho\}_{u\in\mathcal{U}}$和 $\{\Psi_u^\sigma\}_{u\in\mathcal{U}}$分别作用于 $\mathcal{D}$（$\mathcal{H}_{R_1}\otimes\mathcal{H}_A$）和$\mathcal{D}$（$\mathcal{H}_{R_2}\otimes\mathcal{H}_A$），且分别是 $\{\rho_u\}_{u\in\mathcal{U}}$和 $\{\sigma_u\}_{u\in\mathcal{U}}$的某些纯化，其中 维数($\mathcal{H}_{R_1}$) $\leq$维数($\mathcal{H}_{R_2}$)。那么，存在一族等距算子 $\{U_r(u)\}_{u\in\mathcal{U}}$，作用于 $\mathcal{H}_{R_1} \to \mathcal{H}_{R_2}$，以及相位$\{\delta_u\}$，使得

$$F((U_R \otimes I_A)\,|\tau_\rho\rangle, |\tau_\sigma\rangle) = F(|\tau_\rho\rangle, (U_R \otimes I_A)^\dagger\,|\tau_\sigma\rangle) \geq 1 - \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{1}{|\mathcal{U}|}\|\rho_u - \sigma_u\|_1, \tag{92}$$

其中

$$U_R \triangleq \sum_{u\in\mathcal{U}} e^{-i\delta_u} U_r(u) \otimes |u\rangle\langle u|, \quad |\tau_\rho\rangle \triangleq \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{U}|}}\,|\psi_u^\rho\rangle \otimes |u\rangle, \quad |\tau_\sigma\rangle \triangleq \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{U}|}}\,|\psi_u^\sigma\rangle \otimes |u\rangle.$$

证明。证明见附录C。 □

现在，为了应用上述引理，我们进行如下对应。令 $\mathcal{U}$ 对应于 $\mathcal{M}\times\mathcal{K}$，$\rho_u$ 对应于 $\hat{\rho}_{m,k}^{B_R}$，σ_u 对应于 $\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}$，$|\psi_u^\rho\rangle$ 对应于 $(I\otimes M_{m,k}\atop k)\,|\psi_\rho^{\otimes n}\rangle^{B_R^n B^n}\sqrt{\lambda_m}$，并令 $|\psi_u^\sigma\rangle$ 对应于

$\overline{(I\otimes\sqrt{A_{m,k}}}|\psi_\rho^{\otimes n}\rangle^{B_R^n B^n})\sqrt{\delta_{m,k}}$。注意，最后两个对应实际上分别是 $\hat{\rho}_{m,k}^{B_R}$和 $\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}/\operatorname{Tr}\left(\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}\right)$ 的纯化，因为

$$\operatorname{Tr}_E\left(\frac{(I\otimes M_{m,k})}{\sqrt{\lambda_{m,k}}}\Psi_{\rho_B}^{\otimes n}\frac{(I\otimes M_{m,k}^\dagger)}{\sqrt{\lambda_{m,k}}}\right)=\hat{\rho}_{m,k}^{B_R},\quad \operatorname{Tr}_B\left(\frac{(I\otimes\sqrt{A_{m,k}})}{\sqrt{\delta_{m,k}}}\Psi_{\rho_B}^{\otimes n}\frac{(I\otimes\sqrt{A_{m,k}})}{\sqrt{\delta_{m,k}}}\right)=\frac{\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}}{\operatorname{Tr}\left(\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}\right)}.$$

利用引理 7，可得

$$\begin{aligned}
&F(|\hat{\sigma}\rangle^{B_REMK},(I_{B_R}\otimes U_{\mathcal{R}})|\tilde{\sigma}\rangle^{B_RBMK})\\
&\geq 1-\frac{1}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}\sum_{m,k}\left\|\hat{\rho}_{m,k}^{B_R}-\frac{\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}}{\operatorname{Tr}\left(\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}\right)}\right\|_1\\
&\geq\frac{1}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}\sum_{m,k}\operatorname{Tr}\left\{\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}\right\}-\frac{1}{(1-\sqrt{\epsilon})|\mathcal{M}||\mathcal{K}|}\sum_{m,k}\left\|\hat{\rho}_{m,k}^{B_R}-\tilde{\rho}_{m,k}^{B_R}\right\|_1\geq 1-4\sqrt{\epsilon},
\end{aligned}\tag{93}$$

其中，最后一个不等式由利用式（36）和式（37）中的界得到。

C. 引理 *7*的证明

考虑如下内容：

$$\begin{aligned}
F(|\tau_\rho\rangle,(U_R\otimes I)^\dagger|\tau_\sigma\rangle)&=\left|\sum_{u\in\mathcal{U}}\frac{1}{|\mathcal{U}|}e^{-i\delta_u}\langle\psi_u^\rho|U_r^\dagger(u)|\psi_u^\sigma\rangle\right|^2\\
&\overset{a}{=}\left(\sum_{u\in\mathcal{U}}\frac{1}{|\mathcal{U}|}\left|\langle\psi_u^\rho|U_r^\dagger(u)|\psi_u^\sigma\rangle\right|\right)^2\\
&\overset{b}{=}\left(\sum_{u\in\mathcal{U}}\frac{1}{|\mathcal{U}|}\sqrt{F(\rho_u,\sigma_u)}\right)^2\\
&\overset{c}{\geq}\left(1-\frac{1}{2}\sum_{u\in\mathcal{U}}\frac{1}{|\mathcal{U}|}\|\rho_u-\sigma_u\|_1\right)^2\geq 1-\sum_{u\in\mathcal{U}}\frac{1}{|\mathcal{U}|}\|\rho_u-\sigma_u\|_1,
\end{aligned}$$

其中，(a) 是通过选取满足 $e^{-i\delta_u}\langle\psi_u^\rho|U_r^\dagger(u)|\psi_u^\sigma\rangle=|\langle\psi_u^\rho|U_r^\dagger(u)|\psi_u^\sigma\rangle|$的 δ_u 得到的；(b) 根据 Uhlmann 定理 [50, 定理 9.2。1], 即，存在某个等距映射 $U_r(u)$，使得 $F(\rho_u,\sigma_u)=F(U_r(u)|\psi^\rho\rangle,|\psi^\sigma\rangle)$；$(c)$ 则由引理 1 得到。

D. 命题 *3*的证明

我们首先定义索引函数 $f^{(m)}:\ [0,K_m'-1]\to\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}$，对每个 $m\in\mathcal{M}'$，该函数都以单调方式将 $[0,K_m'-1]$中的每个元素唯一映射到集合 $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}$。令 $g^{(m)}:\ \mathcal{I}_{\mathcal{E}}^{(m)}\to[0,K_m'-1]$为 $f^{(m)}$的逆函数，对每个 $m\in\mathcal{M}'$均如此。定义与集合族$\{\chi_k^{(m)}\}$ 和 $\{\phi_k^{(m)}\}$ 相对应的变换后的向量为

$$|\hat{\chi}_s^{(m)}\rangle\triangleq c\sum_{j=0}^{K_m'-1}e^{\frac{2\pi ijs}{K_m'}}|\chi_{f^{(m)}(j)}^{(m)}\rangle\quad\text{and}\quad|\hat{\phi}_s^{(m)}\rangle\triangleq c\sum_{j=0}^{K_m'-1}e^{\frac{2\pi ijs}{K_m'}}|\phi_{f^{(m)}(j)}^{(m)}\rangle,$$

对 $s \in [0, K'_m - 1]$。由初等代数可知，对所有 $m \in \mathcal{M}'$，

$$\frac{1}{K'_m} \sum_{s=0}^{K'_m-1} \langle \hat{\phi}_s^{(m)} | \hat{\chi}_s^{(m)} \rangle = c^2 \sum_{j=0}^{K'_m-1} \langle \phi_{f^{(m)}(j)}^{(m)} | \chi_{f^{(m)}(j)}^{(m)} \rangle = c^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_\varepsilon^{(m)}} \langle \phi_k^{(m)} | \chi_k^{(m)} \rangle. \tag{94}$$

这意味着，对于所有 $m \in \mathcal{M}'$，至少存在一个 $s_m \in [0, K'_m - 1]$ 的取值满足以下不等式：

$$e^{i\hat{\theta}_m} \langle \hat{\phi}_{s_m}^{(m)} | \hat{\chi}_{s_m}^{(m)} \rangle \geq c^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_\varepsilon^{(m)}} \langle \phi_k^{(m)} | \chi_k^{(m)} \rangle, \quad \text{for some phase } \hat{\theta}_m.$$

注意，

$$\langle \hat{\phi}_{s_m}^{(m)} | \hat{\chi}_{s_m}^{(m)} \rangle = c^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_\varepsilon^{(m)}} \sum_{k' \in \mathcal{I}_\varepsilon^{(m)}} e^{\frac{2\pi i (g^{(m)}(k) - g^{(m)}(k'))s_m}{K'_m}} \langle \phi_{k'}^{(m)} | \chi_k^{(m)} \rangle,$$

对于所有 $m \in \mathcal{M}'$。取 $\alpha_k^{(m)} = \frac{2\pi g^{(m)}(k) s_m}{K'_m}$ 和 $\beta_k^{(m)} = \frac{2\pi g^{(m)}(k) K'_m}{s_m} + \hat{\theta}_m$，可得

$$\frac{1}{M'} \sum_{m \in \mathcal{M}'} \langle \phi_m | \chi_m \rangle \geq \frac{c^2}{M'} \sum_{m \in \mathcal{M}'} \sum_{k \in \mathcal{I}_\varepsilon^{(m)}} \langle \phi_k^{(m)} | \chi_k^{(m)} \rangle = \frac{c^2}{M'} \sum_{m \in \mathcal{M}'} \sum_{k \in \mathcal{I}_\varepsilon^{(m)}} \mathrm{Tr}\left\{ \Xi_k^{(m)} \tau_k^{(m)} \right\} \geq 1 - 2\sqrt{\epsilon},$$

其中等式 用到了（54），最后一个不等式用到了（38），并代入了 c 的取值。这意味着 s

$$\frac{1}{M'} \mathrm{Re} \left(\sum_{m \in \mathcal{M}'} \langle \phi_m | \chi_m \rangle \right) \geq 1 - 2\sqrt{\epsilon},$$

因此，

$$\left| \frac{1}{M'} \sum_{m \in \mathcal{M}'} \langle \phi_m | \chi_m \rangle \right| \geq \left[\frac{1}{M'} \mathrm{Re} \left(\sum_{m \in \mathcal{M}'} \langle \phi_m | \chi_m \rangle \right) \right] \geq 1 - 2\sqrt{\epsilon}. \tag{95}$$

至此，证明完成。

E. 引理证明 *5*

这里我们采用与证明 [51,引理 VI.5]类似的论证。首先定义 $\mathcal{I}'_\epsilon$（去除码率中的松弛项）如下，对所有 $\epsilon \geq 0$,

$$\mathcal{I}'_\epsilon \triangleq \left\{ R : \exists\, \rho^{A_R} \in \mathcal{S}_\epsilon(\rho^B, \mathcal{N}_W) \text{ such that } R \geq I_c(\mathcal{N}_W, \rho^{A_R}) \right\}, \tag{96}$$

并由 [51]注意到

$$\bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{I}_\epsilon \subseteq \text{Closure} \left(\bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{I}'_\epsilon \right).$$

现在我们证明如下结论：

$$\mathcal{S}_0(\rho^B, \mathcal{N}_W) = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{S}_\epsilon(\rho^B, \mathcal{N}_W). \tag{97}$$

$\mathcal{S}_0(\rho^B,\ \mathcal{N}_W) \subseteq \bigcap_{\epsilon>0}\mathcal{S}_\epsilon(\rho^B,\ \mathcal{N}_W)$ 显然成立。为证明反方向，考虑任意 $\rho_1^{A_R} \in \bigcap_{\epsilon>0}\mathcal{S}_\epsilon(\rho^B,\ \mathcal{N}_W)$。这意味着，对所有 $\epsilon > 0$,

$$\|\mathcal{N}_W(\rho_1^{A_R}) - \rho^{B_R}\|_1 \le \epsilon \implies \|\mathcal{N}_W(\rho_1^{A_R}) - \rho^{B_R}\|_1 = 0 \implies \mathcal{N}_W(\rho_1^{A_R}) = \rho^{B_R}, \tag{98}$$

其中，第二个蕴含由度量的定义可得，因此 $\rho_1^{A_R} \in \mathcal{S}_0(\rho^B,\ \mathcal{N}_W)$ 和 (97) 成立。注意，由于紧致（有限维）度量空间中递减的非空闭有界集序列的交集非空，$\mathcal{S}_0(\rho^B,\ \mathcal{N}_W)$ 非空。因此，利用 $f(\rho^{A_R}) = I_c(\mathcal{N}_W,\ \rho^{A_R})$ 的连续性，以及 $\mathcal{S}_\epsilon$ 是紧致（有限维）度量空间中的递减非空闭有界子集这一事实，可得

$$f(\mathcal{S}_0(\rho^B,\mathcal{N}_W)) = \bigcap_{\epsilon>0} f(\mathcal{S}_\epsilon(\rho^B,\mathcal{N}_W)).$$

注意到，像 $f(\mathcal{S}_\epsilon(\rho^B,\ \mathcal{N}_W))$ 和 $f(\mathcal{S}_0(\rho^B,\ \mathcal{N}_W))$ 分别刻画率区域 $\mathcal{I}'_\epsilon$ 和 $\mathcal{I}_0$，并且 $\mathcal{I}_0$ 是闭集，由此证明得证。

F. 命题 *5* 的证明

考虑以下不等式:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\tilde{\zeta}\right] &\le \mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left\{\left(I - \sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} A_{x^n}\right)\rho^{B^{\otimes n}}\right\}\right] = 1 - \mathbb{E}\left[\sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \mathrm{Tr}\left\{A_{x^n}\rho^{B^{\otimes n}}\right\}\right], \\
&= 1 - \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)} \sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \frac{P_X^n(x^n)}{(1-\varepsilon)} \mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\}, \\
&\overset{a}{=} 1 - \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)} \mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}\} \overset{b}{\le} 1 - \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}(1 - 2\varepsilon - 2\sqrt{\varepsilon}) < \epsilon,
\end{aligned}$$

对所有充分大的 n 和所有充分小的 $\eta,\ \delta > 0$，其中 (a) 由 (77) 得出，而 (b) 由 [58, 方程 28] 得出。命题 5 的证明至此完成。

G. 命题证明*6*

我们首先在条件 $\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}} = 1$ 下对项 ζ 进行拆分；利用三角不等式，可得 $\zeta \le \zeta_1 + \zeta_2$，其中

$$\zeta_1 \triangleq \sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \gamma_{x^n} \mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\} \left\| \frac{\tilde{\rho}_{x^n}}{\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\}} - \tilde{\rho}_{x^n} \right\|_1,\ \zeta_2 \triangleq \sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \gamma_{x^n} \mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\} \|\tilde{\rho}_{x^n} - \mathcal{W}_{x^n}\|_1. \tag{99}$$

考虑以下不等式:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\zeta_1\right] &\le \sum_{m=1}^{2^{nR}} \sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \frac{1}{2^{nR}}\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X^n(m)=x^n\}}\right]\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\}\left\|\frac{\tilde{\rho}_{x^n}}{\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\}}-\tilde{\rho}_{x^n}\right\|_1 \\ &\le \sum_{m=1}^{2^{nR}} \sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \frac{1}{2^{nR}}\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\frac{P_X^n(x^n)}{(1-\varepsilon)}\left(1-\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\}\right) \\ &= \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\left[1-\sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)}\frac{P_X^n(x^n)}{(1-\varepsilon)}\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}_{x^n}\}\right] \\ &\overset{a}{=} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\left[1-\mathrm{Tr}\{\tilde{\rho}\}\right] \overset{b}{\le} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}(2\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon}) \le \epsilon,\end{aligned}$$

对所有充分大的 n 以及所有充分小的 $\eta,\ \delta>0$，其中 (a) 由定义（77）得出，而(b)由 [58, 式 28] 得出。类似地，我们现在计算

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\mathrm{sP}\}}\zeta_2\right] &\le \sum_{m=1}^{2^{nR}} \sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\frac{1}{2^{nR}}\frac{P_X^n(x^n)}{(1-\varepsilon)}\left\|\tilde{\rho}_{x^n}-\mathcal{W}_{x^n}^{\otimes n}\right\|_1 \\ &= \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\sum_{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)}\frac{P_X^n(x^n)}{(1-\varepsilon)}\left\|\tilde{\rho}_{x^n}-\mathcal{W}_{x^n}^{\otimes n}\right\|_1 \le \epsilon.\end{aligned}$$

对所有充分大的 n 和所有充分小的 $\eta,\ \delta>0$其中最后一个不等式由（78）得出。

至此，命题6的证明

H. 命题7证明

回顾 $E_{M|X^n}(m|x^n)$ 的定义，其中 $x^n\in\mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)$：

$$E_{M|X^n}(m|x^n)=\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}\frac{1}{2^{nR}}\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)}\frac{W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)}{P_X^n(x^n)}\mathbb{1}_{\{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}}\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}.$$

令 $D=2^{n(H(X|\hat{X})-\delta_1)}$，其中 $\delta_1(\delta)\searrow 0$ 当 $\delta\searrow 0$ 时成立，具体形式将在下文给出。定义一个由 2^{nR} 独立同分布随机变量 $\{Z_m(x^n)\}_{m=1}^{2^{nR}}$ 构成的序列，对所有 $x^n\in\mathcal{T}^{(n)}_{\hat{\delta}}(X)$,

$$Z_m(x^n)\triangleq\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}(1-\varepsilon)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}}\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}. \tag{100}$$

对于所有充分大的 n，我们得到 $\{Z_m(x^n)\}_{\in[2^{nR}]}$ 的经验平均值期望的如下界：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{1}{2^{nR}}\sum_{m=1}^{2^{nR}} DZ_m(x^n)\right] &= \frac{D}{2^{nR}}\sum_{m=1}^{2^{nR}}\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}(1-\varepsilon)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}],\\
&= \frac{D}{2^{nR}}\sum_{m=1}^{2^{nR}}\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}},\\
&\overset{a}{=} D\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{(x^n,\hat{x}^n)\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X,\hat{X})\}}\mathbb{1}_{\{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}},\\
&\overset{b}{\geq} 2^{n(H(X|\hat{X})-\delta_1)}2^{-n(H(X,\hat{X})+2\delta_1)}2^{n(H(\hat{X}|X)-\delta_1)} = 2^{-n(I(X;\hat{X})+4\delta_1)}, \qquad (101)
\end{aligned}$$

其中，(a) 是由以下事实得出的：若 $x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|x^n)$ 且 $\hat{x}^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})$，则 $(x^n,\hat{x}^n) \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X,\hat{X})$；其中 $\hat{\delta}=\delta(|\mathcal{X}|+|\hat{\mathcal{X}}|)$；而 (b) 则由联合典型序列和条件典型序列的性质得出，且 $\delta_1(\delta)$ 是一个由典型集合 [57] 的大小表征所确定的函数。

此外，注意到对于所有充分大的 n，我们有

$$DZ_m(x^n) \leq 2^{n(H(X|\hat{X})-\delta_1)}2^{-n(H(X|\hat{X})-\delta_1)}(1-\varepsilon)\left(\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}\right)\leq 1, \qquad (102)$$

其中，第一个不等式由联合典型序列的性质得出，即，若 $(x^n,\hat{x}^n) \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X,\hat{X})$，则 $W_{X|\hat{X}}(x^n|x^n) \leq 2^{-n(H(X|\hat{X})-\delta_1)}$。由 (101) 和 (102) 可知，$\{DZ_m(x^n)\}_m$ 满足引理 8（如下所述）的约束。因此，对所有 $\eta\in(0,1)$ 以及 $x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)$，将引理 (8) 应用于 $\{DZ_m(x^n)\}_m$ 后，我们得到

$$\Pr\left(Z(x^n)\in\left[(1-\eta)\mathbb{E}[Z(x^n)],(1+\eta)\mathbb{E}[Z(x^n)]\right]\right)\geq 1-2\exp\left\{-\frac{\eta^2 2^{n(R-I(X;\hat{X})-4\delta_1)}}{4}\right\}, \qquad (103)$$

其中 $Z(x^n) \triangleq \frac{1}{2^{nR}}\sum_{m=1}^{2^{nR}} Z_m(x^n)$。此外，根据 $Z_m(x^n)$ 和 $E_{M|X^n}(m|x^n)$的定义，我们可以将上述不等式化简如下：

$$\Pr\left((1+\eta)P_X^n(x^n)\sum_{m=1}^{2^{nR}}E_{M|X^n}(m|x^n)\leq(1+\eta)\mathbb{E}[Z(x^n)]\right)\geq 1-2\exp\left\{-\frac{\eta^2 2^{n(R-I(X;\hat{X})-4\delta_1)}}{4}\right\}. \qquad (104)$$

现在，注意到以下关于 $\mathbb{E}[Z(x^n)]$的界

$$\frac{1}{P_X^n(x^n)}\mathbb{E}[Z(x^n)] \leq \frac{1}{P_X^n(x^n)}\sum_{\hat{x}^n}P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)=1.$$

因此，不等式（104）可简化为：对所有 $x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)$，

$$\mathbb{P}\left(\sum_{m=1}^{2^{nR}}E_{M|X^n}(m|x^n)\leq 1\right)\geq 1-2\exp\left\{\left(-\frac{\eta^2 2^{n(R-I(X,\hat{X})-4\delta_1)}}{4}\right)\right\}.$$

最终，利用并集界可得

$$\Pr\left[\bigcap_{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)}\left(\sum_{m=1}^{2^{nR}}E_{M|X^n}(m|x^n)\le 1\right)\right]\ge 1-\sum_{x^n\in\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)}\Pr\left(\sum_{m=1}^{2^{nR}}E_{M|X^n}(m|x^n)>1\right),$$
$$\ge 1-2|\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)|\exp\left\{-\frac{\eta^2 2^{n(R-I(X;\hat{X})-4\delta_1)}}{4}\right\}. \quad (105)$$

ˆ因此，如果 $R > I(X;X) + 4\delta_1$，则 (105) 右侧的第二项呈指数级衰减至零，因此上述交集发生的概率趋于 1。命题 7 的证明至此完成。

引理 8. 设 $\{Z_n\}_{n=1}^N$ 为由 N 个取值介于零与一之间的独立同分布随机变量构成的序列，即 $Z_n \in [0,1] \quad \forall n \in [N]$，并假设 $\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N Z_n\right] = \mu$ 有正数 θ作为下界，且 $\mu \ge \theta$ 其中 $\theta \in (0,1)$，则对任意 $\eta \in (0,1/2)$ 和 $(1+\eta)\theta < 1$，可以将该序列 $\{Z_n\}_{n=1}^N$ 的集合平均落在 $(1\pm\eta)\mu$ 内的概率界定为

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N Z_n \in[(1-\eta)\mu,(1+\eta)\mu]\right)\ge 1-2\exp\left\{\left(-\frac{N\eta^2\theta}{4}\right)\right\}. \quad (106)$$

证明。 由算子切尔诺夫界 [64]得出。 □

I. 命题 *8* 的证明

固定一个 $\epsilon > 0$。回顾一下，附录 $Z_m(x^n)$ 中对 $x^n \in \mathcal{T}^{(n)}{}_{\hat{\delta}}(X)$ 的定义，见附录 H，

$$Z_m(x^n) = \sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}(1-\varepsilon)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}}\mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}.$$

我们首先使用附录 103H中给出的（H）的下界。对于所有足够大的 n:

$$\sum_{m=1}^{2^{nR}}E_{M|X^n}(m|x^n) = \left(\frac{1}{1+\eta}\right)\frac{1}{P_X^n(x^n)}\frac{1}{2^{nR}}\sum_{m=1}^{2^{nR}}Z_m(x^n)$$
$$\overset{w.h.p}{\ge}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)\frac{1}{P_X^n(x^n)}\mathbb{E}[Z(x^n)] \ge \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)(1-\epsilon), \quad (107)$$

其中，第一个不等式使用了（103）中的下界，该不等式以大于 $1-\tau$ 的概率成立，其中 $\tau \triangleq 2\exp\left\{\left(-\frac{\eta^2 2^{n(R-I(X,W)-4\delta_1)}}{4}\right)\right\}$；第二个不等式则使用了以下关于 $\mathbb{E}[Z(x^n)]$, 的界，该界对所有充分大的 n 均成立:

$$\frac{1}{P_X^n(x^n)}\mathbb{E}[Z(x^n)] = \frac{1}{P_X^n(x^n)}\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}} \ge (1-\epsilon). \quad (108)$$

根据（108），我们 可得，以大于 $(1-|\mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)|\tau)$ 的概率，且对所有充分大的 n，

$$\widetilde{\zeta} \leq \sum_{x^n \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_X^n(x^n)\left(1-\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)(1-\epsilon)\right) \leq \frac{2\eta+\epsilon(1-\eta)}{1+\eta}.$$

注意到 $\widetilde{\zeta}\cdot \mathbb{1}_{\{\text{s概率质量函数}\}} \leq 1$，并利用上述结果，对于所有充分大的 n，有

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{\zeta}\cdot \mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\right] \leq \frac{2\eta+\epsilon(1-\eta)}{1+\eta} + \tau. \tag{109}$$

因此，若 $R > I(X;\hat{X}) + 4\delta_1$，则 $\tau \to 0$ 对于所有充分大的 n。因此，$\mathbb{E}\left[\widetilde{\zeta}\cdot \mathbb{1}_{\{\text{s概率质量函数}\}}\right]$ 可以变得小于 ϵ 对于所有充分大的 n 以及充分小的 η。命题8的证明至此完成。

J. 命题9的证明

我们先写出在 $m \in [2^{nR}]$ 下且满足 $\mathbb{1}_{\{\text{s概率质量函数}\}} = 1$ 条件时的概率质量函数 $P_M(m)$。

$$\begin{aligned} P_M(m) &= \sum_{x^n \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} P_X^n(x^n) E_{M|X^n}(m|x^n), \\ &= \sum_{x^n \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)} \sum_{\hat{x}^n \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(\hat{X})} \frac{1}{2^{nR}} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)} W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n) \mathbb{1}_{\{x^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}} \mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}. \end{aligned} \tag{110}$$

现在我们通过以下不等式说明，对随机码本取平均后，误差项 ζ 可以任意小：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mathcal{C}}\left[\mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}}\zeta\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\text{sPMF}\}} \sum_{m\in[2^{nR}]} \sum_{\substack{\hat{x}^n \\ x^n \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X)}} \left|P_X^n(x^n)E_{M|X^n}(m|x^n) - P_M(m)W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\right| \mathbb{1}_{\{\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n\}}\right] \\ &\leq \sum_{m\in[2^{nR}]} \sum_{\substack{x^n \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X) \\ \hat{x}^n}} \mathbb{P}(\hat{X}^n(m)=\hat{x}^n)\left|\frac{1}{2^{nR}}\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)} W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{\hat{x}^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(\hat{X})\}}\mathbb{1}_{\{x^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}}\right. \\ &\qquad \left. - \left(\sum_{\mathrm{x}^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X)} \frac{1}{2^{nR}}\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)} W_{X|\hat{X}}^n(\mathrm{x}^n|\hat{x}^n)\mathbb{1}_{\{\hat{x}^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(\hat{X})\}}\mathbb{1}_{\{\mathrm{x}^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}}\right) W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\right| \\ &= \sum_{m\in[2^{nR}]} \sum_{\substack{x^n \in \mathcal{T}_{\hat{\delta}}^{(n)}(X) \\ \hat{x}^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(\hat{X})}} \frac{1}{2^{nR}}\frac{1}{(1+\eta)} P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n) W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\left|\mathbb{1}_{\{x^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X|\hat{x}^n)\}} - \sum_{\mathrm{x}^n \in \mathcal{T}_{\delta}^{(n)}(X|\hat{x}^n)} W_{X|\hat{X}}^n(\mathrm{x}^n|\hat{x}^n)\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{a}{\leq} \sum_{m\in[2^{nR}]} \sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})} \frac{1}{2^{nR}} \frac{1}{(1+\eta)} P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n)\, 2 \sum_{\substack{x^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)\\ \mathrm{x}^n\notin\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)}} W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n) W_{X|\hat{X}}^n(\mathrm{x}^n|\hat{x}^n) \\
&\leq \sum_{\substack{m\in[2^{nR}]\\ \hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})}} \frac{1}{2^{nR}} \frac{1}{(1+\eta)} P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n)\, 2 \sum_{\mathrm{x}^n\notin\mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|\hat{x}^n)} W_{X|\hat{X}}^n(\mathrm{x}^n|\hat{x}^n) \\
&\overset{b}{\leq} \sum_{m\in[2^{nR}]} \frac{1}{2^{nR}} \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\eta)} \left(\sum_{\hat{x}^n\in\mathcal{T}_\delta^{(n)}(\hat{X})} \frac{1}{(1-\varepsilon)} P_{\hat{X}}^n(\hat{x}^n) \right) 2\epsilon \leq 2\epsilon,
\end{aligned}
$$

对于所有充分大的 n 以及所有 η、$\delta > 0$，其中 (a) 是通过将对 $x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)$ 的求和拆分为对 $\{x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|x^n)\} \cap \{x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)\}$ 的求和以及对 $\{x^n \notin \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X|x^n)\} \cap \{x^n \in \mathcal{T}_\delta^{(n)}(X)\}$ 的求和得到的，而 (b) 则由标准的条件典型性论证得出。至此，命题 9 的证明完成。

K. 引理6的证明

考虑以下不等式:

$$
\begin{aligned}
&\|P_{X^n\hat{X}^n}(x^n,\hat{x}^n) - P_{\hat{X}^n}(\hat{x}^n) W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n)\|_{\mathrm{TV}} \\
&\qquad = \frac{1}{2} \sum_{x^n,\hat{x}^n} \Big(\sum_i \frac{1}{n}\Big) \Big| P_{X^n\hat{X}^n}(x^n,\hat{x}^n) - P_{\hat{X}^n}(\hat{x}^n) W_{X|\hat{X}}^n(x^n|\hat{x}^n) \Big| \\
&\qquad = \frac{1}{2} \sum_{i,x^n,\hat{x}^n} \frac{1}{n} \Big| P_{X_i\hat{X}_i}(x_i,\hat{x}_i) P_{X^{n\setminus i}\hat{X}^{n\setminus i}|X_i\hat{X}_i}(x^{n\setminus i},\hat{x}^{n\setminus i}|x_i,\hat{x}_i) \\
&\qquad\qquad\qquad - P_{\hat{X}_i}(\hat{x}_i) W_{X|\hat{X}}(x_i|\hat{x}_i) P_{\hat{X}^{n\setminus i}|\hat{X}_i}(\hat{x}^{n\setminus i}|\hat{x}_i) \Pi_{j\neq i} W_{X|\hat{X}}(x_j|\hat{x}_j) \Big| \\
&\qquad \geq \frac{1}{2} \sum_{i,x_i,\hat{x}_i} \frac{1}{n} \Big| P_{X_i\hat{X}_i}(x_i,\hat{x}_i) - P_{\hat{X}_i}(\hat{x}_i) W_{X|\hat{X}}(x_i|\hat{x}_i) \Big| \\
&\qquad \geq \frac{1}{2} \sum_{x,\hat{x}} \Big| \sum_i \frac{1}{n} P_{X_i\hat{X}_i}(x,\hat{x}) - \sum_i \frac{1}{n} P_{\hat{X}_i}(\hat{x}) W_{X|\hat{X}}(x|\hat{x}) \Big| \\
&\qquad = \|P_{X_Q\hat{X}_Q} - P_{\hat{X}_Q} W_{X|\hat{X}}\|_{TV} \geq \|P_X - \sum_{\hat{x}} P_{\hat{X}_Q}(\hat{x}) W_{X|\hat{X}}(\cdot|\hat{x})\|_{\mathrm{TV}},
\end{aligned}
$$

上述不等式由三角不等式以及 $P_{X_Q} = P_X$ 这一事实得出。

参考文献

[1] B. Schumacher，“量子编码”，*Physical ReviewA*，第 51 卷，第 4 期，第 2738 页，1995 年。[2] R. Jozsa 和B. Schumacher，“量子无噪声编码定理的新证明”，*JournalofModern Optics*，第 41 卷，第 12 期，第 2343–2349 页，1994 年。[3] A. Winter，“量子信息论中的编码定理”，*arXiv preprint quant-ph/9907077*，1999 年。[4] Z. Baghali Khanian，“混合态压缩的强逆定理界”，*arXiv e-prints*，第 arXiv–2206 页，2022 年。

[5] H. Barnum，“量子率失真编码”，Physical Review A，第 62 卷，第 4 期，第 042309 页，2000 年。[6] C. E. Shannon 等，“具有保真度准则的离散信源编码定理”，IRE Nat. Conv. Rec，第 4 卷，第 142-163 期，第 1 页，1959 年。[7] N. Datta、M.-H. Hsieh 和 M. M. Wilde，“量子率失真、反向香农定理与信源-信道分离”，IEEE 信息论汇刊，第 59 卷，第 1 期，第 615–630 页，2012 年。[8] M. M. Wilde、N. Datta、M.-H. Hsieh 和 A. Winter，“具有辅助资源的量子率失真编码”，IEEE 信息论汇刊，第 59 卷，第 10 期，第 6755–6773 页，2013 年。[9] M. Berta、M. Christandl 和 R. Renner，“基于单次信息论的量子反向香农定理”，Communications in Mathematical Physics，第 306 卷，第 3 期，第 579–615 页，2011 年。[10] C. H. Bennett、I. Devetak、A. W. Harrow、P. W. Shor 和 A. Winter，“用于模拟量子信道的量子反向香农定理与资源权衡”，IEEE 信息论汇刊，第 60 卷，第 5 期，第 2926–2959 页，2014 年。[11] N. Datta、M.-H. Hsieh、M. M. Wilde 和 A. Winter，“量子到经典率失真编码”，Journal of Mathematical Physics，第 54 卷，第 4 期，第 042201 页，2013 年。[12] I. Devetak 和 J. Yard，“再分配多方量子态的精确成本”，Physical Review Letters，第 100 卷，第 23 期，第 230501 页，2008 年。[13] Z. Luo 和 I. Devetak，“具有量子边信息的信道模拟”，IEEE 信息论汇刊，第 55 卷，第 3 期，第 1331–1342 页，2009 年。[14]Z. B. Khanian 和 A. Winter，“量子态再分配的率失真视角”，arXiv preprint arXiv:2112.11952，2021 年。[15] ——，“有纠缠辅助和无纠缠辅助的一般混合态量子数据压缩”，IEEE 信息论汇刊，第 68 卷，第 5 期，第 3130–3138 页，2022 年。[16] Z. Baghali Khanian、K. Kuroiwa 和 D. Leung，“混合态的率失真理论”，arXiv e-prints，第 arXiv–2208 页，2022 年。[17] M. Koashi 和 N. Imoto，“量子混合态信号的可压缩性”，Physical Review Letters，第 87 卷，第 1 期，第 017902 页，2001 年。[18] I. Devetak 和 T. Berger，“无记忆信源的量子率失真理论”，IEEE 信息论汇刊，第 48 卷，第 6 期，第 1580–1589 页，2002 年。[19] A. Winter，“概率分布信源与密度算子的压缩”，arXiv preprint quant-ph/0208131，2002 年。[20] N. Datta、J. M. Renes、R. Renner 和 M. M. Wilde，“单次有损量子数据压缩”，IEEE 信息论汇刊，第 59 卷，第 12 期，第 8057–8076 页，2013 年。[21] M.-H. Hsieh 和 S. Watanabe，“信道模拟与编码信源压缩”，IEEE 信息论汇刊，第 62 卷，第 11 期，第 6609–6619 页，2016 年。[22] S. Salek、D. Cadamuro、P. Kammerlander 和 K. Wiesner，“相关信息的量子率失真编码”，IEEE 信息论汇刊，第 65 卷，第 4 期，第 2603–2613 页，2018 年。[23] A. Anshu、R. Jain 和 N. A. Warsi，“单次量子测量压缩与随机性提取的凸分裂和假设检验方法”，IEEE 信息论汇刊，第 65 卷，第 9 期，第 5905–5924 页，2019 年。[24] I. Csisz´ar 和 J. K¨orner，《信息论：离散无记忆系统的编码定理》。剑桥大学出版社，2011 年。

[25] A. S. Holevo，“一般信号态下量子信道的容量”，IEEE 信息论汇刊，第 44 卷，第 1 期，第 269–273 页，1998 年。[26] B. Schumacher 和 M. D. Westmoreland，“通过噪声量子信道发送经典信息”，Physical Review A，第 56 卷，第 1 期，第 131 页，1997 年。[27] A. Winter，“量子测量中的‘外在’与‘内在’数据：正算子值测度的渐近凸分解”，Communication in Mathematical Physics，第 244 卷，第 1 期，第 157–185 页，2004 年。[28] A. S. Holevo，“量子系统、信道、信息”，载于《量子系统、信道、信息》。de Gruyter，2019 年。[29] H.-C. Cheng、E. P. Hanson、N. Datta 和 M.-H. Hsieh，“带量子边信息的信源编码与经典-量子信道编码之间的对偶性”，载于 2019 IEEE 国际信息论研讨会（ISIT）。IEEE，2019 年，第 1142–1146 页。[30] S. Lloyd，“噪声量子信道的容量”，Physical Review A，第 55 卷，第 3 期，第 1613 页，1997 年。[31] P. W. Shor，“量子信道容量与相干信息”，载于讲义，MSRI 量子计算研讨会，2002 年。[32] I. Devetak，“量子信道的私有经典容量和量子容量”，IEEE 信息论汇刊，第 51 卷，第 1 期，第 44–55 页，2005 年。[33] P. Hayden 、 M. Horodecki 、 A. Winter 和 J. Yard，“ 量子容量的解耦方法 ”，Open Systems & Information Dynamics，第 15 卷，第 01 期，第 7–19 页，2008 年。[34] M. A. Nielsen 和 I. Chuang，《量子计算与量子信息》，2002 年。[35] T. Berger，“率失真理论与数据压缩”，载于 Advances in Source Coding。Springer，1975 年，第 1–39 页。[36] R. G. Gallager，《信息论与可靠通信》。Springer，1968 年，第 588 卷。[37] T. Berger，《率失真理论：数据压缩的数学基础》，Prentice-Hall 电气工程丛书。Prentice-Hall，1971 年。[38] A. M. Gerrish，“信息率估计”，博士论文，耶鲁大学，1963 年。[39] S. Shamai 和 S. Verd´u，“优良码的经验分布”，IEEE 信息论汇刊，第 43 卷，第 3 期，第 836–846 页，1997 年。[40] S. S. Pradhan，“信源编码中测试信道的逼近”，载于信息系统科学会议论文集（CISS），2004 年。[41] T. Weissman 和 E. Ordentlich，“率受限信源码的经验分布”，IEEE 信息论汇刊，第 51 卷，第 11 期，第 3718–3733 页，2005 年。[42] P. W. Cuff、H. H. Permuter 和 T. M. Cover，“协调容量”，IEEE 信息论汇刊，第 56 卷，第 9 期，第 4181–4206 页，2010 年。[43] C. Schieler 和 P. Cuff，“优良率失真码与反向 DMC 之间的联系”，载于 2013 IEEE 信息论研讨会（ITW）。IEEE，2013 年，第 1–5 页。[44] V. Kostina 和 S. Verd´u，“优良有损信源码的输出分布”，载于 2015 年信息论与应用研讨会（ITA）。IEEE，2015 年，第 308–312 页。[45] H. V. Poor，《信号检测与估计导论》。Springer Science & Business Media，1998 年。[46] D. Petz，“冯·诺伊曼代数的充分子代数与态的相对熵”，Communications in Mathematical Physics，第 105 卷，第 1 期，第 123–131 页，1986 年。[47] H. Barnum 和 E. Knill，“以近乎最优的量子保真度和经典保真度逆转量子动力学”，Journal of Mathematical Physics，第 43 卷，第 5 期，第 2097–2106 页，2002 年。[48] P. Hayden、R. Jozsa、D. Petz 和 A. Winter，“等号成立时满足量子熵强次可加性的态的结构”，Communications in Mathematical Physics，第 246 卷，第 2 期，第 359–374 页，2004 年。

[49] A. Uhlmann，“*-代数状态空间中的‘跃迁概率’”，《数学物理报告》，第 9 卷，第 2 期，第 273–279 页，1976 年。[50] M. M. Wilde，“从经典到量子香农理论”，*arXiv* 预印本 *arXiv:1106.1445*，2011 年。[51] P. Cuff，“分布式信道合成”，*IEEE* 信息论汇刊，第 59 卷，第 11 期，第 7071–7096 页，2013 年。[52] T. A. Atif、A. Padakandla 和 S. S. Pradhan，“用于合成相关随机性的信源编码”，*IEEE* 信息论汇刊，2022 年。[53] C. A. Fuchs 和 J. Van De Graaf，“量子力学态的密码学可区分性度量”，*IEEE* 信息论汇刊，第 45 卷，第 4 期，第 1216–1227 页，1999 年。[54] M. Naimark，“对称算子的谱函数”，苏联科学院通报 ′数学辑*[*《苏联科学院学报》*]*,第 4 卷，第 277–318 页，1940 年。[55] M. M. Wilde，“一般经典量子信道的序贯译码”，《英国皇家学会会刊 *A*：数学、物理与工程科学》，第 469 卷，第 2157 期，第 20130259 页，2013 年。[56] H. Mattson Jr，“覆盖半径的上界”，载于《组合数学：国际图论与组合学专题讨论会论文集》，第 75 卷，2012 年，第 453–458 页。[57] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，“信息论基础，第 2 版（Wiley 电信与信号处理丛书）”，访问日期，2006 年。[58] M. M. Wilde、P. Hayden、F. Buscemi 和 M.-H. Hsieh，“模拟量子测量的信息论代价”，《物理学杂志 *A*：数学与理论》，第 45 卷，第 45 期，第 453001 页，2012 年。[59] A. Anshu、R. Jain 和 N. Warsi，“利用共享随机性和量子边信息进行测量压缩”，*arXiv* 预印本 *arXiv:1703.02342*，2017 年。[60] G. M. Ziegler，多胞体讲义。Springer Science & Business Media，2012 年，第 152 卷。[61] G. Dueck，“多址信道编码定理的强逆定理”，《组合信息系统科学杂志》，第 6 卷，第 3 期，第 187–196 页，1981 年。[62] R. Ahlswede 和 N. Cai，“量子多址信道的强逆定理”，载于《信息传输与组合学通论》。Springer，2006 年，第 460–485 页。[63] R. T. Powers 和 E. Størmer，“典范反对易关系的自由态”，*Communications in MathematicalPhysics*，第 16 卷，第 1 期，第 1–33 页，1970 年。[64] R. Ahlswede 和 A. Winter，“通过量子信道进行识别的强逆定理”，*IEEE* 信息论汇刊，第 48 卷，第 3 期，第 569–579 页，2002 年。