arXiv:2302.00630v1 [cs.DS] 1 Feb 2023

彩色聚类的参数化算法

Leon Kellerhals[1], Tomohiro Koana[*1]、Pascal Kunz[†1,2]和 Rolf Niedermeier[‡1]

[1]柏林工业大学，算法学与计算复杂性，德国柏林，{leon.kellerhals,tomohiro.koana, p.kunz.1}@tu-berlin.de[2]柏林洪堡大学，算法工程，德国柏林

摘要

在彩色聚类问题中，我们需要对边带颜色的（超）图进行聚类，其中颜色代表交互类型。具体而言，目标是在不选择任何两个共享端点且颜色不同的边的前提下，尽可能多地选取边。等价地，也可以将目标描述为给顶点着色，使其尽可能符合边的着色。

由于该问题是NP困难的，我们在先前工作的基础上研究其参数化复杂性。我们给出一个 $2^{\mathcal{O}(k)} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$时间算法，其中 k 是要选取的边数， n 是顶点数。我们还证明存在一个大小为 $\mathcal{O}(k^{5/2})$的问题核，从而解决了文献中提出的一个开放问题。我们考虑小于 k（即要选取的边数）和 r（即可以删除的边数）的参数。这类较小的参数通过考察 k 或 r 与这些值的某个下界之间的差异得到。针对采用这类参数化的彩色聚类问题，我们给出了算法和下界。最后，我们通过证明彩色聚类相对于顶点覆盖数和树割宽度均为W[1]-困难，而相对于精简树割宽度则是固定参数可解，从而确定了该问题关于结构图参数的参数化复杂性。

1 引言

图聚类是分析捕捉实体间交互数据时最基础的任务之一。其基本思想是：如果两个顶点属于同一个聚类，那么相应的实体在交互方面就具有相似性。当边表示同一类型的交互（可能带有权重）时，常见方法能够得到有意义的聚类。然而，这些方法并非为处理捕捉不同类型交互的数据而设计。在某些情境下，聚类不仅要体现交互方面的相似性，还应体现交互类型方面的相似性。例如，脑共激活图记录了哪些脑区在特定类型的刺激作用下同时处于活跃或不活跃状态

[*]由 DFG项目DiPa、NI 369/21 资助。

[†]由 DFG研究生培训组2434“复杂性的多个侧面”资助。

[‡]我们谨以本文纪念最近不幸离世的 Rolf。合著者、同事和导师的离去令我们深感悲痛。Rolf 为计算机科学，尤其是多变量算法，作出了巨大贡献；他本应继续为此耕耘许多年。计算机科学界将继续以他奠定的基础为依托。

时 [11]。在药物滥用预警网络中，[1] 交互描述的是患者在急诊就诊前服用的药物组合。其他按类型对交互进行类似分类的情境包括合著网络（按出版场所分类）和共同购买网络（按购买类型分类）。

Angel 等人 [5] 提出了一种寻找此类类别敏感型聚类的方法，我们将其称为彩色聚类(彩色聚类)：给定一个边着色图，目标是为顶点着色，使两端点均被赋予与边相同颜色的稳定边的数量最大化。Angel 等人 [5] 证明了该问题是NP-难问题，并给出了该问题的近似算法和可处理的特殊情形。Ageev 和 Kononov [2]以及 Alhamdan 和 Kononov [3]改进了他们的近似算法。Cai 和 Leung [9]研究了该问题的参数化复杂性，针对 k 稳定边[2] 的数量以及 r 不稳定边的数量，给出了固定参数可处理算法。Amburg 等人 [4] 以不同名称将该问题引入超图情形。Veldt [40] 继续研究了超图上的该问题。在上述若干示例中，将交互建模为超图是合理的。

相关工作。另一种同样考虑边颜色的聚类模型是色相关聚类 [7], ，其目标是对顶点进行聚类，使得将图转化为互不相交的单色团集合所需的边修改（添加、删除、重新着色）数量最少。该方法会对缺失的边予以惩罚，也就是说，需要添加这些边才能使每个聚类都成为一个团。色相关聚类推广了关联聚类 [6] ，因此即使只有一种颜色，也是 NP困难。彩色聚类不对这类缺失边施加惩罚，因此更易处理：当颜色数为两种时，该问题可在多项式时间内求解。与边着色图上的图聚类密切相关的是多层图聚类领域 [33, 10]。在这种情形下，各层与聚类类型无关。最后，超图聚类已得到广泛研究 [1, 34, 21, 16, 26]。

我们的贡献。我们继续研究图和超图上彩色聚类的参数化复杂性。对于参数 k——稳定边的数量，我们通过给出一种单指数时间算法，改进了 Cai 和 Leung [9] 提出的固定参数可处理结果。我们还证明，彩色聚类针对该参数存在一个多项式核，从而回答了 Cai 和 Leung [9] 提出的一个开放问题。这两项结果都可推广到边大小为常数的超图。

由于该问题关于稳定边数和不稳定边数均为固定参数可处理，我们考虑超过保证参数化。我们在相应章节介绍这一概念，并证明它可用于获得固定参数算法，适用于小于稳定边数的参数，以及小于不稳定边数的参数。同样，这两项结果都可以推广到超图。我们还通过证明稍小一些的超过保证参数具有困难性，补充了这些结果。我们还考虑结构图参数。即使对于相当大的结构参数，该问题仍然很难：我们证明，对于顶点覆盖数和树割宽度这两个参数，可能不存在固定参数可处理算法。然而，以精简树割宽度为参数时，该问题是固定参数可处理的。

[1] https://www.samhsa.gov/data/data-we-collect/dawn-drug-abuse-warning-network [2] 粗略地说，关于 k 的固定参数可处理算法，其运行时间为 $f(k) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$，其中 k 是参数， n 是实例规模。

最后，我们通过证明该问题在图上即使每个顶点的度至多为三仍是 NP困难的，并且在超图上即使每个顶点的度至多为二仍是 NP困难的，弥补了彩色聚类经典可处理性方面的一个空白。

2 预备知识

2.1 图与问题定义

关于标准图论术语，我们参考 Diestel [13]。超图 $G = (V, E)$由有限顶点集 V 和边集 $E \subseteq 2^V$组成。若对所有 $e \in E$都有 $|e| = 2$，则它是一个图。 G的阶为 $\max_{e \in E} |e|$。设 $v \in V$ 为一个顶点。我们用$\delta_G(v) := \{e \in E \mid v \in e\}$ 表示其关联边集，用 $N_G(v) := (\bigcup_{e \in \delta(v)} e) \setminus \{v\}$ 表示其邻域。v 的度为 $\deg_G(v) := |\delta_G(v)|$。对于边集 $F \subseteq E$，令 $\deg_{G,F}(v) = |\delta(v) \cap F|$。对于顶点集 $X \subseteq V$，令 $G[X]$ 表示由 X 诱导的子图。设 C 为一个有限颜色集。边着色是一个函数 $\ell\colon E \to C$，顶点着色则是一个函数 $f\colon V \to C$。 $v \in V$的色度为 $\deg^{\chi}_G(v) := \{c \in C \mid \exists e \in \delta(v)\colon \ell(e) = c\}$ 。对于任意 $c \in C$， $v \in V$ 的颜色 -c 度为 $\deg_{G,c}(v) := |\{e \in \delta(v) \mid \ell(e) = c\}|$。只要上下文清楚，我们就省略下标 $\cdot_G$。超图 $G = (V, E)$中带有边着色$\ell\colon E \to C$的边集 $F \subseteq E$ 称为稳定的，如果对于所有满足 $e \cap e' \neq \emptyset$的 $e, e' \in F$，都有 $\ell(e) = \ell(e')$。换言之，在超图 (V, F) 中，共享同一个连通分量的所有边必须具有相同的颜色。由此得到如下计算问题：选取一个最大的稳定边集：

> 彩色（超图）聚类（CC/CHC）**输入：** 一个（超）图 $G = (V, E)$、边着色 $\ell\colon E \to C$，以及一个整数 $k \in \mathbb{N}$。**问题：** G是否包含一个大小至少为 k 的稳定边集 F？

有时，用顶点着色来表示稳定性更为方便。若对于所有 $v \in E$， $f(v) = \ell(e)$，则边 $e \in E$ 在顶点着色 $f\colon V \to C$下是稳定的；否则是不稳定的。

One 可以将任意稳定边集 F 转换为顶点着色 $f_F\colon V \to C$，方法如下：

$$f_F(v) := \begin{cases} \ell(e), & \text{if } v \in e \in F, \\ \bot, & \text{if } v \text{ is not incident to any edges in } F, \end{cases}$$

其中 $\bot \in C$ 是任意一种默认颜色。我们注意到：

观察1。 如果 $F \subseteq E$ 是稳定的，那么 F 中的边在 f_F下是稳定的。

2.2 参数化复杂性

设 Σ 为有限字母表。参数化问题 *parameterized problem* $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 是 $\Sigma^* \times \mathbb{N}$ 中所有实例 (x, κ) 的子集， κ 是参数 *parameter*。参数化问题 L 满足以下条件之一：(i) 若存在一个算法，能在 $f(\kappa) \cdot |x|^{O(1)}$ 时间内判定 L，则称其为固定参数可解（或属于 FPT 类）；(ii) 若存在一个算法，能在 $|x|^{f(\kappa)}$ 时间内判定 L，则称其属于 XP 类；(iii) 若对于参数的任意常数值， L 都是 NP 困难，则称其为 参数化 *NP* 难，其中 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是仅依赖于参数的任意可计算函数。注意，FPT $\subseteq$ XP。对于运行时间界，我们采用 $\mathcal{O}^*$ 记号，它省略了输入规模的多项式因子。如果一个参数化问题是 W[1]-*hard*，那么它很可能不属于 FPT；

如果它是参数化 NP 难的，那么它就不属于 XP（除非 P =NP）。 L 的一个核是一个多项式时间算法，它以实例 (x,κ) 为输入，并输出第二个实例 (x',κ')，满足：(i) $(x,\kappa) \in L \iff (x',\kappa') \in L$；(ii) $|(x',\kappa')| \leq f(\kappa)$，其中 f 是一个可计算函数。核的规模为 f。更多细节请参阅标准文献 [12, 14]。

3 按稳定边的数量进行参数化

Cai 和 Leung [9]证明，关于稳定边最大数量，彩色聚类是固定参数可解的。他们的算法使用彩色编码，并能以概率 $1-\varepsilon$ 在 $\mathcal{O}(k^{2k}\ln(\frac{1}{\varepsilon})(n+m))$ 时间内找到一种着色，使至少有 k 条边稳定。该算法可以去随机化，从而得到运行时间为 $k^{2k+\mathcal{O}(\log k)}(n+m)$ 的确定性算法。接下来，我们将改进这一运行时间，并给出一个以 k 为参数的彩色聚类单指数算法。Cai 和 Leung 提出，彩色聚类是否具有大小关于 k 为多项式的核。我们将证明，这个问题确实存在大小为 $\mathcal{O}(k^{5/2})$ 的核。

3.1 单指数时间算法

我们的单指数时间算法是一个归约到加权精确覆盖的参数化归约，定义如下。

> 加权精确覆盖**输入：** 一个全集 U、一个由 U 的非空子集组成的集合族 $\mathcal{S}$、一个权重函数 $w\colon \mathcal{S} \to \mathbb{N}$，以及整数 s, W。**问题：** 是否存在一个由两两不相交子集构成的子族 $\mathcal{S}'$，使得 $|\bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S| = s$ 且 $\sum_{S\in\mathcal{S}'} w(S) \geq W$?

利用加权精确覆盖可在 $\mathcal{O}(2.851^s|S|\cdot|U|\log^2|U|)$ 时间内求解这一事实， [22, 37],我们证明如下结论。

定理 2. 彩色聚类可在 $\mathcal{O}^*(2^{\mathcal{O}(k)})$ 时间内求解。

证明。我们给出一个到加权精确覆盖的参数化归约。设 $(G=(V,E), \ell, k)$ 是一个彩色聚类实例。对于每种颜色 $c \in C$，记 G^c 为由颜色为 c的边所张成的子图（注意， G^c 不包含孤立顶点）。设 q_c 为 G^c 中的连通分量数，并令 $Q_1^c, Q_2^c, \ldots, Q_{q_c}^c \subseteq V$ 为这些连通分量。如果对于某种颜色 c，有 $q_c \geq k$；或者对于某个 c 和 $p \in [q_c]$， $G^c[Q_p^c]$ 至少有 k 条边，那么这就是一个平凡的是实例。因此，假设相反情况成立。我们按如下方式构造一个实例 $(U, \mathcal{S}, s := 2k, W := k)$。令 $U := V \uplus \{x_1, \ldots, x_s\}$。对于每种颜色 $c \in C$、每个连通分量 Q_p^c, $p \in [q_c]$以及每个非空子集 $X \subseteq Q_p^c$，我们将 X 加入 $\mathcal{S}$，并令 $w(X) := |\{\{u,v\} \in E \mid u,v \in X, \ell(\{u,v\}) = c\}|$，即颜色为 c且位于由 X诱导的图中的边数。我们还将单元素集合 $\{x_1\}, \ldots, \{x_s\}$ 加入 $\mathcal{S}$，并令 $w(\{x_i\}) := 0$。

假设 CC 实例是一个是实例，即存在一个大小至少为 k 的稳定边集 $F \subseteq E$。那么，对于 $G_F = (V,F)$ 中每个大小至少为二的连通分量 $X \subseteq V$，都存在一个集合 $X \in \mathcal{S}$，其权重等于 $G_F[X]$ 中边的数量，因为 $G_F[X]$ 中的边颜色相同。这些连通分量两两不相交。我们通过添加所有这些集合 X，并在 $|\bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S| < s$ 时添加适当数量的单元素集合 $\{x_i\}$，来构造 $\mathcal{S}'$。因此， $\mathcal{S}'$ 恰好覆盖 s 个元素，且其权重至少为 W。

反过来，假设存在一个权重至少为 W 的子族 $\mathcal{S}'$，且 $|\bigcup_{S\in\mathcal{S}'} S| \models s$。$\mathcal{S}'$ 中除单元素集合外的每个子集，都对应于顶点集合 V'；根据构造，$G[V']$ 含有 $w(V')$ 条边，且这些边的颜色均相同。因此，对每个 $v \in V'$，令 $f(v) = c$，即可为 CC 实例得到一个包含至少 k 条稳定边的解。

关于运行时间，注意到加权精确覆盖的实例在 $\mathcal{S}$ 中至多包含 $|C| \cdot k \cdot 2^k + 2k$ 个集合。使用上述算法可得运行时间为 $\mathcal{O}(2.851^s \cdot (|C| \cdot k \cdot 2^k + 2k)(|V| + 2k) \log^2(|V| + 2k)) = \mathcal{O}(16.26^k \cdot k^2 \log^2 k \cdot |V| \log^2 |V|)$。□

上述结果可以推广到阶为 d 的超图。由于至多有 $k-1$ 条边的超图的一个连通分量至多有 $d(k-1)$ 个顶点，加权精确覆盖的实例至多有 $|C| \cdot k \cdot 2^{dk} + dk$ 个集合。

Coro推论 3. 彩色超图聚类可在 $\mathcal{O}^*(2^{\mathcal{O}(d^2 k)})$ 时间内求解。

3.2 一个多项式核

接下来我们证明，彩色聚类存在一个核，其规模关于稳定边的数量呈多项式 k，从而回答 Cai 和 Leung 提出的一个开放问题 [9]。

我们首先注意到，匹配是稳定的：

归约规则 1。 如果 G 存在一个大小为 k的匹配，则返回是。

令 M 为任意一个极大匹配，并令 $S := \bigcup_{e\in M} e$。那么，S 是一个大小至多为 $2k$ 的顶点覆盖，依据归约规则 1。因此，剩下的问题是界定独立集$V \setminus S$的大小。此时它可能任意大；事实上，我们将在第 5 节证明，彩色聚类在以顶点覆盖数为参数时是 W[1]-困难的，因此，恐怕无法仅根据顶点覆盖的大小来界定 I 的大小。

我们还利用另一个简单的观察：一组单色边是稳定的：

约简规则 2。 如果存在 k 条颜色相同的边，则返回是。

鉴于约简规则 2，我们只需限制颜色的数量。我们可以通过限制每个顶点的色度来实现这一点。

约简规则 3。 如果存在一个色度至少为 $2k+1$ 的顶点 $v \in V$，则删除 $\delta(v)$ 中颜色为 c 的所有边，其中 c 是 $\delta(v)$ 中出现频率最低的颜色。

引理 4。 约简规则 3 是正确的。

证明。令 $G' = (V, E')$ 为应用约简规则 3后得到的图。如果 $F \subseteq E'$满足 $|F| \geq k$ 在 G'中稳定，则它在 G中也稳定。

反过来，假设 $F \subseteq E$ 在 G中与 $|F| = k$ 稳定。我们证明存在一个大小为 k的边集 $F' \subseteq E'$，它在 G'中稳定。若 $f_F(v) \neq c$，则 F在 G 中稳定，因为我们只删除了与 v关联的颜色为 c 的边。假设 $f_F(v) = c$。由于与 v关联的边中至少还有 $2k$ 种其他颜色，且 $|\bigcup_{e\in F} e| \leq 2k$，因此存在一种颜色 $c' \neq c$，使得与 v 关联且颜色为 c' 的边与 F 中的边顶点不相交（v除外）。由于 c 是与 v关联的边中出现频率最低的颜色，我们通过将颜色为 c 的边替换为颜色为 c'的边，得到所需的解 F。□

此时，我们可以证明所得图至多有 $\mathcal{O}(k^3)$ 条边。回忆一下， S是一个顶点覆盖，即每条边都与 S关联。因此，至多有$2k+1)\cdot|S| \in \mathcal{O}(k^2)$种颜色至少出现一次。根据归约规则2，根据归约规则2，图中每种颜色至多出现 k 次，因此我们有 $\mathcal{O}(k^3)$ 条边。

我们将通过折半论证展示如何改进这一点。为此，对于顶点 v 和颜色 c ，我们将由颜色为 c 的边连接的邻点集合记为 $N_c(v)$。直观地说，如果在 S 中有“许多”顶点 v ，使得有“许多”颜色 c在 $\delta(v)$中出现了“许多”次，那么我们就能构造一个大小为 k的稳定集。

约简规则 4. 令 $T \subseteq S$ 为满足 $|\{c \in C \mid |N_c(v) \setminus S| \geq 2k^{1/2}\}| \geq 2k^{1/2}$的顶点 v 集合。若 $|T| \geq k^{1/2}$，则返回 yes。

引理 5. 约简规则4 是正确的。

证明。 不失一般性，假设 $t := |T| = k^{1/2}$，并令 $T := \{v_1, \ldots, v_t\}$。我们证明以下贪心算法可以找到一个大小为 k的稳定集 $F = F_t$ ： 从$F_0 := \emptyset$开始。我们将按递增的 $q \in [t]$ 构造 F_q ，使得 $|F_q| = \sum_{p=1}^{q} 2k^{1/2} - (p-1)$。令 $V_{F_{q-1}} := (\bigcup_{e \in F_{q-1}} e) \setminus S$为 F_{q-1}中位于 S之外的边的端点集合。按递增顺序考虑$q \in [t]$ ，令 $c := \arg\max_{c' \in C} |N_{c'}(v_q) \setminus (S \cup V_{F_{q-1}})|$。我们声称 $|N_c(v_q) \setminus (S \cup V_{F_{q-1}})| \geq 2k^{1/2} - (q-1)$。注意， $|V_{F_{q-1}}| \leq |F_{q-1}| \leq 2(q-1)k^{1/2}$。由于有 $2k^{1/2}$ 种颜色 $c \in C$满足 $|N_c(v_q) \setminus S| \geq 2k^{1/2}$，根据鸽巢原理，存在一种颜色 c满足 $|N_c(v_q) \cap V_{F_{q-1}}| \leq |V_{F_{q-1}}|/(2k^{1/2}) = q-1$。因此， $|N_c(v_q) \setminus S| - |N_c(v_q) \cap V_{F_{q-1}}| \geq 2k^{1/2} - (q-1)$。现在，令 F_q 由 F_{q-1} 以及 $2k^{1/2} - (q-1)$ 条连接 v_q 与 $N_c(v_q) \setminus (S \cup V_{F_{q-1}})$ 之间的任意边构成。最后，令 $F := F_t$。我们有 $|F| = \sum_{q \in [t]} |F_q| - |F_{q-1}| = \sum_{q \in [t]} 2k^{1/2} - (q-1) \geq \sum_{q \in [t]} k^{1/2} = k$。 □

应用约简规则 4后，我们得到“数量不多”的顶点，使得有“许多”颜色 c 在 $\delta(v)$中出现了“许多”次，从而得到一个更小的核。

定理 6. 彩色聚类存在一个大小为 $\mathcal{O}(k^{5/2})$的核。

证明。 我们穷尽地应用约简规则1至4 ，并删除所有孤立顶点。我们证明，所得图的大小为 $\mathcal{O}(k^{5/2})$。

令 T 为约简规则 4 中所指定的对象。我们可以假设 $|T| \leq k^{1/2}$ ，因此与 T相邻的 $= \mathcal{O}(k^{5/2})$至多有 $\mathcal{O}(k^2 \cdot |T|)$个。现在考虑一个顶点 $v \in S \setminus T$。注意，只需对至少有一个端点属于 S 的边数给出上界，因为两个端点都属于 S的边至多有 $\mathcal{O}(k^2)$条。令 X 为满足$|N_c(v) \setminus S| \geq 2k^{1/2}$的颜色 c 所组成的集合，并令 Y为满足 $N_c(v) \setminus S \neq \emptyset$的颜色 $c \notin X$所组成的集合。根据 T的定义，至多有 $2k^{1/2}$ 种颜色 $c \in X$，因此与 v 相邻且颜色为 $c \in X$的边至多有 $k \cdot |X| = \mathcal{O}(k^{3/2})$条。此外，颜色属于 Y 且与 v 相邻的边至多有 $\mathcal{O}(k^{3/2})$条，因为 $\delta(v)$中颜色为 $c \in Y$ 且满足 $|Y| \in \mathcal{O}(k)$ 的边至多有 $k^{1/2}$ 条。因此，由于所有孤立顶点都已删除，图中的顶点和边总数至多为 $\mathcal{O}(k^{5/2})$。 □

该结果可推广至阶为 d 的超图。由归约规则 1 可得一个大小至多为 dk 的顶点覆盖。归约规则 2 可直接应用。我们可以调整归约规则3 ，将色度限制为 dk。如上所述，这已经得到了一个核。

C推论 7. 彩色超图聚类存在一个大小为 $\mathcal{O}(d^2k^3)$ 的核 .

请注意，正如引理 5中那样，折半论证无法推广到超图；我们隐含地假设每条边至多有一个端点位于 S之外。

4 超过保证参数

对于彩色聚类，以 r 为参数，可以得到一个相当直接的固定参数可处理算法：$= |E| - k$，即允许的不稳定边数。只需任意选取一对共享顶点但颜色不同的边，然后根据这两条边中哪一条是不稳定边，分成两种情况进行分支。由此可得到一个 $\mathcal{O}^*(2^r)$-算法。Cai 和 Leung [9] 通过将问题归约到 $\mathcal{O}^*(1.2783^r)$，获得了运行时间更快的固定参数可处理算法。顶点覆盖。最近提出的 $\mathcal{O}^*(1.25298^k)$ 时间算法，用于求解顶点覆盖 [24]，可以用来改进这一运行时间。已有一系列研究尝试通过引入更小的参数来改进这类算法：考虑一个下界或上界，再将传统参数与该下界或上界之间的差作为较小的参数。这种方法称为“高于或低于保证值”参数化（例如，参见 [20, 23, 25, 29]）。

为彩色聚类选择一种可能的超过保证参数化方法，可以通过考虑边着色图的所谓冲突图来实现。冲突图 $\partial(G,\ell)$ 由 Angel 等人 [5, 在图 $G = (V,E)$ 的第 4], 节中引入，该图带有边着色 $\ell\colon E \to C$；它为 G 中的每条边都包含一个顶点。若 G 中对应的边颜色不同且共享一个顶点，则 $\partial(G,\ell)$ 中的两个顶点相邻。形式化地说，$\partial(G,\ell) = (E,\partial E)$，其中 $\partial E = \{\{e,e'\} \subseteq E \mid e \cap e' \neq \emptyset$ 且 $\ell(e) \neq \ell(e')\}$。G 中的任何稳定边集都对应于 $\partial(G,\ell)$ 中的一个独立集，因此 G 中不稳定边的最小数量就是 $\partial(G,\ell)$ 的顶点覆盖数。由此可知，$\partial(G,\ell)$ 中最小顶点覆盖大小的任何下界，都是 r 的下界。当参数取最大匹配大小以上的差值，或取顶点覆盖标准线性规划的最小分数解以上的差值时，顶点覆盖问题是固定参数可处理的 [27, 36]。这些结果也可用于求解以 $\partial(G,\ell)$ 中相应下界以上的差值为参数的彩色聚类问题。

4.1 基于度的下界以上

我们将考虑图的任意顶点着色中必须是不稳定边的数量的另一种下界 r。考虑与某个顶点 v 相 incident 的边，除一种颜色的边以外，其余边都不稳定。因此，与 v 相 incident 的不稳定边数量至少为 $\deg(v) - \max_{c\in C} \deg_c(v)$。要得到图中必须是不稳定边的总数的下界，我们可以对图中所有顶点的这个值求和，但必须将总和除以二，以避免重复计算边。这个下界可以形式化如下。对于任意图 $G = (V,E)$，定义

$$\rho(G,\ell) \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{v\in V}\big(\deg(v) - \max_{c\in C}\deg_c(v)\big).$$

注意，对于彩色聚类的任意是实例 $(G = (V,E)\ \ell, k = |E| - r)$，都有 $r \geq \rho(G,\ell)$。

因此，接下来我们将研究 带颜色的聚类关于参数 $r - \rho(G,\ell)$ 的参数化复杂性。不幸的是，事实证明，一般情况下这个问题是 para-NP-难的（定理 11）。不过，我们发现，如果考虑由一个更小但仍然紧的下界得到的参数 $r - \rho'(G,\ell)$，则带颜色的聚类

聚类是固定参数可处理的:

$$\rho'(G,\ell) \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{v\in V} \min\big(\deg(v) - \max_{c\in C}\deg_c(v), \tfrac{1}{2}\deg(v)\big).$$

根据定义， $\rho(G,\ell) \geq \rho(G',\ell)$，因此对于任意彩色聚类是实例，都有 $r \geq \rho'(G,\ell)$。我们通过证明 $\rho'(G,\ell)$ 不超过冲突图上顶点覆盖线性规划松弛的最优值，来说明以参数$r - \rho'(G,\ell)$为参数的彩色聚类是固定参数可处理的。这使我们可以使用顶点覆盖的固定参数可处理算法，该算法以解大小减去线性规划松弛的最优值 [27] 为参数。

定理 8. 彩色聚类 关于 $r - \rho'(G,\ell)$是固定参数可处理的 。

证明。 我们首先证明，对于任意带边着色ℓ: $V \to C$的图 $G = (V,E)$，都有 $\alpha(\partial(G,\ell)) \geq \rho'(G,\ell)$，其中 $\alpha(H)$ 是图 $H = (V',E')$ 上顶点覆盖的松弛最优值。更准确地说，我们定义

$$\alpha(H) := \min \sum_{v\in V'} x_v \quad \text{subject to} \quad x_u + x_v \geq 1 \quad \forall \{u,v\} \in E'$$
$$0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V'.$$

注意，如果对每个 $v \in V'$ 都有 $x_v \in \{0,1\}$，那么该表述会在 H 中找到一个最小顶点覆盖。为了证明 $\alpha(\partial(G,\ell)) \geq \rho'(G,\ell)$，我们考虑以下对偶问题:

$$\beta(H) := \max \sum_{e\in E'} y_e \quad \text{subject to} \quad \sum_{e\in E', v\in e} y_e \leq 1 \quad \forall v \in V'$$
$$0 \leq y_e \leq 1 \quad \forall e \in E'.$$

根据强对偶定理，我们有 $\alpha(H) = \beta(H)$。因此，只需证明 $\beta(\partial(G,\ell)) \geq \rho'(G,\ell)$。为此，我们给出对偶线性规划的一个可行解 $\{y_{\partial e}\}_{\partial e\in\partial E}$，其目标值至少为 $\rho'(G,\ell)$。为构造这样的解，我们证明以下命题。

命题 9. 设 H 是一个完全 κ-部图，其第 i 个部分有 n_i 个顶点，其中 $n_i \geq n_j$ 对所有 $i < j \in [\kappa]$ 都成立。如果 H 至少有两个顶点，那么

$$\beta(H) \geq \begin{cases} \sum_{i=2}^{\kappa} n_i & \text{if } n_1 \geq \sum_{i=2}^{\kappa} n_i. \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\kappa} n_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 如果 $n_1 \geq \sum_{i=2}^{\kappa} n_i$，则考虑如下定义的对偶线性规划的一个解：对于第 i 个部分中的每个顶点 v（$i > 1$），我们从第一部分任意选取一个不同的顶点 u，并令边 $e = \{u,v\}$ 对应的 $y_e = 1$ 取该值，而所有其他边 e 对应的 $y_e = 0$ 取该值。注意，这给出了一个（有效的）目标值为 $\sum_{i=2}^{\kappa} n_i$ 的解。

假设 $n_1 \leq \sum_{i=2}^{\kappa} n_i$。如果 H 至多有三个顶点，那么我们有 $n_1 = n_2 = 1$和 $n_3 \in \{0,1\}$，也就是说，这是一个有两个或三个顶点的完全图。接着，对每条边 e 令 $y_e = 1/2$，从而得到一个值为$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\kappa} n_i$的解。如果 H 有多于三个顶点，那么从第一部分中选取一个顶点 u，并从第二部分中选取一个顶点 v。令 $y_{\{u,v\}} = 1$，并对每条与 u和 v中恰有一个顶点关联的边 e 令 $y_e = 0$。从图中删除 u 和 v 后，我们得到一个完全κ'部图 H'，其中 $n'_1 < \sum_{i=2}^{\kappa'} n'_i$ 成立；这里 n'_i 是第 i 大部分的大小：如果 $n'_1 = n_1 - 1$，那么$\sum_{i=2}^{\kappa'} n'_i = (\sum_{i=1}^{\kappa'} n'_i) - n'_1 = (\sum_{i=1}^{\kappa} n_i) - 2 - (n_1 - 1) = (\sum_{i=2}^{\kappa} n_i) - 1 \geq n_1 - 1 = n'_1$。

否则，我们有 $n'_1 = n_1$，因此 $n_1 = n_2 = n_3$。如果 $n_1 = 1$，那么我们有 $\sum_{i=2}^{\kappa'} n'_i = (\sum_{i=1}^{\kappa'} n'_i) - n'_1 \geq (\sum_{i=1}^{\kappa} n_i) - 2 - 1 \geq 1 = n'_1$，因为 H至少有四个顶点。如果 $n_1 \geq 2$，那么我们有 $\sum_{i=2}^{\kappa} n'_i \geq n'_2 + n'_3 \geq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = 2n_1 - 2 \geq n_1 = n'_1$。因此，通过归纳论证可知，存在一个值至少为 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\kappa} n_i$的解。 □

我们使用断言 9 来获得一个解 $\{y_{\partial e}\}_{\partial e \in \partial E}$，其值至少为 $\rho'(G, \ell)$。最初，对每个 $\partial e \in \partial E$，令 $y_{\partial e} = 0$。对于每个顶点 $v \in V$，我们执行以下操作：由与 v 关联的边集合 $\delta(v)$ 诱导的 $\partial(G, \ell)$ 的子图是一个完全 κ 部图，其中 κ 是与 v关联的颜色数。因此，根据断言 9，它具有一个值至少为 $\min(\deg(v) - \max_{c \in C} \deg_c(v), \frac{1}{2}\deg(v))$ 的线性规划对偶解 $\{z^v_{\partial e}\}$。对于该诱导子图中的每条边 $\partial e \in \partial E$，令 $y_{\partial e} = \frac{1}{2} z^v_{\partial e}$。由此，我们获得一个值至少为 $\rho'(G, \ell)$ 的解。此外，该解是可行的，因为对于每条边 $e = \{u, v\}$，我们有

$$\sum_{\substack{\partial e \in \partial E \\ e \in \partial e}} y_{\partial e} = \sum_{\substack{\{e,e'\} \in \partial e \\ u \in e'}} y_{\partial e} + \sum_{\substack{\{e,e'\} \in \partial e \\ v \in e'}} y_{\partial e} = \sum_{\substack{\{e,e'\} \in \partial e \\ u \in e'}} \frac{1}{2} z^u_{\partial e} + \sum_{\substack{\{e,e'\} \in \partial e \\ v \in e'}} \frac{1}{2} z^v_{\partial e} \leq 1. \tag{1}$$

由于 顶点覆盖 以解大小减去线性规划松弛值作为参数时是固定参数可处理的 [27], 因此彩色聚类 是 固定参数可处理的，其参数为 $r - \alpha(H)$，从而 $r - \rho'(G, \ell)$。 □

我们指出，如果最大色度为二，则这会导出一个针对较小参数 $r - \rho(G, \ell)$ 的固定参数可处理算法。请注意，即使有此限制，彩色聚类仍然是 NP困难的 [5]。

推论10。 彩色聚类 关于参数 $r - \rho(G, \ell)$ 是固定参数可处理的，前提是每个顶点的色度至多为二。

证明。由于对于每个顶点 $v \in V$，若其关联的边至多涉及两种颜色 $c, c' \in C$（可能是 $\deg_c(v) = 0$ 或 $\deg_{c'}(v) = 0$），则有 $\deg(v) = \deg_c(G) + \deg_{c'}(G)$，于是 $\deg(v) - \max_{c \in C} \deg_c(v) = \min_{c \in C} \deg_c(v) \leq \frac{1}{2}(\max_{c \in C} \deg_c(v) + \min_{c \in C} \deg_c(v)) = \deg(v)$。因此，对于每个顶点 $v \in V$，都有 $\min(\deg(v) - \max_{c \in C} \deg_c(v), \frac{1}{2}\deg(v)) = \deg(v) - \max_{c \in C} \deg_c(v)$。由此可得 $\rho(G, \ell) = \rho'(G, \ell)$。因此，根据定理 8，我们得到一个固定参数可处理算法。 □

我们通过证明：当每个顶点都可能关联到三种（或更多种）不同颜色的边时，该问题关于 $r - \rho(G, \ell)$ 是参数化 NP 难的，从而补充了我们的正面结果。

定理 11. 彩色聚类 即使在 $r - \rho(G, \ell) = 0$ 且每个顶点的色度至多为三时，仍然是NP困难的。

证明。 我们从 NP 困难的 单调一取三可满足性问题归约而来，该问题定义如下：输入由一组变量 X 和一组子句 Y 构成，每个子句都包含三个正文字。任务是找到一种真值赋值，使每个子句中恰有一个文字满足。已知即使每个变量恰好出现三次，该问题仍然是 NP 困难的 [31]。

令 (X, Y) 为一个包含 n 个变量和 n 个子句的单调一取三可满足性问题实例。我们按如下方式构造一个彩色聚类实例。我们的归约受到 Wu [42] 的技巧启发。对于每个子句 $y \in Y$，我们引入一个顶点 v_y。对于每个

出现在三个子句 y_1、y_2、y_3 中的变量 x，我们引入六个顶点 u_x^1、u_x^2、u_x^3、w_x^1、w_x^2、w_x^3，并添加边，使得在所得图中，$\{u_x^1, u_x^2, u_x^3\}$、$\{w_x^1, w_x^2, w_x^3\}$ 和每个 $i \in [3]$ 的 $\{y_i, u_x^i, w_x^i\}$ 都构成三角形。（本质上，当且仅当三个三角形 $\{y_i, u_x^i, w_x^i\}$ 属于一个稳定集时，变量 x 为真。）对于每个三角形，我们将其边染成该三角形独有的颜色。至此，(V, E) 和 ℓ 的构造完成。注意，G 有 $6n$ 个顶点和 $15n$ 条边。令 $k := 7n$（即 $r = 8n$）。注意，每个顶点 v_y 的色度为三，而 u_x^i 和 w_x^i 的色度为二。由于 $\deg(y_v) - \max_{c \in C} \deg_c(y_v) = 6 - 2 = 4$ 且 $\deg(u_x^i) - \max_{c \in C} \deg_c(u_x^i) = \deg(w_x^i) - \max_{c \in C} \deg_c(w_x^i) = 4 - 2 = 2$，我们有 $\rho(G, \ell) = \frac{1}{2}(\sum_{v \in V} \deg(v) - \max_{c \in C} \deg_c(v)) = \frac{1}{2}(4n + 2 \cdot 6n) = 8n = r$。剩下要证明的是 (X, Y) 与 (G, ℓ, k) 之间的等价性。

($\Rightarrow$) 假设 (X, Y) 存在一个真值赋值，使得每个子句中恰好有一个文字为真。我们将构造一个大小为 $k = 7n$ 的稳定集 F。假设变量 x 出现在子句 y_1、y_2 和 y_3 中。如果 x 在该赋值中为真，我们就在 F 中加入三个三角形 $\{y_i, u_x^i, w_x^i\}$ 的边。否则，我们加入三角形 $\{u_x^1, u_x^2, u_x^3\}$ 和 $\{w_x^1, w_x^2, w_x^3\}$ 的边。由于每个子句恰好满足一次，F 是稳定集。简单的计数论证表明，$\frac{1}{3}n$ 个变量为真。因此，F 的大小为 $9 \cdot \frac{1}{3}n + 6 \cdot \frac{2}{3}n = 7n = k$。

($\Leftarrow$) 假设存在一个大小为 $k = 7n$ 的稳定集 $F \subseteq E$。由于每个顶点至多关联两条同色的边，任何稳定集至多包含 $\frac{1}{2} \cdot 2|V| = 7n$ 条边（注意，必须有 1 2 才能弥补重复计数）。由此可知，每个顶点（尤其是 u_x^1、u_x^2、u_x^3、w_x^1、w_x^2、w_x^3）都恰好关联 F 的两条边。只有在对每个 $x \in X$，以下条件之一成立时，这一点才成立：三个三角形 $\{y_i, u_x^i, w_x^i\}$ 的所有边都属于 F，或者两个三角形 $\{u_x^1, u_x^2, u_x^3\}$ 和 $\{w_x^1, w_x^2, w_x^3\}$ 的所有边都属于 F。当且仅当三个三角形 $\{y_i, u_x^i, w_x^i\}$ 的边属于 F 时，令 x 为真的真值赋值，恰好满足每个子句中的一个文字。□

超图。我们可以将定理8 中的算法推广到阶为 d的超图，不过下界会更小

$$\rho_H(G, \ell) := \frac{1}{d} \sum_{v \in V} \min\left(\deg(v) - \max_{c \in C} \deg_c(v), \tfrac{1}{2}\deg(v)\right).$$

与（1）中一样，我们最多有 d 个加数（超边 e的每个端点对应一个），该解仍然可行。

推论 12。彩色超图聚类关于 $r - \rho_H(G, \ell)$是固定参数可处理的。

4.2 基于匹配的下界之上

现在我们将考虑把匹配作为 k的下界。图中的匹配 $G = (V, E)$ 是边 $M \subseteq E$的一个集合，满足 $e \cap e' \neq \emptyset$对任意两个不同的 e，$e' \in M$。令 $M(G)$ 表示图 G中最大匹配的大小。正如我们在归约规则1中所述，任何匹配都显然是稳定的，由此可得：

观察 13。如果 $M(G) \geq k$，那么$(G = (V, E)\ \ell, k)$ 是一个是-实例。

匹配 M在 $G = (V, E)$ 中称为诱导匹配，若不存在 $e, e' \in M$和 $v \in e, v' \in e'$使得 v 和 v' 相邻。令 $I(G)$ 表示图 G中最大诱导匹配的大小。当然，$I(G) \leq M(G)$，这意味着如果 $I(G) \geq k$，那么 $(G = (V, E)\ \ell, k)$ 是一个是实例。接下来我们将考虑参数 $k - M(G)$ 和 $k - I(G)$。

求最大诱导匹配是 NP难的 [38], 因此，在处理后一个参数时，我们假设该匹配已作为输入的一部分给出。

关于彩色聚类在基于匹配的下界之上的参数化，我们的主要结果是，该问题相对于 $(k - I(G)) + |C|$ 是固定参数可处理的（定理 15）。我们还证明，该问题相对于 $k - I(G)$ 属于 XP 算法可解范围；也就是说，对于任意常数值的 $k - I(G)$，彩色聚类都可以在多项式时间内求解（推论 16）。我们还将证明，就基于匹配的下界而言，这些结果在某种意义上已是所能达到的最佳结果。我们将证明，对于 $k - M(G) = 1$ 和 $|C| = 19$，彩色聚类是 NP困难的（定理 18）；这意味着除非 $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$，否则参数为 $(k - M(G)) + |C|$ 时甚至不存在 XP 算法。此外，我们证明，就 $k - I(G)$ 而言，彩色聚类是 W[1]-困难的（定理 19），这意味着除非固定参数可处理 $= \mathsf{W}[1]$，否则不存在针对 $k - I(G)$ 的固定参数可处理算法。

在本节中，对于边 $e = \{u, v\}$，我们记 $\deg_F(e) := \deg_F(u) + \deg_F(v)$。本节中我们将始终使用以下观察。

观察14。 设 $G = (V, E)$ 是一个带有匹配 M 的图。对于边子集 $F \subseteq E$，有 $2|F| = \sum_{v \in V} \deg_F(v) = \sum_{v \in X} \deg_F(v) + \sum_{e \in M} \deg_F(e)$，其中 $X := V \setminus \bigcup_{e \in M} e$是未匹配顶点的集合。

我们将首先介绍用于 $(k - I(G)) + |C|$ 的固定参数可处理算法。

定理 15。 给定一个最大诱导匹配，彩色聚类 可以在$\mathcal{O}^*(|C|^{\mathcal{O}(k-I(G))})$ 时间内求解。

证明。 设给定一个彩色聚类的是实例 $(G = (V, E), \ell, k)$，以及一个诱导匹配 M。在可能存在的多个解中，我们的目标是找到一个大小为 k 的稳定集 F，使得对于任意大小为 k 的稳定集，$|F \setminus M| \leq |F' \setminus M|$（换言之，$F$ 包含尽可能多的 M 中的边）。对 F 的这一限制将在算法中发挥核心作用。我们首先证明 $|F \setminus M| \leq 2(k - |M|)$。

我们首先证明，每条边 $e \in M \setminus F$都与 $F \setminus M$中的至少两条边相交。反设存在一条边 $e \in M \setminus F$，它与 F中的至多一条边相交。令 f为这条边；若 e不与 F中的任何边相交，则任取 $f \in F$。于是 $F' := (F \setminus \{f\}) \cup \{e\}$是稳定的，且 $|F' \setminus M| > |F \setminus M|$，矛盾。

因此，假设每条边 $e \in M \setminus F$都与 $F \setminus M$中的至少两条边相交。由于 M是一个诱导匹配，$F \setminus M$ 中的每条边至多与 M中的一条边相交。因此，$|F \setminus M| \geq 2|M \setminus F|$，由此可得

$$\begin{aligned} |F \setminus M| &\leq |F \setminus M| + (|F \setminus M| - 2|M \setminus F|) \\ &= 2(|F| - |F \cap M| - |M \setminus F|) = 2(k - |M|). \end{aligned}$$

为获得固定参数可处理算法，我们使用颜色编码技术。我们称顶点着色 $f\colon V \to C$ 对 F 是良好的，若 $F \setminus M$ 在 f 下稳定。我们对G 的顶点独立且均匀地随机着色，也就是说，以概率 $|C|^{-1}$ 将颜色 $c \in C$ 分配给每个顶点V。于是，顶点 $v \in \bigcup_{e \in F \setminus M} e$ 以概率 $|C|^{-1}$ 获得颜色 $f_F(v)$。这意味着，f 是良好的概率至少为 $|C|^{-|\bigcup_{e \in F \setminus M} e|} = |C|^{-2|F \setminus M|} \geq |C|^{-4(k-|M|)}$。因此，通过重复着色 $|C|^{\mathcal{O}(k-|M|)}$ 次，我们以常数概率获得 G 的良好着色。给定 G 的良好着色 f，我们可以按以下方式在多项式时间内得到一个至少有 k 条稳定边的着色f'。对于每个 $e = \{u, v\} \in M$，我们检查 $\delta(u)$ 中是否至少有两条边 $\cup \delta(v)$ 在 f 下稳定。若是，则令 $f'(u) := f(u)$ 且$f'(v) := f(v)$。否则，令 $f'(u) := f'(v) := \ell(e)$。

我们必须证明：若 G 包含一个大小至少为 k 的稳定边集，那么该算法以常数概率找到一个至少有 k 条稳定边的着色 f'。令 F 为一个大小至少为 k、且使 M 中边数最大的稳定边集。我们将证明，若 f 对 F 是良好的，那么 $F \setminus M$ 在 f' 下稳定，并且 $|\{e \in E \setminus (M \cup F) \mid e \text{ 在 } f'\}| \geq |\{e \in M \cap F \mid e \text{ 下稳定，而在 } f'\}|$ 下不稳定。这意味着至少有 $|F| = k$ 条边在 f' 下稳定。首先，每个 $e \in F \setminus M$ 在 f 下都稳定。此外，根据上述观察，若 e 与$e' \in M \setminus F$相交，那么必定存在第二条边 $e'' \in F \setminus F$。边 e'' 也必须在 f 下稳定。因此，f 和 f' 在 e 的端点上相同，进而 e 在f'下稳定。现在考虑 $e = \{u, v\} \in M \cap F$。若 e 在 f' 下不稳定，则必定至少有两条边 $e', e'' \in \delta(u) \cup \delta(v)$ 在 f 下稳定。由于 M 是一个诱导匹配，因此 e 是 M 中唯一与 e' 或 e'' 相交的边。因此，f 和 f' 在 e' 和 e'' 的端点上相同，这意味着这两条边在 f' 下稳定。因此，对于每个在 f' 下不稳定的 $e \in M \cap F$，$E \setminus (M \cup F)$ 中至少有两条边在 f' 下稳定。

□

定理 $|F \setminus M| \leq 2(k - |M|)$ 的证明中的界15实际上意味着，彩色聚类关于参数 $k - |M|$是XP。

推论 16。给定一个最大诱导匹配 M，彩色聚类可在 $n^{\mathcal{O}(k-I(G))}$ 时间内求解。

证明。令 F为定理 15的证明中定义的一个稳定集。由于 $|F \setminus M| \leq 2(k - |M|)$，我们可以在 F'时间内猜出集合$= F \setminus M$，然后剩下的问题是判断 $n^{\mathcal{O}(k-|M|)}$能否扩展为一个稳定集 F'，其中包含匹配中的 F条边 $k - |F'|$。由于这可以在多项式时间内完成，定理得证。 M

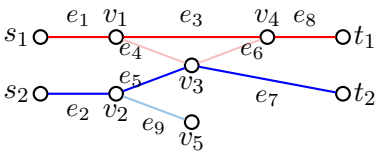
□

注意，上述诱导匹配的定义也适用于超图。关于 $|F \setminus M|$ 的界对于阶为 d的超图也成立，上述两个结果同样适用。由于超图中 $|\bigcup_{e \in F \setminus M} e| \leq d|F \setminus M| \leq 2d(k - |M|)$，着色 f是良好的概率为 $|C|^{-2d(k-|M|)}$，因此我们必须相应调整重复次数。

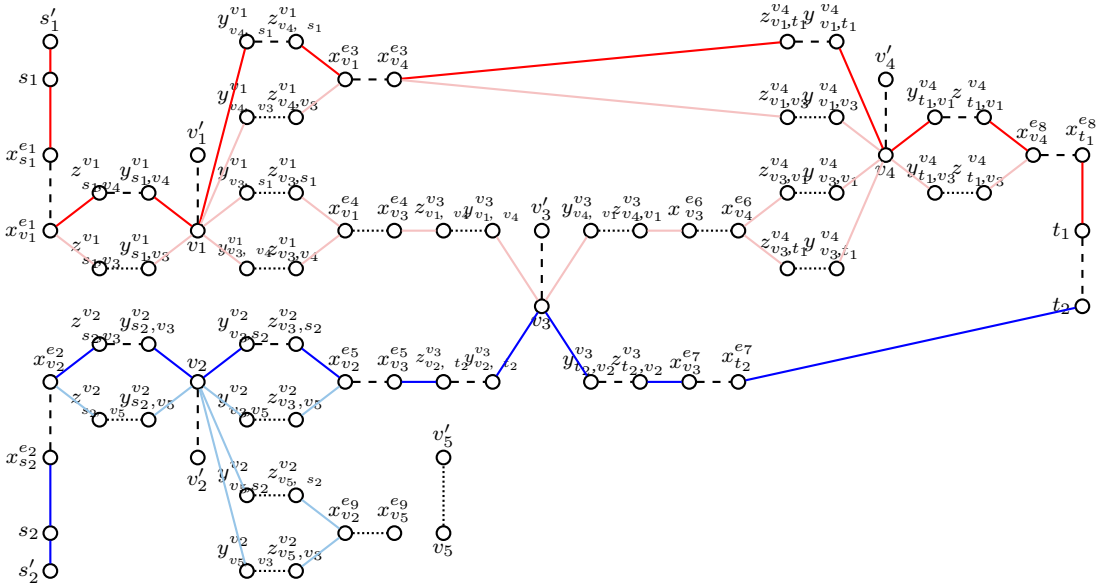
推论 17。给定一个大小为 I 的诱导匹配 M (G)，彩色超图聚类可以在 $\mathcal{O}^*(|C|^{\mathcal{O}(d(k-I(G)))})$ 时间内求解，并且可以在 $n^{\mathcal{O}(k-I(G))}$ 时间内求解。

接下来，我们将证明，除非 P $=$ NP，否则该 $k - I(G)$ XP 算法无法改进为适用于 $k - M(G)$ 的 XP 算法。这表明，在推论 16 的 XP 算法中，假设不存在连接两条 M 的端点的边是必要的。我们将通过从 NP困难的 [43] 问题“两条不相交单色路径”进行归约，证明当 $k - M(G) = 1$ 且 $|C| = 19$时，彩色聚类是 NP困难的。在该问题中，给定一个边二染色图和两个终端对，要求寻找两条顶点不相交的单色路径来连接每一对终端。该归约使用观察 14，并基于以下思想：我们构造一个具有完美匹配的图，其中有两条匹配边在一个解中可以具有三度，而所有其他匹配边的度至多为二。于是，一个解必须通过某种路径连接这两条特定的匹配边，而该路径可以转换为输入实例中的两条不相交单色路径。

定理 18。彩色聚类 即使在 $k - M(G) = 1$ 且 $|C| \leq 19$ 的情况下也是NP困难的。



(a) 两条不相交单色路径问题的一个实例。深红色边和深蓝色边构成不相交的单色路径。浅红色边和浅蓝色边不属于该解。



（b）彩色聚类实例，是将定理18 证明中的归约应用于TDMP 实例（a）后得到的。大小为 F 的稳定边集 $M(G)+1$ 用虚线和点线表示。虚线边和点线边的颜色为 c^m，其中前者不属于 F，后者属于。绘制为红色（蓝色）的边源自TDMP实例中的红色（蓝色）边。但并非所有红色（蓝色）边在彩色聚类实例中都具有相同颜色。不属于 F 的边为浅红色（浅蓝色），属于的边为深红色（深蓝色）。

图 1：定理18证明中归约的示意图。

证明。Wu [43] 证明了问题“两条不相交单色路径”（TDMP）是 NP 困难的。其定义如下。输入包括一个图 $G=(V,E)$，一个二边着色 $\ell\colon E\to\{1,2\}$，以及终端顶点 $s_1,t_1,s_2,t_2\in V$。任务是寻找一条 s_1-t_1 路径 P_1，使其仅使用颜色 1 的边；并寻找一条 s_2-t_2 路径 P_2，使其仅使用颜色 2 的边，且没有顶点同时被 P_1 和 P_2访问。仔细考察 Wu 的证明可知，即使每个顶点关联的颜色 1 的边至多有六条、颜色 2 的边至多有三条，TDMP 仍是 NP 困难的。经过一个非常简单的修改，我们还可以假设所有终端顶点的度均为 1，其中与 s_1 关联的唯一一条边颜色为 1，与 s_2 关联的唯一一条边颜色为 2。我们将给出一个从满足这些限制的 TDMP 到满足 $k-M(G)=1$ 且 $|C|\le 19$ 的彩色聚类问题的归约。该归约见图 1。

设 $(G=(V,E)\ \ell,s_1,t_1,s_2,t_2)$ 是满足上述限制的 TDMP 实例。我们按如下方式构造一个 CC 实例 $(G'=(V',E')\ \ell',k)$。设 $c^m\in C$ 表示一种固定颜色，该颜色将用于所有匹配边（除两条边 $\{s_1,s_1'\}$ 和

$\{s_2, s_2'\}$）在 G' 中。我们还将 $C \setminus \{c^m\}$ 中的颜色划分为 C_1 和 C_2，分别包含 $|C_1| = 15$ 和 $|C_2| = 3$。将 G 中的所有顶点添加到 G'。对于每条边 $e = \{u, v\} \in E$，将顶点 x_u^e 和 x_v^e 添加到 G'，并用一条颜色为 c^m 的边将二者连接起来。对于任意顶点 $v \in V \setminus \{s_1, t_1, s_2, t_2\}$，执行以下操作。首先，添加一个顶点 v'，并用一条颜色为 c^m 的边将其连接到 v。设 w_1、……、w_a 表示通过颜色为 1 的边与 v 相连的顶点，设 x_1、……、x_b 表示通过颜色为 2 的边与其相连的顶点。对于任意 $\{i, j\} \in \binom{[a]}{2}$，选择一种颜色 $c^v_{\{w_i, w_j\}} \in C_1$；对于任意 $\{i', j'\} \in \binom{[a]}{2}$，选择一种颜色 $d^v_{\{x_{i'}, x_{j'}\}} \in C_2$。对于固定的 v，所有 $c^v_{\{w_i, w_j\}}$ 和 $d^v_{\{x_{i'}, x_{j'}\}}$ 必须两两不同。注意，由于 v 至多关联六条颜色为 1 的边和三条颜色为 2 的边，因此在 C_1 中至多需要 $\binom{6}{2} = 15$ 种颜色，在 C_2 中至多需要 $\binom{3}{2} = 3$ 种颜色。对于每个 $i \in [a]$ 和 $j \in [a] \setminus \{i\}$，执行以下操作：

- 添加一个顶点 $y^v_{w_i,\ w_j}$ 并用一条颜色为 $c^v_{\{w_i, w_j\}}$ 的边将其与 v 相连。因此，v 有a条（除 $\{v, v'\}$ 外的）关联边，并且每种颜色 $c^v_{\{w_i, w_j\}}$ 恰好出现两次。

- 添加一个顶点 $z^v_{w_i,\ w_j}$ 并用一条颜色为 c^m 的边将其与 y_{w_i} 相连，w_j 再用一条颜色为 $c^v_{\{w_i, w_j\}}$ 的边将其与 $x_v^{\{v, w_i\}}$ 相连。注意，每个顶点 $x^v,\ v^{w_i}$都有 $a - 1$ 条（除 $\{x_v^{v,w_i}, x_{w_i}^{v,w_i}\}$ 外的）关联边，并且每种颜色 $c^v_{\{w_i, w_j\}}$ 恰好出现一次。

对于每个 $i' \in [b]$，我们都使用颜色 $d^v_{\{x_{i'}, x_{j'}\}}$ 重复这一构造。直观来说，当 P_1 依次经过 w_i、v 和 w_j 时，顶点 $x_v^{\{v, w_i\}}$、$x_v^{\{v, w_j\}}$ 和 v 将被赋予颜色 $c^v_{\{w_i, w_j\}}$。另一方面，如果 P_1 和 P_2 都不经过 v，那么 v 将被赋予颜色 c^m。最后，我们考虑终端顶点 s_1、t_1、s_2、t_2。对于 s_i、$i \in \{1, 2\}$，我们进行如下操作：添加一个顶点 s_i'，并用一条颜色任意的 $c \in C_i$ 边连接 s_i 和 s_i'。我们还用一条颜色为 c 的边连接 s_i 和 $x^e_{s_i}$，其中 e 是与 s_i 关联的唯一一条边。对于 t_i、$i \in \{1, 2\}$，我们进行如下操作：用一条颜色任意的 $c \in C_i$ 边将 t_i 与 $x^e_{t_i}$ 相连，其中 e 是与 t_i 关联的边；再用一条颜色为 c^m 的边将其与 t_{3-i} 相连。

令 $M := \{e \in E' \mid \ell'(e) = c^m\} \cup \{\{s_1, s_1'\}, \{s_2, s_2'\}\}$。注意，$M$是 G'中的完美匹配。我们设 $k := |M| + 1$。显然，输出实例可在多项式时间内计算得到。接下来只需证明：当且仅当(G', ℓ', k)是彩色聚类的一个是实例时，$(G, \ell, s_1, t_1, s_2, t_2)$是 TDMP 的一个是实例。

(⇒) 令 $s_1 = v_1, v_2, \ldots, v_p = t_1$ 和 $s_2 = \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_q = t_2$ 分别为颜色 1 和 2 的单色顶点不相交路径。在 G' 中定义如下稳定边集：

$$
\begin{aligned}
F :=& \{\{s_1, s_1'\}, \{s_2, s_2'\}\} \cup \{\{v, v'\} \mid v \in V, v \notin \{v_1, \ldots, v_p, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_q\}\} \\
&\cup \{\{y^v_{u,w}, z^v_{u,w}\} \mid \{u, v\}, \{v, w\} \in E, \ell(\{u, v\}) = \ell(\{v, w\}), \\
&\qquad \nexists i \colon (v_{i-2} = u \wedge v_i = v \wedge v_{i+1} = w) \vee (v'_{i-1} = u \wedge \tilde{v}_i = v \wedge \tilde{v}_{i+1} = w)\} \\
&\cup \{\{x^e_u, x^e_v\} \mid e \in E, \nexists i \colon (v_i = u \wedge v_{i+1} = v) \vee (\tilde{v}_i = u \wedge \tilde{v}_{i+1} = v)\} \\
&\cup \{\{x_{v_i}^{\{v_{i-1}, v_i\}}, z^{v_i}_{v_{i-1}, v_{i+1}}\}, \{y^{v_i}_{v_{i-1}, v_{i+1}}, v_i\}, \{v_i, y^{v_i}_{v_{i+1}, v_{i-1}}, v_i\}, \\
&\quad \{x_{v_i}^{\{v_i, v_{i+1}\}}, z^{v_i}_{v_{i+1}, v_{i-1}}\} \mid i \in \{2, \ldots, p-1\}\} \\
&\cup \{\{x_{\tilde{v}_i}^{\{\tilde{v}_{i-1}, \tilde{v}_i\}}, z^{\tilde{v}_i}_{\tilde{v}_{i-1}, \tilde{v}_{i+1}}\}, \{y^{\tilde{v}_i}_{\tilde{v}_{i-1}, \tilde{v}_{i+1}}, \tilde{v}_i\}, \{\tilde{v}_i, y^{\tilde{v}_i}_{\tilde{v}_{i+1}, \tilde{v}_{i-1}}, \tilde{v}_i\}, \\
&\quad \{x_{\tilde{v}_i}^{\{\tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1}\}}, z^{\tilde{v}_i}_{\tilde{v}_{i+1}, \tilde{v}_{i-1}}\} \mid i \in \{2, \ldots, q-1\}\}.
\end{aligned}
$$

该边集是稳定的。此外，度$_F(e) = 2$对所有 $e \in M \setminus \{\{s_1, s_1'\}, \{s_2, s_2'\}\}$，而度$_F(\{s_1, s_1'\}) =$度$_F(\{s_1, s_1'\}) = 3$。由观察14可知，$|F| = |M| + 1 = k$。

(⇐) 假设 F是 G'中的一个稳定边集，且满足 $|F| = k = |M| + 1$。没有边 $e \in M \setminus \{\{s_1, s_1'\}, \{s_2, s_2'\}\}$ 的度 $\deg_F(e)$ 可以为 ≥ 2。此外，$\deg_F(\{s_1, s_1'\})$、$\deg_F(\{s_2, s_2'\}) \leq 3$。由观察14可知，对于所有 $e \in M \setminus \{\{s_1, s_1'\}, \{s_2, s_2'\}\}$，$\deg_F(e) = 2$；并且 $\deg_F(\{s_1, s_1'\}) = \deg_F(\{s_1, s_1'\}) = 3$。带环图是一种超图 $H = (W, F)$，满足对所有 $e \in F$，$|e| \in \{1, 2\}$。考虑带环的辅助图 $H = (M, E'')$，其中E''在顶点 $e \in M$上有一个环，当且仅当 $e \in F$；若 F包含一条满足 $f \cap e \neq \emptyset \neq f \cap e'$的边 f，则在 e与 $e' \in M$之间有一条边。在 H中，任意 $e \in M \setminus \{\{s_1, s_1'\}, \{s_2, s_2'\}\}$的度为2，而 $\{s_1, s_1'\}$、$\{s_2, s_2'\}$ 的度为3。因此，在 H 中，顶点 $\{s_1, s_1'\}$、$\{s_2, s_2'\}$ 各有一个环和一个额外的邻居，而所有其他顶点要么有一个环，要么有两个不同于自身的邻点。这意味着 H 包含一条连接 $\{s_1, s_1'\}$ 与$\{s_2, s_2'\}$的路径。

设 $\{s_1, s_1'\} = e_1, e_2, \ldots, e_p = \{s_2, s_2'\}$ 是 H 中上述路径。下面我们将证明，这条路径实质上包含两条不相交单色路径，分别从 s_1到 t_1，以及从 s_2 到 t_2。对于任意 $i \in \{1, \ldots, p\}$，若 $e_i \neq \{t_1, t_2\}$，则 F 中见证 $\deg_F(e_i) \geq 2$ 的边的颜色要么全来自 C_1，要么全来自 C_2。首先请注意，这些边不可能具有颜色 c^m，因为任何这样的边都会在 H 中形成一个环，因此不可能位于这条路径上。若 $e_i = \{v, v'\}$，则此断言成立，因为 $\deg_{G'}(v') = 1$，所以这两条边都必须与 v 相 incident，因此颜色相同。在其他所有情况下，e_i 中没有顶点同时关联一条颜色属于 C_1 的边和一条颜色为 C_2 的边。令 $\ell(e_i) := j \in \{1, 2\}$，其中见证 $\deg(e_i) \geq 2$ 的边均来自C_j。通过类似的论证，我们可以证明，若 $e_i \neq \{t_1, t_2\} \neq e_{i+1}$，则 $\ell(e_i) = \ell(e_{i+1})$。由于$\ell(e_1) = 1$且 $\ell(e_p) = 2$，因此 $\{t_1, t_2\}$ 必须被该路径经过，设为 $e_q = \{t_1, t_2\}$。

在 H 中，$\{s_i, s_i'\}$ 仅与一个顶点$\{x^e_{s_i}, x^e_v\}$相邻，其中 v 是 s_i在 G中唯一的邻居。H 中任何类型为 $\{x^e_u, x^e_v\}$的顶点（满足 $e = \{u, v\}$）仅与类型为 $\{y^u_{v,w}, z^u_{v,w}\}$、$\{s_1, s_2\}$ 或 $\{t_1, t_2\}$的顶点相邻。H 中类型为 $\{y^u_{v,w}, z^u_{v,w}\}$ 的顶点恰好与一个类型为$\{x^e_u, x^e_v\}$ 的顶点和一个类型为 $\{u, u'\}$的顶点相邻。最后，在 H 中，类型为 $\{v, v'\}$ 的顶点仅与类型为 $\{y^v_{u,w}, z^v_{u,w}\}$的顶点相邻。由此可知，对于任意$i \in \{2, \ldots, q-1\}$,

- 若 $i \mod 4 = 2$，则 e_i 属于类型$\{x^e_u, x^e_v\}$,
- 若 i模 $4 \in \{1, 3\}$，则 e_i属于类型 $\{y^u_{v,w}, z^u_{v,w}\}$，并且
- 若 i模 $4 = 0$，则 e_i 属于类型 $\{u, u'\}$。

然后，$s_1 = v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{q+5}{4}} = t_1$（对于任意 $i \in \{2, \ldots, \frac{q+5}{4}\}$，都有 $e_{4i-1} = \{v_i, v_i'\}$）是一条从 s_1 到 t_1 的路径，且只使用颜色为 1 的边。类似地，考虑 $e_q, \ldots, e_p$，可以得到一条从 s_2 到 t_2的路径，它与第一条路径不相交，且只使用颜色为 2 的边。这证明该 TDMP 实例是一个是实例。

□

最后，我们将证明，针对 $k - I(G)$ 的 XP 算法很可能也无法改进为固定参数可处理算法。

定理 19. 彩色聚类 是关于 $k - I(G)$的 W[1]-困难问题。

证明。 我们将通过从 W[1]困难问题 多色团进行归约来证明这一点。在该问题中，输入由一个图 $G = (V, E)$ 构成，其中顶点集被划分为 s个独立集 $V = V_1 \uplus \ldots \uplus V_s$，任务是找到一个团，使其恰好包含来自每个 V_i的一个顶点。该问题关于 W[1]参数化时是困难的，参数为 s [15, 35]。

给定一个多色团实例 $(G=(V=V_1\uplus\ldots\uplus V_s,E)\ s)$，我们按如下方式构造一个彩色聚类实例 $(G'=(V',E')\ \ell,k)$。令 $C=\{c^m,c^e\}\cup\{c_v\mid v\in V\}$，也就是说，对于 G 中的每个顶点，除了颜色 c^m 和c^e之外，在 G' 中还有一种颜色 c_v。所有匹配边的颜色均为 c^m。对于每个 $i\in[s]$，图 G' 包含一个顶点 u_i；对于每个 $j\in[s]\setminus\{i\}$ 和 $v\in V_i$，还包含顶点 $w_v^{i\to j}$和 $x_v^{i\to j}$。最后，对于每个 $e\in E$，我们向 G'中添加一个顶点 y_e。G' 的边如下。对于每个 $i\in[s]$、$v\in V_i$和 $j\in[s]\setminus\{j\}$，都有一条从 u_i 到 $w_v^{i\to j}$、颜色为 c_v 的边，以及一条从 $w_v^{i\to j}$到 $x_v^{i\to j}$、颜色为 c^m的边。对于每条满足 $v\in V_i$ 且 $v'\in V_j$的边 $e=\{v,v'\}\in E$，从 $x_v^{i\to j}$和 $x_{v'}^{j\to i}$ 到 y_e都有颜色为 c^e 的边。令 $k:=(s-1)\cdot(|V|+s)$。注意，所有颜色为 c^m 的边构成一个诱导匹配，且此类边的数量为 $(s-1)\cdot|V|$。因此，$k-I(G)\ \leq\ s(s-1)$。我们构造的预期含义是：当顶点 $v\in V_i$ 属于一个大小为 k的团 X 时，顶点 u_i 将被赋予颜色 c_v，并且边$\{u_i,w_v^{i\to j}\}$ 以及对于 v 在 $G[C]$ 中关联的边 e 而言的 $\{w_v^{i\to j},y_e\}$，将被纳入一个稳定集 F。本质上，对于两个端点都在X 中的边 e，与其关联的 y_e 的边将解释稳定集大小的增加（与 M相比）。显然，该构造可以在多项式时间内计算。接下来只需证明：(G,s) 是多色团的一个是实例，当且仅当 (G',ℓ,k) 是彩色聚类的一个是实例。

($\Rightarrow$) 假设 $X=\{v_1,\ldots,v_s\}$ with $v_i\in V_i$ 是 G 中的一个团。那么，

$$\begin{aligned}F:=&\{\{u_i,w_{v_i}^{i\to j}\}\mid i\in[s],j\in[s]\setminus\{i\}\}\\&\cup\{\{w_v^{i\to j},x_v^{i\to j}\}\mid i\in[s],j\in[s]\setminus\{i\},v\in V_i\setminus\{v_i\}\}\\&\cup\{\{y_e,x_{v_i}^{i\to j}\}\mid e=\{v_i,v_j\}\in E\}\end{aligned}$$

是 G' 中的一个稳定边集。此外，

$$\begin{aligned}|F|&=s\cdot(s-1)+\sum_{i\in[s]}(|V_i|-1)(s-1)+s\cdot(s-1)\\&=s\cdot(s-1)+(s-1)(|V|-s)+s\cdot(s-1)\\&=(s-1)(|V|+s).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) 假设 $F,\ |F|\ =\ k,$是 G' 中的一条稳定边，且 $f_F\colon V'\to C$ 是相应的顶点着色。我们可以假设，在所有大小为 k 的稳定边集中，F 在诱导匹配（由所有满足 c^m 的边组成）中包含的边数最多。这意味着，对于任意满足 $v\in V_i$ 和 $v'\in V_j$ 的 $e=\{v,v'\}\in E$，如果边 $\{y_e,x_v^{i\to j}\}$包含在 F 中，那么边 $\{u_i,w_v^{i\to j}\}$、$\{y_e,x_{v'}^{j\to i}\}$和 $\{u_j,w_{v'}^{j\to i}\}$也包含在其中。否则，可以用 $\{x_v^{i\to j},w_v^{i\to j}\}$ 替换 $\{y_e,x_v^{i\to j}\}$，而不减少 F 的大小。类似地，如果 $\{u_i,w_v^{i\to j}\}\in F$，则存在一条边 $e=\{v,v'\}\in E,v\in V_i,v'\in V_j$，使得$\{x_v^{i\to j},y_e\},\{x_v^{j\to i},y_e\},\{u_j,w_{v'}^{j\to i}\}\in F$。令 X:$=\{v\in V\mid\exists e\in E\colon\{y_e,x_v^{i\to j}\}\in F,v\in e\}$。接下来，令 Y:
$=\{\{i,j\}\in\binom{[s]}{2}\mid\exists e=\{v,v'\}\in E\colon\{x_v^{i\to j},y_e\},\{x_{v'}^{j\to i},y_e\}\in F\}$。注意，$F$ 包含 $\{u_i,w_v^{i\to j}\}$ 类型的 $2|Y|$ 条边，以及 $\{x_v^{i\to j},y_e\}$类型的另外 $2|Y|$ 条边。它包含 $\{w_v^{i\to j},x_v^{i\to j}\}$类型的 $|V|\cdot($ $s-1)\ -2|Y|$ 条边。因此，

$$(s-1)(|V|+s)=k=4|Y|+|V|(s-1)-2|Y|=|V|(s-1)-2|Y|,$$

这意味着 $|Y|=\binom{s}{2}$。因此，对于任意 $\{i,j\}\in\binom{[s]}{2}$，都存在 $v\in V_i\cap X$和 $v'\in V_j\cap X$，使得边 $\{x_v^{i\to j},y_e\}$和$\{x_{v'}^{j\to i},y_e\}$包含在 F 中，这意味着 v和 v'在 G 中相邻。因此，X 是 G 中的一个团。 □

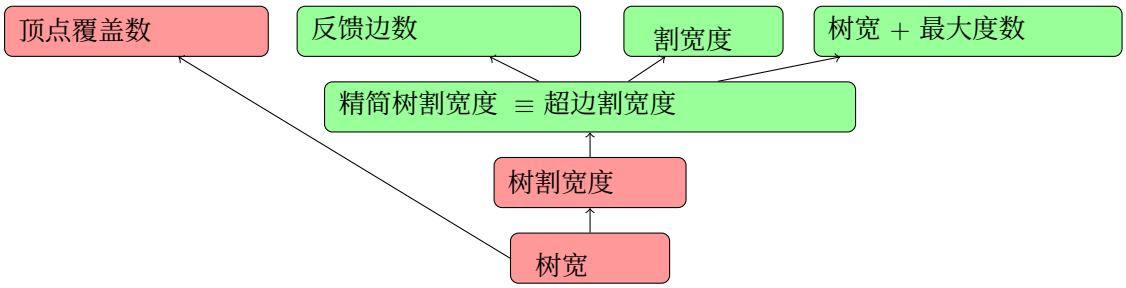


图2：与本节相关的图参数的哈斯图。对于绿色高亮的参数，彩色聚类是固定参数可解的；对于红色高亮的参数，则是 W[1]-难的。若存在函数 f，使得对每个图 G都有 $f(p(G)) \geq q(G)$，则从参数 p 指向参数 q。

5 结构参数

下文将根据结构图参数，对彩色聚类的参数化复杂性进行分类。我们的结果汇总于图2中。该问题对于顶点覆盖数而言是W[1]-困难的，这排除了针对许多图参数设计 FPT 算法的可能性。此外，该问题对于树割宽度而言也是W[1]-困难的。另一方面，对于精简树割宽度，该问题是固定参数可解的。精简树割宽度是一个最近才引入的参数，其目的正是处理那些对树割宽度和树宽而言都很难的问题 [17]。因此，彩色聚类可以加入由 Ganian and Korchemma 汇编的问题列表 [17] ：这些问题对树割宽度而言很难，但对精简树割宽度而言是固定参数可解的。

我们先从一个更一般的观察开始。如果图类 $\mathcal{C}$ 满足： $G \in \mathcal{C}$ 且$H \subseteq G$ 蕴含 $H \in \mathcal{C}$，那么它就是单调的 。对于图 $G = (V, E)$ 和单调图类 $\mathcal{C}$，令$d^e_{\mathcal{C}}(G) := \min_{E' \subseteq E,\ G-E' \in \mathcal{C}} |E'|$ 表示 G 到 $\mathcal{C}$的边删除距离 。

命题 20。 设 $\mathcal{C}$ 是一个单调图类，且彩色聚类在 $\mathcal{C}$上可多项式时间求解。那么，如果将到 $\mathcal{C}$ 的最小边删除集作为输入的一部分给出，则彩色聚类 关于 $d^e_{\mathcal{C}}$ 是固定参数可解的。

证明。 令 $E' \subseteq E$ 为一个大小至多为 $d^e_{\mathcal{C}}(G)$ 且满足 $G - E' \in \mathcal{C}$的边集。该算法的基本思路是，测试 E' 的每个子集 $F \subseteq E'$，并假设 F 中的边是稳定的，而 $E' \setminus F$ 中的边不稳定。然后，我们使用针对 $\mathcal{C}$ 的多项式时间算法，在 $E \setminus E'$ 中寻找一个可添加到 F的最大边集。

对于每个 $F \subseteq E'$，我们要么返回这一对 F 的选择无法得到解，要么计算一个等价实例 ($G_F = (V, E_F)$ ℓ_F, k_F)，其中 G_F是 $G - E'$的子图。注意，由于 $\mathcal{C}$ 是单调的，这意味着 $G_F \in \mathcal{C}$。我们首先删除 $E' \setminus F$中的每条边，从而得到 G_F。对于每条边 $e \in F$，我们检查是否存在一个 $e' \in F$，使得 $e \cap e' \neq \emptyset$且 $\ell(e) \neq \ell(e')$。如果存在这样的边，则返回这一对 F 的选择无法得到解。否则，对于每个与边 $e \in F$关联的顶点 $v \in V$，我们删除边 $\{e' \in E \setminus E' \mid \ell(e') \neq \ell(e)\ v \in e'\}$。删除后得到的边集为 E_F，将 ℓ限制到 E_F，并且 $k_F := k - |F|$。

当 $\mathcal{C}$ 上的多项式时间算法对至少一个 $F \subseteq E'$ 返回“是”时，我们接受该输入实例。由此可得运行时间为 $\mathcal{O}(2^{d^e_{\mathcal{C}}(G)} \cdot n^c)$，其中 $\mathcal{O}(n^c)$ 是该算法在 $\mathcal{C}$ 上的运行时间。 □

命题 20直接推出，彩色聚类关于反馈边数是固定参数可解的（彩色聚类在森林上是多项式时间可解的），并且关于不属于出现频率最高的两种颜色之一的边数也是如此（彩色聚类在 $|C| = 2$ 上是多项式时间可解的）。对于顶点删除距离，类似的结论并不成立，因为正如我们将在定理 W[1] 中所示，该问题关于顶点覆盖数是 22-难的。

也很容易证明，关于输入图的树宽和与任意顶点关联的最大颜色数这一联合参数化，彩色聚类是固定参数可处理的。这可以通过在树分解上使用标准动态规划来证明，具体做法是遍历每个袋的所有着色。由于与任意顶点关联的最大颜色数不超过最大度，因此可知，关于树宽加最大度这一参数，彩色聚类也是固定参数可处理的。

现在我们将考虑一个小于反馈边数以及树宽加最大度的参数。图参数精简树割宽度由 Ganian 和 Korchemna 提出 [17] ，旨在处理那些相对于树宽和树割宽度仍然是W[1]难的彩色聚类问题。我们通过考虑渐近等价的参数超边割宽度，证明 $G = (V, E)$ 是一个图，且 $T = (V, E')$ 是定义在相同顶点集上的一棵树。对于任意 $v \in V$，在 v 处的局部反馈边集为

$$\mathrm{lfe}(G, T, v) := |\{\{u, w\} \in E \setminus E' \mid v \text{ is on the unique } u\text{-}w\text{-path in } T\}|,$$

也就是说，$\mathrm{lfe}(G, T, v)$ 统计不属于 T 的边数，其中连接端点的 T 中唯一的路径会经过 v。注意，$u = v$ 或 $w = v$ 可能成立。(G, T) 的局部反馈边数 为 $\mathrm{lfe}(G, T) := \max_{v \in V} \mathrm{lfe}(G, T, v)$。$G$ 的超边割宽度 [17] 为

$$\mathrm{secw}(G) := 1 + \min_{T \text{ is a tree on } V} \mathrm{lfe}(G, T).$$

Ganian 和 Korchemna [17] 证明，存在一种算法，其运行时间为 $\mathcal{O}(f(k) \cdot |G|^{\mathcal{O}(1)})$；给定 $k \in \mathbb{N}$ 和图 $G = (V, E)$，该算法要么输出一个定义在 V 上的树 T，使得 $\mathrm{lfe}(G, T) \leq \mathcal{O}(k^6)$，要么正确判定 $\mathrm{secw}(G) > k$。我们不会正式定义精简树割宽度，但由于它在渐近意义上等价于超边割宽度，因此只需考虑后者。

定理 21。 彩色聚类 关于超边割宽度和精简树割宽度是固定参数可解的。

证明。 令 $(G = (V, E), \ell, k)$ 为一个彩色聚类实例。我们计算一棵树$T = (V, E')$，其 $\mathrm{lfe}(G, T) \leq \mathcal{O}(\mathrm{secw}(G)^6)$，并利用它通过动态规划算法在时间 $\mathcal{O}(2^{\mathrm{lfe}(G,T)} \cdot |C|^2 n^2)$ 内求解该实例。令 $r \in V$为我们指定为根的任意顶点。对于每个 $v \in V$，令 $T(v) \subseteq V$为 v 的所有后代（不包括 v）构成的集合，并令 $T[v] := T(v) \cup \{v\}$。我们令

$$C_1(v) := \{\{u, w\} \in E \setminus E' \mid u \in T(v)\ w \in V \setminus T[v]\}、C_2(v):$$
$$= \{\{u, w\} \in E \setminus E' \mid u \in T[u'], w \in T[w'], u', w' \text{是 } v\text{的不同子节点}，C_3(v):$$
$$= \{\{v, w\} \in E \setminus E' \mid w \in T(v)\}、C_4(v) := \{\{u, v\} \in E \setminus E' \mid u \in V \setminus T[v]\}.$$

注意，$|C_1(v)| + |C_2(v)| + |C_3(v)| + |C_4(v)| \leq \mathrm{lfe}(G, T)$。$C_1(v) \cup C_4(v)$中的每条边恰好有一个端点位于 $T[v]$中，而 $C_2(v) \cup C_3(v)$中的边则完全包含于 $T[v]$中。最后，我们用 $\mathrm{ch}(v)$ 表示 v 的子节点集合。对于任意颜色 c，我们使用 $\mathrm{ch}_c(v)$ 指代 v 的所有子节点的集合，其中它们与 v 之间的边存在于 G 中且颜色为 c（注意，T 不一定是 G的子图，因此 v 可能在 T 中拥有子节点，而这些子节点并不与 v 在 G中相邻）。

我们的算法是一种动态规划，用于计算表 D。对于每个 $v \in V$、$c \in C$，以及每个稳定集 $S \subseteq C_1(v) \cup C_4(v)$，表项 $D[v, c, S]$ 包含 $T[v]$ 中与 S相容的最大稳定边集 F的大小；这意味着 $F \cup S$ 也必须是稳定的，并且顶点 v 被赋予颜色 c，也就是说，与 v 关联的 $F \cup S$ 中的任意边都必须具有颜色 c。显然，对于 T的所有叶节点 v，$D[v, c, S] = 0$，因为当 v为叶节点时，$T[v]$ 不包含任何边。

现在假设 v 是 T的一个内部节点。我们首先给出 $D[v, c, S]$的递归公式。如果 $S \cap C_4(v) \neq \emptyset$，那么必定存在某个颜色 $c \in C$，使得对于所有 $e \in S \cap C_4(v)$，都有 $\ell(e) = c$。这是因为所有这些边都与 v关联。在这种情况下，v的颜色确定为 c，因此对于所有 $c' \in C \setminus \{c\}$，都有 $D[v, c', S] = 0$。如果 $S \cap C_4(v) = \emptyset$，或者如果 c 是 $S \cap C_4(v)$中所有边的颜色，则公式如下（我们使用 E_c 表示 $c \in C$，以指代$\{e \in E \mid \ell(e) = c\}$）：

$$
\begin{aligned}
D[v, c, S] \coloneqq \max_{\substack{S_2 \subseteq C_2(v) \\ S_3 \subseteq C_3(v) \cap E_c}} & |S_2| + |S_3| \\
& + \sum_{w \in \mathrm{ch}_c(v)} \max \{1 + D[w, c, (S \cup S_2 \cup S_3) \cap (C_1(w) \cup C_4(w))], \\
& \qquad \max_{c' \in C \setminus \{c\}} D[w, c', (S \cup S_2 \cup S_3) \cap (C_1(w) \cup C_4(w))]\} \\
& + \sum_{w \in \mathrm{ch}(v) \setminus \mathrm{ch}_c(v)} \max_{c' \in C} D[w, c', (S \cup S_2 \cup S_3) \cap (C_1(w) \cup C_4(w))].
\end{aligned}
$$

计算出所有表项后，可在 $D[r, \emptyset]$ 中找到结果（注意，$C_1(r) \cup C_4(r) = \emptyset$）。

对于每个 $v \in V$，表 D 包含 $|C| 2^{|C_1(v)| + |C_4(v)|}$ 个表项。计算每个表项最多需要进行 $2 \cdot \Delta(T) \cdot 2^{|C_2(v)| + |C_3(v)|} \cdot |C|$ 次查找，其中 $\Delta(T)$ 是 T 中的最大度。因此，我们得到最坏情况运行时间为 $\mathcal{O}(2^{\mathrm{lfe}(G,T)} \cdot |C|^2 \cdot n^2)$。该算法的正确性可直接通过对 T 使用归纳法得出。 □

与局部反馈边数不同，我们接下来将证明，关于树割宽度（它是局部反馈边数的下界）以及顶点覆盖数（它与局部反馈边数不可比较），彩色聚类是 W[1]-困难的。这两个困难性结果，尤其是关于顶点覆盖数的结果，排除了针对许多其他结构图参数的固定参数可处理算法，包括树宽、树深度、反馈顶点数等。

树割宽度是 Wollan [41] 最近提出的一个参数。Ganian 等人 [18] 对该参数的算法用途进行了系统研究。其定义如下。$G = (V, E)$的有根树切分解是一个三元组$(T, \mathcal{X}, t_0)$，其中 $T = (W, F)$是一棵树，且 $\mathcal{X} = \{X_t \subseteq V \mid t \in W\}$，其中 $\mathcal{X}$ 的元素两两不相交，并且 $\bigcup_{t \in W} X_t = V$。节点 $t_0 \in W$是 T的根。对于任意边 $e = \{t_1, t_2\} \in F$，$T - e$有两个连通分量 T_1 和 T_2。令 $\mathrm{cut}(e) \coloneqq \{\{u, v\} \in E \mid u \in \bigcup_{t \in T_1} X_t$，且 $v \notin \bigcup_{t \in T_2} X_t\}$。对于 $t \in W \setminus \{t_0\}$，令 $e(t)$为与 t 相 incident、且位于唯一一条路径上的边

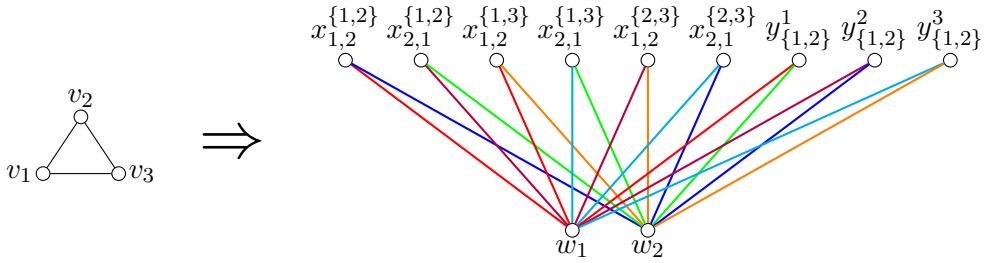


图 3：用于证明定理 22 的归约示意图。图中的边颜色表示归约中定义的颜色，具体如下：**红色**：c_1^1，**紫色**：c_1^2，**青色**：c_1^3，**绿色**：c_2^1，**蓝色**：c_2^2，**橙色**：c_2^3。

从 t 到 t_0。 $t \in W \setminus \{t_0\}$ 的粘合度为 $\mathsf{adh}(t) := |\mathsf{cut}(e(t))|$，而根的粘合度为 $\mathsf{adh}(t_0) := 0$。对于任意节点 $t \in W$，令 T_1、……、T_s 为 $T - t$ 的连通分量，并令Z_1、……、$Z_t \subseteq V$满足 $Z_i := \bigcup_{b \in T_i} X_b$ 是各分量中袋里的顶点。 t的躯干图 H_t 是从 G 得到的图：将每个 Z_i 合并为一个顶点，也就是说，将Z_i 替换为单个顶点 v_i ，并在 v_i 与Z_i中任一成员的任意邻居之间添加一条边，因此可能产生平行边。抑制一个度为 1 的顶点是指将其删除；抑制一个度为 2 的顶点是指在它的两个邻点之间添加一条边来替换它。 t 的躯干图规模 $\mathsf{tor}(t)$是指从躯干图 H_t 中穷尽地抑制度至多为 2 的 $H_t - X_t$ 后所得图的顶点数。$(T, \mathcal{X}, t_0)$的宽度为 $\max\{\mathsf{adh}(t), \mathsf{tor}(t) \mid t \in W\}$。 G 的树割宽度是 G的所有树割分解中的最小宽度。

定理 22。 二分图上的彩色聚类 对于顶点覆盖数和树割宽度这两个参数都是 W[1]-难的。

证明。 我们将给出一个从 独立集问题到 d-正则图上的参数化归约。该问题在以所求独立集的大小 W[1]作为参数时是 s -难的 [30]。归约示意图见图 3。设 $(G = (V, E)\ s)$ 是一个 独立集 问题的实例，其中 G 是一个 d-正则图，并假设 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$。

我们将构造一个实例 $(G' = (V', E')\ \ell, k := s(s-1)(d+1))$，对应彩色聚类问题。我们将颜色集选为 $C := \{c_i^a \mid a \in [n], i \in [s]\}$。其思路是，颜色 c_i^a表示 v_a 被选为独立集中的第 i 个顶点。我们按如下方式构造 G'：首先，取顶点 w_1，……，w_s。对于每一对 $(i, j) \in [s] \times [s]$ 以及每条边 $\{v_a, v_b\} \in E$，我们向 G' 中添加一个顶点 $x_i^{\{a,b\}}$ ，$_j$ ，并用颜色为 c_i^a 的边将其连接到 w_i ，再用颜色为 c_j^b 的边将其连接到 w_j 。对于每一对 $\{i, j\} \in \binom{[s]}{2}$ 以及每个顶点 $v_a \in V$，我们也向 G' 中添加一个顶点 $y_{\{i,j\}}^a$，并用颜色为 c_i^a 的边将其连接到 w_i ，再用颜色为 c_j^a 的边将其连接到 w_j 。

显然，可以在多项式时间内计算该实例。接下来需要证明：对于独立集，(G, s) 是一个是实例，当且仅当对于彩色聚类，(G', r, k, ℓ) 是一个是实例。

($\Rightarrow$) 设 $\{v_{a_1}, \ldots, v_{a_s}\}$ 是 G 中的一个独立集。令 $\perp \in C$ 表示任意默认 lt

颜色。我们令 $f(w_i) \coloneqq c_i^{a_i}$，

$$f(x_{i,j}^{\{a,b\}}) \coloneqq \begin{cases} c_i^a, & \text{if } a = a_i, \\ c_j^b, & \text{if } b = a_j, \\ \bot, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{and } f(y_{\{i,j\}}^a) \coloneqq \begin{cases} c_i^a, & \text{if } a = a_i, \\ c_j^a, & \text{if } a = a_j, \\ \bot, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们注意到，$f(x_i^{\{a,b\}}, j)$ 的定义是良好的，因为前两种情况互不相交：若 v_a 和 v_b 相邻，它们就不可能同时属于独立集。我们声称，在 f 下有 $k = s(s-1)(d+1)$ 条稳定边。我们通过证明每个 w_i 都关联着 $(s-1)(d+1)$ 条稳定边来证明这一点。设 v_{b_1}、……、v_{b_d} 是 v_{a_i} 在 G 中的邻居。那么，对每个 $j \in [s] \setminus \{i\}$，$w_i$ 与 $x_i^{\{a_i,b_1\}}, j$、……、$x_i^{\{a_i,b_d\}}, j$ 之间的边，以及 $y_i^{a_i}, j$，都是稳定边。

($\Leftarrow$) 假设 F 是 G' 中大小至少为 k 的稳定边集。由于每个顶点 w_i 在同一种颜色下只关联 $(s-1)(d+1)$ 条边，因此每个 w_i 最多关联 $(s-1)(d+1)$ 条稳定边。此外，由于 G' 中的每条边都关联一个 w_i，因此每个 w_i 必须恰好关联 $(s-1)(d+1)$ 条稳定边。对每个 $i \in [s]$，选取满足 $f_F(w_i) = c_i^{a_i}$ 的 a_i。我们声称 $\{v_{a_1}, \ldots, v_{a_s}\}$ 是 G 中的独立集。若 G 含有一条边 $\{v_{a_i}, v_{a_j}\}$，则考虑颜色 $f_F(x_i^{\{a_i,b_j\}}, j)$。不失一般性，可假设该颜色为 c_i^a。那么，颜色为 $c_j^{a_j} = f_F(w_j)$ 的边 $\{w_j, x_{i,j}^{\{a_i,a_j\}}\}$ 是不稳定的。因此，w_j 不可能关联 $(s-1)(d+1)$ 条稳定边。如果 v_{a_1}、……、v_{a_s} 不两两不同，则利用顶点 $y_{\{i,j\}}^a$ 的类似论证会导出类似的矛盾。因此，$\{v_{a_1}, \ldots, v_{a_s}\}$ 实际上是一个大小为 s 的独立集。

还需证明 G' 的顶点覆盖数和树割宽度在 s 中有界。关于顶点覆盖数，很容易看出 $\{w_1, \ldots, w_s\}$ 是 G' 的一个顶点覆盖。接下来，我们将给出 G' 的一个树割分解。我们将 w_1、……、w_s 放入同一个袋中，将 T 的根以及其他每个顶点分别放入各自的袋中。所有单元素袋都是根的直接子节点。根据定义，根的粘合度为 0，而每个单元素袋的粘合度为 2，因为除 w_1、……、w_s 外的所有顶点的度均为 2。单元素袋的躯干图规模至多为 2，而根的躯干规模至多为 s，因为除 w_1、……、w_s 外的所有顶点的度均为 2，因此会在根的躯干中被压缩。由此可知，该树割分解的宽度至多为 s。

□

Cai 和 Leung [9] 证明了，彩色聚类是NP困难问题，即使输入图的最大度不超过四、输入图是平面二分图，且只有三种颜色。最后，我们通过强化这一结果，证明了彩色聚类在NP困难问题中同样成立，即使输入图是三次图，也就是最大度为三的图。

定理23。彩色聚类是 *NP*困难问题，即使每个顶点的度至多为三且 $|C| = 5$。

证明。我们从 3-SAT 归约而来。输入由一组变量 X 和一组子句 Y组成，每个子句至多包含三个文字，任务是寻找一个满足每个子句的真值赋值。我们可以假设每个变量 $x \in X$ 在 Y [39]中至多出现三次。我们还可以假设，对于每个变量 $x \in Y$，文字 x 和 $\neg x$ 在 Y中都至少出现一次；否则，我们可以通过删除所有包含变量 x的子句来简化该实例。

设（X，Y）是一个具有 $n = |X|$ 个变量和 $m = |Y|$ 个子句的 3-SAT 实例。我们构造如下一个具有 $|C| = 5$ 的彩色聚类实例（$G = (V, E)$ ℓ，k）。

图 G 中，每个变量 $x \in X$ 对应一个顶点 u_x，每个子句 Y 对应一个顶点 v_y。如果 x 或 $\neg x$ 出现在 y 中，则存在一条边 $\{u_x, v_y\}$。至此，G 的构造完成。对于每条边 $e \in E$，我们按如下方式定义其颜色。假设 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，并按照递增的 i 为与 v_{x_i} 相 incident 的边着色。设 x_i 出现在三个子句 y_i^1、y_i^2 和 y_i^3 中。不失一般性地，假设 x_i 在 y_i^1 和 y_i^2 中为正（负）出现，而在 y_i^3 中为负（正）出现。我们将 $\{u_{x_i}, v_{y_i^1}\}$ 和 $\{u_{x_i}, v_{y_i^2}\}$ 染成同一种颜色，将 c^{12} 和 $\{u_{x_i}, v_{y_i^3}\}$ 染成另一种颜色 c^3。我们以这样的方式选择 c^{12} 和 c^3，使得 $v_{y_i^1}$ 和 $v_{y_i^2}$ 没有其他染成 c^{12} 的 incident 边，并且 $v_{y_i^3}$ 没有其他染成 c^3 的 incident 边。由于对于每个 $j \in [3]$，$v_{y_i^j}$ 的度至多为三，且 $|C| \geq 5$，我们总能以这种方式选择 c^{12} 和 c^3。最后，令 $k := m = |Y|$。本质上，如果顶点 v_x 被染成 c^{12}，则变量 x 将为真（如果 x 有两次负出现，则为假）。

(⇒) 假设存在一个满足赋值 φ。那么，对于每个子句 y，令 L_y 为 y 中任意一个被 φ 满足的文字，并令 x_y 为它对应的变量，即 $L_y = x_y$ 或 $L_y = \neg x_y$。我们声称边集 $\{\{u_{x_y}, v_y\} \mid y \in Y\}$ 是稳定的。为此，考虑着色 $f\colon V \to C$，使得 $f(w)$ 是 F 中与 w 相邻的一条边的颜色。注意，f 定义良好：对于每个 $x \in X$，可能有多条 F 中的边与 u_x 相邻，但它们的颜色相同。此外，对于每个 $y \in Y$，恰有一条 F 中的边与 v_y 相邻。因此，F 在 f 下是稳定的。

(⇐) 反过来，假设存在一个大小为 $k = |Y|$ 的稳定集 $F \subseteq E$。注意，对于每个 $y \in Y$，v_y 与颜色各异的边相邻。因此，F 中至多有一条边与 v_y 相邻。另一方面，E 中的每条边在 $\{v_y \mid y \in Y\}$ 中恰有一个端点。由此可知，每个顶点 v_y 都恰与 F 中的一条边相邻。现在考虑真值赋值 φ，其中对于每个变量 $x \in X$，若 $\{u_x, v_y\} \in F$ 属于子句 y，则 x 为真；若 x（分别为 $\neg x$）属于该子句，则 x 为假。由于 F 是稳定的，这个真值赋值定义良好。此外，它还是一个满足赋值。 □

对于超图，可以证明即使在更受限的情形下，问题仍是 NP 困难：

定理24. 彩色聚类 在最大度为 $\Delta = 2$、阶为 $d = 3$ 且有 $k = 3$ 种颜色的超图上是 NP 困难的。

证明. 我们将给出一个多项式时间多对一归约，从 NP 困难的 [19] 独立集问题（最大度为 3）。

设 $(G = (V, E)\ s)$ 是独立集问题的一个实例，其中 G 是一个最大度为 3 的图，s 是一个非负整数。我们将每条边细分两次，并将 s 增加 $|E|$。这是正确的，因为将一条边细分两次会使图的独立数恰好增加 1。我们计算 G 的一个适当的 3-着色 $f\colon V \to [3]$。根据布鲁克斯定理 [8, 28],，这种着色必然存在，且可在多项式时间内计算出来。该定理指出，每个最大度为 $\Delta \geq 3$ 且不包含大小为 $\Delta + 1$ 的团的图都是 Δ-可着色的。由于每条边都被细分了两次，G 不可能包含大小为 4 的团，因此是可 3-着色的。我们输出一个彩色聚类问题的实例 $(G' = (V', E')\ \ell,\ k)$。我们定义

$$
\begin{aligned}
V' &:= E, \\
e_v &:= \{e \in E \mid v \in e\} \text{ for each } v \in V, \\
E' &:= \{e_v \mid v \in V\}, \text{ and} \\
\ell(e_v) &:= f(v) \text{ for each } v \in V.
\end{aligned}
$$

最后，我们令 $k := s$。

显然，可以在多项式时间内计算此归约。对于每个 $v \in V$， v 的度至多为 3，因此 $|e_v| \leq 3$。所以， G' 的阶至多为 3。每条边$e \in E$ 恰好包含两个顶点。因此， e 在 G' 中的度至多为 2。接下来只需证明： G 包含一个大小至多为 s的独立集，当且仅当 G' 包含一个大小为 k的稳定边集。

(⇒) 设 $X \subseteq V$是 G中的一个独立集，且满足 $|X| \geq s$。那么， $\{e_v \mid v \in X\}$ 是一个大小至少为 k 的稳定边集。

(⇐) 假设 $F \subseteq E'$是 G'中的一个稳定边集，且满足 $|F| \geq k$。由于当 $e_v \cap e_{v'} \neq \emptyset$时，$\ell(e_v) \neq \ell(e_{v'})$，可知 F 中的边两两不相交。因此，不存在边 $\{v, v'\} \in E$使得 e_v, $e'_v \in F$。所以， $X := \{v \in V \mid e_v \in F\}$是 G中的一个大小至少为 s 的独立集。 □

如果最大度至多为 1，或如果 $|C| \leq 2$，彩色超图聚类可在多项式时间内求解。在第一种情况下，冲突图为空；在第二种情况下，冲突图是二分图。

6 结论

我们的许多研究结果完善并拓展了 彩色聚类 由 Cai 和 Leung [9]所开启的参数化复杂性研究图景。对于以稳定边数量为参数的情形，我们给出了一种改进算法和一个多项式核。我们还开始研究严格小于稳定边数量 k 和不稳定边数量 r的参数。最后，我们描绘了该问题关于结构图参数的参数化复杂性图景。下面列出一些开放问题以及进一步研究的方向：

- 核（定理 2）能否改进为大小为 $\mathcal{O}(k^2)$ 的核?
- 除了我们所考虑的基于度和基于匹配的下界之外，是否还存在其他自然的（紧的） r 或 k 下界，能够导出固定参数算法?
- 我们所考虑的结构参数存在一个问题：它们无法反映边颜色所带来的复杂性。考虑能够明确纳入边着色结构的结构参数或许会有所帮助。Morawietz 等人研究过这类参数。 [32] 遗憾的是，其中大多数参数都小于颜色数，因此在彩色聚类的背景下用处不大。不过，命题20 意味着，按照彩色聚类的固定参数可处理性而言，参数为 $m_{>2}$ （采用 Morawietz 等人 [32]所用的术语），而彩色聚类在三色图上的 NP 困难性意味着，关于参数 $m_{>3}$的问题具有参数化 NP 困难性。开发颜色敏感的结构参数，从而为固定参数可处理算法提供依据，以求解彩色聚类，或许是一个有趣的挑战。

致谢

第二作者受德国研究联合会项目DiPa（NI 369/21）资助。第三作者受德国研究联合会研究生培训组2434“复杂性的多个侧面”资助。

我们感谢 Till Fluschnik（克劳斯塔尔工业大学）和 Klaus Heeger（柏林工业大学）进行了富有成效的讨论，该讨论得出了三次图的 NP困难性（定理 23）。

本文谨献给我们的合著者、同事和导师 Rolf。Rolf 对计算机科学，尤其是参数化算法，作出了巨大贡献，我们将深切怀念他。计算机科学界将继续在他奠定的基础上发展。

参考文献

[1] Sameer Agarwal、Kristin Branson 和 Serge J. Belongie。图上的高阶学习。载于 William W. Cohen 和 Andrew W. Moore（编），《第23届国际机器学习会议（ICML）论文集》，第148卷，第17–24页。ACM，2006年。doi：10.1145/ 1143844.1143847。 [页 2][2] Alexander Ageev 和 Alexander Kononov。最大 k 彩色聚类问题的改进近似算法。载于《第12届国际近似与在线算法研讨会（WAOA）论文集》，第1–10页。施普林格，2014年。doi：10.1007/978-3-319-18263-6_1。 [页。 2][3] Yousef M. Alhamdan 和 Alexander Kononov。最大 k 边着色聚类问题的可近似性与不可近似性。载于《俄罗斯第 14 届国际计算机科学研讨会（ CSR ）论文集》，第1–12页。施普林格，2019年。doi：10.1007/978-3-030-19955-5_1。[页。 2][4] Ilya Amburg、Nate Veldt 和 Austin R. Benson。带有分类边标签的图与超图聚类。载于《2020年万维网大会（WWW）论文集》，第706–717页。ACM / IW3C2，2020年。doi：10.1145/3366423.3380152。 [页。 2][5] E. Angel、E. Bampis、A. Kononov、D. Paparas、E. Pountourakis 和 V. Zissimopoulos。 k 边着色图上的聚类。《离散应用数学》，211：15–22，2016年。doi：10.1016/j.dam. 2016.04.017。 [页码2、7和 9][6] Nikhil Bansal、Avrim Blum 和 Shuchi Chawla。关联聚类。《机器学习》，56（1-3）：89–113，2004年。doi：10.1023/B:MACH.0000033116.57574.95。 [页。 2][7] Francesco Bonchi、Aristides Gionis、Francesco Gullo、Charalampos E. Tsourakakis 和 Antti Ukkonen。色相关聚类。ACM《数据知识发现汇刊》，9(4)：34:1–34:24，2015年。doi：10.1145/2728170。 [页。 2][8] Rowland Leonard Brooks。关于网络节点着色。《剑桥哲学学会数学学报》，37(2)：194–197，1941年。doi：10.1017/S030500410002168X。 [页。 22][9] Leizhen Cai 和 On Yin Leung。交替路径和彩色聚类。2018年。doi：10.48550/ arXiv.1807.10531。 [页码2、4、5、7、21和 23][10] Jiehua Chen、Hendrik Molter、Manuel Sorge 和 Ondrej Suchý。多层图与时序图中的簇编辑。载于《第29届国际算法与计算研讨会（ISAAC）论文集》，第123卷，第24:1–24:13页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2018年。doi：10.4230/LIPIcs.ISAAC.2018.24。 [页。 2][11] Nicolas A. Crossley、Andrea Mechelli、Petra E. Vértes、Toby T. Winton-Brown、Ameera X. Patel、Cedric E. Ginestet、Philip McGuire 和 Edward T. Bullmore。人脑功能性共同激活网络群落结构的认知相关性。《美国国家科学院院刊》，110(28)：11583–11588，2013年。doi：10.1073/pnas.1220826110。 [页。 2]

[12]Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、Dániel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。施普林格，2015年。[页。 4][13] Reinhard Diestel。《图论》。施普林格，第5版，2017年。doi：10.1007/978-3-662-53622-3。[页。 3][14] Rodney G. Downey 和 Michael R. Fellows。《参数化复杂性基础》。施普林格，2013年。 [页。 4][15] Michael R. Fellows、Danny Hermelin、Frances A. Rosamond 和 Stéphane Vialette。多区间图问题的参数化复杂性。《理论计算机科学》，410(1)：53–61，2009年。doi：10.1016/j.tcs.2008.09.065。 [页。 15][16] Takuro Fukunaga。高阶相关聚类的基于线性规划的枢轴算法。《组合优化杂志》，37(4)：1312–1326，2019年。doi：10.1007/s10878-018-0354-y。 [页。 2][17] Robert Ganian 和 Viktoriia Korchemna。精简树割宽度。载于《第17届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC）论文集》，第15:1–15:18页，2022年。doi：10.4230/LIPIcs.IPEC.2022.15。 [页码17和 18][18] Robert Ganian、Eun Jung Kim 和 Stefan Szeider。树割宽度的算法应用。载于《第40届计算机科学数学基础国际研讨会（MFCS）论文集》，第348–360页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2015年。doi：10.1007/978-3-662-48054-0_29。 [页。 19][19] M. R. Garey 和 D. S. Johnson。直线型斯坦纳树问题是 NP完全的。《SIAM应用数学杂志》，32(4)：826–834，1977年。doi：10.1137/0132071。 [页。 22][20] Shivam Garg 和 Geevarghese Philip。提高顶点覆盖的标准：高保证值以上的固定参数可处理性。载于《2016年ACM-SIAM离散算法年度研讨会（SODA）论文集》，第1152–1166页。SIAM，2016年。doi：10.1137/1.9781611974331.ch80。[页。 7][21] David F. Gleich、Nate Veldt 和 Anthony Wirth。关联聚类的推广。载于《第29届国际算法与计算研讨会（ISAAC）论文集》，第123卷，第44:1–44:13页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2018年。doi：10.4230/LIPIcs.ISAAC.2018.44。 [页。 2][22] Prachi Goyal、Neeldhara Misra、Fahad Panolan 和 Meirav Zehavi。匹配与打包问题的确定性参数化算法。《SIAM离散数学杂志》，29(4)：1815–1836，2015年。doi：10.1137/140981290。URL https://doi.org/10.1137/140981290。 [页。 4][23] Gregory Gutin 和 Matthias Mnich。关于以保证值为参数上下界的图问题综述。2022年。doi：10.48550/arXiv.2207.12278。 [页。 7][24] David G. Harris 和 N. S. Narayanaswamy。一种以解大小为参数的更快顶点覆盖算法。2022年。doi：10.48550/arXiv.2205.08022。 [页。 7][25] Leon Kellerhals、Tomohiro Koana 和 Pascal Kunz。结构保证值上下的顶点覆盖与反馈顶点集。载于《第17届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC）论文集》，第19:1–19:14页，2022年。doi：10.4230/LIPIcs.IPEC.2022. 19。 [页。 7][26] Pan Li、Gregory J. Puleo 和 Olgica Milenkovic。模体与超图关联聚类。《IEEE信息论汇刊》，66(5)：3065–3078，2020年。doi：10.1109/TIT.2019.2940246。 [页。 2]

[27] Daniel Lokshtanov、N. S. Narayanaswamy、Venkatesh Raman、M. S. Ramanujan 和 Saket Saurabh。利用线性规划实现更快的参数化算法。ACM 算法汇刊，11(2):1–31，2014。doi: 10.1145/2566616。 [第 7、8 页，以及 9][28] László Lovász。图论中的三个简短证明。组合理论杂志 B 辑，19(3):269–271，1975。doi: 10.1016/0095-8956(75)90089-1。 [第 22][29] Meena Mahajan 和 Venkatesh Raman。以保证值为基准进行参数化：最大可满足性与最大割。算法杂志，31(2):335–354，1999。doi: 10.1006/jagm.1998.0996。 [第 7][30] Luke Mathieson 和 Stefan Szeider。编辑图以满足度约束：一种参数化方法。计算机与系统科学杂志，78(1):179–191，2012。doi: 10.1016/j.jcss. 2011.02.001。 [第 20][31] Cristopher Moore 和 J. M. Robson。使用简单砖块的困难铺砖问题。离散与计算几何，26(4):573–590，2001。doi: 10.1007/s00454-001-0047-6。 [第 9][32] Nils Morawietz、Niels Grüttemeier、Christian Komusiewicz 和 Frank Sommer。边着色图中彩色割计算的精细化参数化。载于：第 46 届计算机科学理论与实践当前趋势国际会议（SOFSEM）论文集，第 248–259 页。施普林格，2020。doi: 10.1007/978-3-030-38919-2_21。 [第 23][33] Peter J. Mucha、Thomas Richardson、Kevin Macon、Mason A. Porter 和 Jukka-Pekka Onnela。时变、多尺度和多层网络中的社群结构。《科学》，328(5980):876–878，2010。doi: 10.1126/science.1184819。 [第 2][34] David A. Papa 和 Igor L. Markov。超图划分与聚类。载于 Teofilo F. Gonzalez（编），《近似算法与元启发式手册》。Chapman and Hall/CRC，2007。doi: 10.1201/9781420010749.ch61。 [第 2][35] Krzysztof Pietrzak。固定字母表的最短公共超序列和最长公共子序列问题的参数化复杂性。理论计算机科学，67(4):757–771，2003。doi: 10.1016/S0022-0000(03)00078-3。 [第 15][36] Igor Razgon 和 Barry O'Sullivan。几乎 2-SAT 是固定参数可解的。计算机与系统科学杂志，75(8):435–450，2009。doi: 10.1016/j.jcss.2009.04.002。 [第 7][37] Hadas Shachnai 和 Meirav Zehavi。图划分问题的参数化算法。计算系统理论，61:721–738，2017。 [第 4][38] Larry J. Stockmeyer 和 Vijay V. Vazirani。若干最大匹配问题推广形式的 NP 完全性。信息处理快报，15(1):14–19，1982。doi: 10.1016/0020-0190(82)90077-1。 [第 11][39] Craig A. Tovey。一种简化的 NP 完全可满足性问题。离散应用数学，8(1):85–89，1984。doi: 10.1016/0166-218X(84)90081-7。 [第 21][40] Nate Veldt。边着色超图聚类的最优线性规划舍入与快速组合算法。2022。doi: 10.48550/arXiv.2208.06506。 [第 2][41] Paul Wollan。不允许固定浸入的图的结构。组合理论杂志 B 辑，110:47–66，2015。doi: 10.1016/j.jctb.2014.07.003。 [第 19][42] Bang Ye Wu。关于最大局部聚类子图及若干相关问题。载于：第 5 届组合优化与应用国际年会（COCOA）论文集，第 234–246 页。施普林格，2011。doi: 10.1007/978-3-642-22616-8_19。 [第 9][43] Bang Ye Wu。边着色图上的最大不相交路径问题。离散优化，9(1):50–57，2012。doi: 10.1016/j.disopt.2012.01.002。 [第 12 页和 13]