arXiv:2302.00638v1 [math.CV] 1 Feb 2023

# Hardy 空间和 Bergman 空间中的极值距离与共形映射

CHRISTINA KARAFYLLIA

Abstract. 我们证明了涉及极值距离的充要积分条件，使得从单位圆盘到某区域的共形映射属于 Hardy 空间或加权 Bergman 空间。我们还用极值距离刻画了单连通域的 Hardy数和 Bergman 数。

## 1. Introduction

本文研究如何寻找关于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的共形映射属于某个 Hardy 空间或加权 Bergman 空间的充要几何条件。此类条件已分别用调和测度和双曲距离加以证明。我们建立了涉及极值距离的新条件。

指数为 $p>0$ 的 Hardy 空间记为 $H^p(\mathbb{D})$，定义为所有满足下列条件的 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 $f$ 所组成的集合:

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta<+\infty.$$

关于 Hardy空间的理论，参见 [3]。设 $D\neq\mathbb{C}$ 是一个单连通域，且 $f$ 是从 $\mathbb{D}$ 到 $D$的黎曼映射。 $D$，或等价地 $f$的 Hardy数，定义为

$$h(D)=h(f)=\sup\{p>0: f\in H^p(\mathbb{D})\}.$$

这个定义与选择到$D$ [6, 13]上的黎曼映射无关。由于 $\mathbb{D}$ 的每个共形映射对于所有$p\in(0,1/2)$ [3, p. 50], 都属于 $H^p(\mathbb{D})$，因此数 $h(D)$属于 $[1/2,+\infty]$。

包含 Hardy 空间的一类更一般的全纯函数是加权 Bergman 空间。指数为 $p>0$ 、权函数为 $\alpha>-1$ 的加权 Bergman 空间记作 $A^p_\alpha(\mathbb{D})$，定义为满足以下条件的 $\mathbb{D}$ 上的所有全纯函数 $f$ 的集合:

$$\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dA(z)<+\infty,$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 30H10、30H20、31A15；次要分类号 42B30、30C85。*Key words and phrases.* 极值距离、约化极值距离、调和测度、Hardy空间、加权 Bergman 空间、Hardy数。

其中， $dA$ 表示 $\mathbb{D}$上的勒贝格面积测度。关于 Bergman 空间理论，参见 [4]。作为加权 Bergman 空间中 Hardy 数的类比，本文作者与 Karamanlis 在 [11]中引入了 Bergman 数，定义如下：若 $f$ 是 $\mathbb{D}$的一个共形映射，则 $f$ 的 Bergman 数定义为

$$b(f) = \sup\left\{ \frac{p}{\alpha+2} : \ f \in A^p_\alpha(\mathbb{D}), p > 0, \alpha > -1 \right\}.$$

随后他们证明了 $b(f) = h(f)$。见 [11, 12]。

几何函数论中一个经过深入研究的问题是：通过研究像域 $f(\mathbb{D})$，寻找共形映射 $f$ of $\mathbb{D}$ 满足某个空间 $H^p(\mathbb{D})$ 或$A^p_\alpha(\mathbb{D})$ 的几何条件。参见例如 [7, 11, 15] 及其中的参考文献。近期证明的一些此类条件涉及调和测度和双曲距离等保角不变量。在陈述结果之前，我们先约定一些记号。

设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的一个区域， $z \in \Omega$ 是一点， $A$ of Ω 是一个博雷尔子集。令 $\omega_\Omega(z, A)$ 表示相对于 Ω 中包含 $z$ 的连通分支， $A$ 在 $z$ 处的调和测度。此外，我们用 $d_\Omega$ 表示 Ω 中的双曲距离。关于调和测度和双曲距离的一般理论，参见 [5]。

今后，设 $f$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个共形映射。对于 $r > 0$，我们定义 $F_r = \{z \in \mathbb{D} : |f(z)| = r\}$。在 [14, 15] 中，Poggi-Corradini 给出了一个关于调和测度 $\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r)$ 的必要且充分积分条件，以判定 $f$ 是否属于 $H^p(\mathbb{D})$。本文作者与 Karamanlis 在 [11] 中将这一条件推广到了加权 Bergman 空间。在 [7] 中，本文作者建立了另一个必要且充分的积分条件，这次涉及双曲距离 $d_{\mathbb{D}}(0, F_r)$。在 [10] 中，Betsakos、本文作者与 Karamanlis 将这一条件推广到了加权 Bergman 空间。我们在下面的定理中陈述所有这些结果。为简单起见，我们约定，对每个 $p > 0$， $A^p_{-1}(\mathbb{D}) = H^p(\mathbb{D})$。

**定理1.1** （[7, 10, 11, 14, 15]）。设 $f$ 是 $\mathbb{D}$ 的一个共形映射。若 $p > 0$ 且 $\alpha \geq -1$，则以下陈述等价。

(1) $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$,

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{p-1} \omega_{\mathbb{D}}(0, F_r)^{\alpha+2} dr < +\infty$,

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{p-1} e^{-(\alpha+2) d_{\mathbb{D}}(0, F_r)} dr < +\infty$.

调和测度和双曲距离也可以用来刻画 $\mathbb{D}$ 的共形映射的 Hardy 数和伯格曼数。这些结果分别归功于 Kim 和 Sugawa [13] 以及本文作者 [8],。

**定理 1.2** （[8, 13]）。设 $f$ 是 $\mathbb{D}$ 的共形映射。那么

$$h(f) = b(f) = \liminf_{r \to +\infty} \frac{\log \omega_{\mathbb{D}}(0, F_r)^{-1}}{\log r} = \liminf_{r \to +\infty} \frac{d_{\mathbb{D}}(0, F_r)}{\log r}.$$

现在我们讨论一些新结果，它们给出了类似的积分条件，并从极值距离和约化极值距离的角度进行了刻画。我们注意到，定理1.1中（2）与（3）的等价性并非显然，因为一般而言， $\omega_{\mathbb{D}}(0,\ F_r)$ 和 $e^{-d_{\mathbb{D}}(0,\ F_r)}$ 不可比较。更确切地说，Beurling-Nevanlinna投影定理 [14, 第 9] 页表明，对于每个 $r>0$,

$$\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r)\geq\frac{2}{\pi}e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_r)}$$

但正如作者在 [9]中证明的那样，反向不等式一般并不成立。然而，按照定理 1.1进行积分可知，这些积分会同时有限或同时为无穷大。此外，按照定理 1.2取极限表明， $\omega_{\mathbb{D}}(0,\ F_r)$和 $d_{\mathbb{D}}(0,\ F_r)$同样都可用于确定 Hardy数。

同样地，我们可以提出这样一个问题：是否能够得到涉及极值距离 $\lambda$ 或约化极值距离 $\delta$的类似条件。实际上，已知对于每个 $r>0$， [5, p. 164], 。

$$\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r)\leq e^{-\pi\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r)}.$$

如果 $F_r$ 具有多个分支，反向不等式一般并不成立。然而，尽管 $\omega_{\mathbb{D}}(0,\ F_r)$ 和 $e^{-\delta_{\mathbb{D}}(0,\ F_r)}$ 不可比较，我们仍可能期望通过积分得到类似于定理1.1的条件。换言之，便产生了以下问题。

**问题 1.1.** 设 $p>0$ 和 $\alpha\geq-1$。是否当且仅当 $f\in A^p_\alpha(\mathbb{D})$

$$\int_0^{+\infty}r^{p-1}e^{-\pi(\alpha+2)\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r)}dr<+\infty?$$

Pietro Poggi-Corradini 在私人通信中向我提出了这个问题。在第4节中，我们通过给出一个反例证明答案是否定的。此外，我们还找到了修改积分条件的方法，使答案变为肯定。

首先，我们注意到，如果 $F_r$ 只有一个连通分支，那么 $\omega_{\mathbb{D}}(0,\ F_r)$ 和 $e^{-\pi\delta_{\mathbb{D}}\ (0,\ F_r)}$ 将是可比较的 [5, p。 164]。因此，关键思路是考察 $F_r$的一个连通分支。经过对问题的详细研究，我们发现适当的连通分支如下。设 $I_r$ 是 $F_r$的连通分支的一个枚举，记为 $\left\{F_r^i\right\}_{i\in I_r}$。我们考虑一个连通分支 $F_r^*$，使得

$$\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)=\max\{\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r^i):i\in I_r\}.$$

我们指出， $F_r^*$的存在并非显而易见，因为调和测度$\omega_{\mathbb{D}}(0,\ F_r^i)$、 $i\in I_r$是在不同的区域中考察的。不过，在第2节中我们证明，总存在这样一个连通分支，它还满足

$$\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)=\min\{\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^i):i\in I_r\}\ \text{ and }\ \lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)=\min\{\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^i):i\in I_r\}.$$

因此，我们在第3节证明以下结果。

**定理 1.3.** 设 $f$ 是 $\mathbb{D}$的一个共形映射。若 $p>0$ 和 $\alpha\geq -1$，则以下陈述等价。

(1) $f\in A^p_\alpha(\mathbb{D})$,

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{p-1}\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)^{\alpha+2}dr<+\infty$,

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{p-1}e^{-\pi(\alpha+2)\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}dr<+\infty$,

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} r^{p-1}e^{-\pi(\alpha+2)\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}dr<+\infty$.

利用 $\omega_{\mathbb{D}}(0,\ F_r^*)$ $\delta_{\mathbb{D}}(0,\ F_r^*)$ 和 $\lambda_{\mathbb{D}}(0,\ F_r^*)$，我们还可以给出 Hardy 数和 Bergman 数 $f$ 的如下刻画。

**定理 1.4**。 设 $f$ 是 $\mathbb{D}$的共形映射。则
(1) $h(f)=b(f)=$下极限$_{r\to+\infty}\log\ \omega_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)^{-1}\log\ r$，(2) $h(f)=\overline{b(f)=\text{下极限}}_{r\to+\infty}\pi\delta_{\mathbb{D}}(0,\ F_r^*)\log\ r$，(3) $\underline{h(f)=b(f)=\text{下极限}}_{r\to+\infty}\pi\lambda_{\mathbb{D}}(0,\ F_r^*)\log\ r$。

## 2. PRELIMINARIES

**2.1. 极值距离**。 设 $D$ 是一个平面区域，$E$，$F$ 是 $\partial D$上的两个不相交集合。设 $\Gamma$ 是 $D$ 中连接$E$ 与 $F$的所有可求 rectifiable 曲线组成的族。我们考虑 $D$ 中的非负博雷尔可测函数 $\rho$，并定义

$$L(\Gamma,\rho)=\inf_{\gamma\in\Gamma}\int_\gamma \rho\,|dz|\ \text{ and }\ A(D,\rho)=\int\int_D \rho^2dxdy.$$

$\tilde{}$ $E$与 $F$在 $D$中的极值距离 $\lambda_D(E,F)$定义为

$$\tilde{\lambda}_D(E,F)=\sup_\rho\frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(D,\rho)},$$

其中，上确界取遍所有满足 $0<A(D,\rho)<+\infty$的 $\rho$。现在，设 $D$ 为 $\mathbb{C}$中的一个 Jordan 域，$E$ 为 $\partial D$ 上的一条弧，且 $z_0\in D$。考察所有连接 $z_0$ 与 $\partial D\backslash E$ 的若尔当弧 $\sigma\subset D$，并定义

$$\lambda_D(z_0,E)=\sup_\sigma\tilde{\lambda}_{D\backslash\sigma}(\sigma,E),$$

其中，上确界取遍所有此类若尔当弧。量$\lambda_D(z_0,\ E)$是共形不变量 $[2,5]$，并且与调和测度 $\omega_D(z_0,\ E)$ $[5,\text{ p. }145]$ 的关系如下

$$e^{-\pi\lambda_D(z_0,E)}\leq\omega_D(z_0,E)\leq\frac{8}{\pi}e^{-\pi\lambda_D(z_0,E)}. \tag{2.1}$$

2.2. **约化极值距离**。设 $D$ 是 $\mathbb{C}$中的有限连通 Jordan 域， $E$ 是 $\partial D$ 和 $z_0 \in D$的子弧的有限并。对于$\varepsilon > 0$，我们令 $B_\varepsilon = B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$。约化极值距离 $\delta_D(z_0, E)$ [5] 定义为

$$\delta_D(z_0, E) = \lim_{\varepsilon \to 0}(\tilde{\lambda}_{D\setminus B_\varepsilon}(\partial B_\varepsilon, E) - \tilde{\lambda}_{D\setminus B_\varepsilon}(\partial B_\varepsilon, \partial D)).$$

约化极值距离在共形映射下保持不变 [5, p. 163]。如果 $E$ 是 $\partial D$上的一条弧，那么 [5, p. 164] $\delta_D(z_0, E)$ 与调和测度 $\omega_D(z_0, E)$ 的关系如下

$$\frac{2}{\pi}e^{-\pi\delta_D(z_0,E)} \le \omega_D(z_0, E) \le e^{-\pi\delta_D(z_0,E)}. \tag{2.2}$$

2.3. **调和测度**。现在，我们陈述两个在下文证明中将用到的调和测度性质。第一个性质是 Beurling-Nevanlinna投影定理的推论。

**引理2.1** ([5, p. 107])。设 $D$ 是一个无界单连通域，$z \in D$ 且 $\zeta \in \partial D$。那么，对于 $0 < r < |z - \zeta|$,

$$\omega_D(z, B(\zeta, r) \cap \partial D) \le K\left(\frac{r}{|z - \zeta|}\right)^{1/2},$$

其中 $K > 0$ 是一个常数。

我们需要的第二个结果是强马尔可夫性质关于调和测度 [1,p. 282] 的直接推论。

**引理 2.2**。设 $D_1$、$D_2 \subset \mathbb{C}$ 为两个单连通域。假设 $D_1 \subset D_2$，并令 $F \subset \partial D_2\setminus\partial D_1$ 和 $\sigma = \partial D_1\setminus\partial D_2$。那么，对于 $z \in D_1$,

$$\omega_{D_2}(z, F) \le \omega_{D_1}(z, \sigma).$$

2.4. **辅助引理**。从现在起，令 $f$ 为从 $\mathbb{D}$ 到一个无界单连通域的共形映射。对于 $r > 0$，令 $F_r = \{z \in \mathbb{D} : |f(z)| = r\}$。注意， $f(F_r) = f(\mathbb{D}) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ 是 $f(\mathbb{D})$ 中可数个开弧的并。由 [16, 第 2.14 号命题，第 29] 页可知， $F_r$ 是 $\mathbb{D}$ 中可数个解析开弧的并，且每条这样的弧在 $\partial\mathbb{D}$ 上都有两个不同的端点。令 $N(r) \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ 表示 $F_r$ 的连通分支数。于是我们定义

$$I_r = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, N(r)\}, & \text{if } N(r) < +\infty \\ \mathbb{N}, & \text{if } N(r) = +\infty \end{cases}$$

并用 $\left\{F_r^i\right\}_{i\in I_r}$ 表示 $F_r$ 的连通分支。

**引理 2.3**。对于每个 $r > 0$，都存在 $F_r$ 的一个连通分支 $F_r^*$，使得

$$\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*) = \max\{\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^i) : i \in I_r\}.$$

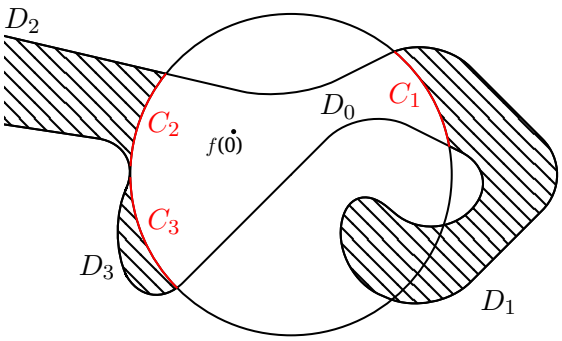


FIGURE 1. 域 $D_k$ 与弧 $C_k$。

证明。设 $f(\mathbb{D}) = D$。取定一个 $r > |f(0)|$，并令 $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$。那么，由于 $D$ 无界，$D \cap C \neq \emptyset$。现在我们在[16, 第 28] 页应用命题2.13。由于 $f(0) \in D\backslash C$，存在可数多个 $D$ 的横截线 $C_k \subset C$,$k \in J$，使得

$$D = D_0 \cup \bigcup_{k\in J} D_k \cup \bigcup_{k\in J} C_k,$$

其中 $D_0$ 是包含 $f(0)$ 的 $D\backslash C$ 的连通分支，而 $D_k$ 是互不相交的域，且

$$C_k = D \cap \partial D_k \subset D \cap \partial D_0$$

对于 $k \in J$。由此可知，若 $z \in D$ 位于 $\mathbb{C}\backslash C$的无界连通分支中，则恰有一个 $k$使得 $z \in D_k$ 成立。注意，对于 $k \in J$，$D_k$可能包含 $C$中的点。例如参见图 1 中的 $D_1$ 。

我们注意到，由于 $D$ 无界，至多存在一个 $C_k$，使得包含 $f(0)$ 的 $D\backslash C_k$ 的连通分支有界。事实上，由于 $D$ 无界，存在某个 $k^* \in J$，使得不包含 $f(0)$ 的 $D\backslash C_{k^*}$的连通分支 $D_{k^*}$ 无界（例如参见图 1 中的 $D_2$ ）。于是，包含 $f(0)$ 的 $D\backslash C_{k^*}$ 的连通分支有界或无界。对于每个 $k \in J\backslash\{k^*\}$，包含 $f(0)$ 的 $D\backslash C_k$的连通分支都是无界的，因为它包含 $D_{k^*}$。

现在，令 $B_i$ 表示包含 $f(0)$ 的 $D\backslash f(F_r^i)$ 的连通分支。由调和测度的共形不变性可得

$$\sup\{\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^i) : i \in I_r\} = \sup\{\omega_{B_i}(f(0), f(F_r^i)) : i \in I_r\}.$$

我们断言

$$\sup\{\omega_{B_i}(f(0), f(F_r^i)) : i \in I_r\} = \sup\{\omega_{B_k}(f(0), C_k) : k \in J\}.$$

事实上，我们注意到，对于每个 $i \in I_r$，要么有 $f(F_r^i) = C_k$，其中某个$k$，要么根据引理 2.2,

$$\omega_{B_i}(f(0), f(F_r^i)) \leq \omega_{B_k}(f(0), C_k)$$

对某个 $k$。这意味着

$$\sup\{\omega_{B_i}(f(0), f(F_r^i)) : i \in I_r\} \leq \sup\{\omega_{B_k}(f(0), C_k) : k \in J\}.$$

反向不等式直接由以下事实得出

$$\{\omega_{B_k}(f(0), C_k) : k \in J\} \subset \{\omega_{B_i}(f(0), f(F_r^i)) : i \in I_r\}.$$

因此,

$$\sup\{\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^i) : i \in I_r\} = \sup\{\omega_{B_k}(f(0), C_k) : k \in J\}. \tag{2.3}$$

若 $J$ 有限，则证明完毕。因此，我们假设 $J$ 无限。正如上文所证，由于 $D$ 无界，至多存在一个 $C_k$，使得包含 $f(0)$ 的 $D\backslash C_k$ 的连通分支有界。对于每个 $k \in J$，令 $l(C_k)$ 为圆弧 $C_k$ 的长度，并令 $\zeta_k$ 为弧 $C_k$ 的中点。由于级数

$$0 \leq \sum_{k \in J} l(C_k) \leq 2\pi r$$

收敛，我们推知

$$\lim_{k \to +\infty} l(C_k) = 0 \tag{2.4}$$

因此，存在一个 $k_1 \in \mathbb{N}$，使得 $l(C_k) < r - |f(0)|$，并且对每个 $k \geq k_1$，$B_k$ 都是无界的。由引理2.1可知，对于 $k \geq k_1$，我们有

$$\omega_{B_k}(f(0), B(\zeta_k, l(C_k)) \cap \partial B_k) \leq K \left( \frac{l(C_k)}{r - |f(0)|} \right)^{1/2}, \tag{2.5}$$

其中 $K > 0$是一个常数。由于 $C_k \subset B(\zeta_k, l(C_k)) \cap \partial B_k$，根据单调性，我们得到

$$\omega_{B_k}(f(0), C_k) \leq \omega_{B_k}(f(0), B(\zeta_k, l(C_k)) \cap \partial B_k).$$

结合（2.5）和（2.4），得到

$$\lim_{k \to +\infty} \omega_{B_k}(f(0), C_k) = 0.$$

因此，存在一个 $k_2 > k_1$，使得对每个 $k \geq k_2$，$\omega_{B_k}(f(0) C_k) \leq \omega_{B_1}(f(0) C_1)$。这意味着存在一条弧 $C_{k^*}$，其中 $k^* \in \{1, 2, \ldots, k_2\}$，使得

$$\omega_{B_{k^*}}(f(0), C_{k^*}) = \max\{\omega_{B_k}(f(0), C_k) : k \in J\}.$$

由此以及（2.3）可知，存在 $F_r$ 的一个连通分支 $F_r^*$，使得

$$\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*) = \max\{\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^i) : i \in I_r\}$$

证明完毕。 □

**引理 2.4**。 函数 $\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*)$ $e^{-\pi\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}$和 $e^{-\pi\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}$在 $r>0$ 中递减，因此它们是可测的。此外，

$$\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)=\min\{\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^i):i\in I_r\} \text{ and } \lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)=\min\{\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^i):i\in I_r\}.$$

注意，极值距离 $\delta_{\mathbb{D}}(0, F_r^i)$ 和 $\lambda_{\mathbb{D}}(0, F_r^i)$ 是相对于包含 0 的 $\mathbb{D}\setminus F_r^i$ 连通分支而言的。这里，定义在区间 $I\subset\mathbb{R}$ 上的函数$f\colon I\to\mathbb{R}$ 若满足：当 $r_1<r_2$ 时， $f(r_1)\geq f(r_2)$，则称其为递减函数。

证明。 固定一个 $r>0$。对于每个 $i\in I_r$，由黎曼映射定理，存在一个共形映射 $g_i$，它将包含 0 的 $\mathbb{D}\setminus F_r^i$ 连通分支映到 $\mathbb{D}$，且满足 $g_i(0)=0$，并且 $g_i(F_r^i)$ 是弧 $(e^{-i\theta_i}, e^{i\theta_i})$，其中 $\theta_i\in(0, \pi]$。由调和测度的共形不变性可知，对于每个$i\in I_r$，

$$\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r^i)=\omega_{\mathbb{D}}(0,g_i(F_r^i))=\frac{\theta_i}{\pi}. \tag{2.6}$$

此外，极值距离的共形不变性意味着

$$\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^i)=\lambda_{\mathbb{D}}(0,g_i(F_r^i))=\tilde{\lambda}_{\mathbb{D}}([-1,0],g_i(F_r^i)).$$

关于最后一个等式，参见 [2, 第 370] 页。当 $\theta_i$ 增大时，根据极值长度的单调性， $\lambda_{\mathbb{D}}(0, F_r^i)$ 递减。结合 (2.6) 和引理 2.3，得到

$$\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)=\min\{\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^i):i\in I_r\}.$$

同理，

$$\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)=\min\{\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^i):i\in I_r\}.$$

现在，令 $r_1<r_2$。由引理 2.2 以及连通分支 $F_r^*$ 的定义，分别可得

$$\omega_{\mathbb{D}}(0,F_{r_2}^*)\leq\omega_{\mathbb{D}}(0,F_{r_1}^k)\leq\omega_{\mathbb{D}}(0,F_{r_1}^*),$$

其中 $F_{r_1}^k$ 是 $F_{r_1}$ 的一个连通分支，它将 0 与 $F_{r_2}^*$ 分隔开。因此， $\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*)$ 是 $r$ 的递减函数。

对于 $i=1$，2，由黎曼映射定理，存在一个共形映射 $h_i$，将包含 0 的 $\mathbb{D}\setminus F_{r_i}^*$ 的连通分支映到 $\mathbb{D}$ 上，使得 $h_i(0)=0$，且 $h_i(F_{r_i}^*)$ 是弧 $(e^{-i\phi_i}, e^{i\phi_i})$，其中 $\phi_i\in(0, \pi]$。由共形不变性以及调和测度 $\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*)$ 关于 $r$ 的单调性，我们推得 $\phi_1\geq\phi_2$。结合共形不变性与极端长度的单调性，得到

$$\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_{r_1}^*)\leq\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_{r_2}^*)$$

因此， $e^{-\pi\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}$关于 $r>0$ 单调递减。类似地， $e^{-\pi\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}$关于 $r>0$ 单调递减。□

## 3. Proofs of the main results

接下来，我们证明定理 1.3 和 1.4 以及一些推论。

**定理 *1.3* 的证明。** 首先，我们证明 (1) 和 (2) 等价。假设对于某个 $p > 0$ 和 $\alpha \geq -1$，有 $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$。由定理1.1可得

$$\int_0^{+\infty} r^{p-1}\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r)^{\alpha+2}dr < +\infty. \tag{3.1}$$

现在，令 $\Omega_r$ 为包含 0 的 $\mathbb{D}\setminus F_r$ 的连通分支，并令 $\Omega_r^*$ 为包含 0 的 $\mathbb{D}\setminus F_r^*$ 的连通分支。我们设 $F_r^c = \partial\Omega_r\setminus F_r$ 和 $F_r^{*c} = \partial\Omega_r^*\setminus F_r^*$。见图 2。由于 $\Omega_r \subset \Omega_r^*$ 且 $F_r^c \subset F_r^{*c}$，因此对每个 $r > 0$,

$$1 - \omega_{\Omega_r}(0, F_r) = \omega_{\Omega_r}(0, F_r^c) \leq \omega_{\Omega_r^*}(0, F_r^{*c}) = 1 - \omega_{\Omega_r^*}(0, F_r^*)$$

即,

$$\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*) \leq \omega_{\mathbb{D}}(0, F_r). \tag{3.2}$$

由于 $\omega_{\mathbb{D}}(0,\ F_r^*)$ 是可测的，由引理 2.4，关系 (3.1) 和 (3.2) 推出

$$\int_0^{+\infty} r^{p-1}\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*)^{\alpha+2}dr < +\infty.$$

反之，设 $F_r'$ 是 $F_r$ 的一个连通分支，使得 $d_{\mathbb{D}}(0,\ F_r) = d_{\mathbb{D}}(0,\ F_r')$。由 Beurling-Nevanlinna投影定理 $[14, \text{p. } 10]$ 可知，对任意 $r > 0$,

$$e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_r)} = e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_r')} \leq \frac{\pi}{2}\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r') \leq \frac{\pi}{2}\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*). \tag{3.3}$$

因此，若对于某个 $p > 0$ 和 $\alpha \geq -1$,

$$\int_0^{+\infty} r^{p-1}\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*)^{\alpha+2}dr < +\infty,$$

then

$$\int_0^{+\infty} r^{p-1}e^{-(\alpha+2)d_{\mathbb{D}}(0,F_r)}dr < +\infty$$

从而定理1.1 蕴含 $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$。

(2)、(3) 和 (4) 的等价性由 (2.1) 和 (2.2) 立即得到，它们分别给出

$$\frac{\pi}{8}\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*) \leq e^{-\pi\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)} \leq \omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*) \tag{3.4}$$

and

$$\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*) \leq e^{-\pi\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)} \leq \frac{\pi}{2}\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*). \tag{3.5}$$

□

**推论 3.1**。设 $f$ 是 $\mathbb{D}$的共形映射。令 $\Phi(r)$ 表示$\omega_{\mathbb{D}}(0, F_r^*)$、 $e^{-\pi\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}$或 $e^{-\pi\lambda_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)}$。若对于某些 $p > 0$ 和$\alpha \geq -1$，有 $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$，则存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\Phi(r) \leq Cr^{-\frac{p}{\alpha+2}},$$

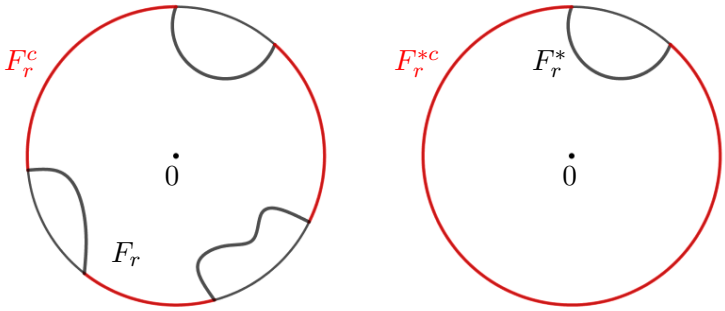


FIGURE 2. 集合 $F_r$, $F_r^c$, $F_r^*$和 $F_r^{*c}$。

对每个 $r > 0$ 均成立。此外，若存在 $p' > 0$、 $\alpha' \geq -1$、 $C > 0$ 和 $r_0 > 0$，使得

$$\Phi(r) \leq Cr^{-\frac{p'}{\alpha'+2}}$$

对每个 $r > r_0$，则 $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$ 对所有满足 $\frac{p}{\alpha+2} \in (0, \frac{p'}{\alpha'+2})$的 $p > 0$ 和 $\alpha \geq -1$。

证明。 若对某个 $p > 0$ 和 $\alpha \geq -1$, $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$，由定理 1.3 可得

$$\int_0^{+\infty} r^{p-1}\Phi(r)^{\alpha+2}dr < +\infty.$$

引理 2.4 意味着 $\Phi(r)$ 关于 $r$ 递减，因此，对于 $R > 0$,

$$\int_0^{+\infty} r^{p-1}\Phi(r)^{\alpha+2}dr \geq \int_0^{R} r^{p-1}\Phi(r)^{\alpha+2}dr \geq \frac{R^p}{p}\Phi(R)^{\alpha+2}.$$

结合以上结果可推知，对于每个 $R > 0$,

$$\Phi(R) \leq CR^{-\frac{p}{\alpha+2}},$$

其中

$$C = \left(p\int_0^{+\infty} r^{p-1}\Phi(r)^{\alpha+2}dr\right)^{\frac{1}{\alpha+2}} > 0.$$

现在，假设存在 $p' > 0$、 $\alpha' \geq -1$、 $C > 0$ 和 $r_0 > 0$，使得

$$\Phi(r) \leq Cr^{-\frac{p'}{\alpha'+2}}$$

对每个 $r > r_0$ 都成立。若 $\alpha \geq -1$ 和 $p > 0$ 满足 $\frac{p}{\alpha+2} < \frac{p'}{\alpha'+2}$，则

$$\int_{r_0}^{+\infty} r^{p-1}\Phi(r)^{\alpha+2}dr \leq C^{\alpha+2}\int_{r_0}^{+\infty} r^{p-1-\frac{p'}{\alpha'+2}(\alpha+2)}dr < +\infty.$$

因此，由定理 1.3 可得 $f \in A^p_\alpha(\mathbb{D})$。 □

定理 *1.4* 的证明。由 (3.2) 和 (3.3) 可知，对于每个 $r>0$,

$$\frac{2}{\pi}e^{-d_{\mathbb{D}}(0,F_r)}\le\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)\le\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r)$$

因此

$$\frac{\log\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r)^{-1}}{\log r}\le\frac{\log\omega_{\mathbb{D}}(0,F_r^*)^{-1}}{\log r}\le\frac{\log(\pi/2)}{\log r}+\frac{d_{\mathbb{D}}(0,F_r)}{\log r}.$$

结合定理 1.2 即得（1）。随后，由（3.4）和（3.5）可直接推出等式（2）和（3）。□

## 4. Counter-example

下面的例子对问题 1.1 给出了否定的回答。

**定理 4.1**。存在一个单连通域 $D$，它包含于 $\mathbb{C}$，并具有如下性质。设 $f$ 是一个从 $\mathbb{D}$ 到 $D$ 的共形映射，且满足 $f(0)=0$。那么，对于每个 $p>0$ 以及 $\alpha\ge-1$，都有 $f\in A^p_\alpha(\mathbb{D})$，但是

$$\int_0^{+\infty}r^{p-1}e^{-\pi(\alpha+2)\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r)}dr=+\infty$$

对于满足 $p\ge\frac{\alpha}{2}+1$ 的每个 $p>0$ 和 $\alpha\ge-1$。

证明。如果对每个 $n\ge1$ 都有 $\alpha_n=e^{4n\pi}$，令 $D$ 为图 3 所示的单连通域，即

$$D=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k=0}^{3}\left[e^{i\frac{k\pi}{2}},+\infty\right)\setminus\bigcup_{l=1}^{+\infty}\bigcup_{k=0}^{2^{l+1}-1}\left[\alpha_l e^{i\frac{\pi}{2^l}\left(\frac12+k\right)},+\infty\right)$$

记号为 $\left[re^{i\theta},+\infty\right)=\left\{se^{i\theta}:\ s\ge r\right\}$。根据黎曼映射定理，存在一个从 $\mathbb{D}$ 映到 $D$ 的共形映射 $f$，使得 $f(0)=0$。对于 $r>0$，令

$$\alpha_D(r)=\max\{\theta(E):E\text{ is a subarc of }D\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|=r\}\},$$

其中 $\theta(E)$ 表示 $E$ 的角向勒贝格测度。由于 $D$ 是关于 0 星形的区域，$D$ 的 Hardy 数为

$$h(D)=\lim_{r\to+\infty}\frac{\pi}{\alpha_D(r)}=+\infty.$$

见 [6, 第 237] 页。因此，对每个 $p>0$ 都有 $f\in H^p(\mathbb{D})$，并且由于 $H^p(\mathbb{D})\subset A^p_\alpha(\mathbb{D})$，我们推知对每个 $p>0$ 和 $\alpha>-1$，都有 $f\in A^p_\alpha(\mathbb{D})$。

现在，对 $\varepsilon\in(0,1)$，令 $B_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}:|z|<\varepsilon\}$。此外，令 $D_r=D\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$。约化极值距离的共形不变性意味着，对于 $r>1$,

$$\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r)=\delta_{D_r}(0,f(F_r))=\lim_{\varepsilon\to0}(\tilde\lambda_{D_r\setminus B_\varepsilon}(\partial B_\varepsilon,f(F_r))-\tilde\lambda_{D_r\setminus B_\varepsilon}(\partial B_\varepsilon,\partial D_r)).\tag{4.1}$$

见图 3。我们知道 [5,p。 142]

$$\tilde\lambda_{D_r\setminus B_\varepsilon}(\partial B_\varepsilon,f(F_r))=\frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{\varepsilon}\tag{4.2}$$

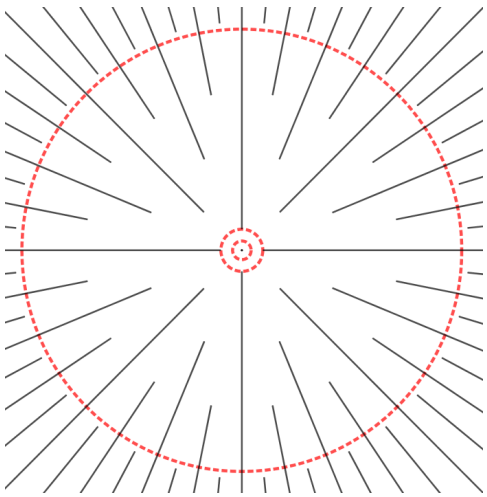

FIGURE 3. 区域 $D$ 和圆 $\partial B_\varepsilon$, $\partial\,\mathbb{D}$ 和$f(F_r)$。

并且如果 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ \varepsilon < |z| < 1\}$，那么根据极值距离的延拓规则，k [5, p。 134]我们有

$$\tilde{\lambda}_{D_r \setminus B_\varepsilon}(\partial B_\varepsilon, \partial D_r) \geq \tilde{\lambda}_\Delta(\partial B_\varepsilon, \partial\,\mathbb{D}) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.3}$$

由 (4.1)、(4.2) 和 (4.3) 可推知，对每个 $r > 1$,

$$\delta_{\mathbb{D}}(0, F_r) \leq \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}(\log\frac{r}{\varepsilon} - \log\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi}\log r.$$

因此可得，若 $p \geq \frac{\alpha}{2} + 1$，则 –

$$\int_1^{+\infty} r^{p-1} e^{-\pi(\alpha+2)\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r)} dr \geq \int_1^{+\infty} r^{p-1-\frac{\alpha+2}{2}} dr = +\infty.$$

So,

$$\int_0^{+\infty} r^{p-1} e^{-\pi(\alpha+2)\delta_{\mathbb{D}}(0,F_r)} dr = +\infty$$

对满足 $p \geq \frac{\alpha}{2} + 1$ 的每个 $p > 0$ 和 $\alpha \geq -1$ 。 □

## REFERENCES

[1] D. Betsakos, *Harmonic measure on simply connected domains of fixed inradius*, 《Ark. Mat.》 **36** (1998)，第2期，275–306页。[2] A. Beurling, *The Collected Works of Arne Beurling: Vol. 1, Complex Analysis*, Birkh¨ auser，波士顿，1989年。[3] P. Duren, *Theory of $H^p$ Spaces*，纯粹与应用数学，第38卷，Academic Press，纽约-伦敦，1970年。[4] P. Duren 和 A. Schuster, *Bergman Spaces*，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004年。

[5] J.B. Garnett 和 D.E. Marshall, *Harmonic Measure*，新数学专著丛书，第2卷，剑桥大学出版社，剑桥，2005年。[6] L.J. Hansen, *Hardy classes and ranges of functions*, 《密歇根数学杂志》**17** (1970)，第3期，235–248页。[7] C. Karafyllia, *Hyperbolic metric and membership of conformal maps in the Hardy space* **147** 2019 9, 3855 3858 , 《美国数学会会刊》（） 第-期。[8] *On the Hardy number of a domain in terms of harmonic measure and hyperbolic distance* **58** 2020 2, 307 331 , 《Ark. Mat.》（） 第-期。[9] *On a relation between harmonic measure and hyperbolic distance on planar domains* **69** 2020 5, 1785 1814 , 《印第安纳大学数学杂志》（），第–期。[10] D. Betsakos、C. Karafyllia 和 N. Karamanlis, *Hyperbolic metric and membership of conformal maps in the Bergman space* **64** 2021 1, 174 , 《加拿大数学通报》（），第-期，181。[11] C. Karafyllia 和 N. Karamanlis, *Geometric characterizations for conformal mappings in weighted Bergman spaces* , 《分析数学杂志》（即将出版），arXiv 预印本：2109.10752。[12] C. Karafyllia, *The Bergman number of a plane domain*，已提交，arXiv 预印本：2210.12190。[13] Y.C. Kim 和 T. Sugawa, *Hardy spaces and unbounded quasidisks*, 《芬兰科学院年刊》**36** (2011)，第1期，291–300页。[14] P. Poggi-Corradini, *Geometric models, iteration and composition operators*, 博士论文，华盛顿大学（1996年）。[15] *The Hardy Class of Geometric Models and the Essential Spectral Radius of Composition Operators* **143** 1997 1, 129 156 , 《泛函分析杂志》（），第-期。[16] C. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, 《数学科学基础丛书》，第299卷，施普林格出版社，柏林，1992年。

Department of Mathematics, University of Thessaly, Lamia, 35100, Greece
*Email address*: ckarafyllia@uth.gr

Institute for Mathematical Sciences, Stony Brook University, Stony Brook, NY 11794 , U.S.A.
*Email address*: christina.karafyllia@stonybrook.edu