探测多体系统中的量子关联：可扩展方法综述

伊´恩´伊·弗´埃罗特*Institut Néel, CNRS, Grenoble, France*

Matteo Fadel*Department of Physics, ETH Zürich, Switzerland*

Maciej Lewenstein*ICFO-Institut de Ciencies Fotoniques, The Barcelona Institute ofScience and Technology, Castelldefels (Barcelona) 08860, Spain. andICREA, Pg. Lluís Companys 23, 08010 Barcelona, Spain.*（日期：2023年2月2日）

我们综述了用于检测和表征多体系统中量子关联的方法，并特别关注可扩展的方法。具体而言，这些方法适用于具有大量自由度的系统，且分析数据所需的测量次数或计算资源不会随系统尺寸呈指数级增长。我们首先介绍二分情形下量子纠缠、爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引和贝尔非定域性的概念，随后介绍它们的多体推广。我们综述了近期在利用系统态的部分信息表征这些量子关联方面取得的进展，例如数据驱动方法，或基于集体可观测量低阶矩的见证。接着，我们回顾了最先进的实验，这些实验展示了高度纠缠多体系统的制备、操控与检测。对于每种平台（如原子、离子、光子、超导电路），我们介绍可用于态制备和测量的工具箱，并着重说明各系统所面临的挑战。最后，我们列出该领域亟待解决的一系列问题。

arXiv:2302.00640v1 [quant-ph] 1 Feb 2023

目录

I. 引言 1
A. 信息处理的当代方法 2
B. 对量子优势的探索 2
C. 双重途径 3
D. 现有综述指南 4
E. 本综述的计划 5

II. 统计关联的分类 5
A. 量子关联的多种形式：教学性介绍 5
B. 多体量子关联 9
1. 问题简介 9
2. 量子纠缠 9
3. 贝尔非定域性 11
4. 爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引 12

III. 理论成就 13
A. 基于给定平均值集合的纠缠见证和贝尔不等式 13
B. 基于置换不变关联函数的纠缠见证和贝尔不等式 14
C. 探测有助于量子计量学的多体关联 15
D. 深入理解量子相变 16
E. 探测两个多体系统之间的量子关联 17

IV. 实验研究 18
A. 原子系综 18
B. 晶格中的原子 20
C. 囚禁离子 20
D. 光学光子 22
E. 超导量子比特 23
F. 凝聚态物质系统 23
G. 其他系统 24

V. 结论 24
A. 未解决问题 24
B. 综述总结 25
C. 致谢 25

参考文献 26

I. 引言

在经典与量子多体物理中，刻画不同自由度之间的统计关联是一项核心议题。从这一角度出发，一个自然而然的问题是：量子与经典多体系统之间是否存在根本差异。究其本质，量子纠缠现象（包括贝尔非局域性等各种表现）揭示了经典物理学在解释复合系统中的关联时所面临的根本局限。除了从系统所具有的关联这一角度明确区分经典系统与量子系统之外，探究量子纠缠在多体系统中的表现，也有助于深入理解基础科学中的至少三个重大问题：

- 随着系统规模和复杂度不断增加，是否存在量子到经典转变？多体量子关联是否在本质上不同于其二体对应物？
- 量子关联能否成为完成经典手段无法实现的任务的一种资源？多体量子关联在量子计算、模拟和计量学中扮演什么角色？
- 量子关联是否在决定多体系统的集体性质方面发挥作用？它们能否与新的物质相或相变相关联？它们如何影响处于热平衡和非热平衡状态的系统？

从广义上说，上述所有问题的答案都是肯定的，但其中涉及的问题极为复杂。

A. 信息处理的当代方法

过去几十年来，对量子系统信息处理的研究引发了信息科学范式的转变。

经典信息论——正如 Shannon 及其同事最初提出的那样，经典系统的信息处理与设备无关 [1——3]。例如，支配信息基本单位（比特）处理方式的规则，对于现代超级计算机和查尔斯·巴贝奇在十九世纪制造的机械计算机 [4, 5]而言是相同的。从本质上说，唯一的区别在于信息处理的速度和存储器的大小。不过在实践中，上述说法可能会造成很大的误导。正如 Landauer 所指出的，每一种信息处理都是一个物理过程，必然伴随能量成本。Landauer原理 [6, 7] 指出：“任何逻辑上不可逆的信息操作，例如擦除一个比特或合并两条计算路径，都必须伴随着信息处理装置或其环境中不承载信息的自由度相应的熵增。”具体而言，如果观察者丢失了关于某个物理系统的信息，就会产生热量，而且观察者也会失去从该系统中提取有用功的能力。尽管 Landauer原理最初针对的是信息丢失，但实际上，任何经典信息处理都会导致发热。理解这一基本事实的一种可能方式是，将比特状态的改变视为先擦除之前的状态，再生成一个新状态。事实上，发热是当代超级计算机面临的主要技术挑战之一，尽管热量主要由承载控制电流的元件的电阻产生，且其数值远远超过Landauer界限。

量子信息理论——与经典信息论不同，量子系统的信息处理以量子力学规则为基础，因此原则上高度依赖设备，这一点已在该领域的开创性研究中得到指出（参见文献 [8, 9], 另请参阅[10, 11]）。近年来，上述观点已有所缓和。受 Makarov 及其同事于2005年针对 IDQuantique 生产的量子密码设备提出的新型攻击方式 [12, 13], 的启发，一种新的设备无关量子信息处理（DIQIP）范式应运而生 [14, 15]。从本质上说，这种框架仅基于“黑箱”设备提供的原始输入/输出数据，旨在建立不对底层设备作任何假设的量子信息处理协议。近期量子信息科学研究中，DIQIP 方法（或部分 DIQIP 方法，即基于数据并对设备作出不同程度工作假设的方法）在有关检测、表征、验证和确认这些协议之量子性的文献中占据主导地位。尤其是，人们开发了大量方法，特别适合从设备无关的角度表征多体系统的量子性。一项关键问题是，能否以可扩展的方式执行这类认证任务，也就是说，计算成本不会随着系统尺寸呈指数级增长；对于量子多体系统，希尔伯特空间维数会指数级增长，直觉上可能会认为计算成本也会如此。由于认证应基于现有或近期设备所产生的实验数据，近期这类方法提出，应着眼于非常有限的信息，例如局域自由度之间统计关联的粗粒化特征，只涉及局域可观测量的低阶矩（主要是一阶矩和二阶矩）。本综述主要聚焦于这类方法。

B. 追寻量子优势

我们正见证着量子技术（QT）的蓬勃发展 [16, 17], ，其目标是利用量子纠缠和贝尔非定域性等真正的量子效应，实现经典设备无法比拟性能的信息处理任务。显然，若要追求量子设备相对于经典设备的量子优势，就必须操控具有真正量子性的量子系统，例如比如量子纠缠。因此，在实践中，任何可靠的量子技术设备都必须能够检测、表征、验证并核验其量子性作为资源的不同方面。这包括量子相干性 [18],、量子纠缠 [19]和贝尔关联 [20, 21]。概括而言，量子技术建立在以下支柱之上。

或许是发展最成熟的量子技术领域，已有多家公司提供商用量子密码系统和量子随机数生成器。从最基本的层面来说，量子通信涉及二分系统（传统上称为 Alice 和 Bob），其目标是确保快速通信，同时最大限度地保障所传输信息的隐私和完整性。在 Ekert 最初提出的密码方案中[22], ，通信双方通过检查部分传输数据是否违反贝尔不等式来确保隐私。Bennett 和 Brassard 提出的发送并测量方案 [23]要求具备一定程度的纠缠，这可通过对数据进行测试来检验 [24, 25]。而量子网络 [26——29], 或所谓的量子互联网[30], 则更为复杂，因为它们本质上属于多体问题。因此，它们 i）可能展现真正的多体纠缠和贝尔非定域性；ii）更难以表征和探测。量子随机数生成器（QRNG）也存在类似情况。在那里，可以利用贝尔关联来认证随机性[31], ，但这种方法在实践中速度较慢。因此，常用的 QRNG 在实践中无法得到真正的认证，而是通过在经典或量子多体问题的蒙特卡罗研究中应用长序列随机数来进行基准测试 [32]。

量子计量与传感.–近年来，量子传感领域取得了令人瞩目的进展与成果。在这一背景下，首先利用真正的量子关联来提高测量的精密度和准确度 [33, 34]。关于光子平台上的量子计量学综述，参见文献 [35–37], ；关于原子系综，参见文献 [34]。在量子计量学中，量子纠缠最有趣的应用是大规模纠缠的多体态（例如自旋压缩态和 Dicke态 [34], ，以及薛定谔猫态 [38]）。然而，检测和表征高度纠缠的多体态（例如薛定谔猫态）是一项极具挑战性的任务 [39], ，对于大型猫态而言，需要极其苛刻的资源 [40]。基于所谓的阴影层析 [41–43] 的新方法，或许特别适用于表征复杂的多体纠缠态，从而服务于量子计量学。

量子计算与模拟.–当代量子技术面临着实现带纠错的容错量子计算这一挑战，因此转而专注于各种类型的量子模拟设备（含噪中等规模量子，NISQ） [44], 模拟式和数字量子模拟器 [45] 以及所谓的量子退火机 [46]。人们显然迫切需要并致力于研发这类系统：它们不一定要模拟某些物理系统的量子动力学，却能够以可控且稳健的方式生成大规模纠缠态和叠加态。尤其是，这应包括对退相干的控制，从而能够将这些态用于量子通信 [47], 量子计量学 [33],传感和诊断 [48]（例如，精确测量光场的相移，或诊断量子材料）。近期一篇文章 [49], 展望了未来几十年量子模拟器的发展愿景。文章还简要回顾了量子计算的现状，既涵盖未来的容错量子计算机，也涉及含噪中等规模量子设备 [50]。含噪中等规模量子设备和量子模拟器目前也已可通过商业渠道获得，许多公司正致力于扩大这类机器的规模，以推动其工业应用。值得注意的是，近期有关量子霸权的几项声明 [51],已受到当代经典模拟的质疑，这些模拟采用了张量网络 [52, 53]。此外，量子化学领域实现指数级量子霸权的前景也受到质疑 [54]。

一般而言，含噪中等规模量子设备的量子模拟器的应用本身就专注于多体系统。因此，开发用于检测、表征、验证和核验此类系统中量子关联的方法，对整个领域至关重要。正如前文所强调的，这些方法应具备可扩展性，优先基于原始数据（即实验测量的结果），理想情况下还应做到设备无关。要满足所有这些要求面临着重要挑战，本文将回顾这一方向上的近期方法。

C. 双重路径

近十年来，研究者主要通过两种互补的方法，应对多体系统中的纠缠检测与表征这一挑战。

基于随机幺正变换的方法。– 表征多体系统中纠缠的最基本物理量之一是纠缠熵 [55],, 即 子系统约化密度矩阵的冯·诺依曼熵或 R´enyi 熵。这类物理量很难通过实验测量；若要将其解释为纠缠度量，则必须假设全局态为纯态，而实验中永远无法精确满足这一条件。在若干实验中，研究人员通过制备系统的两个相同副本，测量了二阶 R´enyi 熵（S_2）；最新的实验涉及多达八个量子比特 [56, 57], [58, 59]。由于这种方法难以扩展，研究人员开发了其他方法：先施加随机幺正变换，再在计算基中进行测量 [60–63]。这些方法不仅能在系统的单个副本上测量 S_2 ，还能提取许多其他用于表征量子多体系统的关键性质，例如测量

拓扑不变量 [64] （近期综述见 [43] ）。对随机幺正变换进行采样，也是所谓影子层析协议的核心工具 [41, 42]。在对 N 量子比特进行传统量子层析时，需要进行数量呈指数增长的测量，才能重构密度矩阵。然而，如果只想估算有限个可观测量的平均值，所需测量次数便可降至与量子比特数量成线性关系。随机幺正方法虽然非常强大，却存在固有的局限性：

1. 在实验上，这要求对各个量子比特进行精细控制，以便操控和测量它们。并非所有与量子计量学和量子模拟相关的实验平台都具备这种程度的控制能力。

2. 纠缠熵的估计非常适用于至多几十个量子比特的系统，但几乎无法扩展到由数百乃至数千个独立组分构成的超大系统。

基于低阶矩的方法。–因此，人们还发展了其他互补方法，利用关于底层量子多体态的部分信息（其粒度可能非常粗糙）。本综述主要关注这类方法；它们通常尝试基于实验中可获得的数据，构造纠缠见证、贝尔不等式、量子相干性度量，以及更一般的量子性检验。这些数据通常对应于对某些局域可观测量的低阶矩（通常是一阶和二阶矩）进行测量，或是已知少数集体多体可观测量的平均值。这类方法往往利用置换对称性或平移对称性等对称性，因此关注诸如集体自旋分量等全局量的平均值和涨落；集体自旋分量是局域量（系统组成部分的自旋，如原子、分子等）之和，也可以关注结构因子的各种分量。因此，相应的纠缠判据或贝尔不等式可视为所谓自旋压缩不等式 [65, 66], 的推广；这类不等式最初是在量子计量学的背景下提出的。

D. 现有综述指南

文献中已有多篇关于量子关联各个方面的优秀综述。读者可以参阅从量子信息理论视角探讨量子纠缠概念的综述 [19], 、讨论贝尔非定域性概念最新进展的综述 [20], ，或关于Einstein-Podolsky-Rosen（EPR）导引的综述 [67, 68]。如图1所示，并将在下文以教学方式介绍，量子纠缠、贝尔非定域性和EPR导引是广义量子非定域性的几种彼此不等价的表现形式。

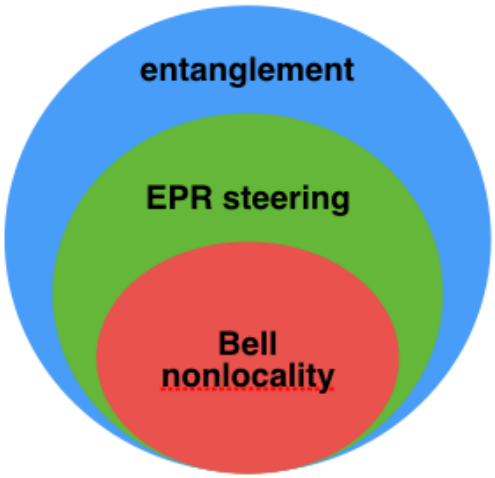

图1. **量子关联的层级**。在量子力学框架下，可以识别出三种主要的关联：纠缠、EPR导引和贝尔非定域性。它们是量子信息任务中彼此不等价的资源，并构成一个关联层级：纠缠是存在EPR导引的必要条件，但并非充分条件；EPR导引是存在贝尔非定域性的必要条件，但并非充分条件。

参考文献 [69] 和[70]综述了纠缠见证。参考文献 [71], 综述了各种弱于纠缠的量子关联概念，其中包括量子失协这一概念；此外，参考文献 [72, 73]也对量子失协作了独立综述。

量子非定域性的其他基本表现形式也已有综述，例如一种极强的设备无关认证量子器件的方法——自检验 [74], ，以及贝尔非定域性在网络中的近期进展 [75],。

聚焦于多体系统中量子纠缠的综述，大多讨论基态中的双体纠缠熵，包括文献 [55]和文献 [76]。文献 [77]综述了多体系统中量子关联的其他方面。文献 [78]综述了宏观态的量子特性。文献 [79], 综述了纠缠量化与认证，而文献 [34]则综述了纠缠作为量子计量学资源所发挥的作用。最后，文献 [43]介绍了关于随机幺正变换应用的最新综述，其中包括对双体纠缠的探测。

与上述研究不同，本文综述更具体地关注量子纠缠、EPR导引和贝尔非定域性的相关方面，这些方面可以通过多种当今多体实验所采集的实验数据，以可扩展的方式进行评估。

E. 综述安排

本文综述将介绍用于探测多体量子关联的技术，并特别强调那些能够以可扩展的方式应用于具有许多自由度的系统的方法；也就是说，这些方法所需的成本（包括所需的测量次数以及分析数据所需的计算资源）不会随系统尺寸呈指数级增长。

在第II节中，我们将着重介绍量子关联的基础知识，从双体情形下纠缠、爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引和贝尔非定域性的定义入手，再将其推广到多体情形。在第III 节中，我们将回顾可扩展地检测多体量子关联的工具方面的理论进展，例如，采用有限测量次数的数据驱动方法，或基于集体可观测量的分析方法。在第IV 节中，我们将概述用于研究物理系统中多体量子关联的实验装置，例如原子、离子、光子集合以及超导量子比特。介绍不同的态制备和表征方法后，我们将选取一些已经取得的多体关联研究成果进行介绍。最后，在第V 节中，我们将总结所讨论的主题，并列出一些可能引起学界兴趣的开放问题。

II. 统计关联的分类

A. 量子关联的多种形式：教学性导论

经典物理中的微观态与关联。–根据经典物理，物理世界可以分解为具有明确属性（即实在元素 [80]）的系统，这些属性由微观态这一概念所概括。如果系统的某些属性未知或无法获取，就可以将它们称为局域隐变量 [81]。

对于记作 A 和 B的任意两个系统，可以根据这两个系统组成的配对 $(\vec{x}_A, \vec{x}_B)$ 定义联合 AB 系统的微观态，其中 $\vec{x}_{A(B)}$ 指定了 $A(B)$的微观态。在经典物理中，微观态是对复合系统最完整的描述 AB。最终，如果人们对实际微观态有所未知，就可以引入概率分布$p(\vec{x}_A, \vec{x}_B)$，然后根据 p的统计属性来描述联合 AB 系统。

在量子理论中，微观态的概念被波矢 $|\psi\rangle$取代。根据经典的独立系统概念，即，系统在空间上彼此分离，并由各自的量子态描述，因此可以得出结论：任何复合 AB 系统的最完整描述包含在一对波矢 $(|\psi_A\rangle,\ |\psi_B\rangle)$ 中，或者由这类波矢对的统计混合来描述。值得注意的是，事实并非如此。

量子纠缠。– 量子理论承认存在这样的量子态 $|\psi_{AB}\rangle$：对于复合系 AB统，无法通过独立了解其 A 和 B 态来表示。这就是量子纠缠 [82], 的概念，它蕴含着这样的思想：复合系统的量子态所包含的信息，可能多于其各组成部分的态的集合。

形式上，复合系统 AB 由一个密度矩阵 $\hat{}\rho_{AB}$描述。于是，如果存在一个概率分布 $p(|\psi_A\rangle,\ |\psi_B\rangle)$，使得：便可以说 $\hat{}\rho_{AB}$ 是可分的。

$$\hat{\rho}_{AB}^{\text{sep}} = \sum_{|\psi_A\rangle,|\psi_B\rangle} p(|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle)\ |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B| \ . \quad (1)$$

换言之，如果 $\hat{}\rho_{AB}$ 可以写成乘积态 $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$的统计混合，并以 $p(|\psi_A\rangle,\ |\psi_B\rangle)$作为权重，那么它就是可分的。如果情况并非如此，即 $\hat{}\rho_{AB}$ 无法以这种方式分解，那么就称该系统处于纠缠态。

最简示例：一对自旋。– 作为教学性介绍，我们先考虑一对自旋-1/2粒子。具体而言，我们设想这样一种情形：这对粒子的量子态经过制备后，每个粒子分别被送到不同的实验者手中。两位实验者 Alice 和 Bob 的目标是对各自的粒子进行一些局域自旋测量，并根据他们观察到的结果之间的统计关联，判断其背后的联合量子态是可分的还是纠缠的。

根据量子理论，对一对自旋-1/2 最完整的描述由密度矩阵 $\hat{}\rho_{AB}$ 给出，即一个迹为单位的 4×4 半正定厄米矩阵。在这个简单情形中，已知 $\hat{}\rho_{AB}$ 可分，当且仅当其部分转置也是一个正矩阵 [19, 69]。因此，为了判断他们共享的系统量子态是否可分，Alice 和 Bob 可以测量 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 这 16 个期望值 $\langle A_i B_j\rangle$，其中 A_i 和 B_j $\hat{}\hat{}\hat{}$ 从 $\{\mathbb{1}, X, Y, Z\}$ 中选取（即单位矩阵和相应自旋的三个泡利矩阵）。这些测量结果使他们能够重构 $\hat{}\rho_{AB} = (1/4)\sum_{i,\ j}\langle \hat{}A_i \hat{}B_j\rangle\ \hat{}A_i \otimes \hat{}B_j$，然后计算其部分转置的特征值。

遗憾的是，这一非凡结果无法推广到远比一对自旋-1/2复杂的情形。此外，Alice 和 Bob 可能无法执行重构量子态 $\hat{}\rho_{AB}$ 所需的全部测量，也就是说，无法进行完整量子态层析。因此，当系统仅有部分信息可用时，例如只有有限组平均值 $\langle A_i B_j\rangle$，如何进行纠缠检测便成为一个核心问题。尤其是，这种情况

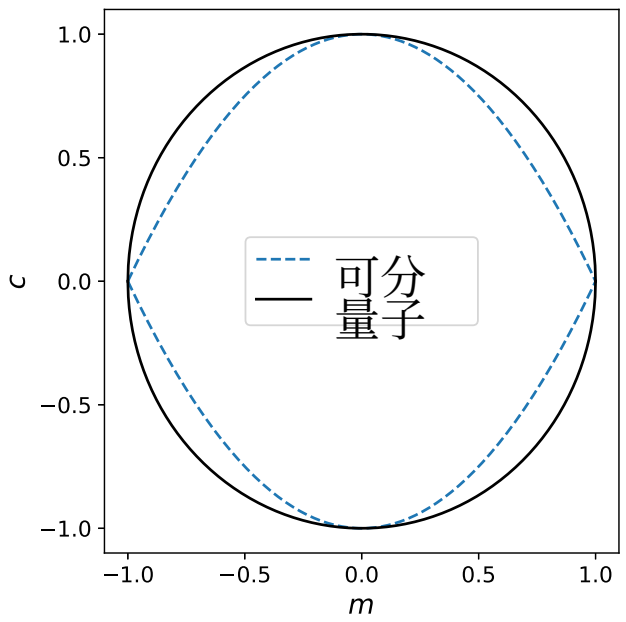

图 2. **可分量子态与纠缠量子态**。 考虑对 m 和 c （定义见方程（2，3））进行测量，黑色实心圆［（蓝色虚线，方程（5）］分别界定了两个量子比特的纠缠量子态（可分量子态）所能达到的数值区域。

在多体系统中不可避免（这也是本综述的主要关注对象），因为完全层析所需的测量次数会随着粒子数呈指数级增长。

基于部分信息的纠缠检测。–为了以教学方式阐释如何根据部分信息检测量子纠缠的核心概念，假设我们只知道平均值

$$m = \langle \hat{Z}_A + \hat{Z}_B \rangle / 2 \tag{2}$$

以及关联

$$c = \langle \hat{X}_A \hat{X}_B \rangle \ . \tag{3}$$

我们能否用可分态解释这些数据，还是说要复现这些数据实际上必须依赖纠缠？这个问题可以用几何方式表述：如果将数据 $\mathcal{D} = \{m, c\}$ 绘制为平面上的一个点，它是否落在可分态所能达到的点的区域内？还是落在该区域之外，也就是只有纠缠量子态才能达到的点的区域？本综述中反复遇到的一个重要性质是，这些点的区域是凸集。也就是说：如果 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}' = (m', c')$ 都是可分态所能达到的，那么任意点 $u\mathcal{D} + (1-u)\mathcal{D}'$ （其中 $0 \le u \le 1$）也能由可分态达到。事实上，若将式（ p 和 p' ）中的相应概率分布记为 1，

那么， $up + (1-u)p'$ 也是一个有效的概率分布，用于描述可分态；并由此产生数据集 $u\mathcal{D} + (1-u)\mathcal{D}'$。同样，量子态所能达到的区域也是凸区域。显然，这些区域也有界，因为 $|m|$， $|c| \le 1$。然而，由于 $Z_A + Z_B$ 和 $X_A X_B$ 不对易，并非所有 $\{m, c\}$ 的取值都能实现：例如，若 $m = 1$ ，则量子态必定为 $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$，此时 $c = 0$。

将关联界定为一个基态问题。–因此，为了找到（m， c）平面上可分态或一般量子态所能达到的区域，只需且必须求出所有平面方向 $\vec{w} = (h,\ J)$ 上的最大值和最小值：

$$\vec{w} \cdot \mathcal{D} = \left\langle \frac{h}{2}(\hat{Z}_A + \hat{Z}_B) + J\hat{X}_A\hat{X}_B \right\rangle \ . \tag{4}$$

在这个表达式中，$\hat{}H(h, J) = \frac{h}{2}(\hat{}Z_A + \hat{}Z_B) + J\hat{}X_A\hat{}X_B$ 可以被形式化地解释为一个量子哈密顿量（在这个特定情况下，是作用于$\hat{}$两个量子比特的横场伊辛模型）。如果对可分态（分别对量子态）集合取 H 的平均值，通过改变参数（h, J），就可以重构这些态所能覆盖的区域。由于凸性，这些区域的边界总是由纯态达到。此外，还可以利用这样一个事实：可分纯态就是乘积态，也就是说，这些态具有$\vec{}$ $\vec{}$如下形式： $|\vec{a}\rangle \otimes |b\rangle$，其中 $\vec{a}$ 和 b 是布洛赫球面上的单位向量。因此，这个问题等价于求 $\pm H(h, J)$的$\hat{}$基态，既可以将范围限制在乘积态内（即采用统计物理学中所谓的“平均场”近似），也可以在所有量子态中求解（通过对 H进行对角化）。对于乘积态，有 $\langle \hat{}H(h, J)\rangle = (h/2)(z_A + z_B) + Jx_Ax_B$，其中 z_i, x_i 是布洛赫球面向量 $\vec{a}$和 b的坐标。求解这个最小化问题是一个初等练习，我们可以得到完整的一组约束

$$m^2 + |c| \le 1 \qquad \text{for separable states,} \tag{5}$$

$$m^2 + c^2 \le 1 \qquad \text{for quantum states.} \tag{6}$$

图 2以几何方式展示了这一点。正如预期的那样，量子态可及的区域严格大于可分态可及的区域。方程（5）称为纠缠见证，即对所有可分态都成立的不等式；若某些实验数据违反该不等式，则证明所研究的量子态存在纠缠 [83]。在一般的多体情形中，我们通常能够获得两个以上的平均值，而且无法精确求解相应的基态问题。尽管如此，问题的几何结构以及纠缠见证的概念仍然适用，也构成了多体系统中纠缠检测与表征的基础。

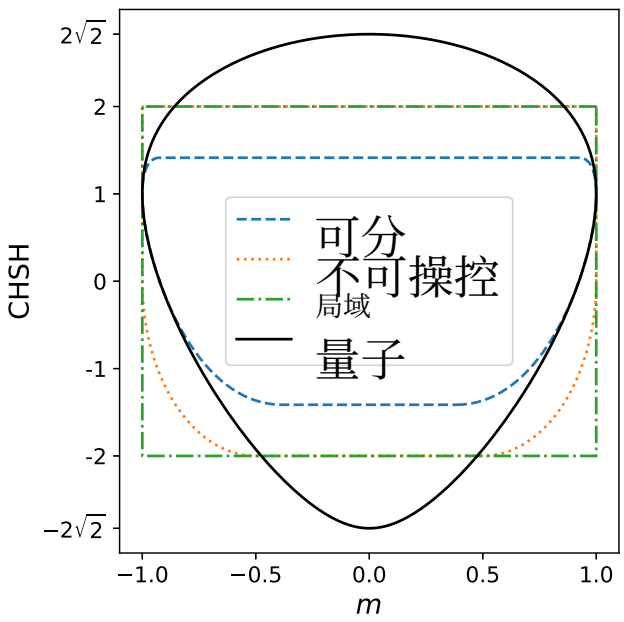

图 3。**贝尔非局域关联和 EPR 悖论与可分和纠缠量子态的对比。**考虑对 m 的测量，以及方程（7，8）中定义的 CHSH，绿色点划矩形区域界定了贝尔局域模型可访问的数据；橙色点线界定了局域隐态模型可访问的数据（*i.e.* 不可操控）；蓝色虚线（相应地，黑色实线）界定了通过测量两个量子比特的可观测量 X 和 Z（Alice 和 Bob 均如此）时，可分量子态（相应地，一般纠缠态）可访问的区域。

贝尔非定域性。– 众所周知，量子力学允许存在一种强于纠缠的关联形式，即贝尔非定域性 [20]。前者可通过纠缠见证（或可分性判据）揭示，而非定域性则通过违反贝尔不等式来揭示。正如我们将看到的，这些不等式可视为纠缠见证的一种特例，其中不对所测量的可观测量作任何假设。正如引言中所述，这一观点与本文综述的主题尤为相关，因为我们希望对系统的量子性质进行设备无关的表征。

作为一个简单的例子，我们考虑一个双部情形：在实验的每次重复中，Alice（分别地，Bob）决定对其系统执行测量$X^{A(B)}$ 或 $Z^{A(B)}$，并得到结果 $+1$ 或 -1。实际上，这些测量可以是对自旋1/2执行的泡利测量 $X_{A(B)}$，$Z_{A(B)}$，从而得到自旋向上/向下的结果，但需要强调的是，以下讨论并不要求这种对应关系。根据贝尔的定域性假设，每个系统都可以用微观态来描述，因此我们可以直接将上述测量结果视为经典变量 $(x_A,\ z_A,\ x_B,\ z_B) \in \{-1,+1\}^4$，它们对应于通过测量这一行为揭示的物理性质。尤其是，根据这一局域性假设，我们能够同时为可能不相容的量子可观测量的结果赋值 $\{x_A, z_A\}$，而这是量子力学所禁止的。

为便于说明，我们来考虑 Alice 和 Bob 使用他们的结果计算以下量

$$m = (\langle z_A\rangle + \langle z_B\rangle)/2 \tag{7}$$

and

$$\text{CHSH} = \langle x_A x_B\rangle + \langle x_A z_B\rangle + \langle z_A x_B\rangle - \langle z_A z_B\rangle\ . \tag{8}$$

这里，CHSH 是进入著名贝尔不等式 $|\text{CHSH}| \leq 2$ 的量，该不等式最早由 Clauser、Horne、Shimony 和 Holt [84] 发现。于是，我们想要回答的问题是：这些数据能否由一个局域模型解释?

从几何上看，$\{m,\text{CHSH}\}$ 贝尔局域模型可达的点构成一个凸集，其极值点由局域经典变量的 2^4 可能组合 ±1 给出。因此，更准确地说，该区域是一个多面体，称为局域多面体。图 3 展示了我们双体示例中的局域多面体，以及可分态或量子态能够达到的区域。对于后面这两个态族，假定测量 X 对应于对自旋-1/2进行泡利测量 Z；我们还对类似于公式（4）的最小化问题进行了数值求解。局域多面体的各个面对应于（紧）贝尔不等式。特别地，在我们这里考虑的情形中，CHSH 不等式 $|\text{CHSH}| \leq 2$ 恰好是唯一的非平凡不等式（不等式 $|m| \leq 1$ 是平凡的）。由于贝尔局域模型不对可观测量作任何假设，与可分态相比，它们对 $\{m,\text{CHSH}\}$ 导出的可能取值构成了更大的集合。因此，如图 3 所示，可分态可达的区域严格包含于贝尔局域模型可达的区域之内。这一性质是完全普适的，也正是贝尔不等式（即设备无关纠缠见证）比（设备相关的）纠缠见证更难被违背的原因。另一方面，量子态可以达到一些无法由贝尔局域模型复现的数据点；例如，在对量子比特进行局域旋转后，通过对最大纠缠对进行测量（$|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle$）所获得的 CHSH $= 2\sqrt{2}$ 值。尽管如此，我们仍要强调，贝尔非定域性是严格强于纠缠的一种量子关联形式，因为存在一些纠缠态允许局域模型 [85]。

爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引。– EPR导引 [86] 体现了一种介于纠缠与非定域性之间的量子关联。继承 Einstein、Podolsky 和 Rosen

开创性见解 [80]，从根本上说，EPR导引与 Bob 的系统中表面上违反海森堡不确定关系的现象有关：无论两个系统相距多远，只要根据在 Alice 系统上进行的其他测量结果来筛选 Bob 系统的测量结果，就会出现这种现象。在这篇教学性导论中，可以将 EPR导引简单定义为数据与某种混合模型不相容；在这种模型中，A 以设备无关的方式处理（如贝尔局域模型），而 B 则被视为具有明确量子态 $|\vec{b}\rangle$ 的量子系统（如可分态）。沿用贝尔非定域性中的例子，在方程（7）和（8）中，x_A，z_A 现在是 ±1变量，而 x_B，z_B 是布洛赫球上单位向量的分量。如图3所示，这类混合模型可达到的区域严格大于可分态可达到的区域，又严格小于贝尔局域模型可达到的区域。这反映了这三类关联之间的层级关系，后文将对此作进一步讨论。

从某种意义上说，EPR导引和贝尔非定域性都可视为量子纠缠更强的表现形式。这三个概念都旨在刻画量子关联与经典微观态概念之间的不相容性；按照经典微观态概念，每个子系统都具有某种“定义明确”的态。它们对各子系统所作的假设不同，因此形成了层级关系。如图1所示，纠缠是EPR导引的必要条件，但并非充分条件；EPR导引是贝尔非定域性的必要条件，但并非充分条件。重要的是，这种层级关系不仅适用于二分情形，也适用于多体情形。由于这种结构，这三种量子关联形式会成为量子信息任务中彼此不等价的资源。刻画给定多体量子系统中的这些关联，有助于揭示同一设备相关但各不相同的非经典性质。

两个量子比特之间的量子关联。– 人们或许会认为，在由两个自旋-1/2 粒子（即量子比特）构成的最简单非平凡情形中，可分性问题的一切都已明了。事实上，若给定完整的密度矩阵 $\hat{\rho}_{AB}$，那么必要且充分的纠缠判据早已为人所知，例如基于 concurrence 或部分转置正性的判据（综述见 [19, 69] ）。然而，仍有若干基本的开放问题，尤其是关于量子纠缠与贝尔非定域性之间的联系，或使用广义测量（正算子值测度）相较于投影测量是否具有优势 [20]。举一个特别简单的例子，考虑所谓的维尔纳态，即贝尔对与白噪声的统计混合：$\hat{\rho}_\eta = \eta|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| + (1-\eta)\mathbb{1}/4$，其中 $|\Psi_-\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$。维尔纳态当且仅当 $\eta > 1/3$时是纠缠态，而若使用仅使用投影测量时，对于 $\eta \lesssim 0.71$ [85]，无法违反任何贝尔不等式；然而，尚不清楚在这一范围内使用广义测量能否违反贝尔不等式。这说明，即使在两个量子比特这一最简单的情形中，不同非经典关联概念之间的关系也十分复杂。尽管目前尚未形成完整的理解，本综述仍介绍了若干通用方法，说明如何根据对多体系统量子态的部分了解来检测和探究纠缠。

纠缠量化。– 鉴于量子纠缠在许多应用中发挥着关键作用，人们自然会关心如何量化给定系统中的纠缠含量 [19]。对于两个量子比特这一简单情形，可以依据量子态所含的纠缠量对其进行唯一排序。例如，一种常用度量是所谓的$concurrence$（综述见文献 [19] ）。两个量子比特情形下纠缠量化的唯一性，可追溯至唯一最大纠缠态的存在（也就是说，在局域幺正变换下，该态等价于一个贝尔对或自旋单重态）。然而，尤其是在不存在唯一最大纠缠态的多体情形中，会出现许多彼此不等价的纠缠量化形式。基本上，对于任何以某种形式的量子纠缠为资源的任务，都可以依据完成该任务的表现来量化纠缠。因此，如果某个态 $\hat{\rho}_1$ 在完成任务T时比 $\hat{\rho}_2$ 更有优势，根据相应的纠缠度量$E(\hat{\rho}_1) > E(\hat{\rho}_2)$；但与此同时，如果 $\hat{\rho}_2$ 在另一任务 T' 中比 $\hat{\rho}_1$ 更有优势，根据相应的纠缠度量 $E'(\hat{\rho}_2) > E'(\hat{\rho}_1)$。从这个角度看，没有哪一种纠缠度量在根本上优于其他所有度量，这一点并不令人意外。不过，人们普遍认为，任何纠缠度量 E 都必须满足一系列最低限度的形式性质，例如

1. 正性：对于所有量子态 $\hat{\rho}$, $E(\hat{\rho}) \geq 0$ 当$E(\hat{\rho}_{\text{sep}}) = 0$ 对于所有可分态 $\hat{\rho}_{\text{sep}}$。

2. 局域操作与经典通信（局域操作与经典通信）下的单调性：如果 $\hat{\rho}_2$ 是通过对子系统进行局域操作（可能借助经典通信来协调局域操作）从 $\hat{\rho}_1$得到的，那么 $E(\hat{\rho}_2) \leq E(\hat{\rho}_1)$。

这些观点反映了这样一种思想：纠缠应定义为一种资源，它不存在于可分态中（性质1），且无法仅通过经典通信手段创建（性质2）。自然，人们也可以尝试在类似的框架下量化EPR导引和贝尔非定域性，不过这超出了本教程部分的范围。

B. 多体量子关联

1. Introduction to the problem

考虑一个由 $N \gg 1$ 个组分或子系统构成的系统。具体而言，这些组分可以是单个中性原子、囚禁离子、光学模式、超导量子比特、金刚石中的NV中心、凝聚态物质系统中的局域自旋等。子系统也可以由这些单个组分构成较大的群体，例如由许多粒子组成的 N 个原子系综。我们的目标是在无需进行全态层析的情况下，揭示并刻画系统内关联的量子本质。事实上，当 $N \gg 1$ 在实验上无法重建全局系统的完整量子态$\hat{\rho}$ 时，原因可能是所需的测量在实践中无法实现，也可能仅仅是因为所需测量的数量随N呈指数级增长，因而过于庞大。因此在实践中，我们只能获得关于$\hat{\rho}$的部分信息。举例来说，假设可以测量某些局域可观测量 X_i，Y_i，...，其中标签 $i \in \{1, \ldots, N\}$ 表示子系统（例如，如果子系统是量子比特，X_i，Y_i，... 可以是沿不同方向进行的自旋测量；请注意，要探测纠缠，必须能够在每个子系统上测量不同的不对易可观测量）。接下来，假设观测到了不同子系统之间的一些统计关联，例如

$$\langle \hat{X}_i \hat{X}_j \rangle \neq \langle \hat{X}_i \rangle \langle \hat{X}_j \rangle \ , \tag{9}$$

$$\langle \hat{Y}_i \hat{Y}_j \rangle \neq \langle \hat{Y}_i \rangle \langle \hat{Y}_j \rangle \ , \text{ etc.} \tag{10}$$

对于某些子系统对 $i \neq j$。这里，$\langle \hat{X} \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho} \hat{X})$ 是未知量子态 $\hat{\rho}$ 中的量子期望值。仅凭这些非常不完整的观测，我们能对量子关联是否存在得出什么结论？要解释观测统计量，是否必须存在某种量子关联？还是说，我们可以用纯粹的“经典”解释来说明观测到的关联？此外，如果我们能够得出结论，认为测量数据要求这些子系统共享量子关联，那么还能进一步深入了解系统的量子态吗？我们能否提取有关这些关联结构的更多定性和定量信息？或者，能否将它们用作某种量子技术应用的资源？正如我们将看到的，将这些问题形式化为定义明确的数学问题，可以从互补的角度来检测和刻画多体系统中的量子关联。

2. Quantum entanglement

如果一个多体量子态不能分解为纠缠的

$$\hat{\rho}_{\mathrm{sep}} = \sum_{\lambda} p_\lambda \otimes_{i=1}^{N} \hat{\rho}_i^{(\lambda)} \ , \tag{11}$$

其中，$p_\lambda \geq 0$ 是一个概率分布（$\sum_\lambda p_\lambda = 1$），而$\hat{\rho}_i^{(\lambda)}$是子系统 i的任意量子态。形式为$\hat{\rho}_{\mathrm{sep}}$ 的量子态称为可分态，这类量子态构成一个凸集。在可分态中，所有子系统都有定义明确的局域量子态（LQS）$\hat{\rho}_i^{(\lambda)}$；这些局域量子态以概率 p_λ联合抽样。由于不同子系统的局域量子态之间可能并不独立，可分态中仍可能存在某些关联。然而，与更一般的（纠缠）量子态所允许的关联相比，这些关联可以用经典方式解释。

进行实验时，在粒子 i上执行由 x_i 标记的测量，得到结果a_i。随后，通过联合概率分布 $p[\vec{a}|\vec{x}]$研究多体系统中的关联；该分布描述了执行测量 $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ 时获得结果 $\vec{a} = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ 的概率。对于可分态，这个概率分布可以写成

$$p_{\mathrm{sep}}[\vec{a}|\vec{x}] = \sum_{\lambda} p_\lambda \prod_{i=1}^{N} p_i^Q(a_i|x_i, \lambda) \ , \tag{12}$$

局域概率可通过玻恩定则得到量子描述（因此带有上标 Q）$p_i^Q(a|x, \lambda) = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_i^{(\lambda)} \hat{E}_i^{(x,a)}]$，其中 $\hat{E}_i^{(x,a)}$ 是与测量 a在系统 x上进行时获得结果 i 所对应的正算子值测度（记住 $\hat{E}_i^{(x,a)} \geq 0$，以及$\sum_a \hat{E}_i^{(x,a)} = 1$）。因此，如果一组实验数据无法用式（12）形式的概率分布来解释，我们就必须得出结论：底层量子态是纠缠的。

纠缠见证。– 如何证明不存在任何可分态能够重现给定的某些实验数据？举例来说，假设这些数据是某些可观测量 $O_1, \ldots, O_n$ 的平均值（例如 $\hat{O}_1 = \hat{X}_1 \hat{X}_2$, $\hat{O}_2 = \hat{X}_1 \hat{Y}_3$, $\hat{O}_3 = \hat{Z}_2$ 等）。那么，这些数据构成集合 $\mathcal{D} = \{\langle O_a \rangle\}_{a=1}^n$，在几何上是 n 维空间中的一个点。根据定义，如果数据集 $\mathcal{D}$ 可由某个可分态（式 (11)）重现，我们就称它为可分数据集。因此，纠缠检测所要回答的问题是：如何证明 $\mathcal{D}$ 不是可分数据集？一个关键性质是，可分数据集构成凸集。这一性质很基本，直接源于可分量子态集合（式 (11)）的凸性。为了证明 $\mathcal{D}$ 不是可分数据集，只需找到一个超平面，将 $\mathcal{D}$ 与可分数据集集合分隔开。这样的分隔超平面称为

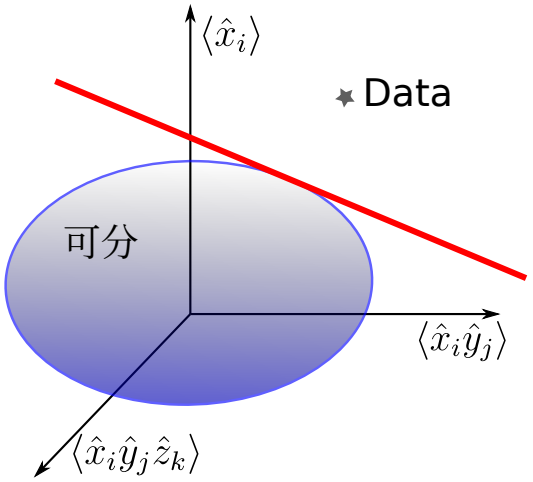

图 4. **纠缠见证**。对可分态进行测量所得到的数据，在测量关联量构成的空间中形成一个凸集（阴影区域）。另一方面，对纠缠态进行测量则可能产生位于该区域之外的数据（星形标记）。在这种几何图像中，纠缠见证是定义半空间的超平面，这些半空间包含可分数据集。因此，它们可以用来判定观测到的数据是否意味着存在纠缠。图中，$\hat{x}_i$、$\hat{y}_j$、$\hat{z}_k$ 是对子系统 i、j、k 进行测量的若干可观测量。

一个纠缠见证，适用于从数据集 $\mathcal{D}$中检测纠缠，见图4。在几何上，超平面由其法向量 $\vec{w} = (w_1, \cdots, w_n$定义，因此相应的纠缠见证形式为

$$\langle \hat{W} \rangle := \sum_{a=1}^{n} w_a \langle \hat{O}_a \rangle - B_{\text{sep}} < 0 \ , \tag{13}$$

其中，B_{sep} 是可分界限，对应于 $\sum_{a=1}^{n} w_a \, \hat{} O_a$，即在所有可分态上，$\sum_{a=1}^{n} w_a \text{Tr}(\hat{} O_a \hat{} \rho_{\text{sep}})$ 的最小值，见式（11）。请注意，由于可分态集合具有凸性，该最小值总是由纯态取得，也就是说，由形如$|\Psi\rangle = \otimes_{i=1}^{N} |\psi_i\rangle$的乘积态取得。对于任何不可分数据集，总存在能够据此判断存在纠缠的见证。相反，我们要强调，纠缠见证只是充分条件，因为给定的见证所对应的超平面可能无法将所研究的数据与可分数据集分开。因此，多体情形中的一项主要难题是，找到适用于给定量子态和测量、能够探测纠缠的纠缠见证。本综述将介绍一些解决这一问题的技术。

多体纠缠结构。– 如果纠缠见证被违背，这意味着所考虑的量子态无法按式（11）分解。然而，通常这并不能提供太多关于系统内纠缠结构的信息。

例如，子系统 1 和 2 可能彼此纠缠，但二者都与其他子系统不相关，而后者可由完全可分模型描述。为了进一步了解纠缠结构，可以考虑将子系统划分为不同的子群 $\{1, \ldots, N\}$ $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_Q\}$，其中 G_q 是由 $|G_q|$ 个子系统组成且互不重叠的群组，使得 $\cup_{q=1}^{Q} G_q = \{1, \ldots, N\}$。因此，式（11）对应于一种特殊划分，即将子系统逐个划分（$|G_q| = 1$ 对所有 q）。

我们称量子态相对于划分 $\mathcal{G}$是可分的，简写为 $\mathcal{G}$-可分，若它可以分解为 $\rho_{\mathcal{G}-\text{sep}} = \sum_\lambda p_\lambda \otimes_{G \in \mathcal{G}} \hat{} \rho_G^{(\lambda)}$，其中 $\hat{} \rho_G^{(\lambda)}$ 是该组内子系统的量子态 G。与式（11）的主要区别在于，现在每组内部可以存在量子关联。

我们将划分 $\mathcal{G}$ 的深度定义为其最大子群的大小，$\text{depth}(\mathcal{G}) = \max_q |G_q|$。若一个量子态可以分解为深度至多为 k 的 $\mathcal{G}$-可分态的统计混合，则称它是 k-可制备的。根据定义，不是 k-可制备的量子态，其纠缠深度至少为$k+1$。另一方面，若一个量子态可以分解为满足 $|\mathcal{G}| \geq k$ 的 $\mathcal{G}$-可分态的统计混合，则称它是 k-可分的（也就是说，划分 $\mathcal{G}$ 由至少 k 个子系统群组成）。k-可制备性和k-可分性的概念在一定程度上互为补充（例如，若一个量子态是 1-可制备的，它也是 N-可分的，也称为完全可分，对应于式（11）的情形）。最近，人们研究了涉及 k-可制备性和 k-可分性组合的多体纠缠替代表征。关键在于，所有这些量子态族都构成凸集，也就是说，给定族中两个量子态的统计混合仍属于同一族。因此，相应的数据集也构成凸集（位于数据集空间中），可通过与式（13）形式相同的合适纠缠见证加以表征，不过其界限取决于所要认证的具体纠缠态类别。关于这些涉及多体纠缠结构的概念的最新结果，请参阅文献 [87, 88] 。

纠缠量化。– 尽管 k-可制备性和k-可分性能够有效表征系统的纠缠结构，但它们无法直接提供有关这些量子关联“强度”的信息，例如其对噪声的鲁棒性，或对特定量子信息任务的实用性。要正确量化量子态中存在的非经典资源，就需要定义适当的纠缠度量。纠缠度量是非负实函数 $\mathcal{E}(\rho)$，满足 [89, 90]: i) 对所有可分态 σ，$\mathcal{E}(\sigma) = 0$；以及 ii) $\mathcal{E}(\rho)$ 不

会在局部操作与经典通信（LOCC）下平均增加 [91]。正如我们已经强调的，仅依据这两项要求，就可以定义许多彼此不等价的度量，而每种度量都会对纠缠态给出不同的排序。因此，通常更适合考虑与实际相关问题相联系的度量，使其具有具体含义。

在二分情形中，通常采用的度量包括熵、施密特秩、concurrence，或形成纠缠/蒸馏纠缠 [79, 90]。然而，在多体情形中，度量方式更加多样，这反映了多体局域操作与经典通信分类的复杂性，以及缺乏唯一的最大纠缠态 [92, 93]。这些度量通常与通信任务存在操作层面的关联；在这类任务中，纠缠被视为一种资源，可突破局域操作与经典通信对相距遥远的各方所施加的限制。然而，对于多体系统而言，其他特性通常更为重要。例如，最佳可分近似（BSA） [94, 95], 用于量化多体态可被可分态近似到何种程度。另一个例子是广义鲁棒性（GR） [96], ，它通过衡量使量子态变为可分态所需添加的最少（任意）噪声量，来量化量子态对噪声的鲁棒性。

遗憾的是，精确计算纠缠度量往往不可行，因为这需要进行完整量子态层析，而在实践中，对于多体态来说，这通常无法实现。因此，人们发展出一些策略，至少可以基于对系统态的部分了解，为感兴趣的纠缠度量给出下界。例如，研究表明，可以将纠缠见证的违背程度与 BSA 和 GR 的下界联系起来 [97]。

关于纠缠量化及其在实验中的实际实现，深入综述请参阅文献 [79] 。

3. *Bell nonlocality*

纠缠的存在排除了用具有量子描述的局域概率分布来描述观测统计量的可能性，见公式（12）；而贝尔非定域性则排除了用任何种类的局域概率分布来进行描述的可能。因此，贝尔非定域性是一种比纠缠更强的关联形式，也是目前已知自然界中出现的最强关联形式[20]。

形式上，能够用局域描述表示的概率分布可以写作

$$p_{\text{local}}[\vec{a}|\vec{x}] = \sum_{\lambda} p(\lambda) \prod_{i=1}^{N} p_i(a_i|x_i,\lambda) \ , \qquad (14)$$

其中，与方程（12）相反， $p_i(a_i|x_i,\lambda)$ 是任意的概率分布。根据定义，如果一组实验数据无法用方程（14）所示形式的概率分布来解释，我们就说它展现了贝尔非定域性。

在公式（14）的语境下， λ 称为局域隐变量，它使我们能够考虑到相关性可能源自未知的共同原因或未观测到的自由度。至关重要的是，局域概率 $p_i(a_i|x_i,\lambda)$ 可能取决于 λ，但不取决于另一个系统 $j \neq i$的测量设置或结果。尽管局域概率可能是先验依赖于 λ的随机函数，但事实证明，所有随机性都可以形式上纳入 $p(\lambda$中，因此，要找到一个局域模型，只需考虑确定性函数 $p_i(a_i|x_i,\lambda)$。具体而言，可以认为，在实验的每次重复中，每个子系统对于每一种可能的测量设置 a_i 都具有一个预先确定的结果 x_i；而测量只是将这个“预先存在”的结果“揭示”出来。在贝尔局域模型中，随后只需附加局域经典变量 $a_i^{(x)}$ 来表示各子系统上的结果，并假设每次重复实验时，这些局域变量都是随机抽取的。

要看出贝尔非定域性是比纠缠更强的一种量子关联，可以很容易地验证，可分量子态 [Eq. (11)] 总是存在局域模型 [Eq. (14)], ，因为可以考虑$p_i(a|x,\lambda) = \text{Tr}[\hat{\rho}_i^{(\lambda)} \hat{E}_i^{(x,a)}]$。这意味着，如果一个态是可分的，那么任何贝尔不等式都不会被违反；无论对希尔伯特空间维数或实际实施的正算子值测度作何假设，这一点都成立。这一关键性质表明，贝尔不等式可以用作设备无关的纠缠见证：它们能够在放宽对测量精确校准以及子系统所处希尔伯特空间的假设时，检测出量子纠缠。事实上，我们要强调，在贝尔检验的语境下，无需描述系统的量子态或所执行的测量（例如通过量子态和算符来描述）。贝尔不等式基于这样的概率分布：当对标记为 x_i、 x_j.....的子系统i、 j.....执行测量时，获得结果 a_i、 a_j.....的概率；而无须对这些测量实际上是什么作任何假设。如何指定这些标签，很大程度上由实验者自行决定，例如，他们可以将一个泡利 Y测量 $x = 1$ 以及自旋向上/向下的结果 $a = \pm 1$作为标签。此外，各方可以执行完全不同的测量（如自旋、位置等），并采用不同的粗粒化方式和结果标签来整理测量结果。

多体贝尔不等式。– 如何证明不存在局域模型 [方程（14）] 能够再现某些实验数据？形式上，这个问题与寻找被违反的纠缠见证非常相似。在现实的多体情形中，我们无法重构完整的联合概率分布 $p[\vec{a}|\vec{x}]$，因为这需要实施指数多的不同实验

设置，并且每种设置都要重复多次，以收集足够的数据来估计相应的概率。在实践中，人们通常通过粗粒化数据来探测子系统之间的关联，例如 即 完整分布的边缘分布 $p[\vec{a}|\vec{x}]$、仅子系统对之间的关联，或更一般地，通过对输入/输出设置的某个函数在多次实验重复中取平均来进行探测。使用变量 $a^{(x_i)}{}_i$ 表示第i个子系统的结果，其中测量设置 x_i 被实施时，这类平均函数可以写成 $\langle f_i[\{a^{(x_i)}{}_i \quad\}]\rangle$。因此，一组实验数据就是 $\mathcal{D} = \{\langle f_1[\{a^{(x_i)}{}_i \quad\}]\rangle, \ldots\ldots, \langle f_n[\{a^{(x_i)}{}_i \quad\}]\rangle\}$，在几何上也是一个 n维空间中的点。类似于纠缠的情形，我们将局域数据集 定义为能够由局域模型方程（14）再现的数据集，因此，非局域性检测的问题现在可以表述为：证明一组测量不是局域数据集。为此，请注意，局域数据集的集合是凸的，甚至更进一步，它是一个多面体。 贝尔不等式 在几何上定义为将局域数据集与非局域数据集分隔开的超平面；当它们与局域多面体的面重合时，则称其为紧的。一个紧的贝尔不等式可以写成：

$$\langle \mathcal{B} \rangle := \sum_{k=1}^{n} w_k \langle f_k[\{a_i^{(x_i)}\}]\rangle - B_{\text{loc}} < 0 \ , \qquad (15)$$

其中， B_{loc} 是 $\sum_{k=1}^{n} w_k f_k[\{a_i^{(x)}\}]$的局域界，也就是说，是 $\langle \mathcal{B} \rangle$ 在所有可能的局域变量取值 $\{a^{(x_i)}{}_i \quad\}$中的最小值。在多体情形下，主要挑战是找出适用于给定量子态和测量、能够检测非定域性的贝尔不等式。

关于多体非定域性的进一步考量。–公式（14）描述了一个全局域模型，其中每个子系统都对应一个概率分布。这与贝尔非定域性语境中的情形类似于纠缠语境中的全可分态，即公式（11）。与纠缠检测的情形类似，违反与此类全局域模型相关的多体贝尔不等式，通常并不能提供多少关于多体系统中非局域关联具体结构的信息。例如，子系统 1 和 2 可能构成一个贝尔对，与其他子系统完全无关联；而后者则由一个全局域模型描述。因此，近年来有多项研究提出推导能够检测非局域性更精细结构的贝尔不等式（综述见参考文献 [20]）。本质上，这些研究探讨了与上一节所介绍的k-可制备性和 k-可分性概念相对应的概念，只是以局域概率分布取代了局域量子态。给定一个将$\mathcal{G} = (G_1, \cdots, G_Q)$个 N子系统划分为 Q 个分区的划分，如上一节所定义，可将 $\mathcal{G}$-局域模型定义为 $p_{\mathcal{G}-\text{local}}[\vec{a}|\vec{x}] = \sum_\lambda p(\lambda) \prod_{G\in\mathcal{G}} p_G(\vec{a}_G|\vec{x}_G, \lambda)$，其中 $\vec{a}_G = \{a_i\}_{i\in G}$是 G 个分区内各方的测量结果， $\vec{x}_G$ 则是相应的输入。关键在于，概率分布$p_G(\vec{a}_G|\vec{x}_G, \lambda)$可以描述群组 G内部的非局域关联。接着，人们考虑不同划分下此类模型的统计混合，并完全类比纠缠的情形 [98, 99]，引入诸如 k-可制备性和 k-可分性等概念。若一个概率分布 $p[\vec{a}|\vec{x}]$ 无法以这种方式分解，除非将所有 N 个子系统都纳入同一个“分区”，则称其具有真正的多体非局域性。Svetlichny 对真正的多体非局域性，以及关键的一点——通过适当推广贝尔不等式来检测这种非局域性的可能性——进行了开创性研究，研究对象为 $N = 3$ 方系统 [100]，，随后又推广至任意 N [101, 102]。后续研究提出，对群组内的概率分布 $p_G(\vec{a}_G|\vec{x}_G, \lambda)$施加更多约束，例如无信号约束，以获得更符合物理实际的模型（见参考文献 [20]及其中的参考文献）。人们逐渐认识到，一般而言，违反多体贝尔不等式能够仅凭测量统计，对底层纠缠态进行设备无关表征 [103, 104]。近期，这一方法还扩展到了无假设表征，不仅能表征量子态，还能表征所实施的测量，这就是所谓的自检验 [74]。在关于理论与实验成果的章节中，我们将回顾近期利用多体系统，通过违反适当的贝尔不等式来探测贝尔非定域性深度，以及对多体纠缠进行设备无关表征的研究成果。

4. *Einstein-Podolsky-Rosen steering*

EPR导引这一概念在文献 [86]，中得到了形式化定义，旨在捕捉 Einstein、Podolsky 和 Rosen [80] 最初提出的洞见：量子力学似乎允许人们通过测量一个系统，瞬时改变（“导引”）另一个系统的量子态，而无论二者在空间上相距多远。关于这一主题的全面综述，读者可参阅文献 [67, 68]。在本综述中，我们主要关注非经典关联的各种概念，以及如何在多体系统中探测这些关联；在此背景下，EPR导引对应于一种介于量子纠缠与贝尔非定域性之间的情形。在这种情形中，“经典”模型是一种混合模型：部分子系统由局域量子态描述（这些是“可信任”的子系统， $i \in \mathcal{T}$），其余子系统则像贝尔局域模型那样由局域变量描述（这些是“不可信任”的子系-¯统， $i \in \mathcal{T}$）。我们可以将这种所谓的局域隐

量子态（LHS）模型为 [105]:

$$p[\vec{a}|\vec{x}] = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \prod_{i\in\mathcal{T}} \mathrm{Tr}[\hat{\rho}_i^{(\lambda)} \hat{E}_i^{(x_i,a_i)}] \prod_{i\in\bar{\mathcal{T}}} p(a_i|x_i,\lambda) \ . \quad (16)$$

因此，与量子纠缠和贝尔非定域性的情形完全相同，EPR导引也可以即通过违反适当的不等式，来检验数据是否无法分解为式（16）所示的形式。一个典型例子是，通过违反海森堡型不确定性关系来检测EPR导引 [106], ，这遵循了EPR的思想实验。另一种方法是，通过求解旨在排除LHS 模型的半定规划，数值推导导引不等式 [107]。

此处值得一提的是，尽管双体系统的 EPR 导引定义很直接，但其多体推广在概念上可能颇为困难。例如，由于这类关联具有内在的不对称性，如何将真正多体纠缠或非定域性的概念推广到量子导引，并不显而易见。一种方法是排除可信方/不可信方为 p[108–110] 的所有（或部分）可能排列所对应的 LHS 模型。另一种已提出的方法则是先定义哪些方是可信方/不可信方，再据此在这种半设备无关场景 [111, 112]中判定是否存在真正多体纠缠。此外，在多体情形下，人们推导出了所谓的单配关系，而对其进行完整表征尤其具有挑战性 [109, 110, 113], ，也是该领域一项重要的开放问题。

III. 理论成果

本节回顾近年来为解决多体系统中量子关联的表征问题而发展出的主要方法。具体而言，我们将介绍所谓的数据驱动方法，这类方法可用于直接从数据中推导新的判据；还将介绍涉及集体可观测量低阶矩的判据，这些判据从构造上便适用于任意数量的粒子。我们主要关注复杂度不会随系统尺寸呈指数增长，且可应用于大规模多体系统（超过数百个量子比特）的方法。如果一种探测量子关联的方法所需资源随所考察粒子数的增长至多呈多项式增长，我们就称该方法具有可扩展性。这里所说的资源包括：为积累足够数据以实施某种方法或检验某项判据所需的测量次数；或者（经典）计算机运行算法、判断是否需要量子关联来解释所获得测量结果所需的时间和存储器。

A. 从给定的一组平均值构造纠缠见证和贝尔不等式

过去几十年来，人们从多个角度探讨了这一核心问题：“多体系统上一组给定的可观测量平均值，能否在没有量子关联的情况下重现？”开创性研究提出了一系列判据，其中涉及对多体密度矩阵进行部分转置或其推广形式 [114–116]。尽管这些方法原则上能完整解决纠缠检测问题，但由于需要对完整的密度矩阵进行数值运算，因此无法应用于量子比特数超过少数几个的系统。另一些方法则基于协方差矩阵 [117], 或关联张量 [118], 的知识。然而，当协方差矩阵或关联张量中的某些元素未知时，目前尚不清楚如何调整这些方法；此外，这些方法只能给出纠缠的充分条件，因此数据可能与可分态不相容，却仍无法通过上述判据检测出纠缠。最早系统性地以一般性且可扩展的方式处理这一问题的方法，是在贝尔不等式的研究背景下发展起来的。这是通过两种互补的方法实现的，它们都利用了这样一个事实：这本质上是一个经典统计物理问题。

第一种方法 [119] 植根于一种称为半正定规划的数学框架，并利用了这样一个事实：测量均值（为简便起见，本综述中称之为“数据”）可以写成协方差矩阵的元素（或这些元素的线性组合），而该矩阵按构造是半正定的。假设如式（14）所示，存在一个底层的贝尔局域模型，那么该协方差矩阵的元素还须满足额外约束。利用标准的半正定规划数值程序，可以检验数据是否与这些约束相容；若数据违反这些条件，就能得到式（15）形式的显式贝尔不等式，其中系数 w_k 是根据数据本身推导出来的。这种方法本质上具有可扩展性，因为它无需处理包含指数级多个自由参数的完整贝尔局域模型，而只需考虑在该经典模型存在时数据必须满足的必要条件。该方法也十分灵活，可以应用于任意阶的关联函数而不损失可扩展性，开创性论文 [119]已对此作出示范。它的内在局限在于，只考虑了贝尔局域模型存在的必要条件：数据可能满足这些半正定约束，实际上却与贝尔局域模型不相容。不过，通过考察阶数逐渐增加的协方差矩阵，可以系统地收紧该方法，从而形成一系列收敛的非局域性检测测试，但计算成本会迅速增加。

第二种互补的方法 [120]植根于逆统计问题的框架，尤其是所谓的逆伊辛问题。从本质上说，这是一种变分方法。其基本洞见是，式（14）中的最一般贝尔局域模型，在不失一般性的前提下，可以参数化为如下形式的吉布斯分布 $p[\{a^{(x_i')}{}_i\}] = Z^{-1}[\mathbf{K}]\exp\left(\sum_k K_k f_k[\{a^{(x_i')}{}_i\}]\right)$。在此表达式中，函数 f_k 表示构成平均值集合的可观测量，而 K_k 则是变分参数，通过优化这些参数来重现观测数据 $\langle f_k\rangle_Q$。这种方法有三个值得强调的关键特点：第一，它具有完备性：改变参数 K_k 即可精确映射出最一般贝尔局域模型所能实现的数据集。第二，参数 K_k的优化通过一个凸代价函数 $C(\mathbf{K})$ 来完成；该函数是广义吉布斯自由能，具有适当的凸性，其梯度只需由$\partial C/\partial K_k = \langle f_k\rangle_{\mathbf{K}} - \langle f_k\rangle_Q$给出，其中第一个平均值取自 p 分布，第二个平均值则是待重现的目标数据。请注意，在梯度下降算法或其任何改进算法中优化变分参数 K_k 时，只需计算代价函数的梯度，而无需计算代价函数C 本身。梯度的简单表达式带来了第三个关键性质：由于它只涉及对 p 分布中的 f_k 函数求统计平均，因此可以利用经典统计物理中的标准工具（例如蒙特卡罗方法）高效计算，而这些工具本质上可扩展至多体系统。如果贝尔局域模型无法重现数据，优化过程便会收敛到数据空间中最接近这些数据的近似；根据目标数据与最优经典模型之间的距离，可以重构出被违反的贝尔不等式。

有趣的是，这两种方法都已应用于多体问题 [119, 120], ，并得出了新颖的贝尔不等式。尽管推导出的贝尔不等式系数是通过数值方法获得的，但有时仍能从这些系数中解析地识别出某些规律和对称性，从而使作者能够解析地推导出贝尔不等式及其经典界，有时甚至是其量子界，并将其推广为适用于特定多体量子态的新一类贝尔不等式 [119–122]。

作为这些开创性工作的延续，为从给定的平均值集合中推导出新的贝尔不等式，人们也发展出了类似的方法来推导新的纠缠见证 [123, 124]（另见 [125]）。在这一背景下，数学框架保持不变，但其基础经典模型对应于可分离量子态 [式（11）], 其中每个局域量子态 $\rho_i^{(\lambda)}$ 均由一组经典变量参数化。采用这些方法时，所推导出的系数纠缠见证 [式（13）] 是通过数值方法获得的；然而，人们往往仍能对其进行解析分析，从而得到具有普遍重要性的新型纠缠见证族，而不局限于用于发现它们的特定数据[123]。此外，需要指出的是，一旦根据数据推导出特定的纠缠见证，也可以通过求解一组代数方程来确定其经典界 [126, 127]。

这些方法可以轻松扩展至混合情形：某些子系统以设备无关的方式处理（如贝尔局域模型），另一些子系统则由给定的希尔伯特空间和测量算符描述。在这种混合情形下，若将这些技术用于多体问题，这一方向尚未得到探索；人们可以据此推导出适用于给定多体数据集的 EPR 导引不等式。

文献 [119, 120, 123, 124] 中的方法为从多体系统测得的一组平均值中检测纠缠这一问题，提供了构造性、完备且可扩展的解决方案。它们为利用当前量子模拟器和计算机获得的真实数据，探测一般具有空间结构的多体系统中的纠缠，提供了一种重要范式。然而，这些方法的数值实现可能颇具挑战性，因此有必要开发适用范围较窄、但计算复杂度也较低的互补方法。

B. 基于置换不变关联函数的纠缠见证与贝尔不等式

考虑这样一种情形：局域可观测量 $\hat{O}_a^{(i)}$定义在 N个子系统上。这里，$i = 1, \ldots, N$表示子系统的标签，而 $a = 1, \ldots, K$表示不同局域可观测量的标签。当子系统是量子比特时，局域可观测量是自旋 1/2 可观测量；对于局域维数为 $d > 2$ 的一般量子位子系统，局域可观测量则可以是任意的。我们假设，在实验中可以通过集体测量估计它们的平均值，从而获得 $\sum_{i=1}^N \langle \hat{O}_a^{(i)}\rangle$ 的信息。同样，我们假设可以推断出形如 $\sum_{i\neq j}\langle \hat{O}_a^{(i)}\hat{O}_b^{(j)}\rangle$ 的二体关联，至少对于某些成对的测量设置（a, b）是如此。请注意，数据在子系统的任意置换下保持不变。例如，这一框架涵盖了对自旋 1/2 系综集体自旋可观测量 $\hat{J}_a = \sum_i \hat{S}_a^{(i)}$的一阶矩和二阶矩的测量，这类测量常见于第 IV 节讨论的若干冷原子实验。我们在此背景下试图回答的基本问题是：能否根据这类数据证明子系统之间存在纠缠？如果只知道最高到二阶的矩，那么这一问题最早在自旋-1/2 系综的背景下得到了完整解决，并由此推导出一整套所谓的广义自旋压缩不等式。这些

对应于关于沿三个空间方向（$\langle \hat{J}_a \rangle$）的第一矩和（$\langle J_a J_b \rangle$）第二矩的解析条件（$a, b = x, y, z$），可用于检测各个量子比特之间的纠缠。它们推广了著名的自旋压缩条件 [66]:

$$N\mathrm{var}(J_y) < \langle \hat{J}_x \rangle^2 , \tag{17}$$

可检测有助于实现超越标准量子极限的计量学的纠缠 [65]。另一方面，条件:

$$(N-1)\mathrm{var}(J_z) < \langle \hat{J}_x^2 \rangle + \langle \hat{J}_y^2 \rangle - N/2 \tag{18}$$

可检测接近 Dicke态 [129], 的纠缠；Dicke态是$\mathbf{J}^2$ 和 $\hat{J}_z$的共同本征态。特别是，$J_z = 0$ 的 Dicke态（也称为双福克态）有助于计量学，并能达到所谓的海森堡灵敏度极限（见下一节及综述文献 [34]）。文献 [128] 的开创性工作随后被推广到一般自旋-j 系综[130, 131], 的集体自旋，以及一般量子d维子系统 [130, 132], 的任意局域可观测量。这与使用具有较大磁矩的原子开展实验尤其相关，例如铬、镱或铒；在这些实验中，可以控制并测量多个塞曼子能级上的布居数。

与纠缠检测类似，人们也可以问，是否仅凭集体测量就能判定非定域性。在贝尔检验的设备无关设定中，局域可观测量并未明确指定。相反，唯一可用的信息是概率或关联函数，它们反映了给定测量所得的结果统计。例如，自旋-1/2 粒子上泡利算符的期望值被抽象概率取代 $p(a|x)$，表示在给定测量设置 $a = \pm 1$下得到结果 x 的概率；这里的测量设置对应空间中的一个方向。关于是否存在与相应的、对所有置换取平均的单体和二体关联相容的经典隐变量模型，文献 [133], 首次成功进行了研究，并提出了一种适用于任意粒子数的新型多体贝尔不等式。事实证明，这种不等式尤其适用于自旋压缩态；正如第 IV节将进一步讨论的那样，它促成了首次在由多达五十万粒子组成的原子系综中实验检测到贝尔关联 [134, 135]。此后，这些开创性成果沿多个方向得到拓展，包括构造贝尔关联深度见证 [136], 、研究统计漏洞和多测量设置见证 [137], 、提出纠缠深度的设备无关见证 [138], , 以及直接从实验数据推导置换不变贝尔不等式的算法 [139, 140] ，其计算复杂度与系统尺寸无关。这些研究发现了若干新的贝尔不等式族，适用于自旋压缩态以外的态类，例如任意自旋-j 系综中的多体单态 [140]。

无论是在多体纠缠见证还是贝尔不等式的研究中，如何将已知方法推广到可获得集体可观测量高阶矩的情形，仍是一个重要的未决问题。

C. 检测有助于量子计量学的多体关联

多体纠缠与量子计量学之间存在着一个非常重要的联系 [34]。考虑一个参数 θ，需要通过对量子系统进行测量来估计该参数；该系统的量子态是密度矩阵 $\rho(\theta)$，其中编码了未知参数 θ。估计 θ 所能达到的极限精密度由所谓的量子费舍尔信息（QFI）给出。粗略地说，量子费舍尔信息用一种适当的度量来量化$\rho(\theta)$与 $\rho(\theta + d\theta)$之间的距离（即布雷距离），从而估算 $\rho(\theta)$随 θ 变化的速率。对 θ 估计值的最小方差确实受限于 $\mathrm{var}(\theta) \geq 1/(\nu F_Q(\rho))$，其中 F_Q 为量子费舍尔信息，ν 为独立测量的次数。因此，在给定情境下寻找并制备具有最大量子费舍尔信息的量子态，是提高量子测量装置灵敏度的关键。

考虑一种类似干涉测量的情形，其中参数 θ 被编码在初始量子态 ρ中，形式为 $\rho(\theta) = e^{-i\theta\hat{O}}\rho e^{i\theta\hat{O}}$。这里，$\hat{O} = \sum_{i=1}^{N} \hat{O}_i$ 是某种可加可观测量，其中 O_i 仅作用于子系统 i。在典型应用中，θ 可能与磁场强度成正比，而 O 则与系统沿磁场方向的磁矩成正比。可以证明，在这种情况下，若量子态是完全可分的，则量子费舍尔信息的上限为 $F_Q(\hat{O}) \leq \sum_{i=1}^{N} (o_i^{\max} - o_i^{\min})^2$, , 其中 $o_i^{\max/\min}$是$\hat{O}_i$ [34]的最大/最小本征值。这一结果表明，对于完全可分态，量子费舍尔信息至多随系统尺寸 N线性增长；因此，估计 θ 时的极限方差增长速度不会快于 $1/N$，这对应于所谓的标准量子极限。然而，由于对于纯态有 $F_Q(\hat{O}) = 4\mathrm{var}(O)$，因此可以找到一些纠缠态，使得 $\left[\sum_{i=1}^{N} (o_i^{\max} - o_i^{\min})\right]^2 \sim N^2$；由此，参数估计的极限方差可以达到 $1/N^2$的标度，对应于所谓的海森堡极限。然而，要达到量子力学定律所允许的这一极限，必须制备真正多体纠缠态（典型例子是GHZ态）；但当粒子数超过几十个时，这极具挑战性，因为这类态极易受到退相干机制的影响。不过，在完全可分态与真正多体纠缠态这两个极端之间，可以证明存在 k体纠缠态，使得量子费舍尔信息按 $F_Q(O) \sim kN$标度增长，这已经超过了标准量子极限 [34, 88, 141, 142]。在

下文为具体起见，我们聚焦于相关情形： O_i 是自旋-1/2算符，因此（$o_i^{\max} - o_i^{\min}$）$^2 = 1$；对于所有完全可分态，量子费舍尔信息满足 F_Q（$\sum_i \hat{} O_i$）。 $\leq N$这里需要强调的是，存在 k体纠缠态，其 $F_Q \leq N$，因为并非所有纠缠态都对计量学有用。从这个意义上说，观察到 $F_Q > N$ 仅仅是纠缠的一项充分条件。人们还提出了量子费舍尔信息矩阵形式的量子费舍尔信息扩展，用于同时估计多个参数以及表征多模系统中的纠缠[143, 144]。

此后，人们投入大量精力，致力于找出适用于计量学的多体纠缠态族，以及制备和测量这些态的具体方案。最具代表性的例子包括自旋压缩态、双福克态和 GHZ态；在许多涉及原子系综或囚禁离子的实验中，人们已制备并操控了这些态。关于这方面工作的综述，请参阅文献 [34], 。而本文的目标则是阐明这些计量学概念如何催生出探测多体系统中量子关联的新方法。基本思路很简单：鉴于 $F_Q > N$ 意味着存在纠缠，任何能够将量子费舍尔信息的下界至少确定为大于 N 的测量，都可以通过文献 [88, 141, 142] 的结果探测多体纠缠（尤其是有助于量子计量学的纠缠）。值得强调的是，这种方法尤其适用于非高斯态，因为仅测量低阶矩不足以观测到纠缠。下文将讨论两种遵循这一思路的方法。

首先，一个相当直接的做法是利用量子费舍尔信息的定义，即它与计量场景中可达到的极限精密度之间的联系。若对某个可观测量 A进行测量，其平均值 $\langle A\rangle(\theta)$ $=\hat{}\mathrm{Tr}[\rho(\theta)A]$ 通常取决于待估计的参数 θ 。我们有 $i\partial_\theta\langle A\rangle = \langle[A, O]\rangle$，应将其与方差 $\mathrm{var}(\hat{} A)$ 相比较。因此，信噪比按定义为 $[\partial_\theta\langle \hat{} A\rangle]^2/\mathrm{var}(\hat{} A) \leq F_Q(\hat{} O)$，这正是量子费舍尔信息的定义所给出的结果。因此，通过测量 $\langle[A, O]\rangle$ （直接测量，或通过实施幺正变换），并测得某个可观测量 $A\hat{}$的方差 $\mathrm{var}(\hat{} A)$，便可得到由 O 生成的幺正变换所对应的量子费舍尔信息的有效下界。问题在于，针对给定的量子态 $\rho\hat{}$、变换的生成元 $O\hat{}$，以及实施相关幺正变换和测量所需可观测量 $A\hat{}$的实验条件，找出最合适的可观测量 A 。这个问题没有唯一解，但已有一些通用方法被提出 [143]。特别值得一提的例子包括自旋压缩态、双福克态，以及由自旋-1/2 粒子构成的 GHZ态 N （综述见 [34] ）。对于平均自旋沿着 x 且沿 .....方向方差最小的自旋压缩态 $\hat{}\hat{}\hat{}$，则取 $A = J_x$ 和 $O = J_z$。对于双福克态 $|TF\rangle$，它们是$\mathbf{J}^2|TF\rangle = (N/2)(N/2+1)|TF\rangle$ 和 $\hat{}$ $J_z|TF\rangle = 0|TF\rangle$的共同本征态，可取 $\hat{}A = \hat{}J_z^2$ 和 $\hat{}O = \hat{}$ J_x 或 $\hat{}$ J_y。对于定义为 $|GHZ\rangle = (|\uparrow\rangle^{\otimes N} + \perp\downarrow\rangle^{\otimes N})/\sqrt{2}$ 的 GHZ态，可取 $\hat{}A = \prod_{i=1}^N \hat{}\sigma_i^x$和 $\hat{}O = \hat{}J_z$。

第二种更为间接的方法是在热平衡态的背景下发展起来的，它通过线性响应函数 [145, 146]识别多体量子相干性和纠缠的特征。这类方法天然适用于可在理论和实验中评估线性响应性质的多体系统。在文献 [145], 中，量子费舍尔信息被表示为动力学磁化率的函数，这些磁化率刻画了系统对含时微扰的线性响应。另一方面，文献 [146] 将所谓的量子方差定义为方差与静态磁化率（乘以温度）之差；在经典系统中，两者相等。研究表明，量子方差是量子费舍尔信息的紧下界，同时只需探测系统对静态微扰的线性响应，而其评估难度远低于动力学响应函数。这些研究揭示了量子统计物理学与对计量学有用的量子纠缠之间的深刻联系，并提供了可扩展的工具，用于探测热平衡多体系统中的量子纠缠。

D. 深入了解量子相变

传统的相变朗道理论依赖于局域序参量的概念，借此定义物质相。在有序相中，序参量呈现长程关联；随着接近相变，这种关联在无序相中便开始逐渐形成。这一图景对经典和量子标准相变都适用。然而，过去三十年里的重大突破带来了新的图景，也为物质相的分类提出了新的范式。这首先涉及量子相变，随后是拓扑相变。在这些情况下，仅从经典层面描述关联并不足够。事实上，当代对量子相变，尤其是拓扑量子相变的理解，与对多体层面量子纠缠性质的认识密切相关。一方面，标准量子相可以用短程纠缠态很好地描述，而纠缠范围只有在临界性附近才会增大。拓扑量子相的情况则复杂得多，其表征与拓扑纠缠熵或纠缠谱 [147, 148], 有关；第一个引人注目的例子是一维中的对称性保护拓扑相。有关这一主题的最新综述

量子关联在拓扑相中所起作用的详细介绍，读者可参阅 X.-G. Wen 及其合作者撰写的著作 [149]。

量子相变（QPT）不同于热相变，它是由改变外部参数 [150] 时多体系统基态中的量子涨落驱动的。在二级量子相变的临界点，量子关联的相干长度发散，这可能使多体系统中出现丰富的纠缠模式。该现象最早的一个实例是在具有全连接相互作用的伊辛模型中提出的，其哈密顿量为 $\hat{H} = -(J/N)\hat{J}_z^2 - B\hat{J}_x$，其中 N 是量子比特的数量。理论预测，在临界点 $J = B$ 的基态中会出现可扩展的自旋压缩（即 $\langle\hat{J}_y^2\rangle \sim N^{2/3}$ 和 $\langle\hat{J}_x\rangle \sim N$，因此自旋压缩参数为 $\xi_R^2 = N\langle\hat{J}_y^2\rangle/\langle\hat{J}_x\rangle^2 \sim 1/N^{1/3}$，并在热力学极限下趋于零）[151]（参见文献 [152]，其中近期实验在单个镝原子内部观测到了量子临界自旋压缩这一现象；这些原子的 $J = 8$ 电子自旋在形式上等价于 $N = 16$ 自旋-1/2）。随后，对量子费舍尔信息 [145]，标度性质的分析表明，量子相变对量子计量学的作用具有普遍性：量子相变处的量子费舍尔信息会发散，且这种发散对热噪声具有鲁棒性 [153, 154]。这一非凡结果表明，在量子临界点附近产生的多体纠缠可作为量子计量学的资源，由此催生了量子临界计量这一概念 [155],；其理论实例包括对量子伊辛模型量子相变处鲁棒自旋压缩态的预测，这类模型超越了文献 [151] 最初研究的全连接相互作用模型。

鉴于量子纠缠在所有尺度上都会在量子相变附近得到稳定，自然也有必要研究该区域内多体贝尔不等式的违背情况及其在有限温度下的鲁棒性。沿这一方向的早期研究见文献 [120, 156], ；文献[157]则研究了具有全连接相互作用的自旋模型中贝尔关联在有限温度下的鲁棒性。我们注意到，量子相变与量子关联之间的联系已在多部专著手册中得到阐述，例如我们其中一人撰写的文献 [158]，以及 X.-G. Wen 与合作者撰写的更为专题化的著作 [149]。

E. 探测两个多体系统之间的量子关联

到目前为止，我们回顾了探测多体系统各个组成部分（通常是量子比特）之间多体关联的方法。这里，我们则想介绍一些探测两个多体系统 A 和 B之间量子关联的方法。它们可以是单个多体系统中两个互不重叠的划分；也可以是两个空间上相隔的系统。

二分情形中的一个重要概念是纠缠熵，它定义为子系统 S的（冯·诺依曼）熵ρ_A（$\hat{} = -$）ρ_ATr($\hat{}\rho_A$log $\hat{}$ ρ_A =)，其中$_B$Trρ_{AB}（$\hat{}$ A ）是 AB 子系统的约化态。当全局 A 系统处于纯态时， S子系统的任何非零熵都能证明存在纠缠。更一般地，条件ρ_A（$\hat{} > S$）ρ_{AB}（$\hat{}$ A ）意味着 B 和 [19]彼此纠缠′。在实验中，人们通常重构所谓的 Rényi 熵，其定义为 –log Tr($\hat{}\rho_A^2$)，该熵在随系统尺寸变化的标度关系以及探测例如拓扑序和量子相变的能力方面，都与冯·诺依曼熵具有相似性质。通过探测所研究多体系统两个副本之间的量子干涉，可以重构 Rényi 熵；近些年来，已有多项实验实现了这一方法′– [56]。其基本思想是，Tr($\hat{}$59])可写成$\hat{}\rho^{2\hat{}}\rho \otimes$ 上 SWAP算符的平均值，而这又可通过两个多体态副本$\hat{}\rho$之间的分束器变换来实现。随后通过数据后处理即可得到量Tr($\hat{}\rho$), 其中子系统ρ_A^2和 A 可以任意定义。近来，人们还开发出一种只需单个副本并采用随机测量方案的替代方法 B 。此项开创性工作此后拓展为一个丰富的工具箱，用于表征量子多体系统；近期已有一篇详尽综述发表 [61]。请注意，基于重构子系统熵来探测双体纠缠的方法，无论使用两个副本还是随机测量，都天然受限于规模不大的系统（最先进的随机测量方法至多适用于几十个量子比特），因为所需测量次数随量子比特数呈指数增长。此外，通常必须假设或通过实验验证系统处于（至少接近于）纯态，即 Tr [43]^[。另一方面，由于可以在数据分析阶段事后选定探测纠缠的ρ^2] ≈ 1二分划分，这种方法的优点是能够通过相同的实验装置和测量数据，探索系统任意可能的二分划分下的纠缠。

互补方法依赖于在各子系统上进行局域测量所得集体可观测量的低阶矩。在这一背景下，受冷原子实验进展的启发，研究者提出了基于局域集体自旋测量的双体纠缠见证，专门用于分离的压缩玻色–爱因斯坦凝聚体 [159], 和分离的迪克态 [160]。同样的见证也可用于界定纠缠度量，从而恰当地量化系统中关联的“强度” [97, 161]。此外，只需稍微修改这些双体见证，就能检测比纠缠更强的关联，即 EPR 导引 [159, 160]。进一步研究得出了更优的判据，用于检测这种

更强类型的关联，这些判据基于广义自旋压缩参数的测量 [162]或费 Fisher 信息的测量 [163], , 因此还揭示了 EPR 导引能够成为量子计量任务的一种资源。另一方面，寻找适用于这些情形的贝尔不等式极具挑战性。考虑到已知的不可能性定理 [164], 要检测一对多体系统之间的非定域性，似乎需要采用非线性测量方案 [165]。

最后，我们提到，最初为探究多体纠缠而设计的数据驱动方法，也可以用于探究双体纠缠并发现新的见证 [123]。此外，已有研究报告了初步进展：利用局域集体测量，对此类双体多体系统中的纠缠维度进行量化 [166]。

IV. 实验研究

本节将介绍多体系统中量子关联实验检测的研究成果。这些成果是在多种物理平台上取得的，并涉及不同的物理自由度。后者大体可分为离散变量（例如原子自旋或光的轨道角动量）和连续变量（例如机械振子或电磁模式的相空间正交分量）。

我们将首先介绍各类实验平台的优势与局限，重点关注可用于量子态制备和测量的工具。随后，我们将概述过去十年在多体纠缠检测方面取得的主要进展，并探讨凭借当前理论和实验能力可以研究的新方向。最后，我们将介绍进一步取得进展所面临的主要技术障碍，以及尚未解决的概念性问题。

A. 原子系综

冷原子和超冷原子系综是研究由 $\sim 10^2$ 至 $\sim 10^6$ 个粒子之间量子关联的理想平台，可通过集体测量进行探究。通常，碱金属原子经过激光冷却后，被囚禁在磁阱或光阱中。其他冷却机制还能进一步降低原子的动能，从而可能形成玻色–爱因斯坦凝聚（BEC）。通过控制粒子间碰撞，或控制行进光场与腔模引发的集体原子–光相互作用，可以在内部（即自旋）自由度上制备有趣的非经典态。这些相互作用会产生有效的非线性动力学，在粒子之间形成关联，或者实现基于测量的态制备（见图5）。忽略外部（即运动）自由度后，系综的量子态可以用集体自旋态描述，并可方便地描绘在广义布洛赫球上。通过拉比脉冲可以实现自旋旋转，从而集体作用于整个系综。随后，可以沿不同轴进行集体自旋测量来分析量子态，测量方式包括斯特恩–盖拉赫型测量，或利用失谐光束通过法拉第相互作用进行测量。

这些实验平台的优势在于能够以集体方式制备和操控多粒子量子态，因此适用于粒子数跨越多个数量级的体系。粒子数通常受相互作用效应、囚禁深度和非均匀性的限制。

另一方面，集体相互作用使得无法独立操控每个组成粒子；对于玻色-爱因斯坦凝聚体而言，这在原理上甚至是不可能的，因为所有粒子本质上都不可区分。处理大量粒子时，抑制粒子损失也会变得困难；这种现象会导致退相干和相位噪声，最终妨碍高度纠缠态（如 $N00N$ 态）的制备与操控。此外，要实现单粒子分辨率的测量极具挑战性，因此通常需要在额外噪声的影响下重构最终量子态。

原子系综中的自旋压缩最初是在 10^7 经压缩光共振泵浦的铯原子中观察到的 [168]。通过对光学探测光束进行偏振分析，检测到相较于互不相关的原子，自旋投影噪声有所降低，由此得以确认存在纠缠。

玻色-爱因斯坦凝聚体中的自旋压缩最初是在[169]通过公式（17）观察到的，其中自旋自由度由两个相邻囚禁位点的占据数定义。随后，这一概念扩展到由两个内部（超精细） ^{87}铷原子态[170, 171], 定义的集体自旋，并且还对纠缠粒子数进行了量化。在这两项实验中，多粒子纠缠的生成是通过 Feshbach共振调控弹性碰撞相互作用 [170], 或通过态依赖势 [171]实现的。

除了自旋压缩玻色-爱因斯坦凝聚体之外，人们还研究了如何通过所谓的纠缠深度来量化纠缠。纠缠深度定义为最大不可分子集中的粒子数；相关研究针对处于 Dicke 态的玻色-爱因斯坦凝聚体， [129] 采用广义自旋压缩判据式（18）。Dicke态可通过 $F = 1$流形中的自旋交换碰撞制备，该流形由 ^{87}Rb原子构成，这一过程类似于光学参量下转换。在这个三能级流形中操作，还可制备自旋向列压缩态， [172], 它们以SU(3)偶极-四极算符描述；此外，还制备了 $N = 100$ 原子的自旋单态 [173], 以及 $N = 10^4$ 原子的孪生

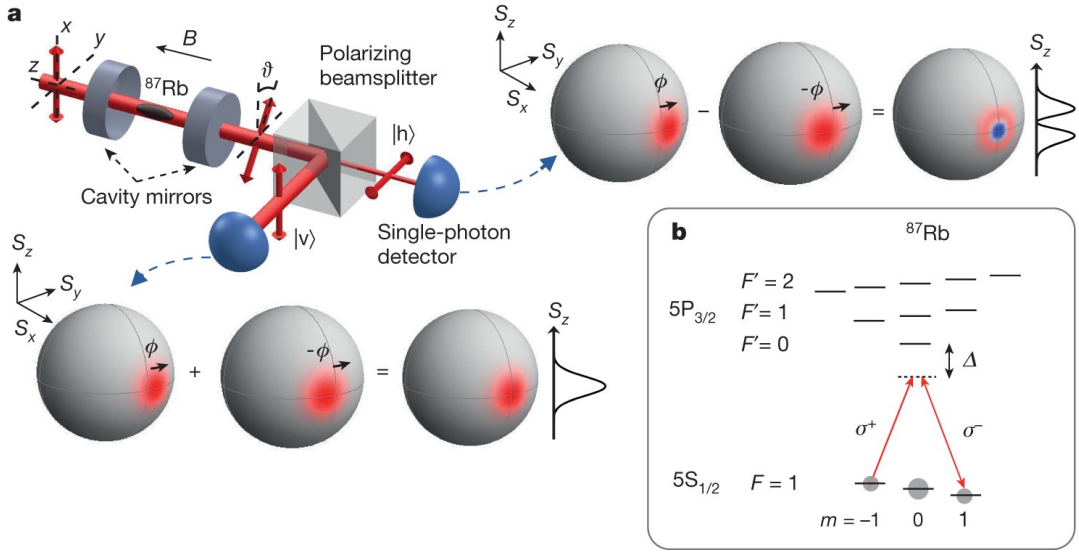

图 5. **通过单光子探测在原子系综中实现预告式纠缠生成**。 图 **a**：入射的垂直偏振光（左上方）因原子量子噪声而发生微弱的偏振旋转；探测到透射的水平偏振光子，则预示集体原子自旋处于纠缠态。由两面反射镜构成的光学谐振腔可增强偏振旋转和预告概率。布洛赫球展示了在记录相应的单光子探测事件后，集体自旋理想的维格纳分布函数。图 **b**： ^{87}铷能级结构。处于 $5S_{1/2}$、$F=1$ 超精细流形中的原子通过线偏振光与激发态 $5P_{3/2}$ 流形耦合。线偏振光分解为两个圆偏振分量（以红色箭头表示），并与原子基态布居相互作用。光的出射偏振态反映了 $|5S_{1/2}F=1、\ m=\pm1\rangle$ 磁子能级之间的量子涨落。转载自参考文献 [167]。

福克态 [174]。

通过自旋态与非共振光模之间的量子非破坏（QND）相互作用，人们也在原子气体中实现了自旋压缩态；该光模可以限制在光学腔内 [175–177] ，也可以采用行波场的形式 [178]。这些基于测量的态制备技术也可用于制备自旋压缩态以外的其他态，而且不仅适用于玻色-爱因斯坦凝聚体 [179], ，也适用于冷原子系综 [167] 和热气体 [180]。文献 [179] 将小型玻色-爱因斯坦凝聚体（$N=41$，23，12）与光学腔模强耦合，从而实现了 W 态的制备与测量。通过对原子态进行部分层析重构，研究了多体纠缠，并据此得出结论：至少有13个原子处于纠缠态。随后，文献 [167]展示了制备3000个处于负维格纳函数纠缠态的冷原子，并通过单光子探测进行预告，见图5。最近，文献 [180] 展示了在 10^{13}K下制备 $T=463$原子的单态型纠缠态。基于测量的态制备还可采用另一种互补方法，即利用量子芝诺动力学：足够频繁的测量能够将系统动力学限制在一个小子空间内。借助这种方法，人们在由35个原子组成的系综中制备了非经典态；通过对对称子空间进行完全层析，得出结论认为至少有 ~ 8 个粒子彼此纠缠 [181]。

除了多体纠缠检测和量化方法（基于自旋压缩系数）外，制备于非经典自旋态中的玻色-爱因斯坦凝聚体还被用于展示基于费 Fisher 信息的纠缠检测 [182], ， 以及用纠缠单调量来量化纠缠 [97]。

通过提出仅涉及一体和二体关联函数的贝尔不等式，人们发现可以检测到强于纠缠的多体量子关联，而且这种方法便于实际实验实现 [133]。这使得人们能够在自旋压缩玻色-爱因斯坦凝聚体 [134], 以及之后的冷原子系综 [135]中展示多体贝尔关联。随着这些理论工具的进一步发展，人们也得以利用这些实验数据量化贝尔关联深度 [136], ，并以设备无关的方式检测纠缠深度 [138]。

本节迄今提及的实验结果依赖于对原子系综进行集体测量，而其中的组成粒子并未被分辨出来。因此，人们开始关注能否在可单独寻址的子系统中“提取”此类关联。基于这一思路开展的实验，展示了玻色-爱因斯坦凝聚体[183–185], 中两个空间区域之间的纠缠，甚至还展示了 EPR 导引 [183, 185]。这种方法也用于实验研究不可分辨粒子纠缠这一概念及其量化，见文献 [97, 161], ；此外，对两个以上划分进行局域测量也被用于

以展示文献中所述的多体纠缠结构。 [185, 186]。

B. 晶格中的原子

上一节讨论了被囚禁在单个囚禁势中的中性原子系综。这种方式的优点是能够集体操控大量粒子，但缺点是无法独立寻址每个原子。能够实现后者的实验平台包括配备量子气体显微镜的人工晶格。在这种情况下，中性原子被囚禁在一系列势能极小值中，这些极小值由相干光束、光镊或静磁场产生。仔细调节阱深、相邻极小值之间的隧穿速率以及原子碰撞等参数，可以制备有趣的量子多体态。例如，这些工具可以制备每个格点单占据的晶格（莫特绝缘体区），这通常是许多实验的起点。随后，通过进一步调节系统参数，便可实现典型的哈密顿量（如玻色-哈伯德模型、费米-哈伯德模型等）。一些值得关注的实验涉及光学腔内的晶格，利用光学腔在非相邻格点之间介导长程相互作用；另一些实验则采用里德堡原子阵列（见图6），其控制精密度极高。感兴趣的多体量子态可以编码在晶格占据数基中，也可以编码在原子的内部（自旋）自由度中。借助量子气体显微镜分辨各个格点，并在适当的基中进行测量，即可重构这些量子态。

自旋依赖超晶格中的双组分玻色-爱因斯坦凝聚体已被用于制备贝尔态系综，其保真度为 $\gtrsim 80\%$ [188, 189], , 并显示出违反 CHSH不等式 $S = 2.21 \pm 0.08$ [188]。最近，这一平台被用于制备由 10 个纠缠原子组成的一维阵列，以及由 2×2 和 2×4个纠缠原子组成的二维方格簇 [190]。

玻色-哈伯德哈密顿量的模拟促成了多体态的制备，这些态在占据数基下的纠缠通过多体干涉得到确认，并通过 Rényi 熵 [56, 57] 进行了量化。熵和密度-密度关联也被用于研究多体非平衡动力学过程中纠缠的演化与标度规律 [58, 191]。另一种方法是，通过飞行时间测量原子密度分布，并据此对局域操作与经典通信单调量进行界定，从而量化晶格位点之间的纠缠 [192]。在一维玻色-哈伯德链中， [193] 中观测到了内部（自旋）自由度上的纠缠。

里德堡原子阵列已被用于制备最多六个量子比特的 GHZ 态（[187], 见图6），以及 20 个量子比特 [194]。

最近，同一平台还实现了纠缠图态的制备，例如簇态和七量子比特 Steane码态，并测量了淬火后纠缠熵和 Rényi纠缠熵随时间的演化 [59]。

C. 囚禁离子

离子囚禁最初是为精密光谱学和原子钟而构想的，后来在量子计算和模拟中变得至关重要。利用调制电场（保罗阱）或静态电场和磁场的组合（彭宁阱），可以方便地囚禁带电粒子。在第一种情况下，通常会囚禁约 $10-100$ 个离子，使其形成串状构型；这种构型由囚禁势与库仑排斥共同作用而形成。在第二种情况下，通常会囚禁数百个原子，使其形成膜状构型，并以回旋频率绕静态囚禁磁场旋转，见图 7。在这些平台中，深囚禁势结合激光冷却技术，可使离子长时间储存（长达数月）。此外，激光或电磁脉冲能够以极高的保真度操控外部和内部自由度。对于保罗阱，这种操控可以针对每个单独的离子；而在彭宁阱中，离子晶体的旋转使单粒子可寻址性显著变得更加困难。因此，在后一种平台中，通常会像原子系综那样实施集体操控。通过进行荧光测量，可以拍摄离子内部自由度的快照，从而进行量子态层析。

与原子系综相比，保罗阱中的离子阵列不会遭受粒子损失，并且支持单粒子可寻址性和检测，但目前最多只能运行几十个离子。其中一个难点在于，多量子比特门的实现，以及由此产生的粒子间工程化相互作用，都要利用运动自由度。如果离子晶体由大量粒子组成，其运动本征模的频率彼此接近，因此难以逐一寻址，从而降低门保真度。

在线性保罗阱中，文献 [196] 和 [197] 分别制备了由 6 个和 14 个离子组成的 GHZ态，并通过纠缠见证对其进行探测。文献 [198], 制备了最多含 8 个离子的 W态，并通过完整量子态层析和广义自旋压缩不等式进行探测 [199]。文献 [200], 利用一个完全可控的 20 量子比特寄存器，研究伊辛型哈密顿量的非平衡动力学，并发现最多由 5 个粒子组成的群体中出现了真正的多体纠缠。在同一实验装置中，随机测量的应用使得

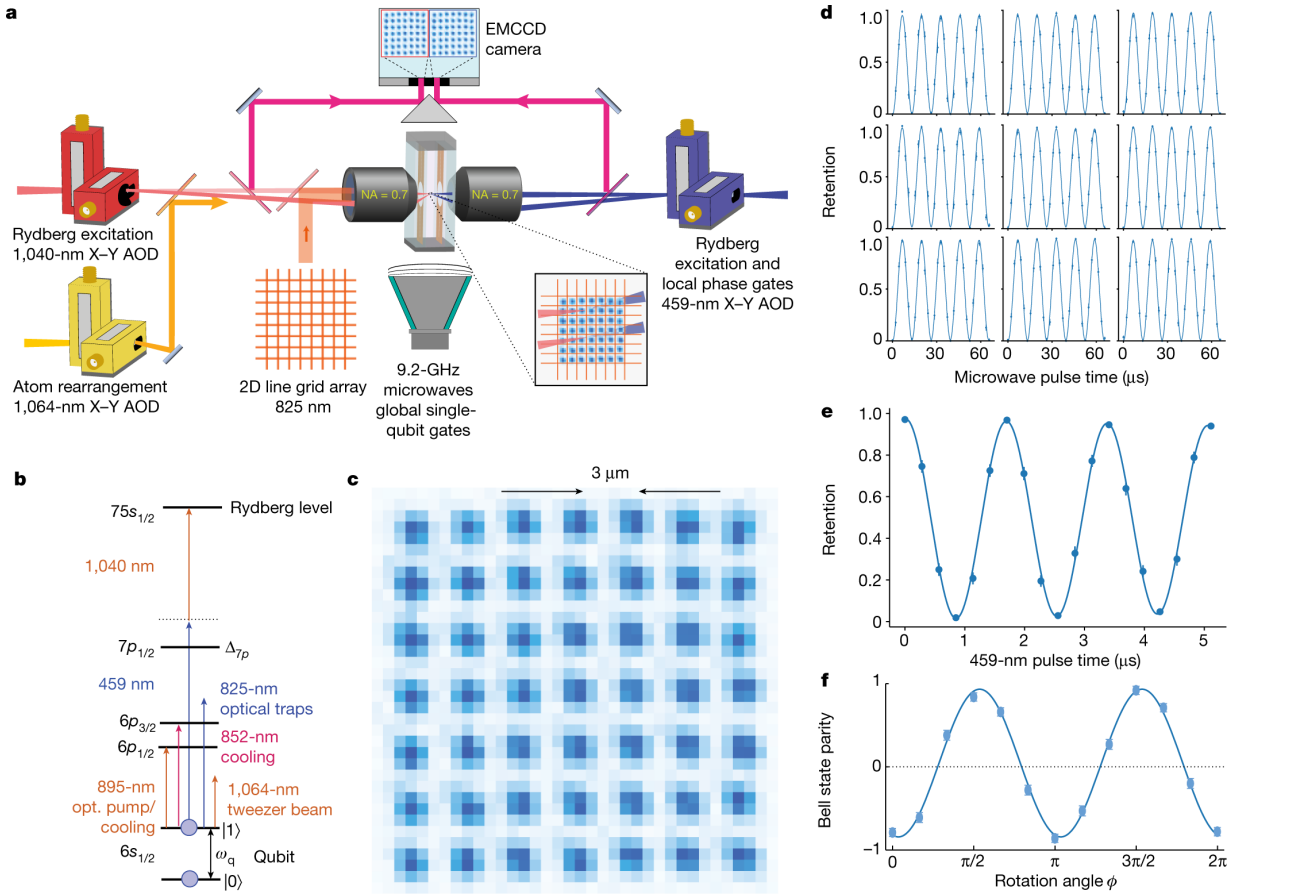

图 6. **用于量子计算的里德堡原子晶格。** 面板 **a**：用于囚禁和寻址原子量子比特的实验布局。原子被囚禁在蓝失谐线栅格阵列中，并通过透镜成像到原子囚禁区域。通过在腔室相对的两侧使用透镜收集原子荧光，并将光成像到电子倍增电荷耦合器件相机的两个独立区域，确定原子的占据情况。使用 1064 nm 光镊光束将原子重新排列到适合执行量子线路操作的位置。量子线路分解为由以下操作组成的通用门集：绕 xy平面内某一轴进行的全局旋转（由微波驱动）、由 459 nm 光束驱动的局域旋转，以及利用 459 nm 和 1040 nm 光束同时激发原子对中的里德堡态而实现的 CZ纠缠门。面板 **b**：铯原子的能级图，以及用于冷却、囚禁和量子比特控制的波长。面板 **c**：49 位点阵列的原子荧光平均图像，位点间距为 3 μm。面板 **d**：在 76.5 kHz 下，对由九个量子比特组成的区块进行全局微波拉比旋转。面板 **e**：微波拉姆齐实验，其中微波 $\pi/2$ 脉冲与聚焦的 459 nm 光束配合，在单个位点上实现旋转。面板 **f**：使用 CZ 门制备的双量子比特贝尔态的奇偶振荡。对于经过优化的一对量子比特，测得的未经校正的贝尔态保真度为 92.7(1.3)%（针对态制备和测量（SPAM）误差校正后约为 95.5%）；用于量子线路的所有相连量子比特对的平均值为 90%（SPAM 校正后约为 92.5%）。转载自参考文献 [187]。

能够估算包含最多 10 个粒子的不同划分对应的二阶 Rényi 熵，从而量化纠缠并表征其结构 [61]。文献 [201] 报道了一个由 6 个纠缠离子构成的 GHZ态中的设备无关真正多体纠缠，以及多体非局域性。文献 [202]，在 3 至 7 个离子之间制备了测量式量子计算所需的图态，并利用这些图态违反了适当的多体贝尔不等式。同一研究还表明，文献 [197] 中的数据导致 Mermin-Klyshko贝尔不等式的违反程度随系统尺寸呈指数增长。

二维阵列的构建 ～ 200 使得人们能够通过设计长程均匀伊辛相互作用，制备自旋压缩态和过度压缩态 [195, 203]，，并利用自旋依赖的光学偶极力制备自旋-运动纠缠态 [204]。在这些无法对粒子进行单体寻址的多体系统中，人们借鉴了原子系综中采用的相同工具来推断纠缠，即温兰德自旋压缩系数和费 Fisher 信息。未来的技术发展有望实现对阵列中离子的单体寻址，从而为研究此类装置中的量子关联开辟新的可能性。

在彭宁阱中，见图7，集体操纵——

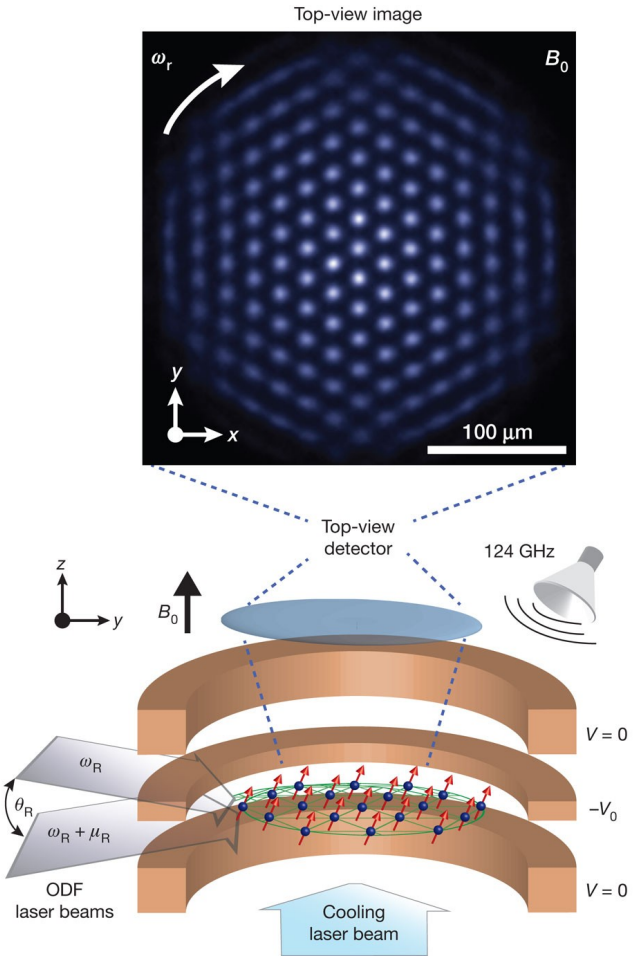

图 7. **二维离子晶体的彭宁阱**。 每个量子比特都是一个 $^9Be^+$ 离子的价电子自旋。下图：彭宁阱利用静态电场和磁场的组合束缚离子。阱参数经过配置，使激光冷却离子形成三角形二维晶体。通过对离子晶体的横向（沿 z）振动模式进行自旋依赖激发，可产生一般的自旋-自旋相互作用。该耦合通过一对成角度的失谐激光束产生的光偶极力实现（左侧）。频率为 124 GHz 的微波可实现全局自旋旋转。上图：一张典型的俯视共振荧光图像，显示在离子的静止参考系中拍摄的离子晶体中心区域；在实验室参考系中，离子以 $\omega_r = 2\pi\, 43.8$kHz 的频率旋转。荧光可指示量子比特自旋态（向上=明亮；向下=暗）；此处离子处于向上态。晶格常数为 $\approx 20\,\mu$m。转载自参考文献 [195]。

D. 光学光子

由于与环境的相互作用较弱，光子是传输信息的理想系统。信息可编码在多种不同的自由度中，例如频率、偏振、路径和轨道角动量（OAM）。这也使得制备所谓的超纠缠态成为可能，其中，量子关联同时出现在不同的自由度之间。

制备光子纠缠态的实验技术通常依赖非线性晶体，以实现自发参量下转换（SPDC）和光学参量振荡器（OPO）。SPDC产生的偏振纠缠光子对是生成多体纠缠态最常用的构建模块。例如，将光子对中的一个光子送入由多个分束器组成的级联网络，使其分布到 N 个模式中，即形成一个 W 态，而第二个光子则用于预示量子态制备成功。另一方面，高阶SPDC过程可用于直接生成三光子纠缠态[206]。SPDC光源与全息空间光调制器配合使用，可以制备轨道角动量（OAM）自由度上的纠缠态。全息空间光调制器是一种液晶器件，能够在光子上施加任意二维相位图案。OPO可用于制备连续变量单模压缩态；若使这些态在分束器网络中发生干涉，便可在 xp正交分量上产生多模纠缠态。或者，使用频率梳泵浦OPO，可在不同频率分量之间产生连续变量关联。

对于态表征，可进行的测量包括对相空间正交分量进行零差探测、光子数检测，以及投影到偏振/轨道角动量基态。文献 [207]，对截至2011年的多光子纠缠实验进行了全面综述；下文将聚焦于过去十年的开创性成果。

文献 [208]，利用偏振自由度制备了由6个光子构成的图态；文献 [209–213] 则制备了由8、10和12个光子构成的GHZ态。然而，使用自发参量下转换制备多体纠缠态难以扩展，因为其受限于概率性。

研究人员利用里德堡阻塞下的介观原子系综产生一串关联单光子，展示了六个光子之间时间-bin自由度的纠缠 [214]。由单个铷-87原子置于高精细度光学腔中构成的腔电动力学装置，被用于制备最多包含14个光子的GHZ态，以及最多包含12个光子的簇态 [215]。

集成光子电路，见图。8，是光学量子技术的一个前景广阔的平台。利用这些电路，文献 [216, 217], 4制备了光子图态；文献 [205], 4制备了光子时间-bin纠缠态；文献 [218], 制备了单光子 W 制备了多达16模的态。 [219]。

文献 [220] 报道了利用光子的偏振和动量自由度制备的超纠缠6、8和10量子比特 $N00N$ 态。文献 [221] 则利用六个光子的路径、偏振和轨道角动量自由度，制备了一个18量子比特超纠缠GHZ态。

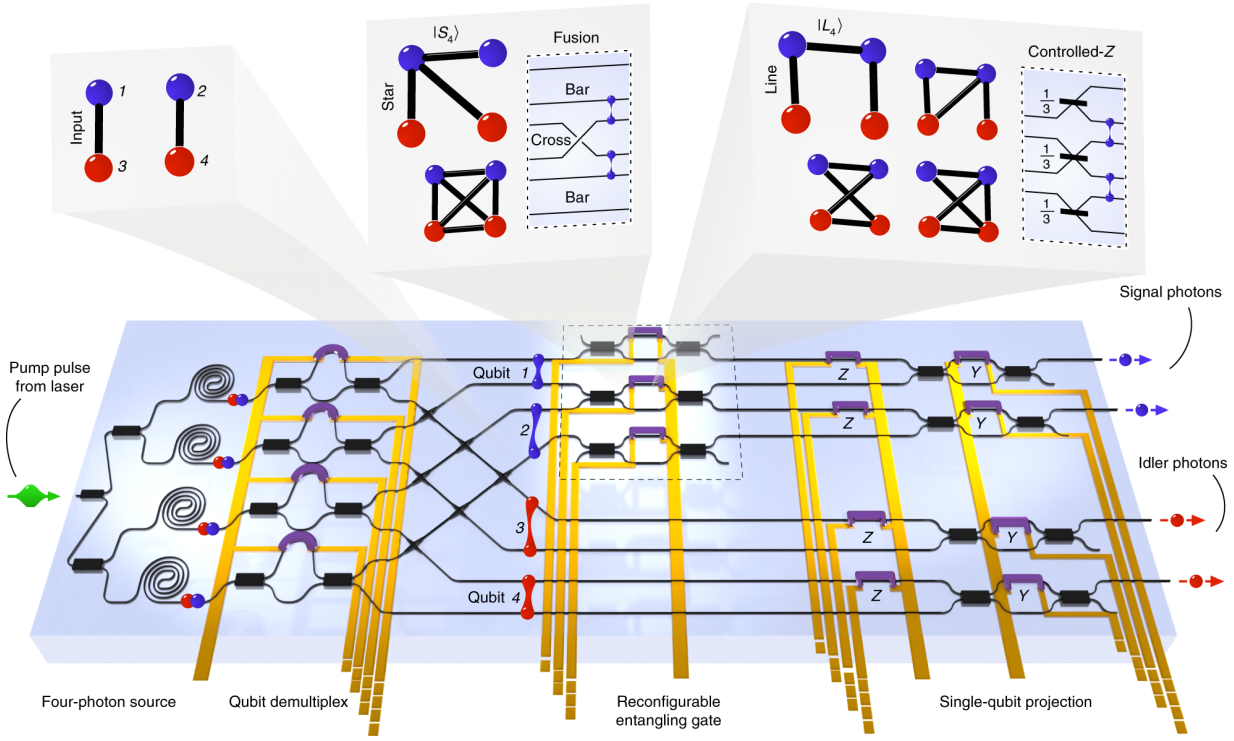

图 8。**集成光子电路**。绝缘体上硅芯片器件示意图，其组成包括：四个电信波段光子对源，产生处于叠加态的四个光子；一个量子比特解复用器，将该叠加态配置为两个贝尔对的乘积态；一个可重构后选择纠缠门（R-PEG）；以及四个单量子比特投影与分析阶段，由四个实现量子比特 Y 旋转的马赫–曾德尔干涉仪构成，其前接四个 Z 旋转。上方标出了对应的图态，从两个输入贝尔对开始，最终得到用于融合或受控Z R-PEG 配置的“星形”或“线形”图态。转载自参考文献 [205]。

文献 [222] 最初展示了光子间的高维多体纠缠：其中两个光子处于三维空间，而第三个光子处于二维空间。

连续变量（即 xp-正交分量）多体纠缠态已在涉及一万多个时域模式的簇态[223]，、多达 60 个频域模式的簇态 [224–227]，以及基于光子减法的三模式非高斯态 [228]中得到研究。

线性光学网络也被用于研究多体EPR导引情景。具体而言，8 个模式的连续变量纠缠使得研究人员能够在一个三体情景中演示最多 7 方导引和单配关系 [113]。

E. 超导量子比特

基于约瑟夫森结的量子比特是量子计算和模拟最成功的平台之一。通过超导谐振器连接这类器件，可以利用腔量子电动力学的范式来设计器件之间的相互作用，进而实现逻辑操作。目前，数十个超导量子比特可以独立控制和测量，且保真度相对较高，从而能够实现包含数百个量子门的量子电路。

通过基于保真度的纠缠见证 [229]，，研究人员在多达 12 个量子比特组成的 GHZ态中观测到了真正多体纠缠；通过宇称振荡 [230]，则在 20 个量子比特中观测到了真正多体纠缠。

IBM 量子计算机利用负性测量，在 16 量子比特 [231]，和 65 量子比特 [232]，的图态中检测到了纠缠；还通过宇称测量 [233]，在最多包含 27 个量子比特的 GHZ态中检测到了真正多体纠缠。

研究人员在 Google 量子计算机上测量了由 31 个量子比特构成的晶格上环面码基态的纠缠熵 [234]。

F. 凝聚态物质系统

多体纠缠预计会自然出现在许多固态系统中，例如磁性材料中的电子自旋之间。研究这类系统中的量子关联极具意义，尤其是为了理解它们与更宏观的（

例如传统线性响应）性质之间的关系。然而，由于操控块体固态材料时可用的控制手段有限，这项任务极具挑战性。底层哈密顿量难以设计，因为它取决于晶格结构以及所涉及的原子；而实验中易于控制的参数包括温度、应变、杂质浓度和外部电磁场。可实施的测量主要依赖输运，以及利用光或粒子（例如中子）散射来探测磁性材料。与原子系综的情况类似，实际上无法实现单粒子可寻址性，因此，固态材料中量子关联的观测必须依赖见证。

近期实验从动态磁化率中重构量子费舍尔信息 [145]，，这些动态磁化率是从海森堡链的中子散射数据中提取的 [235, 236]。特别是，近期在三角晶格反铁磁体的量子临界区检测到了多体纠缠 [237]。

G. 其他系统

除了迄今讨论的平台外，还有若干其他系统展现出应用于量子技术的潜力。例如，金刚石中的缺陷、量子点、核磁共振（NMR）处理器、硅自旋量子比特和固态机械振子，仅举数例。将这些系统用作多体量子系统的构件仍处于初步阶段，因为人们仍在投入大量精力开发用于操控它们的工具箱，或设计它们之间的耦合。例如，目前已在金刚石中的三个自旋[238, 239], 和硅中的三个自旋 [240]上实现了纠缠。

V. 结论

A. 未解决问题

最后，我们通过列举一些与未来研究相关的未解决问题和研究方向来总结这篇综述，不过这份清单远非面面俱到。

纠缠量化。– 除了纠缠检测之外，如何以可扩展的方式量化多体系统中的纠缠，仍是一个尚未解决的问题，尽管已有初步研究发表 [97]。虽然参考文献 [79], 综述了纠缠量化的相关概念，但如何将其付诸实践，以阐明例如 量子淬火后的纠缠动力学等问题，仍有待研究。

探测拓扑相中的纠缠。– 虽然拓扑量子多体相由非局域序参量定义，这些序参量会在纠缠熵中表现出特征性信号，但通过量身定制的纠缠见证，甚至贝尔不等式，寻找相互作用拓扑相的特征信号，是一个非常引人入胜的思路。

连续变量系统。– 本文介绍的数据驱动方法本质上是为离散变量系统量身定制的，例如量子比特，或局域希尔伯特空间维数适中的量子位。若能系统地将这些方法扩展到连续变量系统，例如描述玻色模式的正交分量，将会非常有意义。

多体非高斯态的贝尔不等式。–涉及置换不变的一体和二体关联函数的不等式，已被证明能有效检测自旋压缩原子系综中的贝尔关联。然而，这些方法本质上仅适用于高斯态，因为表征更一般的态需要高阶关联函数。在实验上，人们非常希望找到适用于非高斯自旋态的贝尔关联见证，并能通过集体测量对其进行探测。

二部粗粒化贝尔不等式。– 尽管针对多体系统的多体贝尔不等式已被推导出来，且其见证已在实验中被违反，但如何找到能够以可扩展方式被多体系统违反的二部贝尔不等式，仍是一项重大的开放问题。举例来说，可以考虑检测自旋压缩原子系综两个划分之间的非定域性，并对其进行集体自旋测量 [159, 165]。

贝尔非定域性在计量学中的作用。– 尽管已知贝尔非定域态可能具有很大的量子费舍尔信息 [241], , 但尚不清楚它们是否能实现仅凭纠缠无法完成的计量任务。关于EPR导引，参考文献 [163], 已对此类似问题给出了肯定回答；自然也可以尝试将这类结果推广到非定域性。

多体非定域性的结构。– 已有研究推导出量化 k-可生成贝尔关联的见证 $k < 7$ ，并进行了实验检验。对于更大的 k，参考文献 [136] 采用的方法不具可扩展性，而其他替代方案也尚不明确。一项突破将是找到一种涉及集体自旋测量的贝尔关联见证，能够量化任意k-可生成性。

多体自检验。– 自检验这一概念使人们能够仅凭设备无关情形下的观测统计量，对系统维数、制备态和所实施的测量得出结论。尽管这一概念在二分情形中已得到充分分析

, [74], 但目前尚不清楚能否为多体情形下的自检验提出一种可扩展的方法。朝这一方向开展的初步研究主要聚焦于多量子比特图态[121]和多体自旋单态 [122]。

网络非定域性。– 近期，研究人员在网络中探讨了一种新型贝尔非定域性（综述见 [75] ），它代表了一种比本综述所考察的标准贝尔检验更一般的范式。从全新的视角运用这些概念来刻画多体纠缠，是一个完全开放的研究领域，在量子通信领域可能极具实用价值。

多体*EPR*导引。– 尽管关于多体EPR导引的开创性研究主要聚焦于通常由三个子系统构成的情形，但尚未有针对多体情形的系统研究。值得探索的方向包括：推导基于子系统间协方差的不等式，以探测由一组光子模式构成的系统中的真正多体导引 [110]。此外，我们仍未能全面理解单配关系。

B. 综述总结

量子纠缠是复合系统中量子力学最引人入胜的表现之一。它有多种表现形式：从违反朴素的定域性观念（通过违反贝尔不等式），到看似能够远程操控与另一个量子系统纠缠的量子态（通过EPR导引现象）。这些现象都超越了经典直觉，并挑战着我们对自然的理解。尽管如此，或许正因如此，量子关联成为各种任务中不可或缺的资源，例如量子计量学、量子通信和量子计算；若仅凭经典手段，这些任务将无法实现。这也促使各个研究领域对寻找量子技术的实用应用产生了巨大兴趣。

近年来，人们借助各种实验平台，在操控纠缠量子多体态方面取得了令人瞩目的进展。这推动了大量理论和实验研究，旨在进一步理解和表征多方情形下可能出现的各种关联。

一方面，我们回顾了近期的理论进展，这些进展使人们能够根据实验数据（例如来自现有或近期量子器件的数据）表征纠缠、EPR导引和贝尔非定域性。我们着重强调了多体系统复杂度呈指数增长所带来的内在挑战，以及如何规避这些挑战。

另一方面，我们回顾了具有开创性的实验研究，这些研究展示了在实验室中对量子多体态进行制备、控制和测量。我们特别着重介绍了制备高度纠缠态的方法，以及用于探测这些态的工具。最后，我们列出了若干相关的未解决问题和研究方向。

尽管近年来该领域取得了令人瞩目的进展，但仍有大量概念性问题和实验挑战有待解决。正如本文综述所展示的那样，理解和表征多方量子关联的探索才刚刚起步。

C. 致谢

三位作者谨向整个同仁群体致以谢意，他们孜孜不倦地拓展着我们对多体系统的认识，涵盖从基础层面到技术应用的各个方面。我们曾从与众多同仁的无数次讨论中获益，至今仍受益匪浅；若要在此逐一致谢，实在不可能。我们深信，他们定会认出自己所作的贡献，并感受到我们最诚挚的谢意。

I.F. 感谢欧盟地平线2020研究与创新计划通过玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议 No 101031549（QuoMoDys）提供的支持。

M.F. 获得了 Branco Weiss Fellowship – Society in Science 的资助，该项目由苏黎世联邦理工学院管理。

M.L.感谢以下支持：ERC AdG NO-QIA；西班牙科学与创新部国家研究机构（PGC2018-097027-B-I00/10.13039/501100011033、CEX2019-000910-S/10.13039/501100011033、国家计划 FIDEUA PID2019-106901GB-I00、FPI、QUANTERA MAQS PCI2019-111828-2、QUANTERA DYNAMITE PCI2022-132919、研发项目“合作挑战”QUSPIN RTC2019-007196-7）；欧盟下一代欧盟（PRTR-C17.I1）资助的 MICIIN，以及加泰罗尼亚政府；Fundació Cellex；Fundació Mir-Puig；加泰罗尼亚政府（欧洲社会基金、欧洲区域发展基金和 CERCA计划、AGAUR 2021 SGR 01452 号资助、QuantumCAT U16-011424，由加泰罗尼亚欧洲区域发展基金业务计划 2014—2020 共同资助）；巴塞罗那超级计算中心 MareNostrum（FI-2022-1-0042）；欧盟地平线2020未来新兴技术开放计划 OPTOlogic（资助号 899794）；欧盟地平线欧洲计划（资助协议 101080086——NeQST）、波兰国家科学中心（Symfonia 资助号 2016/20/W/ST4/00314）；光子科学研究所内部“QuantumGaudi”项目；欧盟在玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议 No 101029393（STREDCH）和 No 847648（“La Caixa”青年领军奖学金）项下的地平线2020研究与创新计划，

其奖学金编号为 ID100010434：LCF/BQ/PI19/11690013、LCF/BQ/PI20/11760031、LCF/BQ/PR20/11770012、LCF/BQ/PR21/11840013）。不过，本研究中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧ropean Union、欧洲气候、基础设施与环境执行局（CINEA）以及任何其他资助机构均不对此负责。欧盟和任何资助机构均不对其承担责任。

[1]Claude E. Shannon 和 Warren Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*（伊利诺伊大学出版社，伊利诺伊州厄巴纳，1949年）。[2] Thomas M. Cover 和 Joy A. Thomas, *Elements of Information Theory 2nd Edition (Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing)*（Wiley-Interscience，2006年）。[3] David J. C. MacKay, *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*（剑桥大学出版社版权所有，2017年）。[4] 维基百科，“查尔斯·巴贝奇”（2023年）。[5] James Gleick, *The information : a history, a theory, a flood* 2011（Fourth Estate，伦敦，）。[6] R. Landauer，“计算过程中的不可逆性与热量产生”，IBM《研究与开发杂志》5，183–191（1961年）。[7] Charles H. Bennett，“关于Landauer原理、可逆计算与麦克斯韦妖的札记”，《现代物理学史与哲学研究》34，501–510（2003年）。[8]David Deutsch，“量子理论、丘奇-图灵原理与通用量子计算机”，《伦敦皇家学会会刊：A辑，数学与物理科学》400，97–117（1985年）。[9] Charles H. Bennett、Gilles Brassard、Claude Cr´epeau、Richard Jozsa、Asher Peres 和 William K. Wootters，“通过经典信道与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森信道传送未知量子态”，《物理评论快报》70，1895–1899（1993年）。[10] Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information (10th Anniversary edition).* 2016（剑桥大学出版社，），第 I–XXXI、1–676 页。[11] Mark M. Wilde, *Quantum Information Theory*（剑桥大学出版社，2017年）。[12]Vadim Makarov、Andrey Anisimov 和 Johannes Skaar，“探测器效率失配对量子密码系统安全性的影响”，Phys. Rev. A 74，022313（2006年）。[13] Lars Lydersen、Carlos Wiechers、Christoffer Wittmann、Dominique Elser、Johannes Skaar 和 Vadim Makarov，“通过定制强光照射攻击商用量子密码系统”，《自然·光子学》4，686–689（2010年）。[14]Antonio Ac´ın、Nicolas Brunner、Nicolas Gisin、Serge Massar、Stefano Pironio 和 Valerio Scarani，“抵御集体攻击的量子密码设备无关安全性”，《物理评论快报》98，230501（2007年）。[15] Stefano Pironio、Antonio Ac´ın、Nicolas Brunner、Nicolas Gisin、Serge Massar 和 Valerio Scarani，“抵御集体攻击的设备无关量子密钥分发”，《新物理学杂志》11，045021（2009年）。

[16] Antonio Ac´ın、Immanuel Bloch、Harry Buhrman、Tom- maso Calarco、Christopher Eichler、Jens Eisert、Daniel Esteve、Nicolas Gisin、Steffen J Glaser、Fedor Jelezko、Stefan Kuhr、Maciej Lewenstein、Max F Riedel、Piet O Schmidt、Rob Thew、Andreas Wallraff、Ian Walms- ley 和 Frank K Wilhelm，《量子技术路线图：欧洲共同体的观点》，《新物理学杂志》20，080201（2018年）。[17] Ehud Altman、Kenneth R. Brown、Giuseppe Car- leo、Lincoln D. Carr、Eugene Demler、Cheng Chin、Brian DeMarco、Sophia E. Economou、Mark A. Eriks- son、Kai-Mei C. Fu、Markus Greiner、Kaden R.A. Hazzard、Randall G. Hulet、Alicia J. Koll´ar、Ben- jamin L. Lev、Mikhail D. Lukin、Ruichao Ma、Xiao Mi、Shashank Misra、Christopher Monroe、Kater Murch、Zaira Nazario、Kang-Kuen Ni、Andrew C. Potter、Pe- dram Roushan、Mark Saffman、Monika Schleier-Smith、Irfan Siddiqi、Raymond Simmonds、Meenakshi Singh、I.B. Spielman、Kristan Temme、David S. Weiss、Jelena Vu˘ckovi´c、Vladan Vuleti´c、Jun Ye 和 Martin Zwier- lein，《量子模拟器：架构与机遇》，《PRX Quantum》2，017003（2021年）。[18] Alexander Streltsov、Gerardo Adesso 和 Martin B. Plenio，《专题讨论：作为资源的量子相干性》，《现代物理评论》89，041003（2017年）。[19]Ryszard Horodecki、Pawe-l Horodecki、Micha-l Horodecki 和 Karol Horodecki，《量子纠缠》，《现代物理评论》81，865–942（2009年）。[20]Nicolas Brunner、Daniel Cavalcanti、Stefano Pironio、Valerio Scarani 和 Stephanie Wehner，《贝尔非定域性》，《现代物理评论》86，419–478（2014年）。[21] Valerio Scarani, *Bell Nonlocality*（牛津大学出版社，2019年）。[22] Artur K. Ekert，《基于贝尔定理的量子密码学》，《物理评论快报》67，661–663（1991年）。[23] C. H. Bennett 和 G. Brassard，《量子密码学：公钥分发与抛硬币》，IEEE计算机、系统与信号处理国际会议论文集175，8（1984年）。[24]Marcos Curty、Maciej Lewenstein 和 Norbert L¨utkenhaus，《纠缠是安全量子密钥分发的先决条件》，《物理评论快报》92，217903（2004年）。[25]Marcos Curty、Otfried G¨uhne、Maciej Lewenstein 和 Norbert L¨utkenhaus，《检测量子密钥分发协议中的两方量子关联》，Phys. Rev. A 71，022306（2005年）。[26] Antonio Ac´ın、J. Ignacio Cirac 和 Maciej Lewenstein，《量子网络中的纠缠渗流》，《自然·物理》3，256–259（2007年）。[27] S. Perseguers、D. Cavalcanti、G. J. Lapeyre、M. Lewen- stein 和 A. Ac´ın，《多体纠缠渗流》，Phys. Rev. A 81，032327（2010年）。

[28] S. Perseguers、M. Lewenstein、A. Ac´ın 和 J. I. Cirac，《量子随机网络》，《自然·物理》6，539–543（2010年）。[29] S Perseguers、G J Lapeyre、D Cavalcanti、M Lewenstein 和 A Ac´ın，《大规模量子网络中的纠缠分布》，《物理学进展报告》76，096001（2013年）。[30] H. J. Kimble，《量子互联网》，《自然》453，1023–1030（2008年）。[31] Antonio Ac´ın 和 Lluis Masanes，《量子物理中的认证随机性》，《自然》540，213–219（2016年）。[32]David Cirauqui、Miguel ´Angel Garc´ıa-March、Guillem Guig´o Corominas、Tobias Graß、Przemys-l aw R. Grzybowski、Gorka Mu˜noz-Gil、J. R. M. Saave- dra 和 Maciej Lewenstein，《量子随机数生成器：基准测试与挑战》，arXiv:2206.05328（2022年）。[33]Vittorio Giovannetti、Seth Lloyd 和 Lorenzo Mac- cone，《量子计量学的进展》，Nature Pho- tonics 5，222–229（2011年）。[34] Luca Pezz`e、Augusto Smerzi、Markus K. Oberthaler、Roman Schmied 和 Philipp Treutlein，《利用原子系综的非经典态进行量子计量》，《现代物理学评论》90，035005（2018年）。[35] Emanuele Polino、Mauro Valeri、Nicol`o Spagnolo 和 Fabio Sciarrino，《光子量子计量学》，AVS Quantum Sci. 2，024703（2020年）。[36] Ernst O. G¨obel 和 Uwe Siegner，*Quantum Metrology:Foundation of Units and Measurements*（Wiley VHC，2015年）。[37] Marco Barbieri，《光学量子计量学》，《PRX Quantum》3，010202（2022年）。[38] M. Lewenstein、M. F. Ciappina、E. Pisanty、J. Rivera- Dean、P. Stammer、Th. Lamprou 和 P. Tzallas，《强激光—物质相互作用中光学薛定谔猫态的生成》，《自然·物理》17，1104–1108（2021年）。[39] J. I. Cirac、M. Lewenstein、K. Mølmer 和 P. Zoller，《玻色–爱因斯坦凝聚体的量子叠加态》，Phys. Rev. A 57，1208–1218（1998年）。[40] Michalis Skotiniotis、Wolfgang D¨ur 和 Pavel Sekatski，《宏观叠加态需要庞大的测量装置》，《Quantum》1，34（2017年）。[41] Hsin-Yuan Huang、Richard Kueng 和 John Preskill，《如何通过极少的测量预测量子系统的多种性质》，《自然·物理》，1050–1057（2020年）。[42]Guillermo Garc´ıa-P´erez、Matteo A. C. Rossi、Boris Sokolov、Elsi-Mari Borrelli 和 Sabrina Maniscalco，《多体量子系统的成对层析网络》，《物理评论研究》2，023393（2020年）。[43] Andreas Elben、Steven T. Flammia、Hsin-Yuan Huang、Richard Kueng、John Preskill、Beno ̂ıt Vermersch 和 Peter Zoller，《随机化测量工具箱》，《自然综述：物理学》5，9–24（2022年）。[44] John Preskill，《NISQ时代及之后的量子计算》，《Quantum》2，79（2018年）。[45] I. M. Georgescu、S. Ashhab 和 Franco Nori，《量子模拟》，《现代物理评论》86，153–185（2014年）。[46]Edward Farhi、Jeffrey Goldstone、Sam Gutmann、Joshua Lapan、Andrew Lundgren 和 Daniel Preda，《应用于随机实例的量子绝热演化算法，以求解NP完全问题》，《科学》292，472–475 (2001).[47] Nicolas Gisin 和 Rob Thew，“量子通信”，《自然·光子学》1，165–171 (2007年)。[48] C. L. Degen、F. Reinhard 和 P. Cappellaro，“量子传感”，《现代物理评论》89，035002 (2017年)。[49]Joana Fraxanet、Tymoteusz Salamon 和 Ma- ciej Lewenstein，“量子模拟的未来数十年”，《物理学讲义》1000 (2022年)，arXiv:2204.08905。[50]Kishor Bharti、Alba Cervera-Lierta、Thi Ha Kyaw、Tobias Haug、Sumner Alperin-Lea、Abhinav Anand、Matthias Degroote、Hermanni Heimonen、Jakob S. Kottmann、Tim Menke、Wai-Keong Mok、Sukin Sim、Leong-Chuan Kwek 和 Al´an Aspuru-Guzik，“含噪中等规模量子算法”，《现代物理评论》94，015004 (2022年)。[51] Frank Arute、Kunal Arya、Ryan Babbush、Dave Ba- con、Joseph C. Bardin、Rami Barends、Rupak Biswas、Sergio Boixo、Fernando G. S. L. Brandao、David A. Buell、Brian Burkett、Yu Chen、Zijun Chen、Ben Chiaro、Roberto Collins、William Courtney、Andrew Dunsworth、Edward Farhi、Brooks Foxen、Austin Fowler、Craig Gidney、Marissa Giustina、Rob Graff、Keith Guerin、Steve Habegger、Matthew P. Harrigan、Michael J. Hartmann、Alan Ho、Markus Hoffmann、Trent Huang、Travis S. Humble、Sergei V. Isakov、Evan Jeffrey、Zhang Jiang、Dvir Kafri、Kostyantyn Kechedzhi、Julian Kelly、Paul V. Klimov、Sergey Knysh、Alexander Korotkov、Fedor Kostritsa、David Landhuis、Mike Lindmark、Erik Lucero、Dmitry Lyakh、Salva- tore Mandr`a、Jarrod R. McClean、Matthew McEwen、Anthony Megrant、Xiao Mi、Kristel Michielsen、Ma- soud Mohseni、Josh Mutus、Ofer Naaman、Matthew Neeley、Charles Neill、Murphy Yuezhen Niu、Eric Os- tby、Andre Petukhov、John C. Platt、Chris Quintana、Eleanor G. Rieffel、Pedram Roushan、Nicholas C. Ru- bin、Daniel Sank、Kevin J. Satzinger、Vadim Smelyan- skiy、Kevin J. Sung、Matthew D. Trevithick、Amit Vainsencher、Benjamin Villalonga、Theodore White、Z. Jamie Yao、Ping Yeh、Adam Zalcman、Hartmut Neven 和 John M. Martinis，“使用可编程超导处理器实现量子霸权”，《自然》574，505–510 (2019年)。[52] Feng Pan 和 Pan Zhang，“使用大批量张量网络方法模拟量子电路”，《物理评论快报》128，030501 (2022年)。[53] Feng Pan、Keyang Chen 和 Pan Zhang，“求解 Sycamore 量子处理器的采样问题”，《物理评论快报》129，090502 (2022年)。[54] Seunghoon Lee、Joonho Lee、Huanchen Zhai、Yu Tong、Alexander M. Dalzell、Ashutosh Kumar、Phillip Helms、Johnnie Gray、Zhi-Hao Cui、Wenyuan Liu、Michael Kas- toryano、Ryan Babbush、John Preskill、David R. Reich- man、Earl T. Campbell、Edward F. Valeev、Lin Lin 和 Garnet Kin-Lic Chan，“量子化学中是否存在指数级量子优势的证据？”arXiv:2208.02199 (2022年)。[55] J. Eisert、M. Cramer 和 M. B. Plenio，“专题讨论：纠缠熵的面积定律”，《现代物理评论》82，277–306 (2010年)。[56] Rajibul Islam、Ruichao Ma、Philipp M. Preiss、M. Eric Tai、Alexander Lukin、Matthew Rispoli 和 Markus Greiner，“测量量子多体系统中的纠缠熵

,”《自然》**528**，77–83

（2015年）。[57]Adam M. Kaufman、M. Eric Tai、Alexander Lukin、Matthew Rispoli、Robert Schittko、Philipp M. Preiss 和 Markus Greiner，“孤立多体系统中通过纠缠实现量子热化”，《科学》353，794–800（2016年）。[58] Alexander Lukin、Matthew Rispoli、Robert Sc hittko、M. Eric Tai、Adam M. Kaufman、Soonwon Choi、Vedika Khemani、Julian L´e onard 和 Markus Greiner，“探测多体局域化系统中的纠缠”，《科学》364，256–260（2019年）。[59]Dolev Bluvstein、Harry Levine、Giulia Semeghini、Tout T. Wang、Sepehr Ebadi、Marcin Kalinowski、Alexander Keesling、Nishad Maskara、Hannes Pichler、Markus Greiner、Vladan Vuleti´c 和 Mikhail D. Lukin，“基于纠缠原子阵列相干输运的量子处理器”，《自然》604，451–456（2022年）。[60] A. Elben、B. Vermersch、M. Dalmonte、J. I. Cirac 和 P. Zoller，“原子 Hubbard 模型和自旋模型中随机淬火产生的 Rényi 熵”，《物理评论快报》120，050406（2018年）。´Tiff Brydges、Andreas Elben、Petar Jurcevic、Benoˆıt Vermersch、Christine Maier、Ben P. Lanyon、Peter Zoller、Rainer Blatt 和 Christian F. Roos，“通过随机测量探测 Rényi 纠缠熵”，《科学》364，260–263（2019年）。[61]A. Elben、B. Vermersch、C. F. Roos 和 P. Zoller，“局域随机测量之间的统计关联：探测多体量子态纠缠的工具箱”，Phys. Rev. A 99，052323（2019年）。´B. Vermersch、A. Elben、L. M. Sieberer、N. Y. Yao 和 P. Zoller，“利用随机测量之间的统计关联探测信息扰乱”，《物理评论X》9，021061（2019年）。[62] Andreas Elben、Jinlong Yu、Guanyu Zhu、Mohammad Hafezi、Frank Pollmann、Peter Zoller 和 Benoˆıt Ver- mersch，“合成量子物质中通过随机测量获得多体拓扑不变量”，《科学进展》6，eaaz3666（2020年）。[63] D. J. Wineland、J. J. Bollinger、W. M. Itano、F. L. Moore 和 D. J. Heinzen，“光谱学中的自旋压缩与量子噪声降低”，Phys. Rev. A 46，R6797–R6800（1992年）。[64] A. Sørensen、L. M. Duan、J. I. Cirac 和 P. Zoller，“玻色–爱因斯坦凝聚体中的多粒子纠缠”，《自然》409，63–66（2001年）。[65] M. D. Reid、P. D. Drummond、W. P. Bowen、E. G. Cavalcanti、P. K. Lam、H. A. Bachor、U. L. Andersen 和 G. Leuchs，“专题综述：Einstein–Podolsky–Rosen 悖论：从概念到应用”，《现代物理评论》81，1727–1751（2009年）。[66] Roope Uola、Ana C. S. Costa、H. Chau Nguyen 和 Otfried G[67] uhne，“量子导引”，《现代物理评论》92，015001（2020年）。[68] Otfried G¨uhne 和 G[69] eza T¨oth，“纠缠检测”，《物理学报告》474，1–75（2009年）。´Dariusz Chru´sci[70] nski 和 Gniewomir Sarbicki，“纠缠见证：构造、分析与分类”，Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 47，483001（2014年）。´Gerardo Adesso、Thomas R Bromley 和 Marco Cianciaruso，“量子关联的度量与应用

’” 《物理学杂志 A：数学与理论物理》

《理论物理》49, 473001 (2016).[72]Kavan Modi、Aharon Brodutch、Hugo Cable、Tomasz Paterek 和 Vlatko Vedral，“关联的经典-量子边界：量子失谐及相关度量”，《现代物理评论》84, 1655–1707 (2012).[73]Anindita Bera、Tamoghna Das、Debasis Sadhukhan、Sudipto Singha Roy、Aditi Sen(De) 和 Ujjwal Sen，“量子失谐及其相关概念：近期进展综述”，《物理学进展报告》81, 024001 (2017). [74] Ivan ˇSupi´c 和 Joseph Bowles，“量子系统的自检验：综述”，《Quantum》4, 337 (2020).[75] Armin Tavakoli、Alejandro Pozas-Kerstjens、Ming-Xing Luo 和 Marc-Olivier Renou，“网络中的贝尔非定域性”，《物理学进展报告》85, 056001 (2022).[76]Nicolas Laflorencie，“凝聚态系统中的量子纠缠”，《物理学报告》646, 1–59 (2016).[77] Gabriele De Chiara 和 Anna Sanpera，“量子多体系统中的真正量子关联：近期进展综述”，arXiv:1711.07824 (2018). [78] Florian Fr¨owis、Pavel Sekatski、Wolfgang D¨ur、Nicolas Gisin 和 Nicolas Sangouard，“宏观量子态：度量、脆弱性与实现”，《现代物理评论》90, 025004 (2018).[79] Nicolai Friis、Giuseppe Vitagliano、Mehul Malik 和 Marcus Huber，“从理论到实验的纠缠认证”，《自然综述：物理学》1, 72–87 (2018). [80] A. Einstein、B. Podolsky 和 N. Rosen，“物理实在的量子力学描述能否被认为是完备的？”，Phys. Rev. 47, 777–780 (1935). [81] J. S. Bell，“论爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论”，Physics Physique Fizika 1, 195–200 (1964). [82] E. Schr¨odinger，“量子力学中的当前情形”，《自然科学》23, 844–849 (1935). [83] 在这个特定情形下，方程（5）等价于著名的 Wineland自旋压缩条件 [65]$\langle \hat{J}_z\rangle^2 \geq N\langle \hat{J}_x^2\rangle$，其中 $N=2$ 和 $\hat{J}_z=(1/2)\sum_{i=1}^{N}\hat{Z}_i$ 是沿 z 方向的集体自旋（$\hat{J}_x$亦然）。[84] John F. Clauser、Michael A. Horne、Abner Shimony 和 Richard A. Holt，“检验局域隐变量理论的拟议实验”，《物理评论快报》23, 880–884 (1969).[85]Antonio Ac´ın、Nicolas Gisin 和 Benjamin Toner，“含噪纠缠量子态的格罗滕迪克常数与局域模型”，Phys. Rev. A 73, 062105 (2006). [86]H. M. Wiseman、S. J. Jones 和 A. C. Doherty，“量子导引、纠缠、非定域性与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论”，《物理评论快报》98, 140402 (2007).[87]Szil´ard Szalay，“纠缠的 k-可扩展性，以及 k-可分性与 k-可制备性的二元性”，《Quantum》3, 204 (2019).[88] Zhihong Ren、Weidong Li、Augusto Smerzi 和 Manuel Gessner，“利用杨图进行多体纠缠的计量学检测”，《物理评论快报》126, 080502 2021( ). [89] Vlatko Vedral 和 Martin B. Plenio，“纠缠度量与纯化过程”，Phys. Rev. A 57, 1619–1633 (1998).

[90] Martin B. Plenio 和 Shashank Virmani，“纠缠度量导论”，Quant. Inf. Comput. 7, 1 51 2007– ( ).[91] 请注意，这与例如 [90], 中的惯例不同，在那里这类量被称为“单调量”。[92] Julio I. de Vicente、Cornelia Spee 和 Barbara Kraus，“多体量子态的最大纠缠集”，《物理评论快报》111, 110502 (2013). [93] David Sauerwein、Nolan R. Wallach、Gilad Gour 和 Barbara Kraus，“通过局部操作变换纯多体纠缠态几乎总是不可能的”，《物理评论X》8, 031020 (2018).[94] Maciej Lewenstein 和 Anna Sanpera，“复合量子系统的可分性与纠缠”，《物理评论快报》80, 2261–2264 (1998).[95] Sinisa Karnas 和 Maciej Lewenstein，“复合量子系统密度矩阵的可分近似”，J. Phys. A: Math. Gen. 34, 6919–6937 (2001).[96] Michael Steiner，“纠缠的广义鲁棒性”，Phys. Rev. A 67, 054305 (2003).[97] Matteo Fadel、Ayaka Usui、Marcus Huber、Nicolai Friis 和 Giuseppe Vitagliano，“原子系综中的纠缠量化”，《物理评论快报》127, 010401 (2021).[98]Jean-Daniel Bancal、Cyril Branciard、Nicolas Gisin 和 Stefano Pironio，“多体非定域性的量化”，《物理评论快报》103, 090503 (2009).[99]Florian John Curchod、Nicolas Gisin 和 Yeong-Cherng Liang，“通过资源规模量化多体非定域性”，Phys. Rev. A 91, 012121 (2015).[100] George Svetlichny，“通过贝尔型不等式区分三体与二体不可分性”，Phys. Rev. D 35, 3066–3069 (1987).[101] Michael Seevinck 和 George Svetlichny，“粒子系统部分可分性的贝尔型不等式及其量子力学违背”，《物理评论快报》89, 060401 (2002).[102]Daniel Collins、Nicolas Gisin、Sandu Popescu、David Roberts 和 Valerio Scarani，“检测真正 n 体不可分性的贝尔型不等式”，《物理评论快报》88, 170405 (2002).[103]Jean-Daniel Bancal、Nicolas Gisin、Yeong-Cherng Liang 和 Stefano Pironio，“真正多体纠缠的设备无关见证”，《物理评论快报》106, 250404 (2011).[104] Nicolas Brunner、James Sharam 和 Tam´as V´ertesi，“利用贝尔不等式检验多体纠缠结构”，《物理评论快报》108, 110501 (2012). [105]E. G. Cavalcanti、Q. Y. He、M. D. Reid 和 H. M. Wiseman，“多体量子非定域性的统一判据”，Phys. Rev. A 84, 032115 (2011). [106] M. D. Reid，“利用非简并参量放大演示爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论”，Phys. Rev. A 40, 913–923 (1989).[107] D Cavalcanti 和 P Skrzypczyk，“量子导引综述：聚焦半定规划”，《物理学进展报告》80, 024001 (2016). [108] Q. Y. He 和 M. D. Reid，“真正多体爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引”，《物理评论快报》111, 250403 2013( ).

[109]R. Y. Teh 和 M. D. Reid，《真正 n 方连续变量纠缠和 Einstein-Podolsky-Rosen 量子导引的判据》，Phys. Rev. A 90, 062337 (2014)。[110] Run Yan Teh、Manuel Gessner、Margaret D. Reid 和 Matteo Fadel，《连续变量系统中的完全多体量子导引不可分性、真正多体导引及单配性》，Phys. Rev. A 105, 012202 (2022)。[111] D. Cavalcanti、P. Skrzypczyk、G. H. Aguilar、R. V. Nery、P. H. Souto Ribeiro 和 S. P. Walborn，《非对称量子网络中的纠缠检测与多体量子导引》，Nature Communications 6, 7941 (2015)。[112]A M'attar、P Skrzypczyk、G H Aguilar、R V Nery、P H Souto Ribeiro、S P Walborn 和 D Cavalcanti，《量子导引情景中的多体纠缠实验及 W 态随机性认证》，《量子科学与技术》2, 015011 (2017)。[113] Seiji Armstrong、Meng Wang、Run Yan Teh、Qihuang Gong、Qiongyi He、Jiri Janousek、Hans-Albert Bachor、Margaret D. Reid 和 Ping Koy Lam，《利用光学网络实现多体 Einstein-Podolsky-Rosen 量子导引和真正三体纠缠》，《自然·物理》11, 167–172 (2015)。[114] A. C. Doherty、Pablo A. Parrilo 和 Federico M. Spedalieri，《区分可分态与纠缠态》，《物理评论快报》88, 187904 (2002)。[115] Andrew C. Doherty、Pablo A. Parrilo 和 Federico M. Spedalieri，《完备的可分性判据族》，Phys. Rev. A 69, 022308 (2004)。[116] Andrew C. Doherty、Pablo A. Parrilo 和 Federico M. Spedalieri，《检测多体纠缠》，Phys. Rev. A 71, 032333 (2005)。[117]Oleg Gittsovich、Philipp Hyllus 和 Otfried G¨uhne，《多粒子协方差矩阵与无法通过两粒子关联检测图态纠缠》，Phys. Rev. A 82, 032306 (2010)。[118] Julio I. de Vicente 和 Marcus Huber，《根据关联张量检测多体纠缠》，Phys. Rev. A 84, 062306 (2011)。[119] F. Baccari、D. Cavalcanti、P. Wittek 和 A. Ac´ın，《面向多体系统的高效设备无关纠缠检测》，《物理评论X》7, 021042 (2017)。[120] Ir´en´ee Fr´erot 和 Tommaso Roscilde，《通过求解伊辛模型检测多体贝尔非定域性》，《物理评论快报》126, 140504 (2021)。[121] F. Baccari、R. Augusiak、I. ˇSupi´c、J. Tura 和 A. Ac´ın，《适用于量子比特图态的可扩展贝尔不等式与鲁棒自检验》，《物理评论快报》124, 020402 (2020)。[122] Ir´en´ee Fr´erot 和 Antonio Ac´ın，《粗粒化自检验》，《物理评论快报》127, 240401 (2021)。[123] Ir´en´ee Fr´erot、Flavio Baccari 和 Antonio Ac´ın，《从部分信息中揭示多体系统中的量子纠缠》，《PRX Quantum》3, 010342 (2022)。[124] Ir´en´ee Fr´erot 和 Tommaso Roscilde，《最优纠缠见证：一种可扩展的数据驱动方法》，《物理评论快报》127, 040401 (2021)。[125] Miguel Navascu´és、Flavio Baccari 和 Antonio Ac´ın，《纠缠边缘问题》，《Quantum》5, 589 (2021)。

[126] J. Sperling 和 W. Vogel, 《多体纠缠见证》, 《物理评论快报》111, 110503 (2013)。[127] S. Gerke、W. Vogel 和 J. Sperling, 《多体纠缠见证的数值构造》, 《物理评论X》8, 031047 (2018)。[128] G. T´oth、C. Knapp、O. G¨uhne 和 Hans J. Briegel, 《自旋压缩与纠缠》, Phys. Rev. A 79, 042334 2009( )。[129] Bernd L¨ucke、Jan Peise、Giuseppe Vitagliano、Jan Arlt、Luis Santos、G´eza T´oth 和 Carsten Klempt, 《检测 Dicke 态的多粒子纠缠》, 《物理评论快报》112, 155304 (2014)。[130] Giuseppe Vitagliano、Philipp Hyllus、I. L. Egusquiza 和 G´eza T´oth, 《任意自旋的自旋压缩不等式》, 《物理评论快报》107, 240502 (2011)。[131] Giuseppe Vitagliano、Iagoba Apellaniz、I. L. Egusquiza 和 G´eza T´oth, 《任意自旋的自旋压缩与纠缠》, Phys. Rev. A 89 (2014)。[132] Guillem M¨uller-Rigat、Maciej Lewenstein 和 Ir´en´ee Fr´erot, 《从磁子能级布居探测量子纠缠：超越自旋压缩不等式》, arXiv:2203.13547 (2022)。[133] J. Tura、R. Augusiak、A. B. Sainz、T. V´ertesi、M. Lewenstein 和 A. Ac´ın, 《检测多体量子态中的非定域性》, 《科学》344, 1256–1258 (2014)。[134] Roman Schmied、Jean-Daniel Bancal、Baptiste Allard、Matteo Fadel、Valerio Scarani、Philipp Treutlein 和 Nicolas Sangouard, 《玻色-爱因斯坦凝聚体中的贝尔关联》, 《科学》352, 441–444 (2016)。[135] Nils J. Engelsen、Rajiv Krishnakumar、Onur Hosten 和 Mark A. Kasevich, 《50万原子自旋压缩态中的贝尔关联》, 《物理评论快报》118, 140401 (2017)。[136] F. Baccari、J. Tura、M. Fadel、A. Aloy、J.-D. Bancal、N. Sangouard、M. Lewenstein、A. Ac´ın 和 R. Augusiak, 《多体系统中的贝尔关联深度》, Phys. Rev. A 100, 022121 (2019)。[137] Sebastian Wagner、Roman Schmied、Matteo Fadel、Philipp Treutlein、Nicolas Sangouard 和 Jean-Daniel Bancal, 《有限统计条件下多体系统中的贝尔关联》, 《物理评论快报》119, 170403 (2017)。[138] A. Aloy、J. Tura、F. Baccari、A. Ac´ın、M. Lewenstein 和 R. Augusiak, 《基于二体关联函数的设备无关纠缠深度见证》, 《物理评论快报》123, 100507 (2019)。[139] Matteo Fadel 和 Jordi Tura, 《界定多体系统经典关联的集合》, 《物理评论快报》119, 230402 (2017)。[140] Guillem M¨uller-Rigat、Albert Aloy、Maciej Lewenstein 和 Ir´en´ee Fr´erot, 《从平均二体关联推导非线性多体贝尔不等式：任意自旋系综的系统方法》, 《PRX Quantum》2, 030329 (2021)。[141]Philipp Hyllus、Wies-law Laskowski、Roland Krischek、Christian Schwemmer、Witlef Wieczorek、Harald Weinfurter、Luca Pezz´e 和 Augusto Smerzi, 《费 Fisher 信息与多粒子纠缠》, Phys. Rev. A 85, 022321 (2012)。[142] G´eza T´oth, 《多体纠缠与高精度计量学》, Phys. Rev. A 85, 022322 (2012)。[143] Manuel Gessner、Augusto Smerzi 和 Luca Pezz`e, 《计量学非线性压缩参数》, 《物理评论快报》122, 090503 (2019)。

[144]Matteo Fadel、Benjamin Yadin、Yuping Mao、Tim Byrnes 和 Manuel Gessner, 《利用空间分离的非经典自旋态进行多参数量子计量和模式纠缠》, arXiv:2201.11081（2022年）。[145]Philipp Hauke、Markus Heyl、Luca Tagliacozzo 和 Peter Zoller, 《通过动态磁化率测量多体纠缠》, Nature Physics 12，778–782（2016年）。[146] Ir´en´ee Fr´erot 和 Tommaso Roscilde, 《量子方差：多体系统中量子相干性和量子关联的度量》, Phys. Rev. B 94，075121（2016年）。[147] Michael Levin 和 文小刚, 《在基态波函数中检测拓扑序》, 《物理评论快报》96，110405（2006年）。[148] 文小刚, 《专题讨论：量子拓扑物质相的动物园》, 《现代物理评论》89，041004（2017年）。[149]Bei Zeng、Xie Chen、周端璐和文小刚。*Quantum Information Meets Quantum Matter: From Quantum Entanglement to Topological Phases of Many-Body Systems* 2019（施普林格，）。[150] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*（剑桥大学出版社，2011年）。[151] S´ebastien Dusuel 和 Julien Vidal, 《Lipkin-Meshkov-Glick模型的有限尺寸标度指数》, 《物理评论快报》93，237204（2004年）。[152] Vasiliy Makhalov、Tanish Satoor、Alexandre Evrard、Thomas Chalopin、Raphael Lopes 和 Sylvain Nascimbene, 《在微观尺度探测量子临界性和对称性破缺》, 《物理评论快报》123，120601（2019年）。[153] Ir´en´ee Fr´erot 和 Tommaso Roscilde, 《利用量子关联重构强关联系统的量子临界扇形区》, 《自然·通讯》10，577（2019年）。[154]Marco Gabbrielli、Augusto Smerzi 和 Luca Pezz`e, 《有限温度下的多体纠缠》, 《科学报告》8，15663（2018年）。[155] Ir´en´ee Fr´erot 和 Tommaso Roscilde, 《量子临界计量》, 《物理评论快报》121，020402（2018年）。[156] Angelo Piga、Albert Aloy、Maciej Lewenstein 和 Ir´en´ee Fr´erot, 《伊辛量子临界点处的贝尔关联》, 《物理评论快报》123，170604（2019年）。[157] Matteo Fadel 和 Jordi Tura, 《有限温度下的贝尔关联》, 《Quantum》2，107（2018年）。[158]Maciej Lewenstein、Anna Sanpera 和 Ver`onica Ahufinger, *Ultracold Atoms in Optical Lattices: Simulating quantum many-body systems*（牛津大学出版社，牛津，2012年）。[159] Yumang Jing、Matteo Fadel、Valentin Ivannikov 和 Tim Byrnes, 《分离的自旋压缩玻色–爱因斯坦凝聚体》, 《新物理学杂志》21，093038（2019年）。[160] Giuseppe Vitagliano、Matteo Fadel、Iagoba Apellaniz、Matthias Kleinmann、Bernd L¨ucke、Carsten Klempt 和 G´eza T´oth, 《在分离的迪克态中检测爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引和双体纠缠》, arXiv:2104.05663（2021年）。[161] Benjamin Morris、Benjamin Yadin、Matteo Fadel、Tilman Zibold、Philipp Treutlein 和 Gerardo Adesso, 《全同粒子间的纠缠是一种有用且一致的资源》, 《物理评论X》10，041012（2020年）。

[162]Jiajie Guo、Feng-Xiao Sun、Daoquan Zhu、Manuel Gessner、Qiongyi He 和 Matteo Fadel，《利用条件自旋压缩参数检测非高斯自旋态中的爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引》，arXiv:2106.13106（2021年）。[163]Benjamin Yadin、Matteo Fadel 和 Manuel Gessner，《计量学互补性揭示爱因斯坦-波多尔斯基-罗森悖论》，《自然·通讯》12，2410（2021年）。[164] R. Ramanathan、T. Paterek、A. Kay、P. Kurzy´nski 和 D. Kaszlikowski，《宏观关联的局域实在论》，《物理评论快报》107，060405（2011年）。[165] Jonas Kitzinger、Xin Meng、Matteo Fadel、Valentin I vannikov、Kae Nemoto、William J. Munro 和 Tim Byrnes，《分离的双模压缩玻色-爱因斯坦凝聚体中的贝尔关联》，Phys. Rev. A 104，043323（2021年）。[166]Shuheng Liu、Matteo Fadel、Qiongyi He、Marcus Huber 和 Giuseppe Vitagliano，《利用协方差矩阵界定纠缠维数》，arXiv:2208.04909（2022年）。[167]Robert McConnell、Hao Zhang、Jiazhong Hu、Senka´Cuk 和 Vladan Vuleti´c，《由单个光子 herald 的、具有负维格纳函数的近3000个原子的纠缠》，《自然》519，439–442（2015年）。[168] J. Hald、J. L. Sørensen、C. Schori 和 E. S. Polzik，《自旋压缩原子：由光生成的宏观纠缠系综》，《物理评论快报》83，1319–1322（1999年）。[169] J. Est`eve、C. Gross、A. Weller、S. Giovanazzi 和 M. K. Oberthaler，《玻色-爱因斯坦凝聚体中的压缩与纠缠》，《自然》455，1216 EP –（2008年）。[170] C. Gross、T. Zibold、E. Nicklas、J. Est`eve 和 M. K. Oberthaler，《非线性原子干涉仪超越经典精度极限》，《自然》464，1165–1169（2010年）。[171] Max F. Riedel、Pascal B¨ohi、Yun Li、Theodor W. H¨ansch、Alice Sinatra 和 Philipp Treutlein，《基于原子芯片的量子计量纠缠生成》，《自然》464，1170–1173（2010年）。[172] C. D. Hamley、C. S. Gerving、T. M. Hoang、E. M. Bookjans 和 M. S. Chapman，《量子气体中的自旋向列压缩真空态》，《自然·物理》8，305–308（2012年）。[173] Bertrand Evrard、An Qu、Jean Dalibard 和 Fabrice Gerbier，《自旋or玻色-爱因斯坦凝聚体碎裂现象的观测》，《科学》373，1340–1343（2021年）。[174] Xin-Yu Luo、Yi-Quan Zou、Ling-Na Wu、Qi Liu、Ming-Fei Han、Meng Khoon Tey 和 Li You，《通过驱动系统穿越量子相变实现确定性纠缠生成》，《科学》355，620–623（2017年）。[175] Monika H. Schleier-Smith、Ian D. Leroux 和 Vladan Vuleti´c，《量子不确定性降低的二能级原子系综态》，《物理评论快报》104，073604（2010年）。[176] Ian D. Leroux、Monika H. Schleier-Smith 和 Vladan Vuleti´c，《集体原子自旋腔压缩的实现》，《物理评论快报》104，073602（2010年）。[177] Zilong Chen、Justin G. Bohnet、Shannon R. Sankar、Ji-ayan Dai 和 James K. Thompson，《通过真空拉比劈裂对大系综进行条件自旋压缩》，《物理评论快报》106，133601（2011年）。[178] R. J. Sewell、M. Koschorreck、M. Napolitano、B. Dubost、N. Behbood 和 M. W. Mitchell，“通过自旋压缩实现超越投影噪声极限的磁灵敏度”，《物理评论快报》109，253605（2012年）。[179] Florian Haas、J¨urgen Volz、Roger Gehr、Jakob Reichel 和 J´erˆome Est`eve，“光纤腔中超过 40 个原子的纠缠态”，《科学》344，180–183（2014年）。[180]Jia Kong、Ricardo Jim´enez-Mart´ınez、Charikleia Troullinou、Vito Giovanni Lucivero、G´eza T´oth 和 Morgan W. Mitchell，“热的强相互作用原子系统中由测量诱导的空间扩展纠缠”，《自然·通讯》11，2415（2020年）。[181] Giovanni Barontini、Leander Hohmann、Florian Haas、J´erˆome Est`eve 和 Jakob Reichel，“通过量子芝诺动力学确定性地产生多粒子纠缠”，《科学》349，1317–1321（2015年）。[182] Helmut Strobel、Wolfgang Muessel、Daniel Linnemann、Tilman Zibold、David B. Hume、Luca Pezz`e、Augusto Smerzi 和 Markus K. Oberthaler，“非高斯自旋态的 Fisher 信息与纠缠”，《科学》345，424–427（2014年）。[183]Matteo Fadel、Tilman Zibold、Boris D´ecamps 和 Philipp Treutlein，“玻色-爱因斯坦凝聚体中的空间纠缠模式与爱因斯坦-波多尔斯基-罗森导引”，《科学》360，409–413（2018年）。[184]Karsten Lange、Jan Peise、Bernd L¨ucke、Ilka Kruse、Giuseppe Vitagliano、Iagoba Apellaniz、Matthias Klein- mann、G´eza T´oth 和 Carsten Klempt，“两个空间分离的原子模式之间的纠缠”，《科学》360，416–418（2018年）。[185]Philipp Kunkel、Maximilian Pr¨ufer、Helmut Strobel、Daniel Linnemann、Anika Fr¨olian、Thomas Gasenzer、Martin G¨arttner 和 Markus K. Oberthaler，“空间分布的多体纠缠使原子云能够实现 EPR 导引”，《科学》360，413–416（2018年）。[186]Philipp Kunkel、Maximilian Pr¨ufer、Stefan Lannig、Robin Strohmaier、Martin G¨arttner、Helmut Strobel 和 Markus K. Oberthaler，“检测连续多体量子系统中的纠缠结构”，《物理评论快报》128，020402（2022年）。[187] T. M. Graham、Y. Song、J. Scott、C. Poole、L. Phut- titarn、K. Jooya、P. Eichler、X. Jiang、A. Marra、B. Grinkemeyer、M. Kwon、M. Ebert、J. Cherek、M. T. Lichtman、M. Gillette、J. Gilbert、D. Bowman、T. Ballance、C. Campbell、E. D. Dahl、O. Crawford、N. S. Blunt、B. Rogers、T. Noel 和 M. Saffman，“中性原子量子计算机上的多量子比特纠缠与算法”，《自然》604，457–462（2022年）。[188] Han-Ning Dai、Bing Yang、Andreas Reingruber、Xiao-Fan Xu、Xiao Jiang、Yu-Ao Chen、Zhen-Sheng Yuan 和 Jian-Wei Pan，“光学晶格中原子自旋纠缠的生成与检测”，《自然·物理》12，783–787（2016年）。[189] Bing Yang、Hui Sun、Chun-Jiong Huang、Han-Yi Wang、Youjin Deng、Han-Ning Dai、Zhen-Sheng Yuan 和 Jian-Wei Pan，“在光学晶格中冷却并纠缠超冷原子”，《科学》369，550–553（2020年）。[190] Wei-Yong Zhang、Ming-Gen He、Hui Sun、Yong-Guang Zheng、Ying Liu、An Luo、Han-Yi Wang、Zi-Hang Zhu、Pei-Yue Qiu、Ying-Chao Shen、Xuan-Kai Wang、Wan Lin

Li、Yu-Meng Yang、Xiao Jiang、Han-Ning Dai、You Zhou、Xiongfeng Ma、Zhen-Sheng Yuan 和 Jian-Wei Pan，《光学晶格中可扩展多体纠缠的功能构件》，arXiv:2210.02936（2022年）。[191] Matthew Rispoli、Alexander Lukin、Robert Schittko、Sooshin Kim、M. Eric Tai、Julian Leonard 和 Markus Greiner，《多体局域化转变处的量子临界行为》，《自然》573，385–389（2019年）。[192] M. Cramer、A. Bernard、N. Fabbri、L. Fallani、C. Fort、S. Rosi、F. Caruso、M. Inguscio 和 Martin B. Plenio，《光学晶格中玻色子的空间纠缠》，《自然·通讯》4，2161（2013年）。[193]Takeshi Fukuhara、Sebastian Hild、Johannes Zeiher、Peter Schauß、Immanuel Bloch、Manuel Endres 和 Christian Gross，《玻色-哈伯德模型链中自旋纠缠波的空间分辨探测》，《物理评论快报》115，035302（2015年）。[194] A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、A. S. Zibrov、H. Pichler、S. Choi、J. Cui、M. Rossignolo、P. Rembold、S. Montangero、T. Calarco、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《里德堡原子阵列中薛定谔猫态的生成与操控》，Science 365，570–574（2019年）。[195] Joseph W. Britton、Brian C. Sawyer、Adam C. Keith、C. C. Joseph Wang、James K. Freericks、Hermann Uys、Michael J. Biercuk 和 John J. Bollinger，《囚禁离子量子模拟器中数百个自旋的二维伊辛相互作用设计》，《自然》484，489–492（2012年）。[196] D. Leibfried、E. Knill、S. Seidelin、J. Britton、R. B. Blakestad、J. Chiaverini、D. B. Hume、W. M. Itano、J. D. Jost、C. Langer、R. Ozeri、R. Reichle 和 D. J. Wineland，《六原子“薛定谔猫”态的生成》，《自然》438，639–642（2005年）。[197] Thomas Monz、Philipp Schindler、Julio T. Barreiro、Michael Chwalla、Daniel Nigg、William A. Coish、Maximilian Harlander、Wolfgang H¨ansel、Markus Hennrich 和 Rainer Blatt，《14量子比特纠缠：生成与相干性》，《物理评论快报》106，130506（2011年）。[198] H. H¨affner、W. H¨ansel、C. F. Roos、J. Benhelm、D. Chek-al kar、M. Chwalla、T. K¨orber、U. D. Rapol、M. Riebe、P. O. Schmidt、C. Becher、O. G¨uhne、W. D¨ur 和 R. Blatt，《囚禁离子的可扩展多粒子纠缠》，《自然》438，643–646（2005年）。[199] J. K. Korbicz、O. G¨uhne、M. Lewenstein、H. H¨affner、C. F. Roos 和 R. Blatt，《 n量子比特系统中的广义自旋压缩不等式：理论与实验》，Phys. Rev. A 74，052319（2006年）。[200] Nicolai Friis、Oliver Marty、Christine Maier、Cornelius Hempel、Milan Holz¨apfel、Petar Jurcevic、Martin B. Plenio、Marcus Huber、Christian Roos、Rainer Blatt 和 Ben Lanyon，《完全可控的20量子比特系统中的纠缠态观测》，《物理评论X》8，021012（2018年）。[201] Julio T. Barreiro、Jean-Daniel Bancal、Philipp Schindler、Daniel Nigg、Markus Hennrich、Thomas Monz、Nicolas Gisin 和 Rainer Blatt，《利用与设备无关的见证展示真正多体纠缠》，《自然·物理》9，559–562（2013年）。[202]B. P. Lanyon、M. Zwerger、P. Jurcevic、C. Hempel、W. D¨ur、H. J. Briegel、R. Blatt 和 C. F. Roos，“利用囚禁离子实验验证多体贝尔不等式的违背”，《物理评论快报》112，100403（2014年）。[203] Justin G. Bohnet、Brian C. Sawyer、Joseph W. Britton、Michael L. Wall、Ana Maria Rey、Michael Foss-Feig 和 John J. Bollinger，“利用数百个囚禁离子实现量子自旋动力学和纠缠生成”，《科学》352，1297–1301（2016年）。[204] Kevin A. Gilmore、Matthew Affolter、Robert J. Lewis-Swan、Diego Barberena、Elena Jordan、Ana Maria Rey 和 John J. Bollinger，“利用二维囚禁离子晶体进行位移和电场的量子增强传感”，《科学》373，673–678（2021年）。[205] Jeremy C. Adcock、Caterina Vigliar、Raffaele Santagati、Joshua W. Silverstone 和 Mark G. Thompson，“硅芯片上可编程的四光子图态”，《自然·通讯》10，3528（2019年）。[206] C. W. Sandbo Chang、Carlos Sab´ín、P. Forn-D´íaz、Fernando Quijandr´ía、A. M. Vadiraj、I. Nsanzineza、G. Johansson 和 C. M. Wilson，“在超导参量腔中观测到三光子自发参量下转换”，《物理评论X》10，011011（2020年）。[207] Jian-Wei Pan、Zeng-Bing Chen、Chao-Yang Lu、Harald Weinfurter、Anton Zeilinger 和 Marek Żukowski，“多光子纠缠与干涉测量”，《现代物理评论》84，777–838（2012年）。[208] Chao-Yang Lu、Xiao-Qi Zhou、Otfried G¨uhne、Wei-Bo Gao、Jin Zhang、Zhen-Sheng Yuan、Alexander Goebel、Tao Yang 和 Jian-Wei Pan，“实验实现六光子图态纠缠”，《自然·物理》3，91–95（2007年）。[209] Yun-Feng Huang、Bi-Heng Liu、Liang Peng、Yu-Hu Li、Li Li、Chuan-Feng Li 和 Guang-Can Guo，“实验制备八光子格林伯格-霍恩-蔡林格态”，《自然·通讯》2，1–6（2011年）。[210] Xing-Can Yao、Tian-Xiong Wang、Ping Xu、He Lu、Ge-Sheng Pan、Xiao-Hui Bao、Cheng-Zhi Peng、Chao-Yang Lu、Yu-Ao Chen 和 Jian-Wei Pan，“观测到八光子纠缠”，《自然·光子学》6，225–228（2012年）。[211] Xi-Lin Wang、Luo-Kan Chen、W. Li、H.-L. Huang、C. Liu、C. Chen、Y.-H. Luo、Z.-E. Su、D. Wu、Z.-D. Li、H. Lu、Y. Hu、X. Jiang、C.-Z. Peng、L. Li、N.-L. Liu、Yu-Ao Chen、Chao-Yang Lu 和 Jian-Wei Pan，“实验实现十光子纠缠”，《物理评论快报》117，210502（2016年）。[212]Luo-Kan Chen、Zheng-Da Li、Xing-Can Yao、Miao Huang、Wei Li、He Lu、Xiao Yuan、Yan-Bao Zhang、Xiao Jiang、Cheng-Zhi Peng、Li Li、Nai-Le Liu、Xiongfeng Ma、Chao-Yang Lu、Yu-Ao Chen 和 Jian-Wei Pan，“利用薄型BiB_3O_6晶体观测到十光子纠缠”，《光学》4，77–83（2017年）。[213]Han-Sen Zhong、Yuan Li、Wei Li、Li-Chao Peng、Zu-En Su、Yi Hu、Yu-Ming He、Xing Ding、Weijun Zhang、Hao Li、Lu Zhang、Zhen Wang、Lixing You、Xi-Lin Wang、Xiao Jiang、Li Li、Yu-Ao Chen、Nai-Le Liu、Chao-Yang Lu 和 Jian-Wei Pan，“利用参量下转换产生的最优纠缠光子对实现12光子纠缠和可扩展散射式玻色子采样”，《物理评论快报》121，250505（2018年）。

[214] Chao-Wei Yang、Yong Yu、Jun Li、Bo Jing、Xiao-Hui Bao 和 Jian-Wei Pan，“利用里德堡超原子序贯生成多光子纠缠”，《自然·光子学》16，658–661（2022年）。[215] Philip Thomas、Leonardo Ruscio、Olivier Morin 和 Gerhard Rempe，“由单个原子高效生成纠缠多光子图态”，《自然》608，677–681（2022年）。[216] Jonathan C. F. Matthews、Alberto Politi、Andr´e Stefanov 和 Jeremy L. O'Brien，“在波导量子电路中操控多光子纠缠”，《自然·光子学》3，346–350（2009年）。[217] Daniel Llewellyn、Yunhong Ding、Imad I. Faruque、Stefano Paesani、Davide Bacco、Raffaele Santagati、Yan-Jun Qian、Yan Li、Yun-Feng Xiao、Marcus Huber、Mehul Malik、Gary F. Sinclair、Xiaoqi Zhou、Karsten Rottwitt、Jeremy L. O’Brien、John G. Rarity、Qihuang Gong、Leif K. Oxenlowe、Jianwei Wang 和 Mark G. Thompson，“硅芯片间量子隐形传态与多光子纠缠”，《自然·物理》16，148–153（2020年）。[218] Christian Reimer、Michael Kues、Piotr Roztocki、Benjamin Wetzel、Fabio Grazioso、Brent E. Little、Sai T. Chu、Tudor Johnston、Yaron Bromberg、Lucia Caspani、David J. Moss 和 Roberto Morandotti，“利用集成频率梳生成多光子纠缠量子态”，《科学》351，1176–1180（2016年）。[219]Markus Gr¨afe、Ren´e Heilmann、Armando Perez-Leija、Robert Keil、Felix Dreisow、Matthias Heinrich、Hector Moya-Cessa、Stefan Nolte、Demetrios N Christodoulides 和 Alexander Szameit，“芯片上生成高阶单光子W态”，《自然·光子学》8，791–795（2014年）。[220] Wei-Bo Gao、Chao-Yang Lu、Xing-Can Yao、Ping Xu、Otfried G¨uhne、Alexander Goebel、Yu-Ao Chen、Cheng-Zhi Peng、Zeng-Bing Chen 和 Jian-Wei Pan，“实验演示超纠缠十量子比特薛定谔猫态”，《自然·物理》6，331–335（2010年）。[221]Xi-Lin Wang、Yi-Han Luo、He-Liang Huang、Ming-Cheng Chen、Zu-En Su、Chang Liu、Chao Chen、Wei Li、Yu-Qiang Fang、Xiao Jiang、Jun Zhang、Li Li、Nai-Le Liu、Chao-Yang Lu 和 Jian-Wei Pan，“利用六个光子的三个自由度实现18量子比特纠缠”，《物理评论快报》120，260502（2018年）。[222]Mehul Malik、Manuel Erhard、Marcus Huber、Mario Krenn、Robert Fickler 和 Anton Zeilinger，“高维多光子纠缠”，《自然·光子学》10，248–252（2016年）。[223] Shota Yokoyama、Ryuji Ukai、Seiji C. Armstrong、Chanond Sornphiphatphong、Toshiyuki Kaji、Shigenari Suzuki、Jun ichi Yoshikawa、Hidehiro Yonezawa、Nicolas C. Menicucci 和 Akira Furusawa，“时域复用的超大规模连续变量簇态”，《自然·光子学》7，982–986（2013年）。[224] S. Gerke、J. Sperling、W. Vogel、Y. Cai、J. Roslund、N. Treps 和 C. Fabre，“频率梳高斯态的完全多体纠缠”，《物理评论快报》114，050501（2015年）。[225] Moran Chen、Nicolas C. Menicucci 和 Olivier Pfister，“实验实现量子光学频率梳的60个模式的多体纠缠”，《物理评论快报》112，120505（2014年）。[226] Jonathan Roslund、Renn´e Medeiros de Ara´ujo、Shifeng Jiang、Claude Fabre 和 Nicolas Treps，“利用超快频率梳构建波长复用量子网络”，《自然·光子学》8，109–112（2013年）。[227]Yin Cai、Jonathan Roslund、Giulia Ferrini、Francesco Arzani、X Xu、Claude Fabre 和 Nicolas Treps，“利用光学频率梳实现可重构图态中的多模纠缠”，《自然·通讯》8，1–9（2017年）。[228] Young-Sik Ra、Adrien Dufour、Mattia Walschaers、Cl´ement Jacquard、Thibault Michel、Claude Fabre 和 Nicolas Treps，“多模光场的非高斯量子态”，《自然·物理》16，144–147（2019年）。[229]Ming Gong、Ming-Cheng Chen、Yarui Zheng、Shiyu Wang、Chen Zha、Hui Deng、Zhiguang Yan、Hao Rong、Yulin Wu、Shaowei Li、Fusheng Chen、Youwei Zhao、Fu-tian Liang、Jin Lin、Yu Xu、Cheng Guo、Lihua Sun、Anthony D. Castellano、Haohua Wang、Chengzhi Peng、Chao-Yang Lu、Xiaobo Zhu 和 Jian-Wei Pan，“超导量子处理器上的真正12量子比特纠缠”，《物理评论快报》122，110501（2019年）。[230]Chao Song、Kai Xu、Hekang Li、Yu-Ran Zhang、Xu Zhang、Wuxin Liu、Qiujiang Guo、Zhen Wang、Wen-hui Ren、Jie Hao、Hui Feng、Heng Fan、Dongning Zheng、Da-Wei Wang、H. Wang 和 Shi-Yao Zhu，“ 生成多达 20 量子比特的多组分原子薛定谔猫态 ”，《科学》365，574–577（2019年）。[231] Yuanhao Wang、Ying Li、Zhang-qi Yin 和 Bei Zeng，“16量子比特 IBM 通用量子计算机可实现完全纠缠”，《npj 量子信息》4，46（2018年）。[232] Gary J. Mooney、Gregory A. L. White、Charles D. Hill 和 Lloyd C. L. Hollenberg，“65量子比特超导量子计算机中的全器件纠缠”，《先进量子技术》4，2100061（2021年）。[233] Gary J Mooney、Gregory A L White、Charles D Hill 和 Lloyd C L Hollenberg，“在超导量子计算机中生成并验证27量子比特格林伯格-霍恩-蔡林格态”，《物理学通讯杂志》5，095004（2021年）。[234] K. J. Satzinger、Y.-J Liu、A. Smith、C. Knapp、M. Newman、C. Jones、Z. Chen、C. Quintana、X. Mi、A. Dunsworth、C. Gidney、I. Aleiner、F. Arute、K. Arya、J. Atalaya、R. Babbush、J. C. Bardin、R. Barends、J. Basso、A. Bengtsson、A. Bilmes、M. Broughton、B. B. Buckley、D. A. Buell、B. Burkett、N. Bushnell、B. Chiaro、R. Collins、W. Courtney、S. Demura、A. R. Derk、D. Eppens、C. Erickson、L. Faoro、E. Farhi、A. G. Fowler、B. Foxen、M. Giustina、A. Greene、J. A. Gross、M. P. Harrigan、S. D. Harrington、J. Hilton、S. Hong、T. Huang、W. J. Huggins、L. B. Ioffe、S. V. Isakov、E. Jeffrey、Z. Jiang、D. Kafri、K. Kechedzhi、T. Khattar、S. Kim、P. V. Klimov、A. N. Korotkov、F. Kostritsa、D. Landhuis、P. Laptev、A. Locharla、E. Lucero、O. Martin、J. R. McClean、M. McEwen、K. C. Miao、M. Mohseni、S. Montazeri、W. Mruczkiewicz、J. Mutus、O. Naaman、M. Neeley、C. Neill、M. Y. Niu、T. E. O’Brien、A. Opremcak、B. Pat´o、A. Petukhov、N. C. Rubin、D. Sank、V. Shvarts、D. Strain、M. Sza-lay、B. Villalonga、T. C. White、Z. Yao、P. Yeh、J. Yoo、A. Zalcman、H. Neven、S. Boixo、A. Megrant、Y. Chen、J. Kelly、V. Smelyanskiy、A. Kitaev、M. Knap、F. Poll-mann 和 P. Roushan，“在量子处理器上实现拓扑有序态”，《科学》374，

1237–1241（2021年）。
[235] George Mathew、Saulo L. L. Silva、Anil Jain、Arya Mohan、D. T. Adroja、V. G. Sakai、C. V. Tomy、Alok Banerjee、Rajendar Goreti、Aswathi V. N.、Ranjit Singh 和 D. Jaiswal-Nagar，“在均匀反铁磁量子自旋链中通过量子费舍尔信息实验实现多体纠缠”，Phys. Rev. Research **2**，043329（2020年）。[236] A. Scheie、Pontus Laurell、A. M. Samarakoon、B. Lake、S. E. Nagler、G. E. Granroth、S. Okamoto、G. Alvarez 和 D. A. Tennant，“利用中子散射见证量子磁体中的纠缠”，Phys. Rev. B **103**，224434（2021年）。[237] A. O. Scheie、E. A. Ghioldi、J. Xing、J. A. M. Paddison、N. E. Sherman、M. Dupont、L. D. Sanjeewa、Sangyun Lee、A. J. Woods、D. Abernathy、D. M. Pajerowski、T. J. Williams、Shang-Shun Zhang、L. O. Manuel、A. E. Trumper、C. D. Pemmaraju、A. S. Sefat、D. S. Parker、T. P. Devereaux、R. Movshovich、J. E. Moore、C. D. Batista 和 D. A. Tennant，“见证三角反铁磁体中的量子临界性与纠缠 netkybse$_2$，” arXiv:2109.11527（2021年）。[238] P. Neumann、N. Mizuochi、F. Rempp、P. Hemmer、H. Watanabe、S. Yamasaki、V. Jacques、T. Gaebel、F. Jelezko 和 J. Wrachtrup，“金刚石中单自旋之间的多体纠缠”，《科学》**320**，1326–1329（2008年）。[239] G. Waldherr、Y. Wang、S. Zaiser、M. Jamali、T. Schulte-Herbr¨uggen、H. Abe、T. Ohshima、J. Isoya、J. F. Du、P. Neumann 和 J. Wrachtrup，“固态混合自旋寄存器中的量子纠错”，《自然》**506**，204–207（2014年）。[240]Kenta Takeda、Akito Noiri、Takashi Nakajima、Jun Yoneda、Takashi Kobayashi 和 Seigo Tarucha，“硅中纠缠三量子比特态的量子层析”，NatureNanotechnology **16**，965–969（2021年）。[241] Florian Fr¨owis、Matteo Fadel、Philipp Treutlein、Nicolas Gisin 和 Nicolas Brunner，“量子费舍尔信息大是否意味着贝尔关联？”Phys. Rev. A **99**，040101（2019年）。