arXiv:2302.00657v1 [cs.DS] 1 Feb 2023

在完美图类中添加尾部*

Anna Mpanti[1,2], Stavros D. Nikolopoulos[1,3], 和 Leonidas Palios[1,4]

[1] 约阿尼纳大学计算机科学与工程系，希腊[2] ampanti@cs.uoi.gr[3] 0000-0001-6684-8459； stavros@cs.uoi.gr[4] 0000-0001-8630-3835；palios@cs.uoi.gr

摘要。 考虑一个属于某个图类 $\mathcal{C}$ 的图 G 。我们感兴趣的是通过一条边 uw 将节点 $w \notin V(G)$ 连接到 G，其中 $u \in V(G)$；我们称这样的边为尾部。由于添加尾部后得到的图 $G+uw$（记作 $G+uw$）未必属于图类 $\mathcal{C}$，我们希望计算 $G+w$ 的最小 $\mathcal{C}$-补全，即需要添加到 $G+uw$ 中的非边（不包括尾部 uw）的最小数量，使所得图属于 $\mathcal{C}$。

本文研究分裂图、准阈值图、阈值图和 P_4-稀疏图类中的这一问题，并利用分裂图的结构以及准阈值图、阈值图和 P_4-稀疏图的树表示，提出线性时间算法。

关键词： 边添加 · 补全 · 分裂图 · 准阈值图 · 阈值图 · P_4-稀疏图

1 引言

给定一个图 G，将顶点 $w \notin V(G)$ 与 G 中的顶点 u 相连的边称为添加到 G 上的尾部；我们将所得图记为 $G+uw$。如果 G 属于图类 $\mathcal{C}$，那么图 $G+uw$ 未必也属于该类。因此，我们希望计算 $G+uw$ 的最小 $\mathcal{C}$-补全，即需要添加到 $G+uw$ 中的非边（不包括尾部 uw）的最小数量，使所得图属于 $\mathcal{C}$；这些非边称为**填充边**。上述问题是更一般的 $(\mathcal{C},+k)$-最小边添加问题[22] 的一个实例：在属于图类 $\mathcal{C}$ 的图中添加 k 条给定的非边，并计算所得图的最小 $\mathcal{C}$-补全。

将任意图补全为特定图类中的图，是一个重要且研究充分的问题，在因缺少数据而存在缺失边的图建模等领域有着广泛应用，例如分子生物学和数值代数 [9,19,25]。遗憾的是，最小补全

* 约阿尼纳大学的研究得到希腊研究与创新基金会（H.F.R.I.）的资助，资助项目为“首轮 H.F.R.I. 研究项目征集：支持教职人员与研究人员并资助高成本研究设备采购”，项目 FANTA（网络分析高效算法），编号 HFRI-FM17-431。

为许多有趣的图类（如分裂图、弦图和余图）计算最小补全是 NP-困难的 [2,8,16,30]。这促使研究人员转向计算极小补全、求解输入受限的问题，以及研究近似算法或参数化算法。

一个相关领域是图的动态识别（或在线维护）问题：系统会收到一系列请求，要求添加或删除一条边或一个顶点（该顶点可能与若干条边关联），且只有在操作后的图仍属于同一图类时才执行请求。多位作者研究了不同图类上的这一问题，并提出了支持上述部分或全部操作的算法；例如，Ibarra [13] 针对弦图和分裂图提出的仅处理边的全动态算法，以及 Hell 等人 [11] 针对真区间图、Shamir 和 Sharan [26] 针对余图、Heggernes 和 Mancini 针对分裂图 [10], ，以及 Nikolopoulos 等人针对 P_4-稀疏图 [23]提出的全动态算法。

本文利用分裂图的结构，以及拟阈值图、阈值图和 P_4-稀疏图的树表示，提出算法，用于计算给定图 G 在这些加入了一个尾部的图类中的最小补全。对于给定分裂图的（K, S）划分，或给定拟阈值图、阈值图或P_4-稀疏图的树表示，我们的算法可在最优的 $O(n)$ 时间内运行，其中 n 是 G的顶点数。这些算法是解决这四种图类 $\mathcal{C}$ 上的（$\mathcal{C}, +1$）-最小边添加问题 [22] 的第一步。

2 理论框架

我们考虑没有环或重边的有限无向图。对于图 G，我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集。设 S 是图 G 的顶点集 $V(G)$ 的一个子集。那么，由 S 导出的 G 的子图记为 $G[S]$。图 G 中顶点 x 的邻域 $N_G(x)$ 是 G 中所有与 x 相邻的顶点构成的集合。 x 的闭邻域定义为 $N_G[x] := N_G(x) \cup \{x\}$。顶点 x 在 G 中的度记为 $deg(x)$，它等于 G 中与 x 相邻的顶点数；因此，$deg(x) = |N_G(x)|$。如果图的一个顶点与图中所有其他顶点都相邻，则称其为全邻顶点。我们将这一概念推广到图 G 的顶点子集：若一个顶点在集合 $S \subseteq V(G)$ 中是全邻顶点，即它在诱导子图 $G[S]$ 中是全邻顶点。最后， C_k (P_k 分别) 表示具有 k 个顶点的无弦环（无弦路径）；在每个 P_4中，与首个或末个顶点关联的唯一一条边称为翼。

3 分裂图

分裂图在理论上广受关注，并一直是许多研究论文的重点。若无向图 G 的顶点集 $V(G)$ 可以划分为一个团 K 和一个独立集 S [7]，则称其为分裂图；划分为 K, S

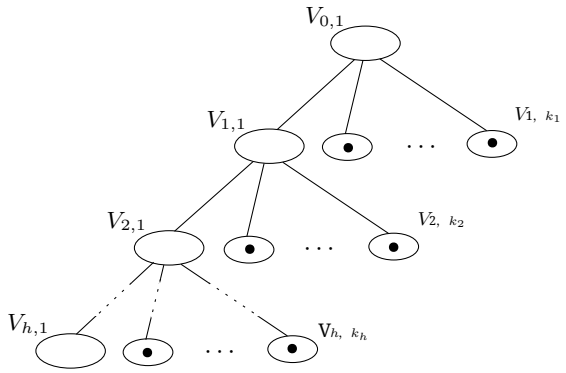

图 1：阈值图的树表示结构 [20]

可以在与图的规模成正比的时间内计算。另一个结论是，图为分裂图，当且仅当它不包含导出的 C_4、 C_5 或 $2K_2$。

引理 1。设 G 为一个分裂图，其顶点划分为一个团 K 和一个独立集 S， u 是 G 的一个顶点， uw 是一个尾部，并且 $K_s = \{x \in K \mid N_G(x) \cap S \neq \emptyset\}$。那么，对于图 $G + uw$，存在一种分裂图补全，使得所需填充边的数量为：当 $u \in K$ 时为 0，当 $u \in S$ 时为 $|K_s| - deg_G(u)$ 。

证明。如果 $u \in K$，则无需添加填充边（除 uw之外），这已是最优的，因为 $G + uw$ 是一个分裂图，其团为 K，独立集为 $S \cup \{w\}$。

现在考虑 $u \in S$。通过将 u 与 K_s中的所有非邻点相连，可以得到 $G + uw$ 的一个分裂补全；所得图是分裂图，其团为 $K_s \cup \{u\}$，独立集为 $S \cup (K - K_s) \cup \{w\}$。为证明其最优性，反设存在一个 $G + uw$ 的分裂补全，所用填充边少于 $|K_s| - deg_G(u)$ 条。于是，存在一个顶点 $a \in K_s \setminus N_G(u)$，它不与任何填充边关联。如果还存在另一个顶点$b \in K_s \setminus (N_G(u) \cup \{a\})$，也不与任何填充边关联，那么边 ab和 uw 将构成一个 $2K_2$，矛盾。因此，所有填充边都将关联于 $K_s \setminus (N_G(u) \cup \{a\})$ 中的顶点。但如果 z 是 S中 a的邻居，那么边 az 和 uw 将构成一个 $2K_2$，矛盾。 □

由于团 K 中的顶点两两相邻，我们注意到$|K \setminus K_s| \leq 1$。该引理直接表明，给定集合 K_s，可以在 $O(|V(G)|)$ 时间内计算最少填充边数；否则，时间复杂度为 $O(|V(G)| + |E(G)|)$。

4 阈值图与准阈值图

阈值图。完美图中一个著名的子类称为阈值图，其独立顶点集的子集可以用单个线性不等式加以区分。若存在一个阈值

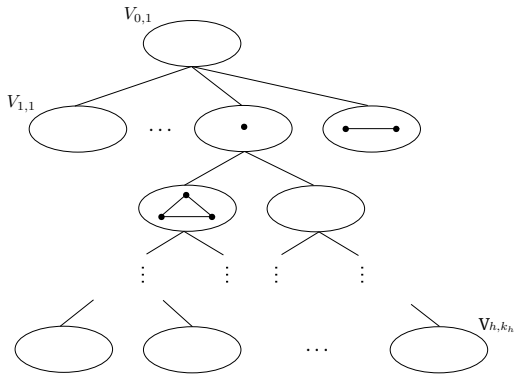

图 2：准阈值图的树表示。

赋值 $[\alpha, t]$，由一个将顶点标记为非负整数的标记 α 和一个整数阈值 t 组成，使得：集合 $S \subseteq V$（G）是独立集，当且仅当 α（v_1）$+\alpha$（v_2）$+\cdots+\alpha$（v_p）$\leq t$，其中 $v_i \in S$、$1 \leq i \leq p$。Chvátal 和 Hammer[3] 于 1973年 首次提出阈值图，并证明阈值图恰好是不含导出子图 C_4、P_4 或 $2K_2$ 的图。

Nikolopoulos [20] 证明，每个阈值图都存在唯一的有根树表示，如图 1 所示：每个树节点都与一个顶点集相关联$V_{i,j}$（这些集合划分了该图的顶点集），其中每个 $V_{i,1}$都导出一个团，而其余集合各自只包含一个顶点（注意，与这些单元素集相关联的树节点没有后代节点）；并且，从一个树节点到其任一后代节点的树边路径上各节点所关联的集合的并集中的顶点会导出一个团。因此，$V_{k,1}$ 中的顶点与 $\bigcup_{i>k} V_{i,j}$中的所有顶点相邻，$\bigcup_i \bigcup_{j\geq 2} V_{i,j}$ 中的顶点构成一个独立集，而 $\bigcup_i V_{i,1}$ 中的顶点导出一个团。

设 G 是一个阈值图，并考虑在 G 处添加尾部 uw，其中 $u \in V$（G）。接下来可以证明以下引理。

引理 2. 设 G 是一个阈值图，其树表示 T_G 由与集合 $V_{i,j}$ 相关联的节点组成，其中 $0 \leq i \leq h$ 和 $1 \leq j \leq k_i$（图 *1*）。考虑添加尾部 uw，其中 $u \in V$（G）。那么，存在图 $G+uw$ 的一个最小阈值补全，使用 f 条填充边（不包括 uw），其中：

(i) *If* $u \in V_{i,1}$, *then* $f = \min_{0\leq \ell \leq i}\left\{\left(\sum_{s=\ell+1}^{i}\sum_{t=2}^{k_s}|V_{s,t}|\right)+\sum_{s=0}^{\ell}|V_{s,1}|\right\}$;

(ii) *If* $u \in V_{i,j}$ *where* $2 \leq j \leq k_i$, *then* $f = \min\{f_1, f_2\}$ *where*

$f_1 = \sum_{r=i}^{h}|V_{r,1}| + \min_{i\leq \ell \leq h}\left\{\left(\sum_{s=\ell+1}^{h}\sum_{t=2}^{k_s}|V_{s,t}|\right)+\sum_{s=0}^{\ell}|V_{s,1}|\right\}$ *and*

$f_2 = \sum_{r=i}^{h}|V_{r,1}| + \min_{0\leq \ell \leq i-1}\left\{\left(\sum_{s=\ell+1}^{h}\sum_{t=2}^{k_s}|V_{s,t}|\right)+\sum_{s=0}^{\ell}|V_{s,1}|\right\} - 1.$

拟阈值图。如果一个图 G 不含导出的 C_4 或 P_4 [6,18,27,28]，则称其为拟阈值图，简称 QT 图。拟阈值

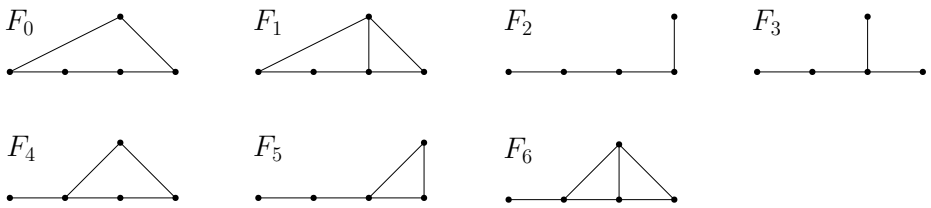

图 3： P_4-稀疏图类的禁用子图 [15]。

图是余图类的子类，并且真包含阈值图类 [4,5,7,29]。Nikolopoulos 和 Papadopoulos [24] 证明了 QT 图具有唯一的有根树表示等性质，该表示推广了阈值图的树表示（图 2）：树节点对应互不相交的顶点子集，每个子集导出一个团；从某个树节点到其任意后代节点的路径上，各树节点所对应的顶点集共同导出一个团。已经证明，一个图是 QT 图，当且仅当它具有这样的树表示 [17,21]。接着，通过推广阈值图的处理方法，我们可以证明以下引理。

引理 3. 设 $G = (V, E)$ 是一个 *QT* 图，且 T_G 是其树表示。考虑在 G 的节点 u 上添加一个与之关联的尾部 uw，并且不失一般性地设 $u \in V_{i,1}$，从 T_G 的根节点到与 $V_{i,1}$ 关联的节点的路径上，各树节点所对应的顶点集依次为 $V_{0,1}, V_{1,1}, \ldots, V_{i,1}$。那么，图 $G + uw$ 存在一个最小 *QT* 补全，所需填充边的最小数量（不包括尾部 uw）为 $\min_{0 \le \ell \le i} \left\{ \left(\sum_{s=\ell+1}^{i} \sum_{t=2}^{k_s} |V_{s,t}| \right) + \sum_{s=0}^{\ell} |V_{s,1}| \right\}$

5 P_4-稀疏图

P_4稀疏图定义为这样一类图：其中每个包含 5 个顶点的集合至多导出一个 P_4 [12]（图 3 描绘了 P_4稀疏图类的 7 个禁用子图）。P_4稀疏图是完美图，也是完美可排序图 [12],，并且严格包含许多图类，例如余图、P_4可约图等（见 [1,14,15]）。近年来，这类图受到了相当多的关注，并在应用数学和计算机科学（例如通信、交通运输、聚类、调度、计算语义学）中涉及具有“局部稠密性”性质的图的问题上得到应用。

对于 P_4稀疏图，图本身或其补图是不连通的，其连通分量导出 P_4稀疏图；或者该图导出一个蜘蛛图。如果一个图 H 的顶点集 V（H）可以划分为集合S、K、R，使得：

– 集合 S 是一个独立集，集合 K 是一个团，且 $|S| = |K| \ge 2$;– R 中的每个顶点都与 K 中的每个顶点相邻，且与 S中的任何顶点都不相邻；

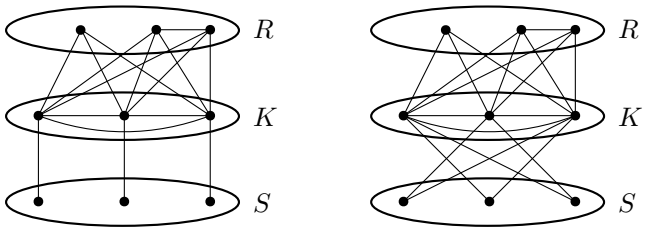

图4：（左）薄蜘蛛；（右）厚蜘蛛。

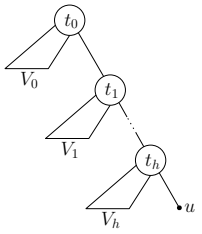

图5

– 存在一个双射 $f\colon S \to K$，使得对于每个顶点 $s \in S$，要么$N_G(s) \cap K = \{f(s)\}$，要么 $N_G(s) \cap K = K - \{f(s)\}$；前一种情况下，蜘蛛图是薄的，后一种情况下则是厚 的（见图4）。

注意，对于 $|S| = |K| = 2$，该蜘蛛图同时是薄蜘蛛和厚蜘蛛。为避免歧义，在下文中，对于厚蜘蛛图，我们假设 $|K| \geq 3$。

在 [15], 中，Jamison 和 Olariu 证明，每个 P_4-稀疏图 G 都具有唯一的树表示（在同构意义下），称为 P_4-稀疏树 $T(G)$，它是 G的一棵根树，满足：

（i） $T(G)$ 的每个内部节点至少有 2 个子节点，前提是 $|V(G)| \geq 2$；（ii）内部节点标记为 0、1 或 2 中的一个（分别为 0-、1-、2-节点），且每个 0-节点或 1-节点的父节点 t 具有不同于 t 的标记；（iii） P_4-稀疏树的叶节点与 G 的顶点一一对应；如果对应于 $v_i v_j$ 的两个顶点的叶节点的最近公共祖先是 0-节点（分别为 1-节点），则顶点 $v_i v_j$ 在 G 中不相邻（相邻），而对应于以 2-节点为根的子树的叶节点的顶点导出一个蜘蛛图。

P_4-稀疏树的结构蕴含以下引理。

引理 4. 设 G 是一个 P_4-稀疏图，且 $H = (S,\ K,\ R)$ 是 G的一个薄蜘蛛图。此外，设 $s \in S$ 和 $k \in K$ 是蜘蛛图中相邻的顶点。

P1。蜘蛛图中的每个顶点都与 $N_G(s) \setminus \{k\}$中的所有顶点相邻。***P2***。每个顶点 $z \in K \setminus \{k\}$ 都与 $N_G(k) \setminus \{s, z\}$中的所有顶点相邻。

设 G 是给定的图，我们希望向其中添加尾部 uw，其中包含 $u \in V(G)$。设 $t_0 t_1 \cdots t_h u$ 是从 G 的 P_4-稀疏树 T_G 的根节点 t_0 到与 u关联的叶节点的路径。此外，设 V_i $(0 \leq i < h)$ 是与以 t_i 的子节点为根节点的子树的叶节点相关联的顶点集合，但不包括 t_{i+1}；设 V_h 是与以 t_h 的子节点为根节点的子树的叶节点相关联的顶点集合，但不包括与 u 关联的叶节点（见图 5）。集合 V_0、V_1、.....、V_h 构成 $V(G) \setminus \{u\}$的一个划分。

我们证明，对于图 $G + uw$，总存在一个最小的 P_4-稀疏补全，它对于 u、w呈现出少数几种不同构型之一。

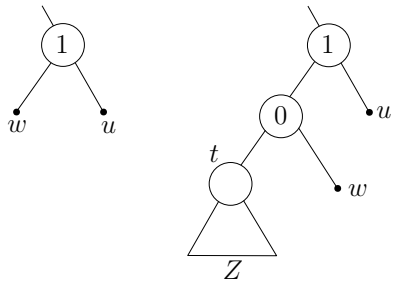

图 6: （左）构造 1；（右）构造 2，其中 t 是一个 1-节点或 2-节点。当 $Z = \emptyset$ 时，构造 1 是构造 2 的一个特例。

引理 5. 设 G 是一个 P_4-稀疏图， T_G 是其 P_4-稀疏树。考虑添加一个与 G的节点 u关联的尾部 uw 。那么，存在图 $G+uw$ 的一个最小P_4-稀疏补全 G'，使得对于 G'的 P_4-稀疏树 $T_{G'}$，以下三种情形之一成立：

1. $T_{G'}$ 中的节点 u， w 具有相同的父节点，该父节点是一个2-节点，对应于一个薄蜘蛛（S， K， R），其中有 $u \in K$ 和 $w \in S$。 *2.* P_4-稀疏树 $T_{G'}$ 是由 T_G 将对应于 u 的叶节点替换为图 *6* （左）所示的构造 *1*3- 树节点后得到的。 *3.* P_4-稀疏树 $T_{G'}$ 是由 T_G 移除对应于 u 的叶节点，并将从 T_G 的根节点到对应于 u 的叶节点的路径上的一个 1- 节点或 2- 节点 t 替换为图 *6* （右）中的构造 *2*5- 树节点后得到的。

证明。 设 G_{OPT} 是图 $G+uw$ 的一个最小 P_4-稀疏补全，且 T_{OPT} 是其 P_4-稀疏树。我们考虑以下情况：
A. 与 u、w 关联的 T_{OPT} 中的叶节点没有相同的父节点：设 T_R 是从 T_{OPT} 通过在 T_{OPT} 中 w 和 u 的最近公共祖先 t 正上方使用构造 2 得到的 P_4-稀疏树（图7）；设 G_R 是与树 T_R 对应的 P_4-稀疏图。那么， G_R 使用的填充边不多于 T_{OPT}。为说明这一点，设 t' 是 t 的一个子节点，且它是 u 对应叶节点的祖先（注意， t' 可能与 u 对应的叶节点重合）。由于 u、w 在 G_{OPT} 中相邻，t 是一个 1-节点或 2-节点。无论哪种情况， w 都与以 t' 为根的 T_{OPT} 子树中各叶节点对应的所有顶点相邻，且除尾部 uw 外，这些边都是填充边。如果 t 是一个 1-节点，那么 u 与 X 中的所有顶点相邻（图7），因此 G_R 使用的填充边不多。如果 t 是一个 2-节点，那么 u 与对应蜘蛛图的团 K_X 中所有顶点相邻（其中包括 w）。此外，由于 $w \in K_X$， w 与 $K_X \setminus \{w\}$ 中的所有顶点相邻，并且与独立集中的至少一个顶点相邻，因此总共需要 $|K_X|$ 条填充边；这些填充边可用于将 u 与该蜘蛛图的独立集中的顶点相连，所以在这种情况下， G_R 使用的填充边也不多。

现在，在图7（右）中的 P_4-稀疏树 T_R 中，令 $A = V(G) \setminus (Z \cup \{u\})$。回顾一下，在 P_4 的 T_G -稀疏树 G 中，从根节点 t_0 到 u 的路径是

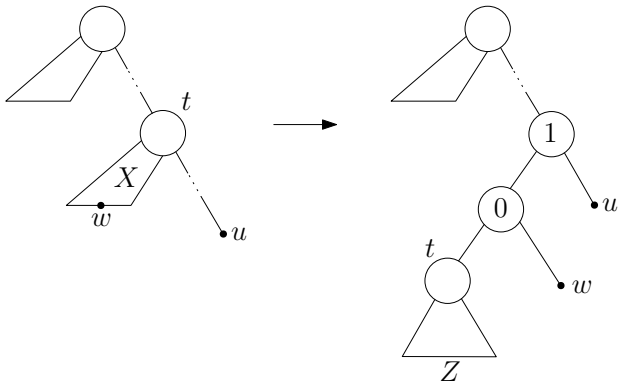

图 7: （左） P_4-稀疏树 T_{OPT}，其中 u、w 对应的叶节点没有相同的父节点，且以节点 t 为它们的最近公共祖先；（右）在节点 t 正上方使用构造 2 得到的 P_4-稀疏树 T_R，其填充边不多于 G_{OPT}中的填充边。

$t_0t_1\cdots t_hu$，而 $V_i(0 \le i \le h)$ 是与以 t_i 的子节点为根的子树的叶节点相关联的顶点集合，但不包括 t_{i+1} （其中 t_{h+1} 是与 u 相关联的叶节点）；见图 5。

我们首先注意到，由与以节点 t为根的 T_R 子树的叶节点相对应的顶点集合 Z 导出的诱导子图 $G_R[Z]$，与诱导子图 $G[Z]$ 重合（否则 G_{OPT} 将包含可删除的填充边，这与其最优性矛盾）；接着，令 $t = t_k$。同样，T_R 中的节点 t 是一个 1- 节点或 2- 节点，因为在 T_{OPT} 中，节点 t 也是一个 1- 节点或 2- 节点。令 $A = V(G) \setminus (Z \cup \{u\})$。注意，不存在集合 V_j使得 x、$y \in V_j$、x 是 G、$x \in V_j \cap A$和 $y \in V_j \cap Z$中 u的邻居；否则，我们可以连同 y一起将 x 移至 Z；由于 y 属于 Z，y 与 G 中所有属于 $V(G) \setminus (V_j \cup \{u\})$ 的顶点之间的所有邻接关系都得以保持，这对 x也成立，并且填充边 xw 将被移除，矛盾。类似地，不存在集合 V_j使得 x、$y \in V_j$、y是 G和 $x \in V_j \cap A$中 u的非邻点；否则，我们可以连同 x一起将 y 移至 A。这意味着，对于每个 $i = 0$，1，....., h，要么 $V_i \subseteq A$，要么 $V_i \subseteq Z$；又由于 $t = t_k$，$V_k \subseteq Z$。

最后，不存在满足 $V_j \subseteq A$ 的 $j > k$。假设存在这样的 V_j，并令 j 为满足条件的最大索引。那么，由于 $t = t_k$ 是 1-节点或 2-节点，且 $k < j$，因此存在顶点 $z \in V_k$，它与 V_j 中的所有顶点都相邻。这意味着，在 T_R 中，z 与 V_k 中各顶点的最近公共祖先将是一个 1-节点。但如果我们将 V_j 移到 Z，填充边就会更少，这就产生了矛盾。因此，树 T_R 正如引理陈述中的情形 3 所述。

B. 与 u、w 在 T_{OPT}相关联的叶节点具有相同的父节点 p：由于 u、w 相邻，因此父节点 p 要么是 1-节点，要么是 2-节点。

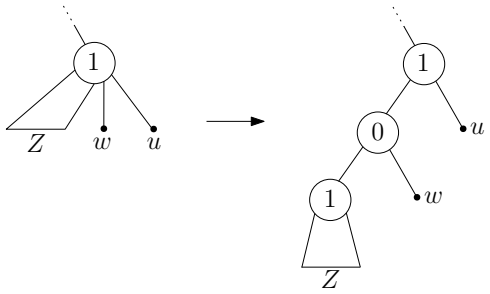

图 8：一种减少填充边数量的变换。

(i) 在 T_{OPT}中， u、 w的父节点 p是一个 1-节点：于是，与 u和 w相关联的叶节点是 p的唯一子节点（构造 1）；否则，我们可以使用图 8 所示的构造 2，该构造所需的填充边更少。于是， w将与 T_{OPT}中 u的所有邻居相邻；这与 G_{OPT}的最优性表明， T_{OPT}是通过将 u对应的叶节点替换为构造 1，由 T_G得到的。

（ii） T_{OPT}中 u,w的父节点 p是一个 2-节点：设 $H=(S,K,R)$为相应的蜘蛛图。若 H是厚的（因此 $|K|\geq 3$），那么无论尾部 uw是 S-K边、 K-K边还是 R-K 边， u、 w 在H中的度数之和（不包括 uw）至少为 $|V(H)|-3+|K|-2$（考虑一条 S-K 边）。然而，若我们在 $G[V(H)\setminus\{w\}]$中令 u 为全邻，然后在u 的叶节点的父节点处应用构造 2（此时 $Z=V(H)\setminus\{u,w\}$），使用 $V(H)-2\leq V(H)+|K|-5$ 条填充边，则不会增加更多填充边。同理可证明，若H 是薄蜘蛛，且尾部 uw 是 K-K 边或 K-R 边，则也不会增加更多填充边。若 uw 是一条 S-K边，且 $u\in S$ 和 $w\in K$，那么我们交换 u 和 w，使填充边总数保持不变，并得到一个带有 $u\in K$ 和 $w\in S$的薄蜘蛛。

□

5.1 给蜘蛛图添加尾部

本节中，我们考虑给蜘蛛图 $H=(S_H,K_H,R_H)$ 添加尾部 uw，其中 $u\in V(H)$。在接下来的两个引理中，我们分别讨论薄蜘蛛图和厚蜘蛛图的情况 H。

引理 6. 考虑给一只薄蜘蛛图 $H=(S_H,K_H,R_H)$ 添加尾部 uw，其中 u 是 H 的一个顶点。那么，对于图 $H+uw$ 的一个最小 P_4-稀疏补全中填充边的数量 f（不包括尾部 uw），有：

1. 若 $u\in S_H$, $f=|K_H|-1$；若 $R_H=\emptyset$且 $f=|K_H|$，则取其他情况；*2.* 若 $u\in K_H$, $f=|K_H|-1$; *3.* 若 $u\in R_H$，则 $f=$最小 $\{|R_H\setminus N_H[u]|,\ |K_H|+f'\}$，其中 f'是图 $H[R_H]+uw$的一个最小 P_4-稀疏补全中填充边的数量（不包括 uw）。

证明。1. 设 $v \in K_H$ 是 H 中 u 的邻居。于是，我们可以按如下方式得到一个 P_4-稀疏图：若 $R_H = \emptyset$，则将 u 与 $K_H \setminus \{v\}$ 中的所有顶点相连（我们得到一个包含 $S = (S_H \setminus \{u\}) \cup \{w\}$、$K = (K_H \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ 和 $R = \{v\}$ 的薄蜘蛛图，也就是说，尾部 uw 是薄蜘蛛图的 P_4 的一个翼）；否则，将 v 与 $\{w\} \cup (S_H \setminus \{u\})$ 中的所有顶点相连，这使得 v 在 $V(H) \cup \{w\}$ 中成为全邻顶点，而 u 和 w 在 $G[V(G) \setminus \{v\}]$ 中构成一个独立的连通分量；填充边总数（不包括尾部 uw）在 $R_H = \emptyset$ 时恰为 $|K_H| - 1$，否则为 K_H。

此外，这是所需填充边（不包括 uw）的最小数量。首先注意，对每一对 k_i, s_i，其中 $k_i \in K_H \setminus \{v\}$ 且 $s_i \in S_H \setminus \{u\}$，顶点 v, u, w, k_i, s_i 会导出一个 F_5 或一个 F_3，具体取决于顶点 v, w 是否相邻，这意味着至少需要 $|K_H| - 1$ 条填充边（不包括 uw）。接着，若存在一种方法，只需添加少于引理陈述中情形 1 所提及数量的填充边，就能得到一个 P_4-稀疏图，那么必然有：(i) $R_H \neq \emptyset$；(ii) 每一对 k_i, s_i（其中 $k_i \in K_H \setminus \{v\}$ 且 $s_i \in S_H \setminus \{u\}$）恰好关联一条填充边；(iii) 不存在其他填充边。令 $r \in R_H$ 且 $k \in K_H \setminus \{v\}$。那么，顶点 v, u, w, k, r 会导出一个禁用子图（若 k 与 u, w 均不相邻，则为一个 F_5；若通过一条填充边使 k 与 u（分别与 w）相邻，则为一个 F_6（分别为 F_1）；因此，在这种情况下至少需要 K_H 条填充边。

2. 设 $v \in S_H$ 是 H 中 $u \in K_H$ 的邻居。然后，通过将 u 与 $S_H \setminus \{v\}$ 中的所有顶点相连（这使得 u 在 H 中成为全邻顶点），或者将 w 与 $K_H \setminus \{u\}$ 中的所有顶点相连，可以得到一个 P_4-稀疏图。此外，这是需要添加的填充边（不包括尾部 uw）的最小数量。反设在向薄蜘蛛图 H 添加少于 $|K_H| - 1$ 条填充边（不包括 uw）后，我们得到一个 P_4-稀疏图。那么，存在一对相邻顶点 s、k，满足 $s \in S_H \setminus \{v\}$ 和 $k \in K_H \setminus \{u\}$，且 s 和 k 均未关联填充边。于是，顶点 u、v、w、s、k 导出一个禁用子图 F_5；若 w 和 v 相邻，则为 F_3，反之亦然，矛盾。

3. 术语 $R_H \setminus N_H[u]$ 对应于使 u 在 $H[R_H]$ 中成为全邻；在这种情况下，所得图是 P_4-稀疏的（它是一个薄蜘蛛图，其中有 $S = S_H \cup \{w\}$、$K = K_H \cup \{u\}$ 和 $R = R_H \setminus \{u\}$）。术语 $|K_H| + f'$ 对应于添加 $|K_H|$ 条填充边，将 w 与 K_H 中的顶点相连，然后计算图 $H[R_H] + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全。注意，不存在这样的 $H + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全：在其中 u 在 R_H 中不是全邻，且关联于 $S_H \cup K_H$ 中顶点的填充边少于 $|K_H|$ 条。若存在这样的 $H + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全 H'，那么在 H' 中将存在一个非邻点 $r \in R_H$，以及一对相邻顶点 s、k，其中 $s \in S_H$ 且 $k \in K_H$，并且 s 和 k 均不与填充边关联；但这样一来，在 H' 中，顶点 u、w、r、s、k 将导出一个 F_4，或者在 w、r 是否由填充边相连的情况下分别导出一个 F_3，从而导致矛盾。反过来，如果 H' 与 $S_H \cup K_H$ 中的顶点关联的填充边至少有 $|K_H$ 条，那么 $H'[R_H \cup \{w\}]$ 就能用少于 f' 条填充边成为 P_4-稀疏的，这与 f' 的极小性矛盾。

□

引理 7. 考虑在厚蜘蛛图 $H = (S_H, K_h, R_H)$ 上添加一个尾部 uw，其中 u 是 H 的一个顶点。那么，对于图 $H + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全中填充边的数量 f（不包括尾部 uw），有：

1. 若 $u \in S_H$,

$$f = \begin{cases} |K_H| - 1 = 2 & if\ |K_H| = 3\ and\ R_H = \emptyset \\ |K_H| = 3 & if\ |K_H| = 3\ and\ |R_H| = 1 \\ |K_H| + 1 = 4 & if\ |K_H| = 3\ and\ |R_H| \geq 2 \\ |K_H| & if\ |K_H| \geq 4\ and\ R_H = \emptyset \\ |K_H| + 1 & if\ |K_H| \geq 4\ and\ |R_H| \geq 1; \end{cases}$$

2. 若 $u \in K_H$, $f = 1$;

3. 若 $u \in R_H$, 则 $f = |K_H| + f'$，其中 f' 是图 $H[R_H] + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全中的填充边数量（不包括 uw）。

证明。1. 令 $v \in K_H$ 为图 H 中 u 的非邻点。我们先考虑 $|K_H| = 3$ 这种情况。若 $|R_H| \leq 2$，添加填充边 vu 和 vw 后可得到一个 P_4-稀疏图（这意味着 v 在 $(V(H) \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ 中变为全邻），并在 R_H 非空时添加连接 u 与 R_H 中顶点的边；此时，$(V(H) \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ 中的顶点导出一个薄蜘蛛，其中有 $K = (K_H \setminus \{v\}) \cup \{u\}$、$S = (S_H \setminus \{u\}) \cup \{w\}$ 和 $R = R_H$，总计需要 $|K_H| - 1 + |R_H|$ 条填充边（不包括尾部 uw）。若 $|R_H| \geq 2$，则在添加尾部 uw 后，再添加填充边 vu、vw（同样，v 在 $(V(H) \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ 中为全邻），以及连接 w 与 $K_H \setminus \{v\}$ 中顶点的填充边，即可得到一个 P_4-稀疏图（此时，$(V(H) \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ 中的顶点导出一个薄蜘蛛，其中有 $K = K_H \setminus \{v\}$、$S = S_H \setminus \{u\}$ 和 $R = R_H \cup \{u, w\}$），总计需要 $|K_H| + 1$ 条填充边（不包括 uw）。

现在考虑 $|K_H| \geq 4$ 的情况。如果 $|R_H| \leq 1$，则在通过使用 $|K_H| - 1$ 条填充边将其与 S_H 中的其余顶点相连，使其成为全邻顶点，并添加填充边 uv，以及在 R_H 非空时将 u 与 R_H 中的顶点相连之后，我们得到一个 P_4-稀疏图，共有 $|K_H| + |R_H|$ 条填充边（不包括 uw）。如果 $|R_H| \geq 1$，则在使 v 成为全邻顶点（通过添加填充边 vu 和 vw），并将 w 与 $K_H \setminus \{v\}$ 中的所有顶点相连之后，可得到一个 P_4-稀疏图（此时，$(V(H) \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ 中的顶点导出一个具有 $K = K_H \setminus \{v\}$、$S = S_H \setminus \{u\}$ 和 $R = R_H \cup \{u, w\}$ 的厚蜘蛛图），共有 $|K_H| + 1$ 条填充边（不包括 uw）。

下面我们证明该解的极小性。回顾一下，$v \in K_H$ 是 H中 u 的非邻点。我们逐一考察这五种情况。

(i) $|K_H| = 3$ 和 $R_H = \emptyset$：反设存在一个 P_4-稀疏补全，使得 $H + uw$ 至多有 $|K_H| - 2 = 1$ 条填充边（不包括 uw）。如果 v 关联于唯一的填充边（该边连接 v 与 u 或 w），那么 $S \cup \{v, w\}$ 中的顶点将导出一个 F_3。现在假设该填充边不与 v关联。此外，至少存在一个顶点 $s \in S_H \setminus \{u\}$ 也不与该填充边关联。于是，顶点 u、v、w、s、k（其中 $k \in K_H$ 是 H中 s 的非邻点）将导出一个 F_5，当 k、w 由该填充边连接时；否则将导出一个 F_2。

(ii) $|K_H| = 3$和 $|R_H| = 1$: 令 $R_H = \{r\}$。反设存在一个 P_4-稀疏补全，使得 $H + uw$ 至多有 $|K_H| - 1 = 2$ 条填充边（不包括 uw）。根据 v 关联于 0、1 还是 2 条填充边，我们分三种情况讨论:

- v 不与填充边关联: 如果存在一对非邻点 s、k，满足 $s \in S_H \setminus \{u\}$ 和 $k \in K_H \setminus \{v\}$，且 s、k 均未通过填充边与 u 或 w 关联，那么顶点 u、v、w、s、k 导出一个 F_2。否则，由于此类点对有 2 对，对于每一对这样的点对 s、k, $s.k$ 中恰有一个通过填充边与 u 或 w 关联，且不存在其他填充边。如果存在一个顶点 $k \in K_H \setminus \{v\}$，它未通过填充边与 w 关联，那么顶点u、v、w、k、r 导出一个 F_5; 否则，每条填充边都将 $K_H \setminus \{v\}$ 中的每个顶点与 w 相连，于是 u、v、w、s、k（对于任意一对满足 $s \in S_H \setminus \{u\}$ 和 $k \in K_H \setminus \{v\}$ 的非邻点 s、k）导出一个 F_5。
- v 关联于 1 条填充边（连接到 u 或 w）: 于是还存在 1 条填充边; 因此, 集合（$S_H \setminus \{u\}$）$\cup \{r\}$ 中有 2 个顶点，它们都没有与连接到 u 或 w的填充边关联，令这两个顶点为 p_1、p_2。那么，顶点 u、v、w、p_1、p_2 导出一个 F_5，当且仅当 p_1、p_2由一条填充边连接; 否则导出一个 F_3 。
- v 关联于 2 条连接它与 u 和 w的填充边: 不存在其他填充边。那么, 顶点 u、w、k、k'、r（其中 $\{k, k'\} = K_H \setminus \{v\}$）导出一个 F_6。

（iii） $|K_H| = 3$和 $|R_H| \geq 2$: 设 r_1、r_2是 R_H中的两个顶点。反设存在一个 P_4-稀疏补全 $H + uw$，其填充边至多有$|K_H| = 3$ 条（不包括 uw）。同样, 我们根据 v 关联 0、1 或 2 条填充边，分三种情况讨论:

- v 未与填充边关联: 考虑存在一个顶点 $k \in K_H \setminus \{v\}$，它与 w 之间没有填充边关联的情形。设 $s \in S_H$ 是 k 在 H 和 $A = (S_H \setminus \{u, s\}) \cup \{r_1, r_2\}$ 中的非邻点; 集合 A 包含 3 个顶点，它们都是 v、k 的公共邻点。如果这 3 个顶点中至少有一个（例如 p）没有与 u、w 之间的填充边关联，那么顶点 u、v、w、k、p 导出一个 F_5; 否则，这 3 个顶点都与 u、w 之间有填充边关联（那么这些就是全部填充边），且顶点 u、v、w、s、k 导出一个 F_2。另一方面，如果不存在这样的顶点 k，那么 $K_H \setminus \{v\}$ 中的两个顶点都与 w 之间有填充边关联，占 3 条填充边中的 2 条; 于是存在一个顶点 $s' \in S_H \setminus \{u\}$，它没有与 w 之间的填充边关联，而顶点 u、v、w、s'、k'（其中 $k' \in K_H$ 是 s' 的非邻点）导出一个 F_5。
- v 关联于 1 条填充边（连接至 u 或 w）: 还存在 2 条填充边; 因此, 集合 $(S_H \setminus \{u\}) \cup \{r_1, r_2\}$ 中存在 2 个顶点，它们与 u 或 w之间没有关联的填充边，设这两个顶点为 p_1, p_2。那么，顶点 u, v, w, p_1, p_2 导出一个 F_5，当且仅当 p_1, p_2 由一条填充边连接; 否则导出一个 F_3 。
- v 与.....关联 2 条填充边将其连接到 u 和 w: 于是还剩下 1 条填充边; 因此，存在一个顶点 $k \in K_H \setminus \{v\}$ 未与该填充边关联。此外，集合 $(S_H \setminus \{u, s\}) \cup \{r_1, r_2\}$ 中存在 2 个顶点，它们未与一条将它们连接到

u 或 w（其中 $s \in S_H$ 是 k的非邻点）；设这些顶点为p_1、p_2。如果 p_1 和 p_2 相邻，则顶点 u、w、k、p_1、p_2 导出一个 F_5；否则导出一个 F_3。

(iv) $|K_H| \geq 4$ 和 $R_H = \emptyset$: 反设，存在一个 $H+uw$ 的 P_4-稀疏补全，其中至多有 $|K_H|-1$ 条填充边（不包括尾部 uw）。同样，根据 v 关联的填充边数量是 0、1 还是 2，分为三种情况：

- v 不与填充边关联：若存在一个顶点 $s \in S_H \setminus \{u\}$，它与 u、w 或其在 H中的非邻点 $k \in K_H$ 之间均没有填充边，则顶点 u、v、w、s、k 导出一个 F_5（如果 k和 w 由一条填充边连通），否则导出一个 F_2；若 $S_H \setminus \{u\}$ 中的所有顶点都与u、w或它们在 K_H中的非邻点之间有填充边，则不存在其他填充边，并且顶点 u、v、w、k、k'（对于任意 k、$k' \in K_H \setminus \{v\}$）导出一个 F_6。
- v 与 1 条填充边关联（连接到 u 或 w）：那么，其余填充边总数至多为 $|K_H|-2$。如果存在两个顶点 s_1、$s_2 \in S_H \setminus \{u\}$，它们没有通过填充边连接到 u 或 w，那么顶点 u、v、w、s_1、s_2 会导出一个 F_5 或一个 F_3，具体取决于 s_1 和 s_2 是否由填充边连接。因此，不可能存在两个这样的顶点 s_1、s_2；这意味着其余填充边恰好为 $|K_H|-2$，并且它们将 $S_H \setminus \{u\}$ 中除一个顶点外的所有顶点连接到 u 或 w；将该顶点记为 s。那么，顶点u、v、w、s、k'（其中 $k' \in K_H \setminus \{v\}$是 H中 s的一个邻居）会导出一个 F_6；如果与 v 关联的填充边分别将其连接到 u 或 w，则会导出一个 F_1。
- v 关联着 2 条填充边，分别连接到 u 和 w：因此，其余填充边总数至多为 $|K_H|-3$；于是，存在两对不相邻顶点 s_1、k_1 和 s_2、k_2，满足 s_1、$s_2 \in S_H \setminus \{u\}$ 以及k_1、$k_2 \in K_H \setminus \{v\}$，使得 s_1、s_2、k_1、k_2 均不与 u 或 w通过填充边相连。令 $A = S_H \setminus \{u, s_1, s_2\}$；集合 A 是 S_H 中除 u 外，k_1、k_2 的 $|K_H|-3$个公共邻点。若存在一个顶点$s \in A$，它不与 u 或 w通过填充边相连，则顶点 u、w、k_1、k_2、s导出一个 F_6；否则，剩余的填充边恰为 $|K_H|-3$，并且它们将 A 中的每个顶点连接到 u 或 w，也就是说，$K_H \setminus \{v\}$ 中没有顶点关联填充边。于是，顶点u、w、s_1、s_2、k（其中 k 是 $K_H \setminus \{v, k_1, k_2\}$中任意一个顶点）导出一个 F_3。

(v) $|K_H| \geq 4$并且 $|R_H| \geq 1$: 令 $r \in R_H$。反设存在一个 $H+uw$ 的 P_4-稀疏补全，至多包含 $|K_H|$ 条填充边（不包括尾部 uw）。同样，我们根据 v 关联 0、1 还是 2 条填充边，区分三种情况：

- v 不与填充边关联：若存在一个顶点 $s \in S_H \setminus \{u\}$，它与 u、w或其在 H中的非邻点 $k \in K_H$ 之间没有填充边，则当 k、w 由填充边连通时，顶点 u、v、w、s、k 导出一个 F_5；否则导出一个 F_2。若 $S_H \setminus \{u\}$ 中的所有顶点都与 u、w或它们在 K_H中的非邻点之间存在填充边，而这些边合计占 $|K_H|$ 条填充边中的 $|K_H|-1$ 条，则存在顶点 k、$k' \in K_H \setminus \{v\}$，它们不与填充边关联，进而顶点 u、v、w、k、k' 导出一个 F_6。
- v 关联于 1 填充边（连接到 u 或 w）：那么，剩余填充边的总数至多为 $|K_H|-1$。如果 $K_H \setminus \{v\}$中的所有顶点都关联于一条填充边，

并且该边连接到 w，那么就不存在其他填充边，且顶点 u, v, w, s_1, s_2（对于任意 $s_1, s_2 \in S_H \backslash \{u\}$）导出一个 F_3。因此，存在一个 $k \in K_H \backslash \{v\}$，它没有关联一条连接到 w的填充边。 $S_H \cup r$ 中v, k 的公共邻居数为 $|K_H| - 1$。如果这些顶点中的每一个都关联一条连接到 u或 w的填充边，那么就不存在其他填充边；并且，根据关联于v 的填充边分别将其连接到 u 还是 w，顶点 u, v, w, s, k'将导出一个 F_6 或一个 F_1 。其中， $s \in S_H$ 是 k 的非邻点，而 k' 是 $K_H \setminus \{v, k\}$中的任意顶点；因此，存在一个公共邻居 p，它没有关联一条连接到 u或 w的填充边，并且根据关联于 v的填充边分别将其连接到 u 还是 w，顶点 u, v, w, k, p将导出一个 F_6 或一个 F_1 。

- v 与两条填充边关联，这两条边分别连接到 u 和 w：因此，其余填充边总数至多为 $|K_H| - 2$；故存在一对不相邻顶点 s、 k（其中 $s \in S_H \setminus \{u\}$ 和 $k \in K_H \setminus \{v\}$），它们均不与连接到 u 或 w的填充边关联。令 $A = （S_H \setminus \{u, s\}） \cup \{r\}$；集合 A是 k除 u之外的 $|K_H| - 1$ 个邻点的集合。于是，存在一个顶点 p_1 属于 A，且它不与连接到 u 或 w的填充边关联。如果 A 中还存在第二个顶点 p_2，它不与连接到 u 或 w的填充边关联，那么顶点 u、 w、 k、 p_1、 p_2 导出一个 F_5（若 p_1、 p_2 由一条填充边连接），否则导出一个 F_3。如果 $A \setminus \{p_1\}$ 中的每个顶点都与一条连接到 u 或 w的填充边关联，那么与这些顶点关联的填充边总计恰好是剩余的 $|K_H| - 2$ 条填充边，而顶点 u、 w、 s、 k_1、 k_2（对任意顶点 k_1、 $k_2 \in K_H \setminus \{v, k\}$）导出一个 F_6。

因此，如果我们在每种情况下使用的填充边少于所述数量，所得图就会包含一个诱导禁子图，这与假设矛盾。

2. 设 $v \in S_H$ 是 H 中 u 的非邻点。然后，通过连接 u 和 v，我们得到一个 P_4-稀疏图；因此， u 在 $V（H）\cup \{w\}$ 中成为全邻。这是需要添加的填充边的最小数量（不包括尾部 uw），因为对于任意一对非邻点 s、 k，若 $s \in S_H \setminus \{v\}$ 和 $k \in K_H \setminus \{u\}$，则顶点 u、 v、 w、 s、 k 会导出一个禁用子图 F_3，这与假设矛盾。

3. 将 w 与 K_H 中的所有顶点相连，然后计算 $H[R_H \cup \{w\}]$的最小 P_4-稀疏补全，我们便得到一个 P_4-稀疏图，所需的填充边数量为 $|K_H| + f'$。

为证明这一填充边数量的极小性，反设我们在 $H + uw$ 中添加至多$|K_H| - 1$ 条与 $S_H \cup K_H$中的顶点关联的填充边（尾部 uw除外）后，可以得到一个 P_4-稀疏图。于是，在 H 中存在一对非邻点 s_1、 k_1，满足 $s_1 \in S_H$ 和 $k_1 \in K_H$ 均没有通过填充边与 u 或 w关联。我们区分以下两种涵盖所有可能性的情况。

– 中的每个顶点 $K_H \setminus \{k_1\}$ 都通过一条填充边与 w关联。这些恰好是所有的 $|K_H| - 1$ 填充边；因此， $S_H \setminus \{s_1\}$中的顶点均不与填充边关联。于是，顶点 u、 w、 k_1、 s_2、 s_3 （对于任意 s_2、 $s_3 \in S_H \setminus \{s_1\}$）导出一个 F_3。

– $K_H \setminus \{k_1\}$ 中至少存在一个顶点，它没有通过填充边与 w关联。设该顶点为 k_2。那么，如果还存在另一个顶点 $k_3 \in K_H \setminus \{k_1, k_2\}$ 也没有通过填充边与 w 关联，则顶点 u、w、k_2、k_3、s_1 导出一个 F_6。另一方面，如果 $K_H \setminus \{k_1, k_2\}$ 中的每个顶点都通过填充边与 w 关联（这意味着 k_3 与 w相邻），那么这些填充边总数为 $|K_H| - 2$，只剩下 1 条。如果 S_H 中 k_3 的非邻点 s_3 没有通过填充边与 u 或 w关联，那么顶点 u、w、k_1、k_2、s_3 导出一个 F_6；而如果它与 u 或 w相邻，则不会再有填充边。特别地，如果 s_3 与 u相邻，那么顶点 u、k_1、k_3、s_1、s_3 导出一个 F_6；如果它与 w相邻，那么顶点 u、w、k_2、s_1、s_3 导出一个 F_4。

在每种情况下，我们都会得到矛盾。因此，$H + uw$的每个最小 P_4-稀疏补全都至少需要 $|K_H|$ 条与 $S_H \cup K_H$中的顶点关联的填充边。现在，如果存在一个最小 P_4-稀疏补全 H'，它对 $H + uw$ 使用的填充边少于 $|K_H| + f'$ 条，那么其中至少有 $|K_H|$ 条与 $S_H \cup K_H$ 中的顶点关联这一事实意味着，$H'[R_H \cup \{w\}]$ 可以用少于 f'条填充边实现 P_4-稀疏，这与 f'的极小性矛盾。 □

如果（薄或厚）蜘蛛图 H 属于一个更一般的 P_4-稀疏图，那么引理 6 和引理 7推出以下结果。

推论 1. 设 u 是一个 P_4-稀疏图的顶点，我们在该图中添加尾部 uw。设 $t_0 \cdots t_h u$ 是 G 的 P_4-稀疏树中从根节点 t_0 到对应于 u 的叶节点的路径，并设 $V_0, \ldots, V_h$ 是前文提到的相应顶点集。那么，如果 u 的父节点 t_h 是一个对应于蜘蛛图 H的2-节点，则对图 $G + uw$（不包括尾部 uw）进行最小 P_4-稀疏补全所需的填充边数量不超过以下两者中的较小值

(i) 引理 *6* 和引理 *7* 给出的最小数量（分别在 H 为薄或厚时），再加上 $|N_G(u) \cap (V_0 \cup \cdots \cup V_{h-1})|$；以及 *(ii)* 最小$_{t_i=1\text{-}或\ 2\text{-}节点}\{|N_G(u) \cap (V_0 \cup \ldots \cup V_{i-1})| + |(V_i \cup \ldots \cup V_h) \setminus N_G(u)|\}$。

推论 1 的情形 (i) 对应于对图 $H + uw$ 进行最小 P_4-补全，而不改变 G 的其余 P_4- 稀疏树 T_G；情形 (ii) 则对应于使 u 在 H 中成为全邻，然后尝试在 T_G 的路径 $t_0 \cdots t_h$ 上的每个 1-节点或 2-节点处应用上述构造 2。

5.2 算法

回顾一下，$t_0 t_1 \cdots t_h u$ 是 G 的 P_4-稀疏树 T_G 中从根节点 t_0到对应于 u的叶节点的路径；V_i $(0 \leq i < h)$ 是与以 t_i 的子节点为根的子树的叶节点相关联的顶点集合，但不包括 t_{i+1}；而 V_h 是与以 t_h 的子节点为根的子树的叶节点相关联的顶点集合，但不包括对应于 u的叶节点。见图 5。

接下来，我们证明使图 $G + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全所需填充边少于使用构造 1 或构造 2 时所需填充边的条件。

引理 8. 图$G+uw$ G_{OPT} 存在一种最小 P_4-稀疏补全，其所用填充边少于使用构造 1 或 2 时所需的填充边，当且仅当 uw 是 G_{OPT} 中某个 P_4 的翼；这意味着：*(i)* u 是 G 中蜘蛛图的一个顶点（适用引理 *6* 和引理 *7*）；*(ii)* 或者存在 j *(*$0 \leq j < h$*)*，使得t_j 是一个1-节点， t_{j+1} 是一个0-节点，并且存在顶点 a, b，使得 $a \in V_j$ 在 $G[V_j]$ 中全邻，而 $b \in V_{j+1}$ 在 $G[V_{j+1}]$ 中孤立。

然后，在 G_{OPT} 中，顶点 u、w、a、b 在蜘蛛图（S、K、R）中导出一个 P_4，其中有 $S = \{w, b\}$、$K = \{u, a\}$ 和 $R = (V_{j+1} \setminus \{b\}) \cup V_{j+2} \cup \cdots \cup V_h$。

证明。如果不使用构造 1 或构造 2，那么由引理 5 可知，在 G_{OPT} 中，uw 是一个 P_4 的翼。如果 u 是蜘蛛图的一个顶点，那么引理 6 和引理 7 适用。因此，在下文中，假设 u 不是蜘蛛图的顶点。

为了使尾部 uw 成为 G_{OPT} 中某个 P_4 的翼，我们可以证明存在顶点 x、y，使得 uxy 是图 G 中的一个 P_3：如果 u、x、y 不全属于 G 的同一个连通分量，那么我们可以将尾部 uw 添加到包含 u 的 G 连通分量中，从而比 G_{OPT} 使用更少的填充边，这就产生了矛盾；如果 u、x、y 属于 G 的同一个连通分量，但不构成一个 P_3，那么由于 u、y 在 G_{OPT} 中不相邻，因此在 G 中也不相邻， u、y 在 G 中的距离为 2，并且 G 中存在一个 P_3 uay（注意， u、y 不可能在 G 中距离为 ≥ 4，因为这样 G 将包含一个导出的 $P_5 = F_2$；它们也不可能相距 3，因为这样 G 中将存在一个 P_4 $uaby$，且 u 将成为 G 中蜘蛛图的一个顶点）。

因此，下面考虑 $G + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全 G_{OPT} 包含一个导出 P_4 $wuab$，使得图 G 包含该导出 P_3 uab。因此，由于 u、b 在 G_{OPT} 中不相邻，它们在 G 中也不相邻，所以它们在 P_4-稀疏树 T_G（属于 G）中的最近公共祖先 t_k 是一个 0-节点；它不可能是 2-节点，否则 u 将是蜘蛛图的一个顶点。此外， a 是 u 和 b 的公共邻居，因此 a 和 u 在 T_G 中的最近公共祖先 t_j 是一个 1- 节点或 2- 节点（后一种情况下， a 是蜘蛛图中团的一个顶点），并且 $j < k$。

现在让我们尝试构造 P_4 $wuab$，显然它将属于一个蜘蛛图，设为 $W = (S_W, K_W, R_W)$。我们证明 $|S_W| = |K_W| = 2$。首先，注意边 ab 不可能属于 G 中的蜘蛛图，否则 u 也会属于该蜘蛛图（注意， G 中不属于蜘蛛图的顶点，要么与蜘蛛图的所有顶点相邻，要么与它们都不相邻）。因此，反设蜘蛛图 W 含有 $|S_W| = |K_W| \geq 3$，并令 w、b、$s \in S_W$ 和 u、a、$k \in K_W$ 组成相应的 S-K 对，它们分别为 w 和 u、b 和 a，以及 s 和 k。蜘蛛图 W 可以是薄的，也可以是厚的。

– 蜘蛛图 W 是薄的。那么， $ba \in E(G)$ 否则，移除 ba 会产生一个填充边更少的 P_4- 稀疏图（b 在 $G[V(W)]$ 中是孤立的），这就产生了矛盾；同理， $sk \in E(G)$。此外， $ak \in E(G)$：如上所述，如果 a 和 k 不属于导出子图 $G[V(W)]$, 的同一个连通分量，那么将尾部 uw 添加到 $G[V(W)]$ 中包含 u 的连通分量，会得到更少的填充边；如果 a 和 k 属于 $G[V(W)]$ 的同一个连通分量，那么存在一条无弦

路径 ρ 在子图 $G[K_W \cup R_W]$ 中连接它们，而 $V(\rho) \cup \{b, s\}$ 中的顶点导出一个 P_ℓ，其中 $\ell \geq 5$，这与 G 的 P_4-稀疏性矛盾。但此时， G 包含 P_4 $baks$，且 ab 属于一个蜘蛛图。

– 蜘蛛图 W 是厚的。那么， $w \in S_W$ 与尾部 uw 和$|K_W| - 2 \geq 1$条填充边关联。由于我们可以通过使用一条填充边使 u在 $G[V(W) \setminus \{w\}]$中成为全邻，然后使用构造 2，因此很明显，构造蜘蛛图 W 并不会减少填充边的数量。

因此， G_{OPT}若包含蜘蛛图 W和 $|K_W| \geq 3$，其填充边数量不会少于使用构造 2 的情况。因此， P_4 $wuab$ 属于一个团大小为 2 的蜘蛛图，因此该蜘蛛图是薄的。接着，引理 4 中的性质 P1 表明， w、u和 a 与 b 在 G_{OPT} 中的所有邻点相邻，唯独不与 a 相邻，因此至少与 b在 G中的邻点相邻；因此，在 G_{OPT}中，

– 填充边将顶点 w 与 $((V_0 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus \{a\}) \cap N_G(b) = [(V_0 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus \{a\}] \cap N_G(u)$中的顶点相连；– 顶点 u 和 w 与 b 在 V_k中的所有邻点相邻，也就是说，与 $(V_k \cap N_G(b)) \setminus N_G(u)$中的顶点相邻；– 顶点 a 与 $(V_j \cap N_G(b)) \setminus N_G[a] = (V_j \cap N_G(u)) \setminus N_G[a]$中的所有顶点相连。

此外，引理 4 中的性质 P2 表明，由于 a 与 $V_{j+1} \cup \cdots \cup V_h$ 中的所有顶点以及 G_{OPT} 中的 $V_j \cap N_G(a)$ 顶点相邻（因为它在 G 中与它们相邻），那么 G_{OPT} 中的顶点 u 也必定如此；因此，在 G_{OPT} 中，填充边将 u 与 $(V_{j+1} \cup \cdots \cup V_h) \setminus N_G(u)$ 中的所有顶点以及 $(V_j \cap N_G(a)) \setminus N_G(u)$ 中的顶点相连（当且仅当 t_j 是一个 2- 节点时，集合 $(V_j \cap N_G(a)) \setminus N_G(u)$ 非空）。

现在，考虑在 G 的 P_4-稀疏树 T_G 中、节点 t_j 正下方使用构造 2；那么，填充边的数量为 $|(V_{j+1} \cup \cdots \cup V_h) \setminus N_G(u)| + |(V_0 \cup \cdots \cup V_j) \cap N_G(u)|$；前一项对应于与 u关联的填充边，后一项对应于与 w关联的填充边。接着，由于 $j < k$和 $|((V_0 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \setminus \{a\}) \cap N_G(u)| = |(V_0 \cup \cdots \cup V_{k-1}) \cap N_G(u)| - 1$， G_{OPT}要比在节点 t_j 之后使用构造 2 少用填充边，唯一的可能性是

1. $k = j + 1$；2. $(V_j \cap N_G(u)) \setminus N_G[a] = \emptyset$；3. $(V_k \cap N_G(b)) \setminus N_G(u) = \emptyset$，这意味着 b在 $G[V_k]$中是孤立的；4. $(V_j \cap N_G(a)) \setminus N_G(u) = \emptyset$，这意味着 t_j 是一个 1-节点。

要求 4 意味着 $V_j \cap N_G(u) = V_j$，结合要求 2 可推出 $N_G[a] = V_j$，也就是说，a 在 $G[V_j]$中是全邻，因此我们得到引理陈述中的第二种情况。

□

现在我们可以描述用于计算图 $G + uw$ 的最小 P_4-稀疏补全中填充边数量的算法。

算法 P_4-稀疏-尾部添加

输入：一个 P_4-稀疏图 G、一个顶点 $u \in V(G)$，以及一个要添加到 G 的尾部 uw。

输出：图 $G+uw$ 的 P_4-稀疏补全中所需填充边的最小数量（不包括尾部 uw）。

如果 $|V(G)|=1$ **那么** $\{V(G)=\{u\} \Longrightarrow$ 该图 $G+uw$ 是 P_4-稀疏$\}$**返回**(0);
计算从 t_0 处的根节点出发，沿着 P_4-稀疏树 G 中的路径 $t_0t_1...t_h$ ($h \geq 1$) 到达与 u 对应的叶节点的父节点 t_h；
计算顶点集合 V_i、 $0 \leq i \leq h$ （见图 5）；
$min \leftarrow |N_G(u)|$; {对应于构造 1}
{检查构造 2（引理 *5(iii)* 和推论 *1* 的情形 *(ii)*）}
对于每个为 1-节点或 2-节点的 t_i ($i=0, 1, \ldots, h$) **do**
$\ell \leftarrow |N_G(u) \cap (V_0 \cup \cdots \cup V_{i-1})| + |(V_i \cup \cdots \cup V_h) \setminus N_G(u)|$;
更新 min 如果 $\ell < min$;

{检查新的 P_4 形成（引理 *8*）}**对于**每个 $i=0, 1, \ldots, h-1$，使得 t_i 是 1-节点且 t_{i+1} 是 0-节点 **则如果**存在顶点 $a \in V_i$，使得 a 在 V_i 中为全邻**且**存在顶点 $b \in V_{i+1}$，使得 b 在 V_{i+1} 中没有邻点**则**$\ell \leftarrow |N_G(u) \cap (V_0 \cup \cdots \cup V_{i-1})| + |V_i \setminus \{a\}| + |V_{i+1} \setminus \{b\}| + |(V_{i+2} \cup \cdots \cup V_h) \setminus N_G(u)|$; 更新 min 如果 $\ell < min$；

{检查以下情形 t_h 是2-节点，并应用推论 *1*}**若** t_h 是一个 2-节点，
则$\ell \leftarrow$ 根据引理 6 或引理 7 的情形确定填充边的数量；$\ell \leftarrow \ell + |N_G(u) \cap (V_0 \cup \cdots \cup V_{h-1})|$；{推论 *1*} 更新 min 若 $\ell < min$；**返回** (min);

算法 P_4-稀疏尾部添加可以很容易地扩展为返回一个基数最小的填充边集合。该算法的正确性由引理 5、6、7、8 和推论 1 得出。设 G 是给定的图，n 是其顶点数。若给定 G 的 P_4-稀疏树 T_G，则通过一次 $O(n)$ 时间的树遍历，我们可以计算路径 $t_0t_1 \cdots t_hu$ 以及 u 在各集合 V_0, ..., V_h中的邻点数和非邻点数；此外，T_G 的高度为 $O(n)$，因此 $h=O(n)$。由于可在 $O(1)$ 时间内检查引理 6 和引理 7 的条件，整个算法的运行时间为 $O(n)$。

定理 1. 设 G 是一个有 n 个顶点的 P_4-稀疏图，且 uw 是附加在 G 的节点 u 处的尾部。若给定了 G 的 P_4-稀疏树，则算法 P_4-稀疏尾部附加可在 $O(n)$ 时间内计算出需要向 $G+uw$ 添加的最少边数，使所得图为 P_4-稀疏图。

如果没有给出 G 的 P_4稀疏树 T_G，则可在 $O(n+m)$时间内计算得到，其中 m 是 G [14]的边数，而整个算法需要$O(n+m)$时间。

参考文献

1. Brandstädt, A., Le, V.B., Spinrad, J.：《图类——综述》。SIAM离散数学与应用专著，SIAM，费城（1999） 2. Burzyn, P., Bonomo, F., Durán, G.：边修改问题的NP完全性结果。《离散应用数学》**154**，1824–1844（2006） 3. Chvátal, V., Hammer, P.L.：集合打包与阈值图，研究报告 CORR 73-21，滑铁卢大学，1973年。 4. Corneil, D.G, Lerches, H., Burlingham, L.：补可约图，《离散应用数学》3，163–174（1981）。 5. Corneil, D.G., Perl, Y., Stewart, L.K.：余图的线性识别算法，《SIAM计算杂志》14，926–934（1985）。 6. Golumbic, M.C.：平凡完美图，《离散数学》24，105–107（1978）。 7. Golumbic, M.C.：《算法图论与完美图》，Academic Press，纽约，1980年。 8. El-Mallah, E., Colbourn, C.：若干边删除问题的复杂性。《IEEE电路与系统汇刊》**35**，354 362 9 – . Goldberg, P.W., Golumbic, M.C., Kaplan, H., Shamir, R.：反对DNA物理图谱绘制的四条理由。《计算生物学杂志》**2**(1)，139–152（1995） 10. Heggernes, P., Mancini, F.：动态维护分裂图，《离散应用数学》**157**，2047–2069（2009） 11. Hell, P., Shamir, R., Sharan, R.：用于识别和表示真区间图的全动态算法。《SIAM计算杂志》**31**，289–305（2002） 12. Hoáng, C.：完美图。博士论文，麦吉尔大学，加拿大蒙特利尔（1985） 13. Ibarra, L.：弦图和分裂图的全动态算法。《ACM算法汇刊》**4**，文章40（2008） 14. Jamison, B., Olariu, S.：在线性时间内识别 P_4稀疏图。《SIAM计算杂志》**21**，381—406（1992） 15. Jamison, B., Olariu, S.： P_4稀疏图的树表示。《离散应用数学》**35**，115—129（1992） 16. Kashiwabara, T., Fujisawa, T.：区间图上的一个NP完全问题。载于：IEEE电路与系统研讨会，第82–83页（1979） 17. Kano, M., Nikolopoulos, S.D.：关于A自由图的结构。第二部分，TR-25-99，约阿尼纳大学计算机科学系，1999年。 18. Ma, S., Wallis, W.D., Wu, J.：拟阈值图上的优化问题，《组合信息系统科学杂志》14，105–110（1989）。 19. Natanzon, A., Shamir, R., Sharan, R.：若干边修改问题的复杂性分类。《离散应用数学》**113**，109–128（2001） 20. Nikolopoulos, S.D.：通过对余图和阈值图的边进行分类来识别它们。《信息处理快报》74.3-4（2000）：129-139。 21. Nikolopoulos, S.D.：拟阈值图上的哈密顿问题并行算法。《并行与分布式计算》64，48–67（2004）。 22. Nikolopoulos, S.D., Palios, L.：在余图中添加一条边。载于：Kratsch D.（编）WG 2005，LNCS，第3787卷，第214–226页，Springer（2005）。https://doi.org/10 1007 11604686 _19 。 / . Nikolopoulos, S.D., Palios, L., Papadopoulos, C.：识别 P_4稀疏图的全动态算法。《理论计算机科学》**439**，41-57（2012）。 24. Nikolopoulos, S.D., Papadopoulos, C.：拟阈值图的K n-补图中的生成树数量。《图与组合》20.3：383-397（2004）。

25. Rose, D.J.：关于稀疏正定线性方程组数值求解的图论研究。载于：Read, R.C.（编），《图论与计算》，第 183–217 页。Academic Press，纽约（1972）26. Shamir, R., Sharan, R.：一种用于模分解和识别余图的全动态算法。《离散应用数学》**136**，329–340（2004）27. Wolk, E.S.：树的可比图。《美国数学会会刊》3，789–795（1962）。28. Wolk, E.S.：关于树的可比图的一则注记。《美国数学会会刊》16，17–20（1965）。29. Veldman, H.J.：关于哈密顿线图的一个结果，其中涉及对诱导子图的限制。《图论杂志》12，413–420（1988）。30. Yannakakis, M.：计算最小填充是 NP完全问题。《SIAM 离散数学方法杂志》**2**，77–79（1981）