arXiv:2302.00697v1 [quant-ph] 1 Feb 2023

使用多端口分束器生成 Greenberger-Horne-Zeilinger 态

Daniel Bhatti[1,2] 和 Stefanie Barz[1,2]
[1]Institute for Functional Matter and Quantum Technologies, University of Stuttgart, 70569 Stuttgart, Germany
[2]Center for Integrated Quantum Science and Technology (IQST), University of Stuttgart, 70569 Stuttgart, Germany

对称多端口分束器是光学量子信息处理中的多功能工具，可用于研究多粒子散射、可区分性和混合性，也可用于生成多体纠缠量子态。在此，我们展示了如何使用对称多端口分束器生成 N 光子、N 模式的 Greenberger-Horne-Zeilinger（GHZ）态。改变输入态的内部自由度，并对特定的光子数分布进行后选择，即可概率性地生成光子数任意的 GHZ态。我们提出了两种新方案，分别适用于奇数和偶数个光子，通过对称多端口分束器生成 GHZ 态，并将其与一种利用 $2N$ 端口网络的策略以及标准后选择方法进行比较。

I. 引言

多方 Greenberger-Horne-Zeilinger（GHZ）态是许多理论和实验研究的核心 [1–12]。其特有性质——最大 N量子比特纠缠以及所有量子比特之间的最大关联——不仅导致局域隐变量经典理论与量子力学之间的尖锐矛盾 [13, 14], ，也使其成为量子通信的理想资源 [7]。例如，它们是（匿名）会议密钥协商 [2, 3, 8, 9], 和秘密共享 [1],的重要资源，也可作为构件融合成更大的簇态 [15]。近年来，高维、混合以及超纠缠 GHZ 态的研究不断深入 [16–18], 它们分别实现了超密编码、混合量子网络以及对纠缠态更准确的识别。

因此，GHZ态的制备具有重要意义，尤其需要找到易于实现的方法和协议。在实验方面，人们已在多种平台上实现了GHZ态的制备：在光子系统中，利用14个光子制备了14量子比特GHZ态 [4], ，并利用6

光子 [5]已展示了这一点。对于里德堡原子、离子和超导量子比特，分别已展示了20量子比特、24量子比特和27量子比特的GHZ态 [6, 10, 11]。尤其是对于通信协议等网络量子应用，生成大型光子GHZ态至关重要 [7]。

生成高度纠缠的光子多体量子态的一种方法，是对 N光子在 N 个空间模式中的符合事件进行后选择。例如，可以利用偏振分束器，并仅对N光子进行后选择，将偏振纠缠光子对融合为偏振编码的GHZ态 [9]。这类装置的成功概率相对较高，但只能生成特定的量子态。

从远场干涉装置可知，所有对称态都可以生成 [19], ，包括 GHZ 态 [20, 21]。这类装置的优势在于，只需调整输入光子的内部自由度等因素，就可以改变所生成的纠缠态，甚至改变纠缠类别，但成功概率非常低 [21]。

获得更高概率的一种灵活方法是使用多端口分束器（多端口分束器）（见图 1） [19, 22–28]。在此方案中，单光子被送入多端口分束器，并考虑特定的输出构型，例如每个输出端口恰好包含一个光子的构型。与专门设计用于生成某种特定纠缠态的网络不同 [27, 29–32], 多端口分束器——如远场干涉装置——只需调整输入光子的内部自由度，就能生成不同的纠缠态，甚至是属于不同纠缠类别的态 [23, 33]。尽管多光子干涉中内部自由度的作用及其与一般计数统计和纠缠生成之间的联系已有研究 [23, 34–37],但如何找到合适的输入态，以生成特定的（纠缠）输出态，仍是一个尚待解决的问题。

本文研究了在对称多端口分束器（SMS）中生成 N 光子 N 模 GHZ态，并证明

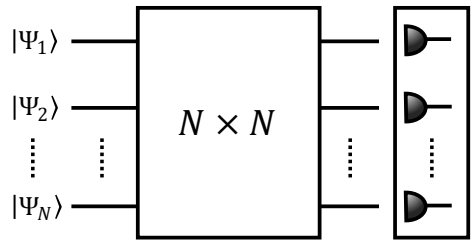

图 1. 幺正多端口分束器 U_N ，具有 N 个输入端口和N 个输出端口。通常，每个输入端口 k 中都包含一个处于量子态 $|\Psi_k\rangle$的单光子。借助单光子探测器，对 N 个输出模式中的 N 光子符合事件进行后选择，即可生成纠缠多体量子态。

通过对光子数进行后选择，可以生成任意N 的 GHZ 态。我们给出了适用于任意奇数和偶数 N的输入态，并表明，在每个空间输出模式中各有一个光子的后选择输出态只能呈 GHZ 态的形式。对于较少的光子数和输入端口数（最多为四），此前已有研究 [23, 33, 38]。然而，与已有通用方案的 W态 [23],不同，利用 SMS 生成 GHZ 态的通用方案仍然缺失。我们的研究填补了这一空白，从而为利用任意 SMS 分发不同纠缠类别的纠缠态创造了可能，而这些纠缠态可直接用于任意N方量子网络。

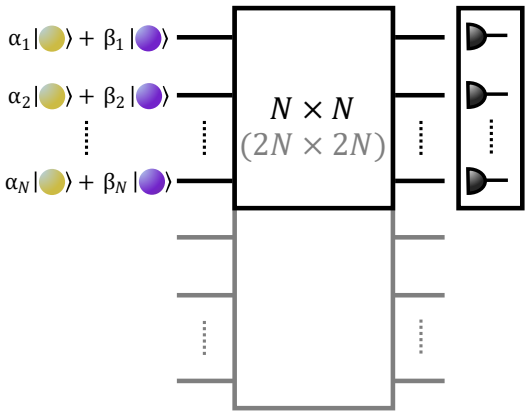

图 2 $2N \times$ 。$2N$ $N \times N$ N 第IIIA 节（）和III B节（）中所研究的酉网络，用于生成 GHZ 态。每个制备为叠加态的光子量子比特分别被送入 N 输入模式，进入 N端口或 $2N$端口网络。随后通过后选择，探测第一个N模式中 N 光子符合事件，以及网络的第一个 N 输出模式。对于 $2N$端口网络，第二个 N 输入端口和第二个 N 输出端口均未使用，即为空。

本文结构如下：在第II节，我们首先讨论使用对称多端口分束器（SMS）的广义 Hong-Ou-Mandel效应 [39] ，以介绍一般系统、后选择机制和数学工具。特别地，我们将介绍零传输定律 [40]，它有助于我们识别受抑制的光子输出分布。在第IIIA 节，我们讨论一种可能的方案，利用具有 N个输入和 $2N$ 个输出的多端口分束器生成光子 GHZ 态。在第IIIB 节和III C 节，我们给出利用对称 N端口分束器生成光子 GHZ 态的方案，适用于奇数 N和偶数 N，并解释为何所选输入态只能产生属于 GHZ 态的光子分布。我们在第 N节讨论不同方案的成功概率和标度，并在第IV节总结。V。

II. 对称多端口分束器

本文讨论光子 N 入射酉多端口分束器以生成纠缠态时的行为。为此，我们聚焦于量子比特以及 N 量子比特 GHZ 态的生成。请注意，原则上，这一讨论很容易扩展到量子多能级比特，以研究如何利用多端口分束器从 N量子多能级比特生成纠缠态。

光子 N量子比特酉多模分束器的输入态，其中包含N 个（空间）输入模式和 N 个（空间）输出模式（见图2），可写成如下形式： [39]

$$|\Psi_{\text{in}}\rangle = \prod_{k=1}^{N} \left(\alpha_{\mu,k} a^{\dagger}_{\mu,k} + \alpha_{\eta,k} a^{\dagger}_{\eta,k}\right) |0\rangle$$
$$= \prod_{k=1}^{N} \left(\alpha_{\mu,k} |\mu\rangle_k + \alpha_{\eta,k} |\eta\rangle_k\right), \quad (1)$$

其中，$\alpha_{\mu、k}$ 和 $\alpha_{\eta、k}$ 是满足$|\alpha_{\mu、k}|^2 + |\alpha_{\eta、k}|^2 = 1$（对所有 $k = 1, \ldots, N$）的复系数。在第 k个模式中，具有内部自由度 $F = \mu、\eta$的光子量子比特的产生（湮灭）由算符$a^{\dagger}_{F、k}$ （$a_{F、k}$）描述，分别为态单光子量子态 $|F\rangle_k$，以及 $_k\langle\mu|\eta\rangle_k = 0$。一般而言，只要任何一种内部自由度能够实现光子量子比特（见附录 B），例如偏振或时间箱编码，我们可以定义 $|\pm\rangle_k = [|\mu\rangle_k \pm |\eta\rangle_k]/\sqrt{2}$和 $|R/L\rangle_k = [|\mu\rangle_k \pm i\,|\eta\rangle_k]/\sqrt{2}$。请注意，下文中我们只指定可区分光子的内部自由度，而不会明确说明不可区分光子的内部自由度。

一般而言，可以使用酉矩阵 U 来描述任意 N 模输入态向相应的 N 模输出态的变换。因此，矩阵元 $U_{kl}(k, l = 1, 2, \ldots\ldots, N)$ 表示输入光子从输入模式 k 跃迁至输出模式l。输入产生算符$a^{\dagger}_{F,\,k}$ 与输出产生算符 $b^{\dagger}_{F,\,l}$ 之间的数学关系为

$$b^{\dagger}_{F,l} = \sum_{k=1}^{N} U_{lk} a^{\dagger}_{F,k}, \quad (2)$$

由此得到将输入算符映射为输出算符的跃迁关系：

$$a^{\dagger}_{F,k} \to \sum_{l=1}^{N} U_{kl} b^{\dagger}_{F,l}. \quad (3)$$

接下来，我们聚焦于具有均匀输出分布的对称多端口分束器。相应的酉变换等同于离散傅里叶变换（DFT） [39]

$$U_{kl} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega_N^{(k-1)(l-1)}, \quad (4)$$

其中 $\omega_N = \exp(\mathrm{i}2\pi/N)$ 是 N 次单位根。

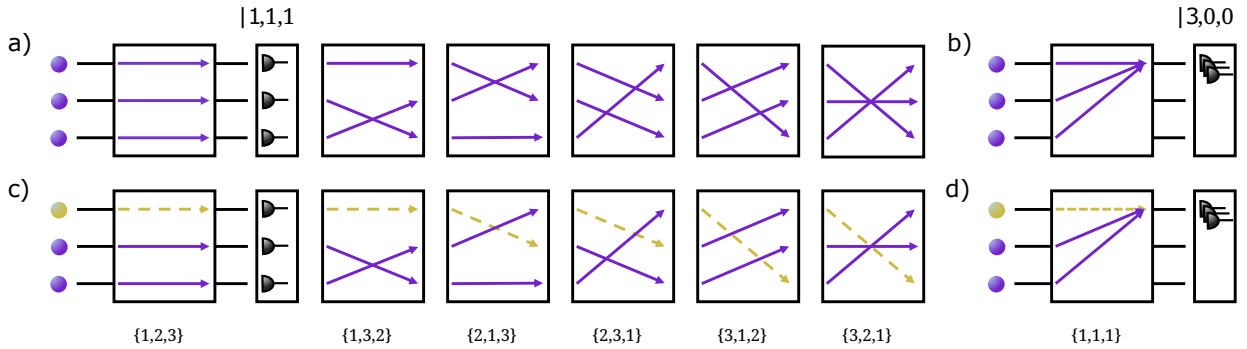

图 3. 三个输入光子在对称三端口网络的输出端被探测到的所有可能情况，以及它们对不同后选择方案的贡献。后选择每个输出模式中各有一个光子，即光子数态 $|1,\ 1,\ 1\rangle$，对于 a) 三个不可区分光子以及 c) 两个不可区分光子和一个可区分光子，分别存在六种不同的可能情况。在这两种情况下，不同的可能情况都与正文所述的 $\sigma = \{1, 2, 3\}$ 的排列相对应。然而，c) 包含三种可区分构型，且后选择会生成纠缠输出态。后选择三个光子都处于同一个输出模式，即量子态 $|3,\ 0,\ 0\rangle$，对于 b) 三个不可区分光子以及 d) 两个不可区分光子和一个可区分光子，都只有一种可能情况，即 $\{1, 1, 1\}$。

我们从一个 N光子输入态开始，其中光子完全可区分，且每个输入模式中有一个光子[参见公式（1），其中所有 $\alpha_{\eta,\ k} = 0$]，即，

$$|\tilde{\Psi}_{\rm in}\rangle = \prod_{k=1}^{N} a_k^\dagger |0\rangle \equiv |1, 1, \ldots, 1\rangle\,, \tag{5}$$

其中 $|n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N\rangle = |n_1\rangle_1 \otimes |n_2\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |n_N\rangle_N$表示福克基中的光子数态。现在我们来解释后选择的概念。

利用离散傅里叶变换所导出的变换关系 [见公式(3)和(4)]，即

$$a_k^\dagger \to \sum_{l=1}^{N} U_{kl} b_l^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{N} \omega_N^{(k-1)(l-1)} b_l^\dagger, \tag{6}$$

˜由公式(5)给出的输入态 $|\Psi_{\rm in}\rangle$ 被变换为˜完整的输出态 $|\Psi_{\rm out}\rangle$，即

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}_{\rm in}\rangle \to |\tilde{\Psi}_{\rm out}\rangle &= \prod_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} U_{kl} b_l^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N^N}} \prod_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \omega_N^{(k-1)(l-1)} b_l^\dagger |0\rangle\,. \end{aligned} \tag{7}$$

由于每个输入模式中都有一个单光子 k，且每个光子都可以进入任意一个输出模式 l，公式(7)包含对所有输入模式的乘积 k 以及对所有输出模式的求和 l。二者结合起来，等同于对光子从输入模式传输到输出模式的所有可能方式求和，并可重排为两个步骤。

首先，我们研究光子数输出态 $|n_1、\ n_2、\ \ldots\ldots、\ n_N\rangle$，其中 $0 \le n_l \le N(l$ =1、2、……、$N)$，以及 $\sum n_l = N$。若不进行后选择，则需要考虑所有可能的光子数态，才能求得式（7）给出的完整输出态。然而，若后选择单个光子数输出态——通常是 $|1、\ 1、\ \ldots\ldots、\ 1\rangle$——便可以专注于这一特定量子态，并在下一步计算其成功概率。请注意，对于不可区分光子，不同输出态 $|n_1、\ n_2、\ \ldots\ldots、\ n_N\rangle$ 完全由每个输出模式中的光子数决定。对于部分可区分光子，如果光子的内部自由度可区分，也就是说，光子对的内积 < 1 （见附录 B），则还需要讨论光子的内部态。这通常会在后选择方案中产生纠缠。

在第二步中，我们通过对所有可能性求和，计算后选择输出态 $|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle$ 的成功概率： N 个输入光子以何种方式在 SMS 的输出模式中被探测到（见图 3）。根据 $|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle$，我们已经知道， n_1 个光子进入输出模式 1， n_2 个光子进入输出模式 2，……， n_N 个光子进入输出模式 N。这定义了所有输出模式的全序集 $\sigma = \{l_1, l_2, \ldots, l_N\}$，其中 $1 \le l_i \le l_j \le N(i < j)$ 包含 n_1 1 个、 n_2 2 个、 …… 以及 n_N N 个。随后，可以通过求出 σ 的所有可能排列 $\mathcal{P}_\sigma$，得到属于这一特定量子态的所有可能的 N 光子贡献（见图 3）。例如，每个输出模式恰好有一个光子的情况，即 $|1, 1, \ldots, 1\rangle$,$\sigma = \{1, 2, \ldots, N\}$，共有 $N!$ 种排列；若所有光子都从同一个输出模式 l 离开，即 $|0, \ldots, 0, N, 0, \ldots, 0\rangle$，$\sigma = \{l, l, \ldots, l\}$，则只有 1 种排列。

最后，也可以将后选择过程写成投影的形式，即:

$$P = |n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle\langle n_1, n_2, \ldots, n_N|\,, \tag{8}$$

这会得到 [参见式（7）]

$$|\tilde{\Psi}_{\rm out}\rangle = P\,|\tilde{\Psi}_{\rm out}\rangle + (\mathbb{1}-P)\,|\tilde{\Psi}_{\rm out}\rangle \equiv |\tilde{\psi}_{\rm out,ps}\rangle + |\tilde{\psi}_{\rm out,rest}\rangle\,. \tag{9}$$

˜这里，$|\psi_{\rm out,ps}\rangle$ 表示后选择量子态，˜而$|\psi_{\rm out,rest}\rangle$ 表示其余部分，即未经过后选择的量子态。这两个量子态均未归一化到 1，而是归一化到各自出现的概率。

由此，我们现在可以计算一般的后选择态 [39]

$$|\tilde{\psi}_{\rm out,ps}\rangle = \sum_{\mathcal{P}_\sigma}\left[\prod_{k=1}^{N} U_{k\sigma(k)} b^\dagger_{\sigma(k)}\right]|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}^N}\sum_{\mathcal{P}_\sigma}\left[\prod_{k=1}^{N}\omega_N^{(k-1)(\sigma(k)-1)} b^\dagger_{\sigma(k)}\right]|0\rangle\,, \tag{10}$$

其中，$\sum_{\mathcal{P}_\sigma}$ 表示对输出模式 $\sigma=\{l_1,l_2,\ldots,l_N\}$的所有排列求和，而 $\sigma(k)$表示该排列的第k个元素。再结合对不同输入模式$\prod_k$ 的乘积，这同样涵盖了光子从输入模式传输到输出模式并形成后选择态的所有可能方式。请注意，可以对输入模式进行排列，同时固定输出模式；或者，也可以对输出模式进行排列，同时固定输入模式。在接下来的研究中，我们将利用这一性质，并将 $\delta=\{k_1,k_2,\ldots,k_N\}$ 定义为输入模式的全序集。

现在我们计算 $P_{\rm ps}$ 后选择事件发生的成功概率。该概率可由公式（10）中的后选择态得到，并且为

$$P_{\rm ps} = \|\,|\tilde{\psi}_{\rm out,ps}\rangle\,\|^2 = \frac{1}{N^N}\Big|\sum_{\mathcal{P}_\sigma}\prod_{k=1}^{N}\omega_N^{(k-1)(\sigma(k)-1)}\Big|^2, \tag{11}$$

其中 $\|\,|\Psi\rangle\,\|^2=\langle\Psi|\Psi\rangle$ 定义了量子态 $|\Psi\rangle$的范数。

已有研究表明，对每个输出模式中恰有一个光子进行后选择，即投影到量子态|1、1、……、1⟩上时，会出现广义 Hong-Ou-Mandel（HOM）效应，并且对于偶数 N [39]，公式（11）给出的概率为零。公式（5）所示的输入态在任意输出分布下也已得到分析，研究表明，它只能产生满足以下条件的输出分布： [40]

$$\sum_{i=1}^{N} l_i = 0 \bmod(N). \tag{12}$$

这一结果称为零传输定律（ZTL） [40]，并将在后续研究中使用。请注意，同一定律已针对自由空间中的多光子干涉推导得出 [41, 42]。

现在我们可以继续讨论 N 模 GHZ 态的生成。

III. N 光子 GHZ 态生成

在本节中，我们研究三种不同的多端口分束器，即非对称的 $2N$ 端口分束器、适用于奇数 N 的对称 N 端口分束器，以及适用于偶数 N 的对称 N 端口分束器。我们将展示，通过选择特定的量子比特编码输入态，并对 N 光子符合进行后选择，可以为任意 N 生成 N 光子 N 模式的 GHZ 态。

A. 2N 端口网络

首先讨论使用形如 [25] 的 $2N$ 端口网络生成 N 模式 N 光子 GHZ 态。

$$U_{2N} = \begin{pmatrix} A & (\mathbb{1}-AA^\dagger)^{1/2} \\ (\mathbb{1}-A^\dagger A)^{1/2} & -A^\dagger \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中 A 表示一个非幺正变换，其所有元素为 $A_{kl}=1/N$(k、l = 1、2、……、N）。将N个光子输入前 N 个输入模式，同时仅在前 N个输出模式中对 N 个光子符合进行后选择（见图2），即可将有效变换约化为 A，并且对于输入于第k个输入模式的光子，我们得到如下变换关系：

$$a^\dagger_{F,k} \to \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} b^\dagger_{F,l}. \tag{14}$$

有人提出用多端口分束器 [25] 生成对称的N模 Dicke 态；在我们的情形下，该方案应能得到所需的 GHZ 态。

为此，我们使用以下 N 光子态 [20, 21]

$$|\Psi_{2N,\rm in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^N}\prod_{k=1}^{N}\left[a^\dagger_{\mu,k} + e^{{\rm i}\theta_k} a^\dagger_{\eta,k}\right]|0\rangle\,, \tag{15}$$

其中 $\theta_k=(k-1)2\pi/N$， $k=1$，2，……，N。文献 [20, 21]已证明，选择这一输入态，并采用与式（14） N 相对应的对称探测策略，可以利用 N单光子源和 N光子后选择生成量子比特 GHZ 态。

对于 $2N$-网络，我们得到 MS 的前 N 个输出模式中的输出态

$$|\Psi_{2N,\rm out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^N N^N}\prod_{k=1}^{N}\left[\sum_{l=1}^{N} b^\dagger_{\mu,l} + e^{{\rm i}\theta_k}\sum_{l=1}^{N} b^\dagger_{\eta,l}\right]|0\rangle\,, \tag{16}$$

其中，我们将式 (14) 定义的归一化变换关系代入式 (15)。现在可以使用后选择规则，即测量每个输出模式中恰好一个光子，从而后选择光子数态 $|1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1\rangle$。由于光子可能处于可区分内部态 $|\mu\rangle$ 和$|\eta\rangle$，我们需要分析 N_1 个处于量子态 $|\mu\rangle$ 的光子以及 N_2 个处于量子态 $|\eta\rangle$的光子的每一种具体输出分布，其中 $N = N_1 + N_2$，以确定后选择态的确切形式。每种可能输出分布对应的干涉项为 [见式 (11)]

$$\sum_{\mathcal{P}_\delta}\left[\prod_{l=1}^{N_1}\times\prod_{l'=1}^{N_2}e^{\mathrm{i}\theta_{\delta(N_1+l')}}\right]. \tag{17}$$

此处我们现在对输入模式集合 $\mathcal{P}_\delta$ 的所有可能排列求和 $\delta=\{1,2,\ldots,N\}$。注意，关于 N 输出模式的乘积现在分成了两个乘积：一个对应于 N_1 量子态 $|\mu\rangle$ 中的 N_2 光子 $|\eta\rangle$，另一个对应于量子态[中的光子。应用 ZTL（式（12））可知，只有在以下条件成立时，这个和才不为零：

$$N_2 = 0 \bmod(N). \tag{18}$$

只有当 $N_2 = 0$ 或 $N_2 = N$时，这一条件才可能满足。此时，最终的后选择态是如下形式的 GHZ 态：

$$\begin{aligned}|\psi_{2N,\mathrm{ps}}\rangle =&\frac{N!}{\sqrt{2^N}N^N}\left[|\mu\rangle_1|\mu\rangle_2\ldots|\mu\rangle_N\right.\\&\left.+(-1)^{N+1}|\eta\rangle_1|\eta\rangle_2\ldots|\eta\rangle_N\right],\end{aligned} \tag{19}$$

其中，因子 $N!$ 源于 $N!$ 种可能性，即 N 个光子从输入模式传输到输出模式的各种方式。这证明，对于任意 N，让 N 个独立光子在一个非对称的 $2N$ 端口网络中发生干涉，即可生成 GHZ态。此类事件发生的成功概率 $P_{2N,\ \mathrm{ps}}$ 计算为——

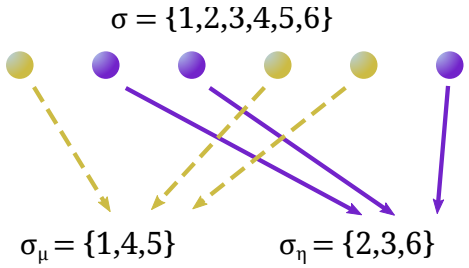

图4。例如，完整的输出模式集合$\sigma=\{1,2,\ldots,N\}$ 中 N 个光子如何分成两个子集 σ_μ和 σ_η，分别仅包含量子态 $|\mu\rangle$ 中 N_1 个光子的输出模式，以及量子态 $|\eta\rangle$中 N_2 个光子的输出模式。图中，对于 $N = 6$，我们展示了 σ 包含$N_1 = N_2 = 3$ 个光子处于 $|\mu\rangle$（黄色虚线箭头）和$|\eta\rangle$（紫色实线箭头）的情况，这会得到 $\sigma_\mu = \{1,4,5\}$ 和$\sigma_\eta = \{2,3,6\}$，其中 $\sigma = \sigma_\mu \cup \sigma_\eta$。

计算为 [见公式（11）]

$$P_{2N,\mathrm{ps}} = \frac{(N!)^2}{2^{N-1}N^{2N}}. \tag{20}$$

我们绘制$P_{2N,\ \mathrm{ps}}$ 见图7，以便与我们使用 SMSs 针对偶数和奇数 N得到的解进行比较；这将在下面两个小节中讨论。

B. 对称N端口分束器（奇数 N）

接下来，我们讨论如何使用 SMSs 生成 N模 N光子 GHZ 态 [，参见式（4）]，并进行 N光子后选择。为此，我们将研究 N光子输入态，其中每个输入模式恰好包含一个光子（见图2），并说明这会为奇数 N提供一个解。

我们从以下 N-光子输入态开始

$$|\Psi_{N,\mathrm{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^N}\prod_{k=1}^{N}\left[e^{-\mathrm{i}\theta_k}a^\dagger_{\mu,k}+e^{\mathrm{i}\theta_k}a^\dagger_{\eta,k}\right]|0\rangle. \tag{21}$$

其中 $\theta_k =（k-1）2\pi/N$，$k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ N$。与式（15）中给出的输入态相比，该态多了一个相位项，因此偶数 N时会产生不同的输出态，尤其是当 $N = 4$时会得到一个 GHZ 态。

利用 SMS 的变换关系 [见公式（6）] 我们得到输出态

$$\begin{aligned}|\Psi_{N,\mathrm{out}}\rangle =&\frac{1}{\sqrt{2N}^N}\prod_{k=1}^{N}\left[e^{-\mathrm{i}\theta_k}\sum_{l=1}^{N}\omega_N^{(k-1)(l-1)}b^\dagger_{\mu,l}\right.\\&\left.+\ e^{\mathrm{i}\theta_k}\sum_{l=1}^{N}\omega_N^{(k-1)(l-1)}b^\dagger_{\eta,l}\right]|0\rangle.\end{aligned} \tag{22}$$

现在我们来研究后选择 N模式符合事件时输出态的具体形式，即每个输出模式中都占据一个光子。为了了解后选择态的形式，我们需要知道哪些输出分布（即量子态 $|\mu\rangle$ 和 $|\eta\rangle$中的光子组合）会保留下来。为此，我们计算每个恰好在每个输出模式中含有一个光子的输出态的成功概率 [见公式（11）] 并遍历 $|\mu\rangle$ 和 $|\eta\rangle$的所有组合。

我们首先根据输出光子的内部态，将占据的输出模式（按全序排列）集合 $\sigma=\{1,2,\ldots,N\}$ 分成两个子集，即 $|\mu\rangle$ 和 $|\eta\rangle$（各自的示例见图 4）。对于N_1 个处于量子态 $|\mu\rangle$ 的输出光子，以及 N_2 个处于量子态 $|\eta\rangle$的输出光子，其中 $N = N_1 + N_2$，这两个子集为 $\sigma_\mu = \{m_1, m_2, \ldots, m_{N_1}\}$和$\sigma_\eta = \{h_1, h_2, \ldots, h_{N_2}\}$，其中 $\sigma = \sigma_\mu \cup \sigma_\eta$。这里，$m_i\,(h_i)$ 表示处于量子态 i的第 $|\mu\rangle$ $(|\eta\rangle)$ 个光子的输出模式。检测到这种分布的概率为

由该项决定 [参见公式 (22)]

$$\sum_{\mathcal{P}_\delta}\left[\prod_{l=1}^{N_1}\omega_N^{(m_l-1)(\delta(l)-1)}e^{-\mathrm{i}\theta_{\delta(l)}}\right]\times\left[\prod_{l'=1}^{N_2}\omega_N^{(h_{l'}-1)(\delta(N_1+l')-1)}e^{\mathrm{i}\theta_{\delta(N_1+l')}}\right]=\sum_{\mathcal{P}_\delta}\left[\prod_{l=1}^{N_1}\omega_N^{(m_l-2)(\delta(l)-1)}\right]\left[\prod_{l'=1}^{N_2}\omega_N^{h_{l'}(\delta(N_1+l')-1)}\right], \tag{23}$$

其中，我们对输入模式集合 $\mathcal{P}_\delta$ 的所有排列 $\delta=\{1,2,\ldots,N\}$求和，而乘积则遍历所有输出模式。总的来说，这相当于对所有可能对特定输出态有贡献的光子输入构型求和。在式（23）第 3 行中，我们利用 $\omega_N=\exp(\mathrm{i}2\pi/N)$ 和 $\theta_k=(k-1)2\pi/N$的定义，将输入光子的相位与多端口的相位合并。这实际上使每个 m_l 减小*1*，同时使每个 $h_{l'}$ 增加*1*。

不对输入模式进行置换 $\delta=\{1,2,\ldots,N\}$ 并保持有效输出模式 $\sigma'=\{m_1-1,\ldots,m_{N_1}-1,h_1+1,\ldots,h_{N_2}+1\}$ 固定，也可以置换有效输出模式并保持输入模式不变，从而对所有可能的组合求和。这样，我们可以将公式 (23) 改写为

$$\sum_{\mathcal{P}_{\sigma'}}\prod_{l=1}^{N}\omega_N^{(l-1)(\sigma'(l)-1)}. \tag{24}$$

由于 σ'包含元素 1、2、.....、 N，其中 N_1 个元素减小 *1* ，而 N_2 个元素增加*1* ，我们可以应用 ZTL [参见公式 (12)] 并得到输出分布非零的以下条件:

$$\sum_{l=1}^{N}\sigma'(l)=\sum_{l=1}^{N}\sigma(l)-N_1+N_2=\frac{(N+1)N}{2}-N+2N_2\overset{!}{=}0\ \mathrm{mod}(N), \tag{25}$$

这里用到了 $N=N_1+N_2$。

将式（25）中的条件除以N，对奇数 $N\,(\equiv N_\mathrm{o})$ 可得

$$\frac{(N_\mathrm{o}+1)}{2}-1+2\frac{N_2}{N_\mathrm{o}}\overset{?}{=}\text{integer, with } N_2=0,1,\ldots,N_\mathrm{o}, \tag{26}$$

其中前两项始终为整数。由于$N_2\neq N_\mathrm{o}/2$ 对于所有 N_o都成立，因此能够被同时测得的可能构型只有两种：所有光子都处于态 $|\mu\rangle$，即 $N_2=0$；或所有光子都处于态 $|\eta\rangle$，即 $N_2=N_\mathrm{o}$。这意味着 σ' 要么包含元素 0，1，.....，$N-1$，要么包含 2，3，.....，$N+1$。由于 $\omega_N^x=\omega_N^{x+N}$ $(x\in\mathbb{Z})$，式（24）在两种情况下完全相同，所得到的量子态只能是 GHZ 态的形式。注意，式（24）与不可区分玻色子的玻色子采样相同，对应于一个矩阵的矩阵永久式，已知其计算难度很高 [43]。因此，我们数值计算了成功概率 [见式（11）]，取值范围最高达 $N=11$，并在图 7 中绘制结果。

找到奇数 N 的可行解后，我们现在着手研究偶数 $N\,(\equiv N_e)$ 时可能的输出分布。由式（25）可得

$$N_2\overset{?}{=}\frac{N_e(2\times\text{integer}+1)}{4}, \text{with } N_2=0,1,\ldots,N_\mathrm{e}. \tag{27}$$

只有当 N_e 是 4 的倍数时，这个条件才能满足；由此可得 $N_2=N_\mathrm{e}/4$ 和 $N_2=3N_\mathrm{e}/4$ 的可能输出态。不过，只有在 $N=4$ 这一特殊情况下，该结果才与 GHZ 态相同。

如果 N_e 不是 4 的倍数，这个条件就无法满足，所有 N 光子符合事件都会受到抑制。这种行为表明，部分可区分光子会发生完全相消的 HOM 干涉，并且与文献 [35]，中提出的扩展抑制定律一致；该文作者讨论了部分可区分光子的循环输入分布。

因此，我们已经证明，将式（21）形式的输入态送入 SMS，可以在奇数 N 时生成 N 模 GHZ 态。而对于偶数 N，该方案无法生成 GHZ 态（例外情况：$N=4$），这是广义 HOM 效应所致。值得注意的是，也可以改用式（15）给出的输入态。与之前类似，这样在奇数 N 时也能以相同的概率生成 GHZ 态，但在偶数 N 时无法生成 GHZ 态（例外情况： $N=2$）。不过，在这种情况下，若后选择单个输出模式中的 N 光子符合事件，就能得到单模 GHZ 态，之后可将其拆分到 N 个空间模式中。我们将在附录A中讨论这一点，并证明总成功概率与针对 $2N$ 网络推导出的结果相同 [（见式（20））]。

在下一小节中，我们将介绍一种经过调整的方案，用于生成偶数 N 下的 N 模GHZ态。

C. 对称N端口分束器（偶数N）

为了生成含有偶数个光子的 GHZ 态，我们将多个光子注入同一个输入模式。我们调整式（15）中的输入态，使得始终有两个垂直偏振光子进入同一个输入模式，因此我们只使用每隔一个的输入模式（见图5）。由于装置具有对称性，从第一个还是第二个输入模式开始并不重要。我们选择从第一个开始，即$k=2\kappa-1\,(\kappa=1,2,\ldots,N/2)$。这样可将 SMS 的离散傅里叶变换简化为 [见式（4）]

$$U_{kl}=\frac{1}{\sqrt{N}}\omega_N^{(2\kappa-2)(l-1)}=\frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{\omega}_N^{(\kappa-1)(l-1)}, \tag{28}$$

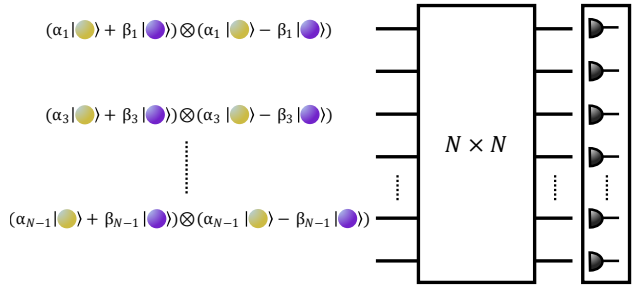

图5。用于生成偶数 N GHZ态的酉网络。每隔一个输入模式注入两个垂直偏振光子。通过后选择，在该网络的 N 输出模式中探测到 N 模式-N 光子符合事件。

其中 $\tilde{\omega}$ =exp[i2π/(N/2)] 是单位根的第 $N/2$ 个。与之前不同，现在由 ZTL 导出的条件取决于 mod(N/2)，而不是 mod(N)。

N_e 的调整后输入态，即偶数 N，可写为

$$|\Psi_{N_e,\mathrm{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^N}\left\{\prod_{\kappa=1}^{N/2}\left(a^\dagger_{\mu,k} + e^{\mathrm{i}\theta_\kappa}a^\dagger_{\eta,k}\right) \times \left(a^\dagger_{\mu,k} - e^{\mathrm{i}\theta_\kappa}a^\dagger_{\eta,k}\right)\right\}|0\rangle\,, \tag{29}$$

化简后得到

$$|\Psi_{N_e,\mathrm{in}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^N}\left\{\prod_{\kappa=1}^{N/2}\left[\left(a^\dagger_{\mu,k}\right)^2 - e^{\mathrm{i}2\theta_\kappa}\left(a^\dagger_{\eta,k}\right)^2\right]\right\}|0\rangle\,. \tag{30}$$

由方程（30）可知，每个 $N/2$ 输入模式均可写成在 $|\mu\rangle$ 或 $|\eta\rangle$中包含两个光子。因此，只可能出现含偶数个 $|\mu\rangle$ 和 $|\eta\rangle$ 的输出分布。利用方程（28）给出的变换关系，可得完整的输出态

$$|\Psi_{N_e,\mathrm{out}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^N\sqrt{N}^N}\left\{\prod_{\kappa=1}^{N/2}\left[\left(\sum_{l=1}^{N}\tilde{\omega}^{(\kappa-1)(l-1)}b^\dagger_{\mu,l}\right)^2 - e^{\mathrm{i}2\theta_\kappa}\left(\sum_{l=1}^{N}\tilde{\omega}^{(\kappa-1)(l-1)}b^\dagger_{\eta,l}\right)^2\right]\right\}|0\rangle\,. \tag{31}$$

与奇数-N GHZ 态的情况相同，我们希望得到在对 N 模式符合事件进行后选择时输出态的显式形式，也就是说，每个输出模式中恰好占据一个光子。因此，我们需要计算每种输出分布的成功概率 [（见方程（11））], , 即处于 $|\mu\rangle$ 态和 $|\eta\rangle$态的每种 $N = N_1 + N_2$ 光子组合，其中现在 N_1、 N_2 和 N 均须为偶数。

完整的输出模式集合 $\sigma = \{1, 2, \ldots, N\}$ 再次分为两个全序子集 σ_μ = $\{m_1, m_2, \ldots, m_{N_1}\}$ 和 $\sigma_\eta = \{h_1, h_2, \ldots, h_{N_2}\}$，其中 $\sigma = \sigma_\mu \cup \sigma_\eta$（见图 4中的示例）。因此，量子态 $|\mu\rangle$ ($|\eta\rangle$) 中第 i 个输出光子的输出模式为 m_i (h_i)。现在，我们可以具体讨论公式（30）给出的不同输入项，它们会得到 σ_μ 和 σ_η。

由于总是有两个源自同一输入的相同光子，我们可以将所有光子分成两两一组，然后遍历所有可能的配对方式。不失一般性地，我们可以将 m_1 与 m_2、 m_3 与 m_4、……、m_{N_1-1} 与 m_{N_1} 组合起来，并为量子态 $|\mu\rangle$ 中的 N_1 个光子定义 $M_1 = m_1 + m_2$、……、 $M_{N_1/2} = m_{N_1-1} + m_{N_1}$（类似地，我们为量子态$|\eta\rangle$中的 N_2 个光子定义 $H_1 = h_1 + h_2$、……、$H_{N_1/2} = h_{N_2-1} + h_{N_2}$ ）。该输出项的概率由下式确定：

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathcal{P}_{\tilde{\delta}}}\left[\prod_{l=1}^{N_1/2}\tilde{\omega}_N^{(M_l-2)(\tilde{\delta}(l)-1)}\right] \times \left[\prod_{l'=1}^{N_2/2}\tilde{\omega}_N^{(H_{l'}-2)(\tilde{\delta}(N_1/2+l')-1)}e^{\mathrm{i}2\theta_{\tilde{\delta}(N_1/2+l')}}\right] \\ &= \sum_{\mathcal{P}_{\tilde{\delta}}}\left[\prod_{l=1}^{N_1/2}\tilde{\omega}_N^{(M_l-2)(\tilde{\delta}(l)-1)}\right]\left[\prod_{l'=1}^{N_2/2}\tilde{\omega}_N^{(H_{l'}-1)(\tilde{\delta}(N_1/2+l')-1)}\right],\end{aligned} \tag{32}$$

其中，我们对每隔一个的输入模式 $\delta = \{1, 2, \ldots, N/2\}$ 的所有排列 $\mathcal{P}_{\tilde{\delta}}$ 求和（根据 $\tilde{\omega}_N$~ 的定义，对于每个 l，它变为 $2\delta\,(l) - 1$，即 $\{1, 3, \ldots, N-1\}$）。在公式（32）的第 3 行中，我们利用了 $\tilde{\omega}_N$ = exp[i2π/（N/2）] 和 θ_k = （$k-1$）2π/N 的定义，将输入光子的相位与多模分束器的相位合并。现在，该论证与第 III B 节中针对奇数 N 所给出的论证完全相同；我们同样可以对调整后的输出模式 $\tilde{\sigma}' = \{M_1, M_2, \ldots, M_{N_1/2}, H_1+1, H_2+1, \ldots, H_{N_2/2}+1\}$ 的排列求和，同时固定输入模式，即

$$\sum_{\mathcal{P}_{\tilde{\sigma}'}}\prod_{l=1}^{N/2}\tilde{\omega}_N^{(l-1)(\tilde{\sigma}'(l)-2)}. \tag{33}$$

要获得非零贡献，我们需要对所有M_i 和 H_j 求和，并额外添加一个 $N_2/2$，从而得到条件 [请参见 ZTL，公式（12）]

$$\sum_{i=1}^{N_1/2}M_i + \sum_{j=1}^{N_2/2}H_j + \frac{N_2}{2} = \frac{N(N+1)}{2} + \frac{N_2}{2} \overset{!}{=} 0 \bmod(\frac{N}{2}). \tag{34}$$

为了满足这一条件， N_2 必须等于 0 或N，其中 $\tilde{\sigma}' = \{1, 2, \ldots, N/2\}$ 或 $\{2, 3, \ldots, N/2+1\}$。由于在两种情况下（$\tilde{\omega}_N^x = \tilde{\omega}_N^{x+N/2}$ 当 $x \in \mathbb{Z}$时）式（33）相同，因此这证实了每个偶数 N 模N 光子 GHZ 态的制备。 N与.....的情况相同

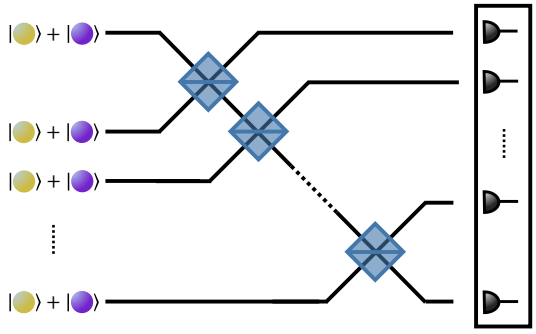

图 6. 从 N个 N 独立光子（每个光子均处于偏振态 $|+\rangle$）出发，后选择N 模式偏振编码 GHZ 态的标准方案装置。光子在 $N-1$ 偏振分束器（蓝色方块）处发生干涉，最后在 N 探测器处符合探测。该图改编自参考文献 [44]。

对于奇数 N，成功概率没有解析解。我们对其进行了数值计算，取值为$N=2$、4、.....、12，并将结果绘于图 7中。

IV. 与其他 GHZ 态生成线性光学方法的比较

本节根据成功概率，对比本文讨论的三种不同的 N 模式 N光子 GHZ 态生成方法。我们还将它们与一种标准的偏振编码 GHZ 态后选择方法进行比较 [44]，并在此简要介绍该方法。该方法以 N 个独立光子为初始输入，每个光子均处于偏振态 $|+\rangle$，随后在 $N-1$ 偏振分束器（PBS）（见图6）处发生干涉。结合后选择每个输出模式中恰有一个光子，该方案可生成偏振编码的 N光子 GHZ 态，成功概率为 [44]

$$P_{\mathrm{PBS,ps}}=\frac{1}{2^{N-1}}. \tag{35}$$

这一结果源于这样一个事实：使用偏振分束器的方法会产生总共 2^N 种可能的输出分布。其中两种满足后选择条件，并属于 GHZ 态。我们在图 7 中绘出了这一概率，并与上述三种方案的成功概率一并比较。从图中可以看出，对于 SMS 方法，在 $N=2$ （偶数 N 的策略，见第 III C 节）和 $N=4$（奇数 N 策略，见第 IIIB 节）这两种情况下，其概率与偏振分束器方法相同 [，见公式（35）]。对于其他任何 N，SMS 方法的成功概率都低于使用偏振分束器的方法。不过，SMS 方法的优势在于灵活性更高。它适用于不同的内部自由度选择，而不仅限于偏振（如偏振分束器方法，见附录 B），并且，重要的是，无需更改实验装置，它就能产生不同的纠缠输出态，例如， N-模 W 态 [23], 。这一点已在文献 [33], 中得到演示：通过调整光子的输入偏振，研究人员为 $N=3$ 个光子生成了 GHZ 类和 W 类三体态。

直观地说，SMS 方法的标度可以通过粗略估算所有可能输出的数量，以及对 GHZ 态有贡献的输出数量来理解。按照上述方法将 N 个光子注入 N端口多模分束器后，总共有 2^N 种可能的输入（对于奇数 N [，见式（21）]；对于偶数 $2^{N/2}$， N [见式（30）]）。每种输入最多可产生 N^N 种输出，因为每个 N 光子都可以进入任意一个 N 输出模式。对于每个 GHZ 态，有 $2\times N!$ 种有效的输出可能性，分别对应两种所有光子都相同的情形，以及$N!$ 种可能的跃迁，即 N 输入光子跃迁至 N输出模式。这便得到了奇数 N

$$\tilde{P}_{N_{\mathrm{o}},\mathrm{ps}}=\frac{N!}{2^{N-1}N^N}, \tag{36}$$

和偶数 N

$$\tilde{P}_{N_{\mathrm{e}},\mathrm{ps}}=\frac{N!}{2^{N/2-1}N^N}, \tag{37}$$

我们将这些结果与数值计算结果一同绘于图中，数值计算最多涵盖 $N=12$ 个7。

与第 $2N$ 端口方法（见第 IIIA 节）相比，该方法也能产生属于不同纠缠类别的输出态，而采用 SMS 的方法（见第 III B 节和 IIIC 节）的成功概率更高。在附录 A 中，我们还展示了借助对称多端口分束器可以生成单模 N 光子 GHZ 态，其成功概率与式（36） [（见式（A3）]。

V. 结论

总之，我们证明了 N 光子 N 模 GHZ态可以通过多端口分束器中的干涉生成。我们提出了适用于偶数和奇数 N 的新方案，证明了任意 N 都可以生成 GHZ 态。特别是，利用零传输定律 [40], ，我们证明，当输入特定输入态的部分可区分光子时，只会出现描述 GHZ 态的项。由于成功概率由一个与随机矩阵的矩阵永久式相同的项描述，因此无法进行解析计算。我们给出了标度估算和数值结果，最多可达 $N=12$。据我们所知，此前尚未有这种推广。与第 IV 节讨论的依赖偏振的标准方法不同，本文所述的多端口分束器中独立光子的干涉不受偏振限制，适用于任何能够描述光子量子比特的内部自由度。

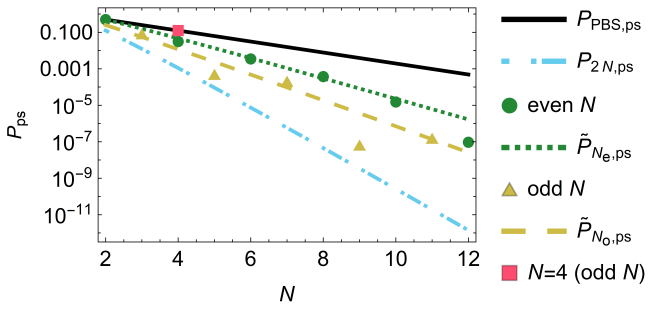

图7. 不同成功概率的曲线图。点划线（浅蓝色）表示$P_{2N,\,\mathrm{ps}}$ 端口非对称网络的成功概率，详见第 $2N$节。IIIA。三角形（金色）和圆形（绿色）分别表示数值计算得到的奇数 N（第IIIB节）和偶数 N（第III C节）对应的成功概率；虚线（金色）和点线（绿色）则分别展示两种不同方法的粗略估算结果，即$\tilde{P}_{N_{\mathrm{o}},\,\mathrm{ps}}$ 和$\tilde{P}_{N_{\mathrm{e}},\,\mathrm{ps}}$。作为比较，我们绘出了标准方法的成功概率$P_{\mathrm{PBS},\,\mathrm{ps}}$ [实线（黑色）]，由式（35）给出。红色方块标示了在对称分束器中使用 $N = 4$ 个光子、输入构型为 $|+-+-\rangle$ [23]时的概率；对于奇数 N，该结果与本文提出的方法一致。

因此，它开辟了这样的可能性：将任何对称的 N 端口分束器用作 N 方纠缠生成器；只需调整输入态，便可针对不同的内部自由度生成不同的纠缠态，例如 GHZ 态和 W态。

根据目标不同，这种灵活性甚至可以弥补与只能生成特定纠缠态的方案相比，在成功概率方面的劣势。例如，量子网络将极大受益于这样一种服务器：它无需改变实验装置，就能向多个参与方发送不同的纠缠态（可能是随机发送）。这将使不同的量子协议 [7]得以轻松实现。此外，结合额外的融合门，多个对称多端口分束器可用作构建簇态的资源，进而用于光子量子计算 [15, 45]。通过调整输入态，还能生成属于其他纠缠类别的量子态，例如簇态或 G态 [33], ，这将进一步扩展可实现的协议和可融合的量子态的范围。

所提出的方案不仅可用于后选择，还可以预示 N 部分纠缠的成功生成。与文献 [20]，类似，多端口分束器可用于纠缠 N 个单光子发射器，每个发射器都由 Λ 方案定义，例如囚禁离子或量子点。由于在这种情况下，人们并不知道所发射光子的量子态，因此必须扩展后选择过程，以分析光子的内部自由度。这也能自动实现对纠缠 N 光子量子态的预示，方法是从纠缠光子对而非单光子开始。

最后，研究损耗和可区分性、混合性等实验不完美性对不同 GHZ态生成方法的影响，是一个值得探讨的问题 [46]。此外，我们的方法还可以与文献 [12] 中的方法相结合；该方法采用主动前馈和复用来提高生成概率。

致谢

我们感谢 Jelena Mackeprang 就本文展开的富有成效的讨论，并提出有益的意见。我们感谢卡尔蔡司基金会、综合量子科学与技术中心 (IQST)、德国研究联合会 (DFG)、联邦教育与研究部 (BMBF，SiSiQ 和 PhotonQ 项目)、联邦经济事务与能源部 (BMWi，PlanQK 项目)，以及量子计算能力中心巴登-符腾堡州（由巴登-符腾堡州经济、劳动与旅游部资助，QORA 项目）提供的支持。

附录 A：单模 GHZ 态：对称多端口分束器

为了找到适用于任意 N 和对称多端口分束器的解，我们采用了参考文献 [47] 中提出的一种思路，该方法利用双模分束器构成的线性阵列。此方案可为任意 N生成 GHZ 态。然而，该方案需要在单个输出模式中对 N光子符合事件进行后选择。与原始思路类似，我们使用式（15）给出的输入态，并将其输入 SMS。请注意，参考文献 [48] 的作者也研究了将这一特定量子态作为输入送入 SMS 的情形，不过研究背景是多模玻色子聚束。

输出模式 l 的后选择单模输出态形式如下

$$
\begin{aligned}
&|\psi_{N_l,\mathrm{ps}}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^N}\left\{\prod_{k=1}^{N} U_{kl}\left[b^\dagger_{\mu,l} + \exp(\mathrm{i}\theta_k) b^\dagger_{\eta,l}\right]\right\}|0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2N}^N}\left\{\prod_{k=1}^{N} \omega_N^{(k-1)(l-1)}\left[b^\dagger_{\mu,l} + \exp(\mathrm{i}\theta_k) b^\dagger_{\eta,l}\right]\right\}|0\rangle\,,
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

其中，由 MS 诱导的相位因子可以提取出来并忽略。通过在量子态 N_1 中选取固定数量的 $|\mu\rangle$ 光子，以及在量子态 N_2 中选取 $|\eta\rangle$ 光子，可以得到与第IIIA节所述相同的结论，即除仅含相同光子的项之外，所有其他项都会被抑制。最终的后选择态为

form

$$|\psi_{N_l,\mathrm{ps}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N}^N}\left[\left(b_{\mu,l}^{\dagger}\right)^N + (-1)^{N+1}\left(b_{\eta,l}^{\dagger}\right)^N\right]|0\rangle\,. \tag{A2}$$

相应的成功概率为

$$P_{N_l,\mathrm{ps}} = \frac{N!}{2^{N-1}N^N}, \tag{A3}$$

这与原始设置中计算得到的成功概率相同 [47]。通过使用第二个 N端口分束器，将单模GHZ态转换为 N模GHZ态，式（ $N!/N^N$A3）中会增加一个额外因子，使其与上文讨论的2N网络结果相同 [（见式（20）]。

请注意，当使用公式（21）所给出的量子态作为输入态时，在 N为偶数的情况下，单模输出态不再是 GHZ 态。此时，输出态还包含一项，其中有 $N/2$ 个光子处于量子态 $|\mu\rangle$，以及 $N/2$ 个光子处于量子态 $|\eta\rangle$；当 $N=4$ 时，该量子态与霍兰德-伯内特态相同。

附录 B：内部自由度

单光子 $|\Psi_k\rangle = |F_1、F_2、\ldots\ldots、F_n\rangle_k$的量子态由其内部自由度 F_i （i =1、2、……、n）和外部自由度 k 决定。在本文中，外部自由度 $k=1、2、\ldots\ldots、N$表示多模分束器中光子进入或离开的相应输入或输出模式（见图 1）。内部自由度表示光子自身的属性，这些属性可能使光子具有可区分性，例如偏振或波长，并会导致外部自由度中的多粒子干涉 [37]。假设对于本文所研究的所有光子，除一个内部自由度（=属性） F 之外的其他内部自由度均相同，我们可以写成 $|\Psi_k\rangle = |F\rangle_k$。于是，两个光子的可区分性由下式给出 [34]

$$\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle = r_{ij}e^{i\varphi_{ij}}, \tag{B1}$$

其中 $r_{ij}\in(0,\ 1)$ 和 $\varphi_{ij}\in(0,\ 2\pi)$。$r_{ij}$ 的值表示两个光子的可区分程度。对于 $r_{ij}=0$，两个光子完全可区分，例如一个水平偏振光子和一个垂直偏振光子，即 $\langle H|V\rangle = 0$。对于$r_{ij}=1$，两个光子完全相同，例如两个偏振相同的光子，即 $\langle V|V\rangle = 1$。

要生成正文中讨论的纠缠GHZ态，可以利用任何能够制备两个正交态单光子的内部自由度。例如，偏振（$\langle H|V\rangle = 0$）、波长（$\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$）、轨道角动量（$\langle l_1|l_2\rangle = 0$）和时间箱编码（$\langle t_1|t_2\rangle = 0$）。

[1] M. Hillery、V. Bu˘zek 和 A. Berthiaume，《量子秘密共享》，《物理评论 A》59，1829（1999）。[2] M. Epping、H. Kampermann、C. Macchiavello 和 D. Bruß，《多体纠缠可以加速网络中的量子密钥分发》，《新物理学杂志》19，093012（2017年）。[3] F. Grasselli、H. Kampermann 和 D. Bruß，《多方量子密钥分发协议中的有限密钥效应》，《新物理学杂志》20，113014（2018年）。[4] P. Thomas、L. Ruscio、O. Morin 和 G. Rempe，《利用单个原子高效生成纠缠多光子图态》，《自然》608，677（2022年）。[5] X.-L. Wang、Y.-H. Luo、H.-L. Huang、M.-C. Chen、Z.-E. Su、C. Liu、C. Chen、W. Li、Y.-Q. Fang、X. Jiang、J. Zhang、L. Li、N.-L. Liu、C.-Y. Lu 和 J.-W. Pan，《利用六个光子的三种自由度实现 18 量子比特纠缠》，《物理评论快报》120，260502（2018年）。[6] A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、A. S. Zibrov、H. Pichler、S. Choi、J. Cui、M. Rossignolo、P. Rembold、S. Mon-tangero、T. Calarco、M. Endres、M. Greiner、V. Vuleti´c 和 M. D. Lukin，《里德堡原子阵列中薛定谔猫态的生成与操控》，《科学》365，570（2019年）。[7] G. Murta、F. Grasselli、H. Kampermann 和 D. Bruß，《量子会议密钥协商：综述》，Adv. 量子技术**3**, 2000025 (2020年)。[8] F. Pappa, P. Hahn, J.《匿名量子会议密钥协商》，PRXQuantum **1**, 020325（2020年）。[9] C. Thalacker、F. Hahn、J. de Jong、A. Pappa 和 S. Barz，《量子网络中的匿名与秘密通信》，《新物理学杂志》**23**，083026（2021年）。[10] I. Pogorelov、T. Feldker、C. D. Marciniak、L. Postler、G. Jacob、O. Krieglsteiner、V. Podlesnic、M. Meth、V. Negnevitsky、M. Stadler、B. H¨ofer、C. W¨achter、K. Lakhmanskiy、R. Blatt、P. Schindler 和 T. Monz，紧凑型离子阱量子计算演示装置，PRXQuantum **2**，020343（2021年）。[11] G. J. Mooney、G. A. L. White、C. D. Hill 和 L. C. L. Hollenberg，在超导量子计算机中生成并验证27量子比特 Greenberger-Horne-Zeilinger态，《物理通讯杂志》**5**，095004（2021年）。[12] E. Meyer-Scott、N. Prasannan、I. Dhand、C. Eigner、V. Quiring、S. Barkhofen、B. Brecht、M. B. Plenio 和 C. Silberhorn，通过主动前馈和复用实现多光子纠缠态的可扩展生成，《物理评论快报》**129**，150501（2022年）。[13] D. M. Greenberger、M. A. Horne、A. Shimony 和 A. Zeilinger，无不等式的贝尔定理，《美国物理学杂志》**58**，1131（1990）。

[14] J.-W. Pan、D. Bouwmeester、M. Daniell、H. Weinfurter 和 A. Zeilinger，三光子 Greenberger–Horne–Zeilinger纠缠中量子非定域性的实验检验，《自然》403，515（2000）。[15] S. Omkar、S.-H. Lee、Y. S. Teo、S.-W. Lee 和 H. Jeong，利用 Greenberger-Horne-Zeilinger态实现可扩展量子计算的全光子架构，PRX Quantum 3，030309（2022年）。[16] M. Erhard、M. Krenn 和 A. Zeilinger，高维量子纠缠的进展，《自然评论：物理》2，365（2020年）。[17] Y. Zhang、T. Liu、J. Zhao、Y. Yu 和 C.-P. Yang，在电路量子电动力学中生成粒子型和波动型光学量子比特的混合格林伯格-霍恩-蔡林格纠缠态，《物理评论 A》101，062334（2020年）。[18] Y. Xia、Q.-Q. Chen、J. Song 和 H.-S. Song，利用交叉克尔非线性高效分析超纠缠 Greenberger–Horne–Zeilinger态，《美国光学学会杂志 B》29，1029（2012年）。[19] A. Maser、R. Wiegner、U. Schilling、C. Thiel 和 J. von Zanthier，偏振纠缠光子的多用途光源，《物理评论 A》81，053842（2010年）。[20] T. Bastin、C. Thiel、J. von Zanthier、L. Lamata、E. Solano 和 G. S. Agarwal，通过调节局域操作对多量子比特纠缠类别进行操作性判定，《物理评论快报》102，053601（2009年）。[21] H. Hossein-Nejad、R. Stock 和 D. F. V. James，通过传播和探测生成多光子纠缠，《物理评论 A》80，022308（2009年）。[22] G. J. Pryde 和 A. G. White，利用光纤多端口生成最大纠缠光子数态，《物理评论 A》68，052315（2003年）。[23] Y. L. Lim 和 A. Beige，通过贝尔多端口分束器实现多光子纠缠，《物理评论 A》71，062311（2005年）。[24] N. Kiesel、W. Wieczorek、S. Krins、T. Bastin、H. Weinfurter 和 E. Solano，对称光子量子比特态的多体纠缠类别操作性判定，《物理评论 A》81，032316（2010年）。[25] S. Kasture，生成大型对称 Dicke态的可扩展方案，《物理评论 A》97，043862（2018年）。[26] S. Paesani、J. F. F. Bulmer、A. E. Jones、R. Santagati 和 A. Laing，利用线性光学实现通用高维量子计算的方案，《物理评论快报》126，230504（2021年）。[27] D. Lee、T. Pramanik、S. Hong、Y.-W. Cho、H.-T. Lim、S. Chin 和 Y.-S. Kim，通过空间重叠使三个相同粒子发生纠缠，《光学快报》30，30525（2022年）。[28] T. J. Bell、J. F. F. Bulmer、A. E. Jones、S. Paesani、D. P. S. McCutcheon 和 A. Laing，利用非相互作用光子发射体阵列生成高维纠缠的协议，《新物理学杂志》24，013032（2022年）。[29] L. Ju、M. Yang、N. Paunkovi´c、W.-J. Chu 和 Z.-L. Cao，通过量子行走制备光子GHZ态和W态，《量子信息处理》18，176（2019年）。[30] P. Blasiak 和 M. Markiewicz，从不接触的情况下使三个量子比特纠缠，《科学报告》9，20131（2019年）。[31] Y.-S. Kim、Y.-W. Cho、H.-T. Lim 和 S.-W. Han，通过量子擦除器高效线性光学生成多体 W 态，《物理评论 A》101，022337（2020年）。[32] P. Blasiak、E. Borsuk、M. Markiewicz 和 Y.-S. Kim，《多体 W 量子态的高效线性光学生成》，《物理评论 A》104，023701（2021年）。[33] S. Kumar、D. Bhatti、A. E. Jones 和 S. Barz，《利用多端口分束器生成纠缠》，准备中（2022年）。[34] A. J. Menssen、A. E. Jones、B. J. Metcalf、M. C. Tichy、S. Barz、W. S. Kolthammer 和 I. A. Walmsley，《可区分性与多粒子干涉》，《物理评论快报》118，153603（2017年）。[35] C. Dittel、G. Dufour、M. Walschaers、G. Weihs、A. Buchleitner 和 R. Keil，《置换对称多粒子态的完全相消干涉》，《物理评论 A》97，062116（2018年）。[36] A. E. Jones、A. J. Menssen、H. M. Chrzanowski、T. A. W. Wolterink、V. S. Shchesnovich 和 I. A. Walmsley，《成对可区分光子的多粒子干涉》，《物理评论快报》125，123603（2020年）。[37] A. M. Minke、A. Buchleitner 和 C. Dittel，《通过对称性表征四体不可区分性》，《新物理学杂志》23，073028（2021年）。[38] Y. H. Shih 和 C. O. Alley，《利用光学参量下转换产生的光量子对进行的新型爱因斯坦–波多尔斯基–罗森–玻姆实验》，《物理评论快报》61，2921（1988年）。[39] Y. L. Lim 和 A. Beige，《玻色子和费米子的广义洪–欧–曼德尔实验》，《新物理学杂志》7，155（2005年）。[40] M. C. Tichy、M. Tiersch、F. de Melo、F. Mintert 和 A. Buchleitner，《多端口分束器的零透射定律》，《物理评论快报》104，220405（2010年）。[41] A. Classen、F. Waldmann、S. Giebel、R. Schneider、D. Bhatti、T. Mehringer 和 J. von Zanthier，《利用多光子干涉对任意一维热光源阵列进行超分辨成像》，《物理评论快报》117，253601（2016年）。[42] D. Bhatti、A. Classen、S. Oppel、R. Schneider 和 J. von Zanthier，《利用两个热光源产生类 N00N 干涉》，Eur. Phys. J. D 72，191（2018年）。[43] S. Aaronson 和 A. Arkhipov，《线性光学的计算复杂性》，载于 *STOC '11: Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on Theory of computing* 2011 333 342 （ ACM，纽约，）第 – 页。[44] Y. Sagi，《生成 Greenberger–Horne–Zeilinger 型光子 n **68**, 态的方案》，《物理评论 A》（）。[45] M. Gimeno-Segovia、P. Shadbolt、D. E. Browne 和 T. Rudolph，《从三光子 Greenberger–Horne–Zeilinger 态到弹道式通用量子计算》，《物理评论快报》115，020502（2015年）。[46] A. E. Jones、S. Kumar、S. D'Aurelio、M. Bayerbach、A. J. Menssen 和 S. Barz，《量子干涉中的可区分性与混合性》，arXiv:2201.04655（2022年）。[47] H. F. Hofmann，《通过光子瓶颈处的超聚束生成高度非经典的 n光子偏振态》，《物理评论 A》70，023812（2004年）。[48] B. Seron、L. Novo 和 N. J. Cerf，《不可区分粒子并不能使玻色子聚束达到最大》，arXiv:2203.01306（2022年）。042320 2003