arXiv:2302.00717v1 [gr-qc] 1 Feb 2023

非相对论性 ℓ-玻色子星的径向线性稳定性

Armando A. Roque,[1,2] Emmanuel Ch´avez Nambo,[1] 和 Olivier Sarbach[1]

[1] *Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Edificio C-3, Ciudad Universitaria, 58040 Morelia, Michoacán, México*

[2] *Unidad Académica de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas,* 98060, *México.*(日期：2023年2月3日)

我们研究非相对论性 ℓ-玻色子星的线性稳定性。这些星描述的是薛定谔-泊松方程组的静态球对称构型，其中包含多个角动量取值相同的波函数 ℓ。本文将分析限定于波函数 $2\ell+1$ 径向剖面的时变扰动，并保持其角向依赖关系不变。结合解析与数值方法，我们发现，对于每个 ℓ，基态均为线性稳定，而第 n 个激发态则具有 $2n$ 个不稳定（随时间指数增长）模态。我们的结果还表明，所有激发态都是该理论守恒能量泛函的鞍点。

I. 引言

ℓ–玻色子星 [1] 是一种奇异的致密天体，由 $N = 2\ell + 1$ 自引力复数重标量场组成。它们是标准（$\ell = 0$）玻色子星的一种推广 [2–7]，其内部对称群从 $U(1)$扩展为 $U(N)$。这使得我们能够构造这样的构型：每个标量场都具有相同的谐波时间依赖性并携带角动量 ℓ；然而，整体构型却是静态且球对称的 [1, 8]。文献 [9]近期提出了对 ℓ-玻色子星以及半经典引力中更一般构型的一种新解释，该解释只需要一个实的（量子）标量场。

与其他致密天体类似（例如，[10] 可参阅综述，[11, 12] 可参阅关于霍恩德斯基理论的近期研究），ℓ–玻色子星具有丰富的现象学特征 [13–15]。特别是，研究表明，与流体星类似，这些天体存在一个“稳定分支”，即对于球对称线性 [16–18] 和非线性 [19, 20]微扰稳定的构型。此外，对爱因斯坦–克莱因–戈登方程进行的完整三维数值模拟 [21] 并未发现这些构型存在非球对称增长微扰的迹象。然而，模拟时间尺度有限，因此难以就这些天体对一般小微扰的稳定性得出明确结论。

在牛顿极限下，ℓ-玻色子星预计会约化为薛¨定谔-泊松（SP）方程组的解。对于 $\ell = 0$ 这类解，人们已在各种不同的物理背景下进行了讨论，包括等离子体的哈特里-福克理论 [22], 、引力导致的量子态约化 [23, 24], 以及暗物质星系晕的建模 [25–28]。具体$\ell = 0$而言，关于这些构型已经确立了以下结果。Lieb [22] 证明了一个唯一的平稳（即波函数具有时间谐波依赖）基态解的存在性，该解具有球对称性且为正。SP方程组的柯西问题的全局时间适定性已在 [29, 30]中得到证明。进一步的研究导致了基态构型的轨道稳定性 [31]。球对称激发态的存在性已在 [32]中得到确立；在这些激发态中，波函数的径向分布具有任意数量 n 的零点。这产生了一个由平稳、球对称解组成的无限族，其能量本征值为负，并在 n中单调递增。关于SP及相关方程组的解的数学性质的近期综述，参见 [33]。我们还请读者参阅 [34]，其中给出了有界区域上具有无穷多个态的SP方程组的最新存在性结果。关于推广到具有 $\ell \neq 0$的 ℓ-玻色子星，在 [35]中已证明：对于每个 n、$\ell = 0$、1、2、3、.....，都存在一个由平稳、球对称的SP方程组解组成的无限族，这些解的波函数径向分布具有 n 个节点。关于这些构型的数值示例，参见 [35–37]。

与其相对论对应物类似，这些天体要在自然界中存在，就必须能够抵抗足够小的动力学扰动而保持稳定。[1] 对于 $\ell = 0$ 情形，已有研究结合解析和数值方法，在 [38], 进行了稳定性分析。结果表明，基态构型是稳定的，而每个激发态都不稳定，其模态中有 n 组四重态，并以复本征值为特征。关于$\ell = 0$ 基态构型非线性稳定性的进一步数值研究，参见文献 [39, 40]。关于多态解（具有 $\ell = 0$但不同的 n）的推广，参见 [41]。近期，文献 [42] 开展了多态薛定谔-泊松系统的三维数值演化，分析了多-ℓ 多态构型（即包含具有多个 ℓ 和 n值的波函数的解）的稳定性，以及其他轴对称构型。特别是，该研究声称，具有 $\ell = 1$ 的非相对论基态 ℓ-玻色子星是稳定的。[2] 然而，据我们所知

[1] 或者，如果它们是不稳定的，其寿命也足够长。[2] 请注意，量子数 n in [42] 的定义有所不同

迄今尚未对 $\ell \neq 0$ 构型进行线性稳定性分析。

本文旨在系统研究非相对论 ℓ-玻色子星的主要性质，并分析其相对于球对称线性扰动的模态稳定性。为此，我们在第II 节首先介绍构造这些天体及其线性扰动所依据的理论框架，从 N-粒子薛定谔-泊松系统开始。本文特别关注的是对描述该方程组总能量的时间守恒能量泛函的识别。该泛函是对用于 N 粒子的著名泛函的推广，后者用于 [22], ，其全局极小值描述了$\ell = 0$ 基态。更一般地，正如我们所展示的，非相对论 ℓ-玻色子星对应于该泛函的临界点。我们在小节IIA中介绍向单粒子态的约化；在小节IIB中推导球对称方程组，其中假设波函数具有相同的径向分布和特定的角向依赖。定态方程和线性化方程分别在小节IIC和IID中给出。我们在小节IIE中研究该方程组的解析性质，包括其重标度自由度、一个零模解，以及线性化方程的模态解之间的四重对称性。此外，在本小节中，我们还展示了线性化系统可以约化为一个涉及线性算子 Q 的单一方程，该算子与能量泛函的二阶变分有关。

第III 节介绍了我们的数值实现，以及非相对论 ℓ-玻色子星的结果。在第IIIA 小节中，我们将定态方程组改写为更适合数值计算的形式，并分析中心处的正则性条件以及解在无穷远处的渐近行为。此外，我们还说明了用于计算波函数及其能量本征值的射击法。接着，在第IIIB 小节中，我们展示$n = 0$、1、2、3 和 $\ell = 0$、1、2、3、4、5 的数值结果。特别地，我们给出了波函数和引力势的径向分布，并列出了能量本征值表。此外，我们研究了方程组的总能量，确定了具有相同场总数的不同构型之间在能量上允许的跃迁。该分析表明，角动量为零的基态构型对应于守恒能量泛函的全局极小值。事实上，这一性质可以从 [22]中的结果得到证明。

第 IV 节专门对线性化系统进行数值研究。我们的方法是将 [38] 中使用的步骤直接推广到任意 ℓ，其中线性化方程被化为一个通过谱方法求解的本征值问题。在小节 IVA 中，我们将这些方程改写为更合适的形式，并推导出原点和渐近区域的物理相关边界条件，随后利用这些条件在有限外边界处给出边界条件。此外，我们还介绍了如何通过使用切比雪夫点的伪谱配置法 [43, 44]求解本征值问题。在小节 IVB 中，我们展示数值线性稳定性结果，首先考察处于基态的构型，随后考察激发态。对于这两种情况，我们都展示了本征值谱以及若干代表性示例所对应的特征函数分布，并讨论不稳定构型的寿命。结果表明，对于所有 $\ell \geq 0$ ，基态解都是稳定的，并且对应于（球对称约化）能量泛函的极小值；而所有激发态均不稳定，并对应于鞍点。此外，我们的结果表明，基态仅具有纯振荡模态。

结论和未决问题见第 V 节。技术结果收录于附录中，包括薛定谔-泊松系统的拉格朗日表述、守恒能量泛函的一阶和二阶变分计算、能量本征值的数值确定，以及对数值谱代码的验证。

II. 理论设定

考虑一个由 N 个质量为 μ 的相同粒子组成的非相对论系统，它们之间唯一的相互作用是由这些粒子产生的引力势 $\mathrm{U}(t,\vec{x})$。此类系统由 N 粒子薛定谔-泊松（或引力薛定谔）方程组 [45–47] 描述

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t,X)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2_{\vec{x}_i} + \mu\mathbf{U}(t,\vec{x}_i)\right)\Psi(t,X), \quad (1)$$

其中， $\hbar$ 表示约化普朗克常数， $\Psi(t,X)$ 是波函数， $X=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_N)$ 是参数化构型空间的 $3N$ 维向量。这里， $\nabla^2_{\vec{x}_i}$ 指相对于变量 $\vec{x}_i$ 的三维拉普拉斯算子，而由 N 个粒子产生的引力势 $\mathrm{U}(t,\vec{x})$ 由泊松方程确定

$$\nabla^2\mathbf{U}(t,\vec{x}) = 4\pi G\mu\sum_{i=1}^{N}\int|\Psi(t,X)|^2\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_i)d^{3N}X, \quad (2)$$

要求对于 $|\vec{x}| \to \infty$，$\mathrm{U}(t,\vec{x}) \to 0$ 。利用拉普拉斯算子的格林函数，可以将 U 表示为

$$\mathbf{U}(t,\vec{x}) = -G\mu\sum_{j=1}^{N}\int\frac{|\Psi(t,Y)|^2}{|\vec{x}-\vec{y}_j|}d^{3N}Y, \quad (3)$$

根据我们的定义，径向波函数的节点数等于 $n-1-\ell$。

其中积分是对 $3N$ 向量 $Y=(\vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_N)$ 进行的，而 G 表示牛顿常数。

非线性方程组（1，3）所描述的演化是幺正的，即，波函数的 L^2- 范数 Ψ 随时间保持不变。此外，容易验证泛函（参见 [22, 31, 45–47]）

$$\mathcal{E}[u]=\sum_{i=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2\mu}\int|\nabla_{\vec{x}_i}u(X)|^2d^{3N}X - \frac{G\mu^2}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\int\int\frac{|u(X)|^2|u(Y)|^2}{|\vec{x}_i-\vec{y}_j|}d^{3N}Xd^{3N}Y, \quad (4)$$

随时间守恒，即 $\mathcal{E}[\Psi(t,\ \cdot)]$ 与 t 无关，对任意满足 $\Psi(t,\ X)$的方程（1，3）的解均成立$|\mathcal{E}[\Psi(0,\ \cdot)]|<\infty$。正如接下来的两节将要讨论的，它的二阶变分对于理解 ℓ-玻色子星的稳定性

A. 约化到单粒子态

从现在起，我们关注一个特定情形：粒子彼此不可区分且无自旋。此外，我们假设这些粒子彼此不相关[3]，，因此 N粒子波函数是单粒子态的（对称化）乘积。具体而言，我们考虑单粒子希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^3)$中的一组正交归一波函数 ψ_j ，满足$(\psi_j,\psi_k)=\delta_{jk}$。假设状态 ψ_j 中有 N_j 个粒子，则 N粒子波函数可写为

$$\Psi=\sqrt{\frac{N!}{N_1!N_2!\cdots N_J!}}\hat{S}\left(\psi_1^{N_1}\otimes\psi_2^{N_2}\otimes\ldots\otimes\psi_J^{N_J}\right), \quad (5)$$

其中 $\sum_{j=1}^{J}N_j=N$。这里，$\hat{S}=\sum_{\pi\in\sigma(N)}P_\pi/N!$ 表示对称化算符（其中 $\sigma(N)$ 指 N 个元素的置换群，而 P_π 表示置换算符）。将试探形式（5）代入方程（1,2），可得单粒子波函数ψ_j 满足以下方程组

$$i\hbar\frac{\partial\psi_j(t,\vec{x})}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+\mu\mathbf{U}(t,\vec{x})\right)\psi_j(t,\vec{x}), \quad (6a)$$

$$\nabla^2\mathbf{U}(t,\vec{x})=4\pi G\mu\sum_{j=1}^{J}N_j|\psi_j(t,\vec{x})|^2. \quad (6b)$$

不难证明，演化会保持每个标量积 (ψ_j,ψ_k) 不变，因此只需在初始时刻 $t=0$ 施加正交归一条件 $(\psi_j,\psi_k)=\delta_{jk}$ 。此外，泛函 $\mathcal{E}[u]$ 可化简为

$$\mathcal{E}[u]=\sum_{j=1}^{J}N_j\frac{\hbar^2}{2\mu}\int|\nabla u_j(\vec{x})|^2d^3x - \frac{G\mu^2}{2}\sum_{j,k=1}^{J}N_jN_k\int\int\frac{|u_j(\vec{x})|^2|u_k(\vec{y})|^2}{|\vec{x}-\vec{y}|}d^3xd^3y, \quad (7)$$

其中 u 与 u_j 之间的关系，与 Ψ 和 ψ_j 在方程（5）中的关系相同。

B. 球对称方程组

薛定谔-泊松系统的标准解对应于仅包含一个波函数的特定情形 $N=J=1$ 。然而，即使限制在球对称构型下，允许存在任意数量 N 的粒子也会产生丰富得多的模型。

与其相对论对应物一样，牛顿 ℓ玻色子星通过考虑处于球对称静态势中的 $N=J=2\ell+1$ 个粒子而得到，其相应波函数的形式为

$$\psi_j(t,\vec{x}):=f_\ell(t,r)Y^{\ell m}(\vartheta,\varphi). \quad (8)$$

这里，$Y^{\ell m}$ 表示标准球谐函数，f_ℓ 表示描述径向分布的函数，该函数在区间 $0<r<\infty$ 内具有 n 个节点，并且对所有状态都相同。换言之，ℓ玻色子星由量子数 (n,ℓ,m) 表征，其中 n 和 ℓ 是固定的，而 m 取遍 $-\ell$、$-\ell+1$...$\ldots\ell$。因此，式（8）中的指标 j 与 (n,ℓ,m) 之间的关系为 $j=m+\ell+1$。ℓ玻色子星的一个简单推广是，使每个状态 ψ_j 中占据 K 个粒子，而不是仅占据一个粒子，即 $N=KJ=K(2\ell+1)$。

将试探形式（8）代入方程组（6），并考虑以下恒等式 $\nabla^2Y^{\ell m}=-\ell(\ell+1)Y^{\ell m}/r^2$以及 $\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left|Y^{\ell m}\right|^2=(2\ell+1)/(4\pi)$，可得

$$i\hbar\frac{\partial f_\ell(t,r)}{\partial t}=\left[\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(-\nabla_s^2+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)+\mu\mathbf{U}(t,r)\right]f_\ell(t,r), \quad (9a)$$

$$\nabla_s^2\mathbf{U}(t,r)=(2\ell+1)\mu GK|f_\ell(t,r)|^2, \quad (9b)$$

此处及下文中，$\nabla_s^2:=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$ 表示拉普拉斯算子的径向部分。请注意，计入占据数 K 的效果在形式上等同于重新缩放牛顿常数 G。

接下来，为了方便起见，我们将这个方程组改写为无量纲量的形式。为此，首先注意到 $G,\hbar,\mu$ 给出了一个特征距离

[3] 这一试探形式是成立的，因为我们的模型假设粒子之间没有直接相互作用；它们只通过自身产生的共同“平均场”牛顿势 U 相互作用。关于这种可分离性的更多细节，请参见文献 [45, 48]。对于定态情形，试探形式（5）等价于哈特里近似 [49]。

以及定义如下的长度

$$d_c := \frac{\hbar^2}{2G\mu^3} = 1.78048 \times 10^{22} \left(\frac{m_p}{\mu}\right)^3 \text{ m}, \tag{10a}$$

$$t_c := \frac{\hbar^3}{2G^2\mu^5} = 1.0056 \times 10^{52} \left(\frac{m_p}{\mu}\right)^5 s, \tag{10b}$$

其中，作为参考，我们给出了质子质量为 $m_p = 1.67262 \times 10^{-27}$ kg 时所得的数值。

接下来，我们引入变换

$$\begin{aligned} t &= t_c \bar{t}/(K\Lambda)^2, & r &= d_c \bar{r}/(K\Lambda), \\ f_\ell &= K^{3/2}\Lambda^2 \bar{f}_\ell/\sqrt{(2\ell+1)d_c^3}, & \mathbf{U} &= 2v_c^2(K\Lambda)^2\bar{U}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $v_c := d_c/t_c$ 为特征速度。这里，横线表示无量纲量， Λ 为任意正的无量纲尺度因子。为简化记号，下文中我们将省略横线，并在必要时用上标 $phys$表示有量纲量。

对方程(9中所述的变换进行处理后，方程组化简为 (11),

$$i\frac{\partial f_\ell(t,r)}{\partial t} = \left[-\nabla_s^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + U(t,r)\right] f_\ell(t,r), \tag{12a}$$

$$\nabla_s^2 U(t,r) = |f_\ell(t,r)|^2. \tag{12b}$$

归一化条件（ψ_j, ψ_j） $= 1$ 成立的条件是

$$1 = \int |\psi_j(t,\vec{x})|^2 d^3x = \frac{\Lambda}{2\ell+1}\int_0^\infty |f_\ell(t,r)|^2 r^2 dr. \tag{13}$$

等价地，方程组（12）可写成如下单个非线性方程

$$i\frac{\partial f_\ell(t,r)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}_\ell f_\ell(t,r), \tag{14}$$

其中积分微分算子为

$$\hat{\mathcal{H}}_\ell := \left[-\nabla_s^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \triangle_s^{-1}(|f_\ell(t,\cdot)|^2)\right]. \tag{15}$$

这里， $\triangle_s^{-1}$表示 ∇_s^2的逆算子，定义为

$$\triangle_s^{-1}(A)(r) := -\int_0^\infty \frac{A(\tilde{r})}{r_>}\tilde{r}^2 d\tilde{r}, \tag{16}$$

作用于任意仅依赖于半径 r的函数 A 时，其中我们令 $r_> := \max\{r, \tilde{r}\}$。

对于形如（8）的特定解子集，守恒能量泛函（7）可化简为

$$\mathcal{E}^{phys} = 2\mu v_c^2(\Lambda K)^3 \mathcal{E}_\ell[f_\ell], \tag{17}$$

其中，无量纲泛函 $\mathcal{E}_\ell$ 为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\ell[f] = &\int_0^\infty \left[|\partial_r f(r)|^2 + \frac{\ell(\ell+1)|f(r)|^2}{r^2}\right] r^2 dr \\ &- \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(r)|^2|f(\tilde{r}))|^2}{r_>} r^2\tilde{r}^2 dr d\tilde{r}. \end{aligned} \tag{18}$$

请注意，尺度因子 Λ 使得可以先不考虑归一化条件（12），求解方程组（14）（13）则可在第二步中通过调整 Λ 的值来满足。

C. 定态方程

非相对论 ℓ玻色子星是通过采用时间谐波假设，求解方程（14）得到的

$$f_\ell(t,r) = e^{-iE_\ell t}\sigma_\ell^{(0)}(r), \tag{19}$$

其中， $\sigma_\ell^{(0)}$ 是实值径向函数，而 E_ℓ 由非线性本征值问题确定

$$\hat{\mathcal{H}_\ell}^{(0)}\sigma_\ell^{(0)} = E_\ell \sigma_\ell^{(0)}, \tag{20}$$

with

$$\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} := \left[-\nabla_s^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \triangle_s^{-1}\left(\left|\sigma_\ell^{(0)}\right|^2\right)\right]. \tag{21}$$

特征值 E_ℓ 表示每个态（n、 ℓ、 m）的能量。用物理单位表示时，该能量值为

$$E_\ell^{phys} = 2\mu v_c^2(K\Lambda)^2 E_\ell. \tag{22}$$

对于每个20式的 n 和 ℓ 值， [35]已证明存在可归一化解。下一节中，我们将采用一种数值方法来求解20式，该方法将 [24] 中提出的过程推广到任意 ℓ。附录A 表明，对于任意形如19式的定态解，其守恒能量泛函取值为

$$\mathcal{E}^{phys} = K\frac{2\ell+1}{3}E_\ell^{phys}. \tag{23}$$

当 $\ell = 0$ 且 $K = 1$ 时，这便化为 $\mathcal{E}^{phys} = E_0^{phys}/3$ 中给出的著名关系 [50] ，适用于标准玻色子星解（注意， I 在 [50]中满足 $2I = \mathcal{E}^{phys}$）。事实证明，比较不同族23式在比较不同族 ℓ-玻色子星的基态能量时很有用。

D. 线性化方程

接下来，我们将围绕一个定态解对积分微分方程（14）进行线性化。为此，我们假设 f_ℓ 可按小参数 $0 < \epsilon \ll 1$ 展开为以下形式

$$f_\ell(t,r) = e^{-iE_\ell t}\left[\sigma_\ell^{(0)}(r) + \epsilon\sigma_\ell(t,r) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right], \tag{24}$$

其中（E_ℓ， $\sigma_\ell^{(0)}$ ）是非线性特征值问题（20）的一个解，而 σ_ℓ 是一个复值函数，依赖于（t， r），用于描述线性扰动。

按照 [38]，我们通过以下试探形式将该函数分离为时间部分和径向部分（详情另见 [51] 中的第5.2节）：

$$\sigma_\ell(t,r) = [A(r)+B(r)]\, e^{\lambda t} + [A(r)-B(r)]^*\, e^{\lambda^* t}, \quad (25)$$

其中，A 和 B 是仅依赖于 r的复值函数，λ 是复常数，上标 * 表示复共轭。若存在一个实部为正的 λ解，则表明存在将式（24、25）代入式（14），保留关于 ϵ 的一阶项，并令 $e^{\lambda^* t}$ 和 $e^{\lambda t}$ 前的系数为零，可得

$$i\lambda A = \left(\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell\right) B, \quad (26a)$$

$$i\lambda B = \left(\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell\right) A + 2\sigma_\ell^{(0)} \triangle_s^{-1}\left[\sigma_\ell^{(0)} A\right]. \quad (26b)$$

该方程组构成了关于特征值 λ的线性特征值问题。在下一小节中，我们将推导式（14）和（26）的解所满足的一些基本性质。

E. 解的基本性质

由式（11）可知，方程组（12）具有以下重标度自由度：给定一个解（f_ℓ，U），则

$$f_\ell^\Lambda(t,r) = \Lambda^2 f_\ell(\Lambda^2 t, \Lambda r), \quad (27a)$$

$$U^\Lambda(t,r) = \Lambda^2 U(\Lambda^2 t, \Lambda r), \quad (27b)$$

也是方程组（12）的一个解。正如前文所述，这种自由度使我们可以寻找式（k_ℓ，Φ）的一个解，其归一化可以任意选取，但必须有限。正确的归一化条件（13）可事后通过变换（f_ℓ，U）=（k_ℓ^Λ，Φ^Λ）来满足，其中

$$\Lambda := \frac{2\ell+1}{\int_0^\infty |k_\ell(t,r)|^2 r^2 dr}. \quad (28)$$

在定态情形下，重新缩放会使 $E_\ell^\Lambda = \Lambda^2 E_\ell$ 式（19）中的能量本征值发生变换。

接下来，我们讨论线性化方程组（26）的一些性质。首先，注意到存在零模解（A，B）=(0，$\beta\sigma_\ell^{(0)}$)，其特征值为$\lambda = 0$，且 β为任意复常数。对于 $\beta = i$，该解对应于未扰动波函数相位的无穷小旋转，而$\sigma_\ell(t,\ r)$在 β 为实数时恒为零。其次，容易证明，线性化系统（26）的任意解（λ，A，B）都会导出另外三个解：

$$(-\lambda, A, -B),\ (\lambda^*, A^*, -B^*),\ (-\lambda^*, A^*, B^*). \quad (29)$$

因此，如果λ 为实数或纯虚数，特征值将成对出现（$\lambda, -\lambda$）；$\{\lambda, -\lambda, \lambda^*, -\lambda^*\}$ 否则则成四元组，其对应的特征函数（A，B）之间的关系（相差一个整体因子）由式（29）给出。因此，线性稳定性要求每个特征值的实部 λ为零。

第三，注意以下性质。将式（26a）乘以 $r^2 A^*$，将式（26b）乘以 $r^2 B^*$ 并积分，得到

$$i\lambda (B,A)_{L^2} = \left(B, \left[\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell\right] B\right)_{L^2}, \quad (30a)$$

$$i\lambda (A,B)_{L^2} = \left(A, \left[\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell\right] A\right)_{L^2} + 2\left(\sigma_\ell^{(0)} A, \triangle_s^{-1}[\sigma_\ell^{(0)} A]\right)_{L^2}, \quad (30b)$$

其中，从现在起，$(\cdot,\cdot)_{L^2}$ 表示希尔伯特空间 $L^2 = L^2(\mathbb{R}_+,\ r^2 dr)$ 中的标准标量积，也就是说，

$$(A_1, A_2)_{L^2} := \int_0^\infty A_1(r)^* A_2(r) r^2 dr, \qquad A_i \in L^2. \quad (31)$$

由于算子 $\hat{}\mathcal{H}_\ell^{(0)} - E_\ell$ 在 L^2中是自伴的，因此，方程（30a）右端为实数。同样，方程（30b）右端也为实数。[4] 因此可得

$$\lambda^2 |(A,B)_{L^2}|^2 \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

这意味着，要么 λ^2 是实数，要么 $(A,B)_{L^2} = 0$。这将参考文献 [38] 中的相应结果推广到了 ℓ的任意取值。

第四，我们注意到，方程（30b）的右端也可以用能量泛函 $\mathcal{E}_\ell$ 的二阶变分表示（推导见附录 B ）：

$$i\lambda (A,B)_{L^2} = \delta^2 \mathcal{E}_\ell[A_R] + \delta^2 \mathcal{E}_\ell[A_I], \quad (33)$$

这里以及下文中，下标 R 和 I分别表示场的实部和虚部。方程（33）将发挥重要作用，因为它给出了线性化方程的特征值和特征函数与能量泛函的二阶变分之间的直接关系。

第五，我们注意到，方程组(26) 可化简为单个方程

$$\hat{Q} A = -\lambda^2 A, \quad (34)$$

$\hat{}$，其中四阶算子 Q 定义为

$$\hat{Q} := \left(\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell\right)^2 + 2\left(\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell\right)\sigma_\ell^{(0)} \triangle_s^{-1} \sigma_\ell^{(0)}. \quad (35)$$

---

[4] 这再次由 $\hat{}\mathcal{H}_\ell^{(0)} - E_\ell$ 的自伴性以及恒等式得出

$$\left(\sigma_\ell^{(0)} A, \triangle_s^{-1}\left[\sigma_\ell^{(0)} A\right]\right)_{L^2} = -\left\|\nabla_s\left(\triangle_s^{-1}\left[\sigma_\ell^{(0)} A\right]\right)\right\|_{L^2}^2,$$

这表明公式（30b）右端的第二项为实数且为负。

请注意，$\hat{}\,Q$ 的像与 $\sigma_\ell^{(0)}$ 正交。事实上，再次利用$\hat{}\,\mathcal{H}_\ell^{(0)} - E_\ell$的自伴性，以及 $\sigma_\ell^{(0)}$ 属于其核这一事实，可得对于所有 A，$(\sigma_\ell^{(0)}, \hat{}\,QA)_{L^2} = 0\hat{}$。因此，我们可以将 Q 的定义域限制在子空间 Z 上，该子空间由 L^2 中背景场 $\sigma_\ell^{(0)}$ 的正交补构成，并将$\hat{}\,Q$ 视为希尔伯特空间 Z上的算子。由于$\hat{}\mathcal{H}_\ell^{(0)} - E_\ell$ 在此子空间上可逆，我们可以在 Z 上赋予新的内积

$$\langle A_1|A_2\rangle := \left(A_1, \left[\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell\right]^{-1} A_2\right)_{L^2},\ A_i \in Z, \quad (36)$$

满足以下条件的

$$\left\langle A_1 \middle| \hat{Q} A_2 \right\rangle = \left\langle \hat{Q} A_1 \middle| A_2 \right\rangle, \quad (37)$$

对于所有属于 Q定义域的 A_1、A_2，均有$\hat{}\,\hat{}$。因此，相对于这个新的内积，Q 是对称的。然而，注意到，尽管这个内积有界，且对其（第一）第二个自变量是（反）线性的，但它并非总是正定的。若 $\sigma_\ell^{(0)}$ 是基态解，且 E_ℓ 是$\hat{}\,\mathcal{H}_\ell^{(0)}$的最小特征值，那么 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 在 Z 上是$\hat{}$正定的。由式（37）可知，Q（形式上）是自伴的；尤其是，其特征值 $-\lambda^2$ 均为实数。另一方面，若 $\sigma_\ell^{(0)}$ 是具有 n 个节点的激发态，根据节点定理（例如参见 [52]），$\hat{}\,\mathcal{H}_\ell^{(0)}$ 恰有 n 个小于 E_ℓ的特征值。因此，内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 有n 个负范数的独立方向；在这种情况下，没有理由认为$\hat{}Q$ 的特征值是实数。由式（26a、33、34）可得

$$-\lambda^2 \langle A|A\rangle = \left\langle A \middle| \hat{Q} A \right\rangle = \delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] + \delta^2\mathcal{E}_\ell[A_I]. \quad (38)$$

根据这些观察，我们得出以下结论。对于满足 $n = 0$ 的基态解，λ^2 是实数（这意味着 λ 本身为实数或纯虚数），且内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 是正定的。此外，由于算子 Q 是实的，可以假设任意特征函数 $A = A_R$ 也是实数。在这种情况下，式（38）意味着 $-\lambda^2$ 与 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A]$ 的符号相同。因此，纯虚点谱意味着背景解是线性稳定的，并且是 $\mathcal{E}_\ell$ 的局部极小值（至少相对于由特征函数张成的空间而言）。然而，若存在非零的纯实特征值，则意味着解 $\sigma_\ell^{(0)}$ 是线性不稳定的，相应地，存在一个方向使得 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A]$ 为负，这意味着 $\sigma_\ell^{(0)}$ 不可能是 $\mathcal{E}_\ell$ 的极小值。

对于激发态（即具有 $n > 0$ 个节点的状态），λ^2无需为实数，正如上文所述。为了进一步推进，我们注意到式（26）和式（B7）蕴含

附录B蕴含

$$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] = -\lambda_R (A_R, B_I)_{L^2} - \lambda_I (A_R, B_R)_{L^2}, \quad (39a)$$
$$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_I] = \lambda_R (A_I, B_R)_{L^2} - \lambda_I (A_I, B_I)_{L^2}. \quad (39b)$$

考虑到对称性（29），特征值 λ有以下几种可能：

(i) $\lambda_R = 0$，$\lambda_I = 0$：这是我们上文已经讨论过的零模解。

(ii) $\lambda_R > 0$，$\lambda_I = 0$：此时，λ 为实数，根据式（26），我们可以假设 $A = A_R$ 和 $B = iB_I$。由式（39a）可得 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] = -\lambda(A_R, B_I)_{L^2}$，因此 $\mathcal{E}_\ell$ 的二阶变分符号与乘积 $(A_R, B_I)_{L^2}$的符号相反。

(iii) $\lambda_R = 0$，$\lambda_I > 0$。此时，λ 为纯虚数，因此我们可以假设 A 和 B 均为实数。由式（39a）可知，$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R]$ 的符号与 $(A_R, B_R)_{L^2}$的符号相反。

(iv) $\lambda_R > 0$，$\lambda_I > 0$。在这种情况下，$\lambda^2 \neq \mathbb{R}$，并且由前面的结论可知 $(A, B)_{L^2} = 0$。在这种情况下，由式（33）可知

$$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] + \delta^2\mathcal{E}_\ell[A_I] = 0, \quad (40)$$

使得条件 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] \neq 0$（可利用式（39a）验证）意味着，基态解 $\sigma_\ell^{(0)}$ 对应于能量泛函的临界鞍点。

前三种可能性也适用于基态解；然而，由于 λ^2 为实数，情形（iv）在此情况下不成立。

正如我们将在第 IV 节看到的，数值结果表明情形（ii）不存在，也就是说，我们没有发现实特征值。对于纯虚特征值（情形（iii）），我们发现 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] > 0$ 始终为正。特别是，这意味着基态不存在不稳定模态，而且这些模态会局部增大能量泛函 $\mathcal{E}_\ell$。对于 $\ell = 0$，这一结果与 [22] 的结论一致，后者证明了 $\ell = 0$基态是 $\mathcal{E}_\ell$ 的全局极小值。对于所有激发态，我们发现情形（iv）都会出现，这意味着它们是线性不稳定的，并且对应于$\mathcal{E}_\ell$的鞍点。

III. 非相对论性 ℓ-玻色子星

如引言中所述，非线性特征值问题（20）的数值解已在 [36, 37] 中给出，涵盖了若干组 n 和 ℓ取值。本节将数值构造扩展到更广的 n 和 ℓ 取值范围，并讨论解的一些定性特征。

A. 实现

为了进行数值积分，方便起见，我们将引力背景势 $U^{(0)} := \triangle_s^{-1}\left(\left|\sigma_\ell^{(0)}\right|^2\right)$ 替换为平移势$u^{(0)}$（r）：$= E_\ell - U^{(0)}$（r），从而可以将问题（20）改写为等价形式

$$\nabla_s^2\sigma_\ell^{(0)} = \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - u^{(0)}\right]\sigma_\ell^{(0)}, \tag{41a}$$

$$\nabla_s^2 u^{(0)} = -\left|\sigma_\ell^{(0)}\right|^2. \tag{41b}$$

接下来，我们确定在 $r=0$ 和 $r=\infty$ 处的正确边界条件，以保证解可归一化且在原点处正则。在$r=0$附近，方程（41）化简为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\sigma_\ell^{(0)}}{dr}\right) - \ell(\ell+1)\sigma_\ell^{(0)} \approx 0, \tag{42a}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du^{(0)}}{dr}\right) \approx 0, \tag{42b}$$

其正则解的形式为 $u^{(0)}(r) \sim \text{const.}$，以及 $\sigma_\ell^{(0)}(r) \sim r^\ell$。因此，我们将波函数重新缩放如下：$\sigma_\ell^{(0)}(r) = r^\ell\sigma(r)$，其中新的径向函数 $\sigma(r)$ 在 $r\to 0$ 时具有有限且非零的极限。通过在 $r=0$ 附近进行泰勒展开，可得到中心处的以下边界条件：[5]

$$\sigma(r=0) = \sigma_0, \quad \frac{d\sigma}{dr}(r=0) = 0, \tag{43a}$$

$$u^{(0)}(r=0) = u_0, \quad \frac{du^{(0)}}{dr}(r=0) = 0, \tag{43b}$$

其中常数为 σ_0 和 $u_0^{(0)}$。注意，$u_0^{(0)}$ 必须为正，才能存在全局解 [35]。此外，通过重新缩放（27），不失一般性地可假设 $u_0^{(0)}=1$。接着，常数 σ_0 的取值通过数值射击法进行精细调节，以满足条件 $\lim_{r\to\infty}{}^{\sigma}(r) = 0$，这是解可归一化所必需的。

使用自适应显式五四阶龙格－库塔算法对方程组（41）进行数值积分，并采用边界条件（43）。[6] [53–55], 其中，我们将方程组改写为关于场 $(\sigma, u^{(0)})$ 的一阶系统。为进行精细调节，我们采用一种类似于 [24], 中所述、基于二分法的方法。此外，我们发现有必要将数值以此方式得到的解与场的渐近形式 $(\sigma, u^{(0)})$ 相匹配，该渐近形式为

$$\sigma(r) \approx \frac{C_1}{r^{1+\ell-M/(2\kappa)}}e^{-\kappa r}, \tag{44a}$$

$$u^{(0)}(r) \approx E_\ell + \frac{M}{r}, \tag{44b}$$

其中 $\kappa := \sqrt{|E_\ell|}$ 以及常数 C_1，E_ℓ 以及 M。这里，E_ℓ 和 M 分别表示该构型未重标度的能量特征值和总质量。回想44b式的形式可得，$\lim_{r\to\infty} U^{(0)}(r) = 0$ 以及定义 $u^{(0)}(r) = E_\ell - U^{(0)}(r)$。这里，常数 E_ℓ 和 M 由附录C中描述的方法确定，而常数 C_1 则通过将方程（44a）右端的曲线拟合到射击算法所得函数 σ 的最后 10 个点来计算。事实证明，这种对解的延拓对于下一节讨论的一阶方程的数值分析是必要的，因为这需要知道位于射击算法所得最大半径之外的 r 处的背景解。我们的代码已公开发布于 [56]。

物理能量本征值按如下方式求得。首先，E_ℓ^Λ 采用对 [24] 中所述方法的推广来计算（详见附录C ），根据公式

$$E_\ell^\Lambda = \frac{(2\ell+1)^2}{M^2}E_\ell, \tag{45}$$

其中

$$E_\ell = u_0 - \int_0^\infty r^{2\ell+1}|\sigma(r)|^2 dr, \tag{46a}$$

$$M = \int_0^\infty r^{2(\ell+1)}|\sigma(r)|^2 dr. \tag{46b}$$

接下来，由下式求得每个态中含有 K 个粒子时 (n,ℓ,m) 对应的有量纲本征值

$$E_\ell^{phys} = 2\mu v_c^2 K^2 E_\ell^\Lambda, \tag{47}$$

相应的总质量为

$$M^{phys} = (2\ell+1)K\mu = N\mu, \tag{48}$$

正如预期的那样。或者，也可以使用式（44b）中描述的渐近形式来求得 E_ℓ，前提是解已正确归一化（如第IIE节开头所述），使得 $E_\ell = E_\ell^\Lambda$。这种计算能量本征值的替代形式用于检验由式（45）得到的结果是否有效。

B. 结果

我们已求解方程组（41），取值范围为 ℓ 最高为 10，取值范围为 n 最高为 30。径向的典型示例

[5] 有关原点附近局部正则解的严格处理，请参见 [35] 。[6] 积分采用五阶精度步长进行；四阶步长仅用于估算误差。

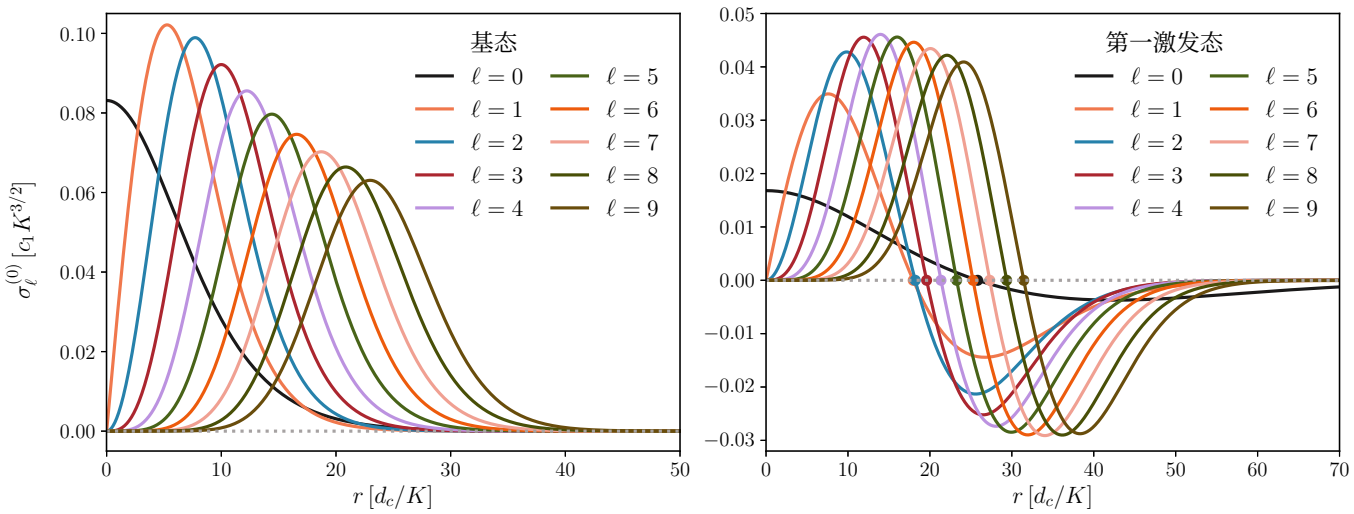
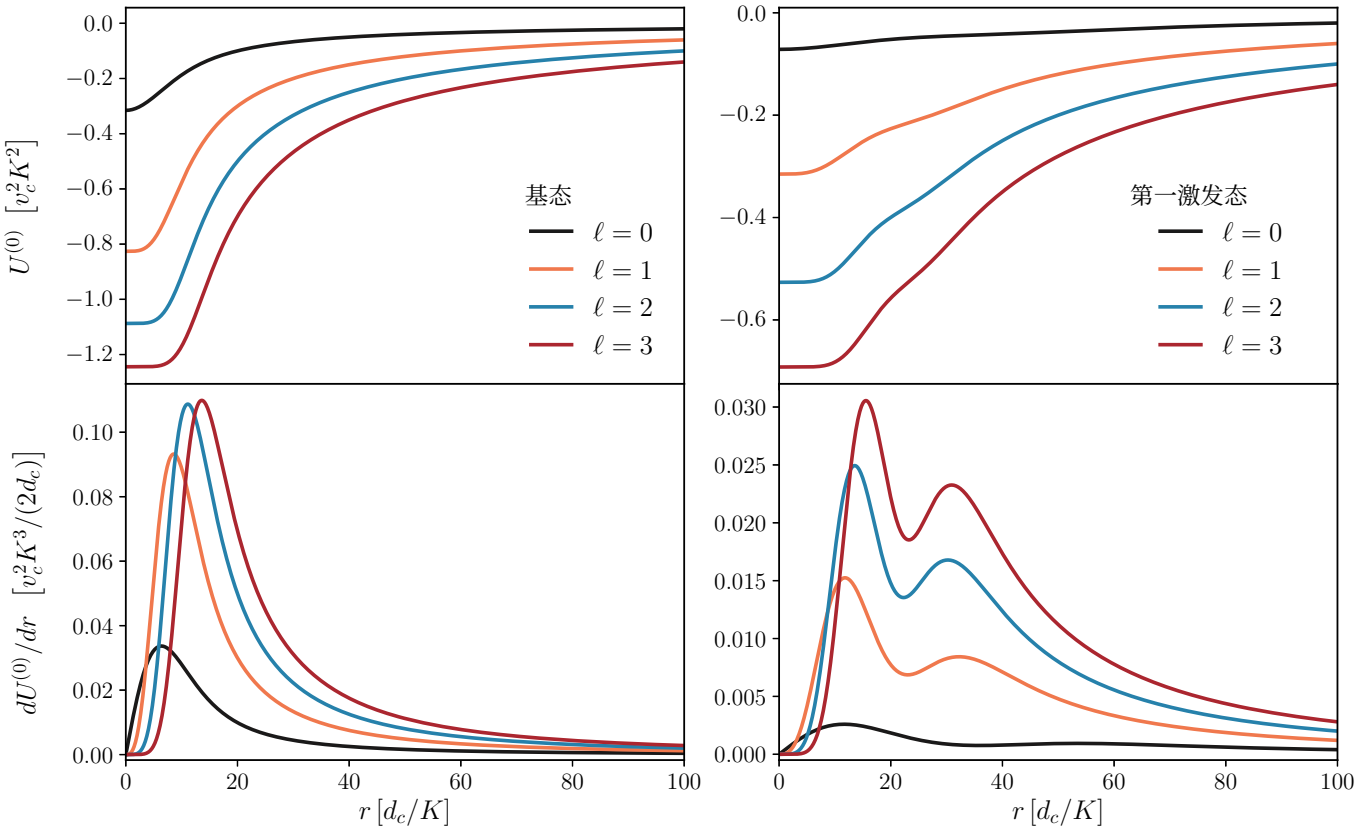


图 1. 不同 ℓ 值下的波函数剖面。左图：基态构型（$n = 0$）。右图：第一激发态构型（$n = 1$）。粗点表示每个构型中节点的位置。此处，c_1 指的是公式（11）中出现的常数 $1/\sqrt{(2\ell + 1)\, d_c^3}$。



引力的剖面
图 1 中对应于 $\ell = 0$,

势（上图）及其一阶导数（下图），对应于所示构型
1、2、
3。

		$E_\ell^{phys}\,[K^2\mu v_c^2]$					
		ℓ-值:					
		0	1	2	3	4	5
n-nodes	0	−0.16276921	−0.48696445	−0.67701587	−0.79912216	−0.88467671	−0.9483675
	1	−0.03079654	−0.15836933	−0.28505087	−0.39233267	−0.48134634	−0.55563343
	2	−0.0125261	−0.07767856	−0.15754598	−0.23552556	−0.30705008	−0.37133678
	3	−0.00674732	−0.04597782	−0.09987558	−0.15725454	−0.21347763	−0.26669641

表 I. 根据公式 (45) 计算得到的基态和前三个激发态的能量本征值，其中 $\ell = 0$ 取 1，...，5。对于 $\ell = 0$ 和 $K = 1$ 得到的特征值与 [23, 38] 中报告的结果一致。

		ℓ-值:					
		0	1	2	3	4	5
parameters	α	0.0978 ± 0.0001	0.8497 ± 0.0016	2.1737 ± 0.0184	3.8769 ± 0.0637	5.8308 ± 0.1441	7.9516 ± 0.2607
	β	0.7763 ± 0.0005	1.3222 ± 0.0011	1.8116 ± 0.0057	2.2639 ± 0.0128	2.6907 ± 0.0217	3.0987 ± 0.0320
	γ	2.0115 ± 0.0007	1.9935 ± 0.0011	1.9632 ± 0.0040	1.9332 ± 0.0070	1.9058 ± 0.0098	1.8812 ± 0.0123

表 II. 考虑前 30 个能级后，试探函数（公式 (49)）的最佳拟合参数。这些参数采用最小二乘法确定。结果针对角动量 $\ell = 0$ 取 1，...，5 的情况给出。

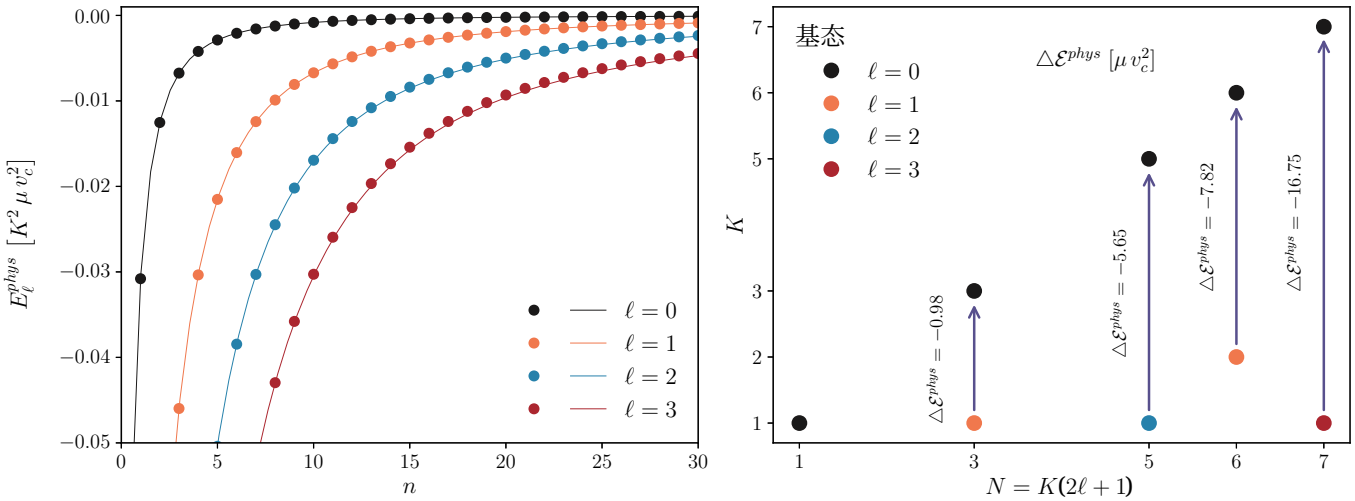


图 3。左图：角动量为 $\ell = 0$、1、2、3 的构型所对应的前 30 个能级的数值结果（以粗点表示）。实线表示式（49）中试探函数的图像，其参数 α、β、γ 取表 II 中报告的最佳拟合值。右图：根据式（50）计算得到的能量差 $\triangle\mathcal{E}^{phys}\,[\mu v_c^2]$，比较具有相同场数 N、但 ℓ 值不同的基态构型（$n = 0$），例如 $\ell = 0$、$K = 3$ 和 $\ell = 1$、$K = 1$。实心箭头表示角动量损失可能导致的能量损失，例如 $\ell = 1 \mapsto \ell = 0$。

不同取值下波函数的分布 ℓ 如图1所示。左图表示基态构型（$n=0$）。注意， ℓ 值增大时，原点附近会变得更加平坦，这与 r^{ℓ}行为一致；同时，极大值所在半径也会增大。这一性质与相对论情形中报告的相应结果相符 [1, 13]。右图展示了第一激发态构型（$n=1$）。同样， ℓ 值越大，原点附近越平坦，极大值也越远离原点。从 ℓ 开始增大时，节点和极小值的位置也向右移动 $\ell=1$（而 $\ell=0$ 情形较为特殊，因为场 $\sigma^{(0)}_{\ell=0}$ 在原点处不为零）。

图 2 展示了图 1 中所示构型（ n =0、1 和 $\ell=0$、1、2、3）对应的牛顿势及其一阶导数。可以看出，势分布单调递增；根据恒等式 $dU^{(0)}/dr=-du^{(0)}/dr$，并由附录 C 中的式 (C4) 可知该恒等式为正。我们还观察到，随着 ℓ 增大（而 K 和 n 保持不变），势阱会变得更深。这似乎与场的数量随 ℓ 增加、从而增强引力源有关，不过对此解释应谨慎，因为如图 1 所示，较高 ℓ 对应的构型也更加延展。然而，对于场数 N 和节点数 n 相同的构型进行比较后发现，势的极小值随 ℓ 增大而升高，最深的势阱出现在 $\ell=0$ 时。这正是固定背景势下预期的行为，原因在于有效势中的离心项带来了排斥贡献（见式 (41a)）。此外，随着 ℓ 或 n 增大，构型会变得更加延展，这一点在势分布中也有所体现。还需注意，第一激发态的势导数中存在一个额外的局部极大值。参数探索似乎表明，一般而言， $dU^{(0)}/dr$ 共有$n+1$ 个极大值，分别对应于密度 $|\sigma^{(0)}_{\ell}|^2$的 $n+1$ 个极大值。

表I 给出了根据式（$\ell=0$，1，2，3，4，5）计算得到的能级结果，这些能级对应于基态和前三个激发态45。图3 左图展示了能级随 n 变化的情况，其中$\ell=0$，1，2，3。如引言中所述，对于每个固定的 ℓ值，特征值均为负，并随 n单调递增。与 $\ell=0$ [23]的情形类似，这种增长可以用以下形式的反幂律拟合

$$E^{phys}_{\ell}=-\frac{\alpha}{(n+\beta)^{\gamma}}\times[K^2\mu v_c^2], \tag{49}$$

在 α、 β 和 γ取合适参数值时。表II列出了针对这些参数，使用最小二乘法得到的最佳拟合结果，适用于以下情况： $\ell=0$、1、2、3、4、5。所得曲线也显示在图3左图中。值得注意的是，指数 γ 似乎非常接近 2。事实上，仅使用激发态 $n=10$、11、.....、30 进行拟合，得到的 γ值与 2 一致，相对误差仅为 0.4%；至少对于表中报告的 $\ell=0$值 1、.....、5 是如此。因此，当 n 取较大值且 ℓ 固定时， E^{phys}_{ℓ} 似乎表现为 $-\alpha/n^2$，类似于库仑势 U $=-GM/r$所产生的巴耳末谱。不过请注意，在库仑情形下，参数β 应等于 $\ell+1$，而这里显然并非如此。这可能与以下事实有关：虽然在我们的构型中，U 在渐近区域 $r\to\infty$的表现如同库仑势，但在中心处是正则的。

接下来，我们比较具有相同场数的不同构型的总能量 $\mathcal{E}^{phys}_{\ell}$ 。为此，回顾一下，非相对论 ℓ-玻色子星由 $N=K(2\ell+1)$ 个自引力玻色子组成。不同于具有 $N=1$的标准非相对论玻色子星，考虑具有 $N\geq 3$ 的构型，提供了构造具有相同 N 但 K 和 ℓ取值不同的构型这一有趣可能性，例如（K，ℓ）=（3，0）和（K，ℓ）=（1，1）这两组。一个相关的问题是，这些构型中哪一个具有最低的总能量 $\mathcal{E}^{phys}_{\ell}$ ，因为预期它是最稳定的态（至少在球对称构型范围内）。利用式（23，47），具有$N=K_1(2\ell_1+1)=K_2(2\ell_2+1)$ 场的两个构型（K_1，ℓ_1）和（K_2，ℓ_2）之间的差值为

$$\begin{aligned}\triangle\mathcal{E}^{phys}_{1\to 2}=&\mathcal{E}^{phys}_{2}-\mathcal{E}^{phys}_{1},\\ =&\frac{K_1^2N}{3}\left[\frac{(2\ell_1+1)^2}{(2\ell_2+1)^2}E_2-E_1\right],\end{aligned} \tag{50}$$

其中，能量 E_i 指的是物理能级E^{phys}_{ℓ} 对于 $K=1$ 在两种构型中的值（即表 I 中以 μv_c^2为单位报告的数值）。对于激发态，也可以使用式（49），结合表 II 中的相关参数，给出 E_1 和E_2 的近似值，并计算能量差。

图 3 右侧面板展示了具有相同粒子数的基态 ℓ-玻色子星之间的能量差：一类具有 $\ell=\ell_1>0$ ，另一类具有 $\ell=\ell_2=0$ ，其参数分别为 ℓ 和 K_1；对应的情形为（ℓ_1，=）(1, 1)、(2, 1)、(1, 2)、(1, 3)。从图中可以看出，这一能量差始终为负， $\triangle\mathcal{E}^{phys}_{1\to 2}<0$ 并且随着 ℓ_1 的增大而变得更大。基于拟合公式 (49) 进行更一般的考察，可得出以下性质：当 $n_1\geq n_2$ 且 $\ell_1\geq\ell_2$时，有 $\triangle\mathcal{E}^{phys}_{1\to 2}<0$，这正如预期。正如引言中所指出的，这与以下事实一致：对于任意给定数目的波函数，对应于 $K=N$、 $n=\ell=0$ 的构型是式 (18) 中守恒能量泛函的全局极小值。关于具有 $n_1\geq n_2$ 和 $\ell_1<\ell_2$的构型之间的能量差，结果表明它也可能为负，前提是 n_1 足够大。一个例子是

由具有 $N=9$ 个场且 $n_1\geq 2$、$\ell_1=1$、$n_2=0$ 和 $\ell_2=4$ 的情形给出（而在此例中，若 $n_2=2$，则 $\triangle\mathcal{E}^{phys}>0$，但 $n_1=1$ 或 $n_1=2$）。

IV. 非相对论性 ℓ–玻色子星的线性稳定性

上一节中，我们构造了非相对论性 ℓ–玻色子星，并讨论了它们的主要性质。本节将介绍相应的数值实现，并给出关于其线性稳定性的主要结果。

A. 线性系统、边界条件与离散化

与背景方程类似，为了数值实现线性化系统（26），我们需要将其改写为更合适的形式。为此，将 $A(r)$ 改写为：$=a(r)/r$，$B(r)$ 改写为：$=b(r)/r$，其中函数经过了重标度 a 和 b，并利用恒等式 $\nabla_s^2=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r$ 将该方程组改写为

$$b''-U_{\rm eff}\,b=-i\lambda a, \tag{51a}$$

$$a''-U_{\rm eff}\,a-2\sigma_\ell^{(0)}\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)^{-1}\left[\sigma_\ell^{(0)}a\right]=-i\lambda b, \tag{51b}$$

为方便起见，我们在此引入有效势 $U_{\rm eff}(r):=-u^{(0)}(r)+\ell(\ell+1)/r^2$，以及算子 $\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)^{-1}=r\triangle_s^{-1}r^{-1}$，表示在 $r=0$ 和 $r=\infty$ 处满足齐次狄利克雷条件的二阶导数的逆算子。

为求解方程组 (51)，需要四个边界条件。与对背景构型所做的分析类似，可以（启发式地）研究扰动方程组在原点和无穷远处的主导项。利用 $\sigma_\ell^{(0)}(r)\sim r^\ell$ 这一事实，可以得到

$$r^2Z''-\ell(\ell+1)Z\approx 0,$$

在 $r=0$ 附近，列向量为 $Z:=(a,b)^T$。中心处正则的解表现为 $Z(r)\sim r^{\ell+1}$，由此得到原点处对所有 $\ell\geq 0$ 的以下边界条件：

$$a(r=0)=0,\qquad b(r=0)=0. \tag{52a}$$

在渐近区域，考虑到 $u^{(0)}(r)\to E_\ell$ 且 $\sigma_\ell^{(0)}$ 呈指数衰减，可得

$$Z''+E_\ell Z\approx 0,$$

而在无穷远处有界的解会呈指数衰减。因此，当 $r\to\infty$ 时，我们要求

$$\lim_{r\to\infty}a(r)=0,\qquad \lim_{r\to\infty}b(r)=0. \tag{52b}$$

为了对线性化系统进行数值求解，我们使用上一节中得到的背景解 $(\sigma_\ell^{(0)},u^{(0)})$，并将这些解以及扰动场 (a,b) 表示为切比雪夫多项式。导数算子采用标准谱方法进行离散化（例如参见 [43, 44]），从而得到一个矩阵特征值问题。下一段将简要介绍这一实现的细节。

首先，将切比雪夫多项式定义域 $\mathsf{D_C}:=[-1,1]$ 映射到物理区域 $\mathsf{D}:=[0,r_\star]$，该区域在较大的半径 $r_\star$ 处截断（附录 D 中我们也考虑了覆盖整个物理区域 $[0,\infty)$ 的情形）。具体而言，我们通过变换 $r=r_\star(x+1)/2$ 定义从 $\mathsf{D_C}\to$ 到 D 的映射，其中 $x\in\mathsf{D_C}$ [38]。其次，在 $\mathsf{D_C}$ 上引入切比雪夫点集合 $x_j=\cos(j\pi/\mathsf{N})$，$j=0,1,\ldots,\mathsf{N}$，并使用切比雪夫微分矩阵 $\mathbb{D}_\mathsf{N}$ 对 d/dx 进行离散化。由于 $dr/dx=r_\star/2$，二阶导数算子 d^2/dr^2 的相应离散化为 $(2/r_\star)^2\mathbb{D}_\mathsf{N}^2$。矩阵 $\mathbb{D}_\mathsf{N}$ 的显式形式（维数为 $(\mathsf{N}+1)\times(\mathsf{N}+1)$）可见 [43] 第 6 章。第三，为施加齐次边界条件 (52)，我们采用 [43] 中所述的步骤，即从二阶导数微分算子 $\mathbb{D}_\mathsf{N}^2$ 中删去首末两行和两列，从而得到一个 $(\mathsf{N}-1)\times(\mathsf{N}-1)$ 阶矩阵。随后对这个约化矩阵求逆，以离散化方程 (51b) 中出现的算子 $(d^2/dr^2)^{-1}$。

利用前面提到的所有内容，问题51）归结为有限维特征值问题

$$\begin{pmatrix}0 & \tilde{\mathbb{D}}_\mathsf{N}^2-U_{\rm eff}\\ \tilde{\mathbb{D}}_\mathsf{N}^2-\mathsf{U}_{\rm eff}-2\Sigma_0\big(\tilde{\mathbb{D}}_\mathsf{N}^2\big)^{-1}\Sigma_0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{a}\\ \mathsf{b}\end{pmatrix}=-i\lambda\begin{pmatrix}\mathsf{a}\\ \mathsf{b}\end{pmatrix}, \tag{53}$$

其中，$\mathsf{0}$ 表示 $(\mathsf{N}-1)\times(\mathsf{N}-1)$ 零矩阵，

$$U_{\text{eff}} := \mathbf{diag}\Big(U_{\text{eff}}(x_1), U_{\text{eff}}(x_2), \ldots, U_{\text{eff}}(x_{\mathsf{N}-1})\Big),$$
$$\Sigma_0 := \mathbf{diag}\Big(\sigma_\ell^{(0)}(x_1), \sigma_\ell^{(0)}(x_2), \ldots, \sigma_\ell^{(0)}(x_{\mathsf{N}-1})\Big),$$

是背景量 U_{eff} 和 $\sigma_\ell^{(0)}$ 以及向量的离散表示

$$\begin{pmatrix}\mathsf{a}\\ \mathsf{b}\end{pmatrix} := \Big(a(x_1),\ \ldots\ , a(x_{\mathsf{N}-1}), b(x_1), \ldots, b(x_{\mathsf{N}-1})\Big)^T,$$

表示特征场 $r(A, B)^T$。我们使用 SciPy 库 [53]求解离散本征值问题（53）。经过一些试验，我们发现，对于背景解的第 n 个激发态，采用 $\mathsf{N} := 3r_\star/4$ 个切比雪夫点[7]，并将外边界设在 $r_\star := 200(n+1)$ 处，可以得到准确的结果（详见附录 D）。由于 $r_\star$ 远大于射击算法通常得到的最大半径，我们根据 III A 节所述，使用渐近表达式（44）将背景解延拓至 $[0, r_*]$。附录 D 中验证了我们的结果：一方面研究了数值解随 N 和 $r_\star$ 变化时的收敛性，另一方面使用显式龙格-库塔方法独立检查了残差。

B. 线性系统的模态稳定性

在介绍了我们的数值实现之后，我们将注意力转向本节的主要结果，这些结果揭示了非相对论 ℓ玻色子星线性扰动的模态解的行为。为此，我们回顾式（25）中这些模态的一般形式。将场（A, B）以及特征值分别拆分为实部和虚部后，该方程可改写为

$$\begin{aligned}\sigma_\ell(t,r) = {} & 2e^{\lambda_R t}\cos(\lambda_I t)\,[A_R(r) + iB_I(r)] \\ & - 2e^{\lambda_R t}\sin(\lambda_I t)\,[A_I(r) - iB_R(r)]\,,\end{aligned} \tag{54}$$

这里回顾一下，下标 R 和 I 分别表示实部和虚部。从该方程显然可知，λ_R 取正值意味着该模态呈指数增长，而 λ_I 则描述其振荡频率。

与小节 IIE 类似，我们将稳定性研究分为两部分。首先研究对应于基态构型的模态，然后研究与激发态相关的模态。

[7] 请注意，这些点的分布并不均匀；D_C的边界附近点的密度最大。

1. Ground state configurations

正如我们在小节 IIE中证明的，对于基态构型，λ^2 必须为实数，这意味着 λ本身要么为实数，要么为纯虚数。作为数值研究的第一个结果，我们发现基态中 λ 仅取纯虚数值。[8]按大小排序的前几个特征值列于表 III 的前三行中，对应于$\ell = 0$、1、2、3。图 4 左图展示了复平面中的谱，对应于满足 $\ell = 0$、2、4、6 的基态构型。这些结果与关系式（29）相符，该关系式意味着纯虚特征值成对出现 $\{\lambda, -\lambda\}$。

由于基态构型只有纯虚特征值，根据式（54），我们得出结论：具有 $n = 0$ 且 ℓ 取所分析数值的构型仅存在纯振荡模（其频率等于 λ_I）。由此我们猜想，所有基态背景构型对于形式为（24，25）的含时线性扰动都是稳定的。此外，由于 $-\lambda^2 > 0$，我们得出结论：所有这些模态都会使守恒能量泛函的二阶变分为正：$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] > 0$，见第 II E 小节。（表 IV 给出了一个数值计算二阶变分的示例，其符号如预期般与 $-\lambda^2$一致。）这意味着，相对于此类扰动，基态是 $\mathcal{E}_\ell$ 的局部极小值。然而，请回顾上一节的结果：具有 $\ell > 0$ 的基态构型，其 $\mathcal{E}_\ell$ 值高于具有 $N = (2\ell+1)K$ 场时对应的 $\mathcal{E}_{\ell=0}$ 值，这意味着这些态不可能是能量泛函的全局极小值。因此，我们得出结论：具有 $\ell > 0$ 的基态构型，相对于任意扰动（无论是否具有对称性），是守恒能量泛函 $\mathcal{E}_\ell$ 的局部极小值或鞍点。

2. Excited states

接下来，我们将关注满足 $n > 0$ 的背景构型的模态稳定性。回顾一下，我们在第 IIE 小节讨论了四种可能情形（i–iv）。首先，说明这四种情形对式（54）所描述的相应模态行为有何意义。显然，情形（i）对应于时间无关的扰动，因为 $\lambda = 0$。如上所述，它描述了背景解的无穷小相位变化。接下来，情形（ii）对应一对模态，其中一个随时间指数增长，另一个

[8] 更准确地说，我们发现，由公式 (53) 中的 $2(\mathsf{N}-1) \times 2(\mathsf{N}-1)$ 矩阵计算得到的特征值，其实部的绝对值小于 10^{-6}。

n-nodes	$\lambda\,[K^2/t_c]$ ℓ 值: 0	1	2	3
0	$0 \pm 0.03412558i$	$0 \pm 0.06385090i$	$0 \pm 0.06408695i$	$0 \pm 0.05903587i$
	$0 \pm 0.06030198i$	$0 \pm 0.14328038i$	$0 \pm 0.16575905i$	$0 \pm 0.16827469i$
	$0 \pm 0.06882477i$	$0 \pm 0.17565513i$	$0 \pm 0.21233555i$	$0 \pm 0.22189706i$
1	$0 \pm 0.00300045i$	$0 \pm 0.01185117i$	$0 \pm 0.01736224i$	$0 \pm 0.02017560i$
	$0 \pm 0.00812230i$	$0 \pm 0.04155775i$	$0 \pm 0.06711048i$	$0 \pm 0.08323611i$
	$0 \pm 0.01073335i$	$0 \pm 0.05025166i$	$0 \pm 0.08170887i$	$0 \pm 0.10244472i$
2	$0 \pm 0.00078452i$	$0 \pm 0.00406666i$	$0 \pm 0.00709575i$	$0 \pm 0.00931852i$
	$0 \pm 0.00297490i$	$0 \pm 0.01667870i$	$0 \pm 0.03118429i$	$0 \pm 0.05061671i$
	$0 \pm 0.00366760i$	$0 \pm 0.02154496i$	$0 \pm 0.04306049i$	$0 \pm 0.05994153i$
3	$0 \pm 0.00031089i$	$0 \pm 0.00185072i$	$0 \pm 0.00357142i$	$0 \pm 0.00506232i$
	$0 \pm 0.00134987i$	$0 \pm 0.00870332i$	$0 \pm 0.01961872i$	$0 \pm 0.02916710i$
	$0 \pm 0.00182670i$	$0 \pm 0.01175539i$	$0 \pm 0.02394986i$	$0 \pm 0.03932200i$

表 III. 前三个纯虚数特征值对，对应于 $n = 0$、1、2、3 和 $\ell = 0$、1、2、3 的背景构型。

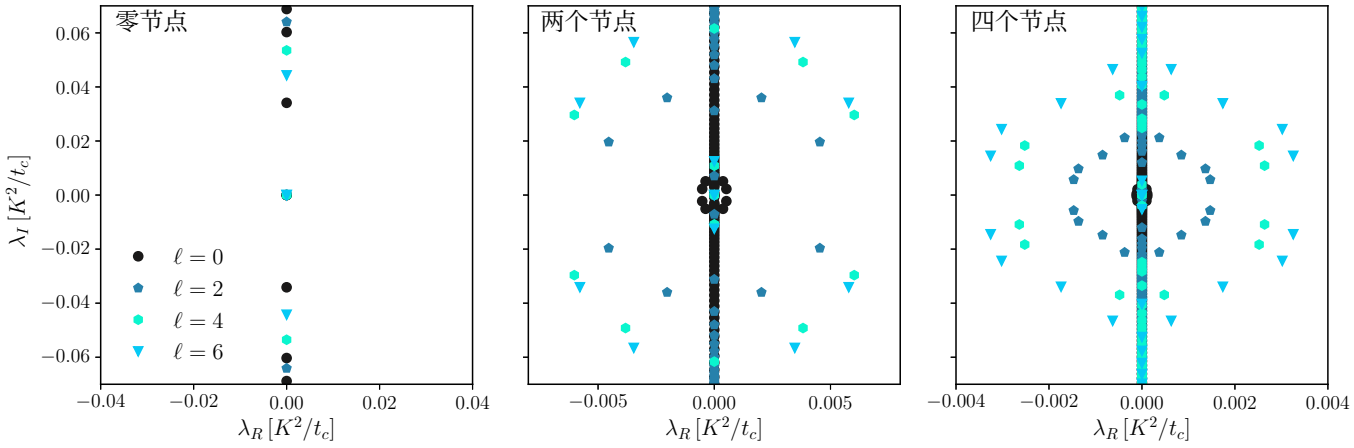


图 4. 对于 $\ell = 0$、2、4、6，基态构型的特征值谱见左图，$n = 2$ 的激发态见中图，$n = 4$ 的激发态见右图。点 $\lambda = 0$ 对应于描述背景解相位变化的零模（更多详情请参见第 II E 小节）。注意，特征值以四元组 $\{\lambda, -\lambda, \lambda^*, -\lambda^*\}$ 的形式出现，如第 II E 小节所述。谱为纯虚数（因此具有线性稳定性）的背景构型只有零节点的基态；其余具有 $n \geq 1$ 个节点的状态恰有 $n-$ 个四元组特征值，其实部非零，表明这些状态线性不稳定。

则随时间指数衰减。因此，这种情形的出现意味着相应的背景解是线性不稳定的。接下来，情形（iii）描述一对频率为 $\lambda_I \neq 0$ 的纯振荡模。最后，情形（iv）会产生四个振荡模，其中两个具有指数增长振幅，另外两个具有衰减振幅。这种情形的出现意味着背景解是线性不稳定的，并且代表守恒能量泛函的一个鞍型临界点，前提是非简并条件 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] \neq 0$ 得到满足。

图 5 展示了两个特征值对应的场（A，B）的特征函数剖面示例：

表 $\lambda = 0.00619398 + 0.03340186i$ 和 $-\lambda^*$ 中给出的数值对应于第一激发态 $n = 1$，其 $\ell = 1$。请注意中心附近的线性行为（这与原点处的渐近行为$a(r)$ $b(r)$ $\sim r^{\ell+1}$ 相符），以及振幅随半径增大而衰减的趋势，这与场在无穷远处的指数衰减相符。另请注意对应于 λ 和$-\lambda^*$的特征场之间的关系，这与式（29）一致。

我们的特征值分析得出以下结果。首先，对于基态构型，我们发现了纯虚特征值，对应于情形（iii）。其中最初几个列于表 III，适用于 $n = 1$，2，3

ℓ 数值	n 节点	$\lambda\,[K^2/t_c]$	$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R]$	$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_I]$
0	0	$0 \pm 0.03412558i$	0.00637265	0
	1	$0 \pm 0.00300045i$ $\pm 0.00148347 + 0.00979587i$	0.00039739 0.00011228	0 -0.00011228
1	0	$0 \pm 0.06385090i$	0.00787292	0
	1	$0 \pm 0.01185117i$ $\pm 0.00619398 + 0.03340186i$	0.00098164 0.00028039	0 -0.00028043

表 IV. 使用方程 (39) 计算得到的守恒能量泛函二阶变分 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_i]$, $i = R, I$ 的数值。所示结果对应于与满足 $\ell = 0, 1$ 和 $n = 0, 1$ 的背景解相关的前几个特征值和特征函数。

n-nodes	$\lambda\,[K^2/t_c]$ ℓ-数值: 0	1	2	3
0	$-$	$-$	$-$	$-$
1	$0.00148347 + 0.00979587i$	$0.00619398 + 0.03340186i$	$0.00888859 + 0.04742445i$	$0.00923822 + 0.05471082i$
2	$0.00037420 + 0.00507753i$ $0.00051995 + 0.00225911i$	$0.00135751 + 0.02218741i$ $0.00271729 + 0.01142125i$	$0.00202943 + 0.03598465i$ $0.00454164 + 0.01963532i$	$0.00282615 + 0.04277090i$ $0.00559009 + 0.02557525i$
3	$0.00014893 + 0.00309572i$ $0.00017445 + 0.00168940i$ $0.00022483 + 0.00088225i$	$0.00057487 + 0.01547544i$ $0.00086410 + 0.00955161i$ $0.00132314 + 0.00519695i$	$0.00094498 + 0.02698601i$ $0.00177133 + 0.01701821i$ $0.00247179 + 0.00993824i$	$0.00107542 + 0.03559566i$ $0.00273695 + 0.02361055i$ $0.00335300 + 0.01399112i$

表 V. 对于满足 $n = 0, 1, 2, 3$ 和 $\ell = 0, 1, 2, 3$ 的背景构型，其实部非零的特征值四元组 $\{\lambda, -\lambda, \lambda^*, -\lambda^*\}$。仅报告实部和虚部均为正的成员。满足 $n = 0, 2, 4$ 和 $\ell = 0, 2, 4, 6$ 的构型在复平面中的相应谱见图 4。

以及 $\ell = 0$、1、2、3。然而，与基态不同，我们还发现了特征值四元组，其$\lambda_R \neq 0$ 且 $\lambda_I \neq 0$，对应于情形（iv），这意味着相应的构型是线性不稳定的。有趣的是，我们的结果表明，在每种情形下，这样的四元组恰有 n 个，其中 n 背景解的节点数（若干示例见图 4 的中间和右侧面板以及表 V）。此外，我们的结果似乎表明，对于这些四元组中的每一个，非简并条件$\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] \neq 0$ 均成立（具体示例见表 IV，其中 $n = 1$ 且 $\ell = 0$为 1）。这些n 四元组的存在意味着激发态是能量泛函 $\mathcal{E}_\ell$的鞍点。最后，我们的结果表明，情形（ii）不会出现，因为除零模外，我们没有发现任何纯实特征值。这些结果使我们推测，所有满足 $n \geq 1$ 且 $\ell \geq 0$ 的构型（n、ℓ）都是线性不稳定的，并且恰好具有 $2n$个按形式（24、25）随时间指数增长的模。此外，这些构型对应于能量泛函的鞍型临界点。

在结束本节之前，我们想对特征值的行为作几点评论 λ 这可从表 III 和表 V 以及对应于更高 n 和 ℓ 值、但未在这些表中列出的其他数据中推断出来。首先，我们分析表 III 中第一批纯振荡模的周期（即对每个 ℓ 和 n 而言振荡最慢的模）。我们发现，在 ℓ 固定时，该周期随 n 增大而变长，其中最短周期属于基态。其次，我们比较表 V 中同一列里的 λ 的实部（即固定 ℓ），考察不同的 n 值。有趣的是，对每个 n 而言，寿命最短的不稳定模（即实部最大者）的寿命会随 n 增大而延长。从这个意义上说，较高的激发态比低阶激发态“更不不稳定”。第三，我们对表 V 中固定的一行（即节点数 n 固定）以及具有不同 ℓ 值的构型进行同样的比较。比较时可以固定 K，也可以固定场的数量 $N = K\,(2\ell + 1)$。第一种情况下，寿命最短的模的寿命会随 ℓ 增大而缩短。第二种比较则相反，即具有较高 ℓ 值的构型更不不稳定。

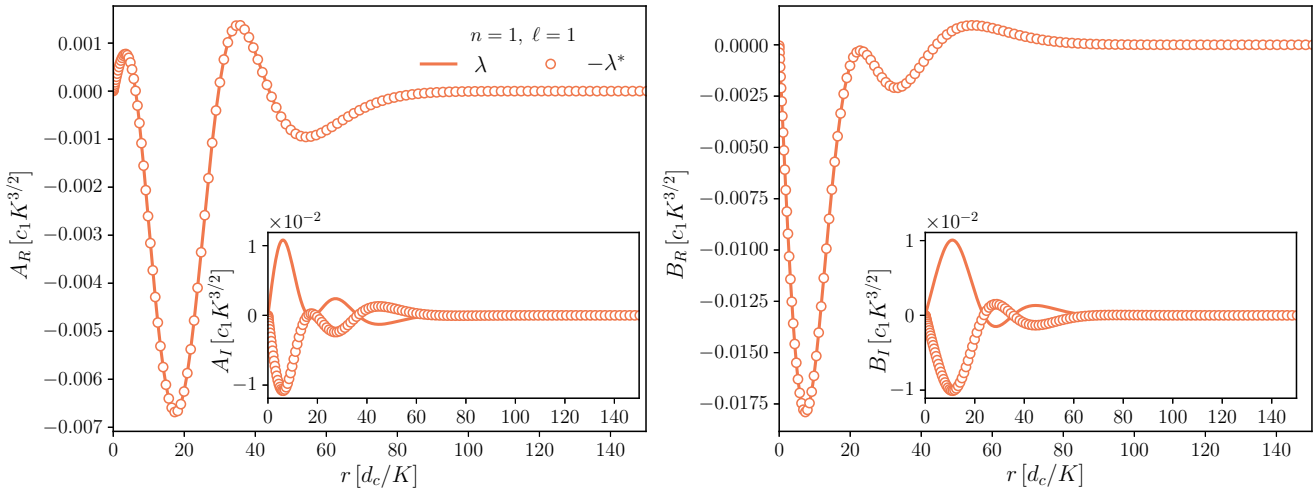


图5. 场 A（左图）和 B（右图）的特征函数分布，对应于满足 $\ell = 1$ $\{\lambda\ A\ B\ ,\ -\lambda^*\ A^*\ B^*\}$ 29 $\lambda = 0.00619398 +$ 的第一激发背景构型。0.03340186i A B
图中展示的是与表 V 中报告的 相对应的特征值-特征函数对（,,）（,,）（见式（））。外侧图显示了 和 的实部，插图则显示了它们的虚部。注意， A_R 和 B_R 彼此相同，而 A_I 和 B_I 相差一个符号，这与上述对称性（λ, A, B）$\mapsto$（$-\lambda^*, A^*, B^*$）相符。这里， c_1 指常数 $1/\sqrt{(2\ell+1)\ a_c^3}$。

V. 结论

本文从一个由 N 个零自旋相同粒子组成的非相对论系统出发，这些粒子仅通过它们共同产生的引力势相互作用。将 N 粒子的波函数写成单粒子态的对称化乘积，并令其角度依赖具有式 (8) 中的特定形式后，方程组便可约化为有效的一维 SP 方程组 (9)。该方程组的定态解描述非相对论 ℓ 玻色子星，这类致密天体通过将内部对称群从 $U(1)$ 扩展到 $U(N)$，推广了标准的 $\ell = 0$ 构型。这些天体由数值 (N, ℓ, n) 表征，其中 ℓ 表示场的角动量数，n 表示径向波函数的节点数，而 N 等于 $2\ell+1$ 的整数倍。固定 N 和 ℓ 时，它们的能级随 n 单调递增，其中基态 $n = 0$ 的能量最低。

然而，对于非相对论 ℓ-玻色星构型的稳定性而言，总能量（除波函数的能量外，还包括引力束缚能）比其能级更为重要。正如我们在附录A中所示，可以从薛定谔-泊松系统的拉格朗日表述中自然地导出一个守恒能量泛函。重标度自由度（见式（27））通过诺特定理，给出了联系公式（23），将定态构型的总能量与其能级联系起来。

尽管这些结果是对 $\ell = 0$ 情形下已知结果的直接推广，但纳入角动量 ℓ 会带来一些有趣的新效应。例如，具有 $\ell > 0$ 的构型在其中心处密度为零，因此——与其相对论对应物一样 [1, 13] ——其形态呈壳层状，且壳层半径随 ℓ 增大（见图1）。关于稳定性，请回想：对于每个固定的 N值，构型（N，0，0）是守恒能量泛函的全局极小值，因此预期在足够小的微扰下是稳定的。由此便产生一个问题：构型（N，ℓ，n）在 $\ell > 0$或 $n > 0$ 时是否也稳定？这与它们作为能量泛函的何种临界点（局部极小值、局部极大值或鞍点）有关。本文的结果揭示了以下性质。首先，结果表明，所有基态构型在球对称约化系统（9）的线性化扰动模态下均稳定，并且相对于这类微扰，这些构型对应总能量的局部极小值。其次，结果表明，当 $\ell > 0$ 时，这些极小值只是局部极小值，即其总能量大于具有 $\ell = 0$ 且 N值相同的基态构型所对应的能量。第三，我们的结果表明，每个激发态构型（即每个满足 $n > 0$的状态）均线性不稳定，并且恰好具有$2n$ 个随时间指数增长的球对称线性化模态。第四，结果还表明，每个激发态构型都是守恒能量泛函的鞍型临界点。

我们的稳定性结果与此前关于相对论情形下 ℓ-玻色子星对球对称扰动的线性稳定性研究 [16–18] 相一致。这些研究表明，相对论基态构型存在一条稳定分支，将牛顿构型与最大质量构型连接起来。

具体而言，时间依赖形式为 $e^{-i\sigma t}$ 的模态解所满足的线性化方程可化为形式为 $\mathcal{H}v = \sigma^2 v$的本征值问题，其中 $\mathcal{H}$ 是一个双通道薛定谔算子。由于该算子是自伴的， σ 必为实数或纯虚数，这与我们对基态构型的研究结果相符。然而，有趣的是， [16–18] 中使用的方法仅适用于基态解，因为该方法要求背景标量场的径向分布符号固定。本文的结果表明，激发态会导致虚特征值的出现；因此，相关线性算子不可能是自伴的。因此，本文的结果表明，对相对论激发态进行线性稳定性分析，需要对受扰标量场采用更一般的试探形式，其中可能同时包含因子$e^{-i\sigma t}$和 $e^{i\sigma^* t}$。

本文最后，我们对研究结果的物理意义作几点评论，并列出一些尚待解决的问题。首先，我们来分析构型（ M^{phys} 、 R_{99}^{phys} 和N）的总质量ℓ和半径（我们将半径n定义为包含 99% 质量的中心球的半径）。根据无量纲变量的定义，见式（11），这些量分别随 $N\mu$和 $1/(\mu^3 N)$ 缩放。因此，给定 ℓ和 n 后，天体的质量和半径由两个参数 N 和 μ确定。不过请注意，这两个参数并非彼此独立。为了符合非相对论极限， R_{99}^{phys} 必须远大于史瓦西半径R_s^{phys}: $= 2GM^{phys}/c^2$，由此得到限制[9]

$$\frac{R_s^{phys}}{R_{99}^{phys}} = \frac{(2N)^2}{(2\ell+1)R_{99}} \left(\frac{\mu}{m_{\rm pl}}\right)^4 \ll 1, \qquad (55)$$

其中 $m_{\rm pl} = \sqrt{\hbar c/G} = 2.17643 \times 10^{-8}$kg 是普朗克质量，且 R_{99} 是包含$0.99M$ 的无量纲总质量的、正确归一化的径向分布的无量纲半径。例如，对于质量约为希格斯玻色子质量的重粒子，满足 $\mu \approx 1.25 \times 10^{11}$eV $/c^2 \approx 2.22 \times 10^{-25}$kg 时，限制条件（55）给出 $N \ll 10^{32}$ 当 $\ell \leq 10$ 且假设$R_{99} < 100$时的取值。这将产生最大质量远低于 10^7kg 的天体（具有如此最大质量的构型，其半径会小于玻尔半径）。然而，轻质量粒子能够满足牛顿力学限制条件（55），同时其质量和半径也与典型天体物理对象相符。例如，由 $N \approx 10^{55}$ 个质量为 $\mu = 10^{-3}$eV$/c^2 \approx 1.78 \times 10^{-39}$kg 的玻色子形成的天体，其质量和半径与典型矮行星相似；矮行星的 $M^{phys} \approx 10^{16}$kg，且 $R^{phys} \approx 200$ km。另一方面，超轻质量 $\mu = 10^{-22}$eV$/c^2 \approx 1.78 \times 10^{-58}$kg 且 $N \approx 10^{98}$ 时，其数值与暗物质星系晕相符；这类星系晕的 $M^{phys} \approx 10^{10}\mathrm{M}_\odot$，且 $R^{phys} \approx 1$ Kpc。在这两个例子中，所选的场数 N 均满足牛顿力学限制条件，即 $N \ll 10^{61}$，对于 $\mu = 10^{-3}$ 和 10^{-22}eV$/c^2$，分别为 $\mathbf{10}_{99}$。

其次，我们来讨论不稳定构型（N、 ℓ、 n）中不稳定模态对应的时间尺度， $n > 0$。如果这类构型的寿命足够长（例如达到宇宙年龄的量级），那么出于实际考虑，仍可将其视为稳定。因此，量化这些时间尺度十分重要。其参考值定义为 $t_{\rm life}$: $= 1/\lambda_R$，其中 λ_R 表示与增长最快模态相关的特征值的实部。根据式（11，物理寿命与$1/(N^2\mu^5)$ 成比例。对于构型（N、1、1），其增长最快模态具有 $\lambda_R = 0.00619398$，且其质量和半径与上一段讨论的典型天体物理对象相对应，可得到以下数值。对于矮行星，寿命较短，约为 $t_{\rm life} \approx 10^4 s \approx 2.8$小时。对于暗物质星系晕，所得寿命约为 $t_{\rm life} = 10^{13} s \approx 3.17 \times 10^5$ 年，远短于典型星系的寿命。

当然，本文采用的数值方法只能探索有限参数空间；因此，若能为我们的稳定性结果奠定严格的数学基础，并证明这些结果对任意构型（N, ℓ, n）确实成立，将会很有意义。然而，一个更迫切的问题是，基态构型（N, ℓ, 0 ）在 $\ell > 0$ 的条件下，面对不一定具有球对称性的小幅时变扰动时，是否（线性和非线性）稳定。这与这样一个问题有关：相对于任意变化（即不局限于球对称变化），这些构型究竟是守恒能量泛函的局部极小值，还是鞍型临界点。另一个值得研究的问题是，分析 [9], 中发现的多-ℓ 多态构型的非相对论类比构型的稳定性；这些构型包含具有不同 ℓ 和 n值的场。我们希望在未来的工作中探讨这些问题。

致谢

谨向 Alberto Diez-Tejedor 和 Emilio Tejeda 致以谢意，感谢他们富有启发性的讨论，并感谢 Fran- sisco S. Guzm´an 审阅手稿。本研究部分由 CONACyT 网络项目第 376127 号“Sombras, lentes y ondas gravitatorias gener- adas por objetos compactos astrof´ısicos”、授予 Universidad Michoacana de San Nicol´as de Hidalgo 的 CIC 资助，以及 CONACyT-SNI 提供支持。A.A.R. 还感谢获得的资助

[9] 当 R_s^{phys}变得与 R_{99} 相当时，就需要考虑相对论性 ℓ玻色子星 [1]；对于稳定构型，其最大紧致度约为布赫达尔极限的一半 [13]。

该资助来自“Estancias Posdoc- torales por M´exico para la Formaci´on y Consolidaci´onde las y los Investigadores por M´exico”博士后奖学金。E.C.N. 获得了 CONACyT 博士奖学金资助。

附录 A：拉格朗日表述与总能量

在本附录中，我们简要推导总能量与式（23）中给出的能量本征值之间的关系，该关系基于薛定谔-泊松系统（6）的拉格朗日表述。为此，我们首先引入列向量 ψ、行向量 ψ^*和对角矩阵 A 如下：

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_J)^T, \tag{A1a}$$
$$\psi^* = (\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \dots, \overline{\psi}_J), \tag{A1b}$$
$$A = \mathbf{diag}(N_1, N_2, \dots, N_J), \tag{A1c}$$

其中，我们回顾一下，N_j（$j = 1$、2、.....、J）表示处于状态 ψ_j中的粒子数。这里，上标T表示转置，而 $*$ 表示共轭转置。采用这一记号，与薛定谔-泊松系统（6）相对应的作用量可写为 [57]

$$S[\psi, \psi^*, U] = \int_\Omega L(\psi, \psi^*, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^*, U, \partial_k U) d^4x, \tag{A2}$$

其中有一个开子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$。在本文中以及下文中，$(x^\mu) = (t, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$，希腊指标和拉丁指标分别取遍 0、1、2、3 以及 1、2、3；希腊指标通过欧几里得度量 $\delta_{\mu\nu}$ 进行升降。拉格朗日量为

$$L = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\sum_{k=1}^{3}(\partial_k\psi^*)A\partial_k\psi + \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* A\dot{\psi} - \dot{\psi}^* A\psi\right) - \mu U\psi^* A\psi - \frac{1}{8\pi G}\sum_{k=1}^{3}(\partial_k U)^2. \tag{A3}$$

不难验证，相应的欧拉-拉格朗日方程给出了薛定谔-泊松系统（6）及其复共轭方程。

根据诺特定理 [58]，作用量的连续对称性会产生守恒流

$$J^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \delta\psi^*\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U)}\delta U + L\delta x^\mu, \tag{A4}$$

其中，$\delta\psi$、$\delta\psi^*$、δU、δx^μ 表示场 ψ、ψ^*、U 以及坐标 x^μ 在对称性作用下的一阶变分。例如，平移会产生守恒流

$$J^\mu = -\sum_{\nu=0}^{3} T^{\mu\nu}\delta x_\nu, \tag{A5}$$

其中应力能量动量张量为

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial^\nu\psi + \partial^\nu\psi^*\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U)}\partial^\nu U - L\delta^{\mu\nu}. \tag{A6}$$

特别地，假设场在无穷远处足够快地衰减，可以推出总能量

$$\int_{\mathbb{R}^3} T^{00} d^3x \tag{A7}$$

在时间演化中守恒。利用方程（A3、A6），可以验证该能量恰好与方程（ $\mathcal{E}$ 中的守恒能量泛函 7）一致。

下面我们考虑尺度变换（参见方程（11））

$$t \mapsto \tilde{t} = \Lambda^{-2}t, \qquad x^i \mapsto \tilde{x^i} = \Lambda^{-1}x^i,$$
$$\psi \mapsto \tilde{\psi} = \Lambda^2\psi, \qquad \psi^* \mapsto \tilde{\psi^*} = \Lambda^2\psi^*, \tag{A8}$$
$$U \mapsto \tilde{U} = \Lambda^2 U,$$

其中 $\Lambda > 0$ 为任意正因子。该变换意味着拉格朗日量按照 $\tilde{\ } \tilde{\ } \tilde{\ } \tilde{\ } \tilde{\ } \tilde{\ }$ 进行重新缩放 $L := L(\psi, \psi^*, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^*, U, \partial_i U)\ \Lambda^6 L\ \psi\ \psi^*\ \partial_\mu\psi\ \partial_\mu\psi^*\ U\ \partial_i U$（, , , , , ）；因此它保持运动方程不变。然而，作用量并不具有不变性，而是满足关系

$$\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{L} d^4\tilde{x} = \Lambda\int_\Omega L d^4x, \tag{A9}$$

对其进行变分（即在 $\Lambda = 1$ 处求关于Λ 的导数）后，可得欧拉-拉格朗日方程的解满足以下关系：

$$\sum_{\mu=0}^{3}\partial_\mu J^\mu = L. \tag{A10}$$

尽管在这种情况下流 J^μ 并不守恒，但仍可通过对该方程在 $\mathbb{R}^3$上积分得到一个有用的关系。假设场在无穷远处足够快地衰减，可得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega J^0 d^3x = \int_\Omega L d^3x, \tag{A11}$$

其中，利用方程（A4），可得 J^0 的以下表达式：

$$J^0 = 2tT^{00} + \sum_{k=1}^{3} T^{0k}x_k. \tag{A12}$$

对于如下形式的时间谐波解

$$\psi_j(t, \vec{x}) = e^{-iE_j t/\hbar}u_j(\vec{x}), \qquad j = 1, 2, \dots, N_J, \tag{A13}$$

其函数 u_j 与 t 无关，并满足归一化条件（u_j, u_k）$= \delta_{jk}$，由方程（A3、A11、A12）可得关系式

$$3\mathcal{E}[u] = \sum_{j=1}^{J} N_j E_j. \tag{A14}$$

特别地，对于本文考察的 ℓ 玻色子星，这给出 [10]

$$\mathcal{E}[u] = \frac{N}{3} E_\ell = \frac{(2\ell+1)K}{3} E_\ell, \tag{A15}$$

这证明了关系式（23）。

附录B：能量泛函的一阶和二阶变分

在本附录中，我们计算式（ $\mathcal{E}_\ell$ 18）中定义的约化能量泛函 的一阶和二阶变分，其形式为

$$\mathcal{E}_\ell[f] = \int_0^\infty \left[|\partial_r f(r)|^2 + \frac{\ell(\ell+1)|f(r)|^2}{r^2} \right] r^2 dr - \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(r)|^2 |f(\tilde{r}))|^2}{r_>} r^2 \tilde{r}^2 dr d\tilde{r}, \tag{B1}$$

这里回顾一下记号 $r_> = \max\{r, \tilde{r}\}$。我们还证明了关系式（38），它联系了 $\hat{}\mathcal{E}_\ell$ 的二阶变分与式（ Q 35）中定义的算子的期望值。

为进行变分，我们将波函数f 展开为以下形式:

$$f(t,r) = f^{(0)}(t,r) + \epsilon \delta f(t,r) + \frac{\epsilon^2}{2}\delta^2 f(t,r) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \tag{B2}$$

其中， $f^{(0)}(t,r)$表示（实值）背景场，而 $\delta f(t,r)$ $\delta^2 f(t,r)$分别表示它们的一阶和二阶（复值）微扰。 $\mathcal{E}_\ell$ 的n阶变分定义为

$$\delta^n \mathcal{E}_\ell := \frac{d^n}{d\epsilon^n} \mathcal{E}_\ell[f]\Big|_{\epsilon=0}. \tag{B3}$$

经过一些运算后，直接计算可得

$$\delta\mathcal{E}_\ell = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty dr\, r^2\, \delta f^* \hat{\mathcal{H}^{(0)}}_\ell f^{(0)}, \tag{B4a}$$

$$\delta^2\mathcal{E}_\ell = \mathrm{Re}\int_0^\infty dr\, r^2 \left(\delta^2 f^* \hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} f^{(0)} + \delta f^* \hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} \delta f \right) - 2\int_0^\infty \int_0^\infty dr d\tilde{r}\, r^2 \tilde{r}^2 \frac{\mathrm{Re}\left(f^{(0)}\delta f^*\right) \mathrm{Re}\left(\tilde{f}^{(0)}\delta\tilde{f}\right)}{r_>}, \tag{B4b}$$

其中我们使用了方程（$\mathcal{H}_\ell^{(0)}$ 中定义的算子 $\hat{}$（21），并且为简洁起见，省略了函数的自变量 r，用 上的波浪号表示该函数取值于 $\tilde{r}$而非 r。

对于如下特殊情形： $f^{(0)}$ 是方程组（12）的一个解，且具有式（19）所示的谐波时间依赖，我们有 $\hat{}$ $\mathcal{H}_\ell^{(0)} f^{(0)} = E_\ell f^{(0)}$ 并得到

$$\delta\mathcal{E}_\ell = 2E_\ell\, \mathrm{Re}\left(\delta f, f^{(0)}\right)_{L^2}, \tag{B5a}$$

$$\delta^2\mathcal{E}_\ell = \left(\delta f, \hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)}\delta f\right)_{L^2} + E_\ell\, \mathrm{Re}\left(\delta^2 f, f^{(0)}\right)_{L^2} - 2\int_0^\infty \int_0^\infty dr d\tilde{r}\, r^2\tilde{r}^2 \frac{\mathrm{Re}\left\{f^{(0)}\delta f^*\right\} \mathrm{Re}\left\{\tilde{f}^{(0)}\delta\tilde{f}\right\}}{r_>}, \tag{B5b}$$

其中，回顾一下，（·, ·）$_{L^2}$ 表示式（31）中定义的标准标量积。考虑到归一化条件式（13），该条件意味着（f, f）$_{L^2}$为常数，因此

$$\mathrm{Re}\left(\delta f, f^{(0)}\right)_{L^2} = 0, \quad \mathrm{Re}\left(\delta^2 f, f^{(0)}\right)_{L^2} = -\left(\delta f, \delta f\right)_{L^2}, \tag{B6}$$

由此我们得出， $\delta\mathcal{E}_\ell = 0$ 和

$$\delta^2\mathcal{E}_\ell = \left(\delta f, [\hat{\mathcal{H}}_\ell^{(0)} - E_\ell]\delta f\right)_{L^2} - 2\int_0^\infty \int_0^\infty dr d\tilde{r}\, r^2\tilde{r}^2 \frac{\mathrm{Re}\left\{f^{(0)}\delta f^*\right\} \mathrm{Re}\left\{\tilde{f}^{(0)}\delta\tilde{f}\right\}}{r_>}. \tag{B7}$$

将此表达式与算子 $\hat{}$ Q 和内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 的定义（35，36）进行比较，可得出 $\hat{}\mathcal{E}_\ell$ 的二阶变分与 Q的期望值之间的基本关系:

$$\left\langle A \middle| \hat{Q} A \right\rangle = \delta^2\mathcal{E}_\ell[A_R] + \delta^2\mathcal{E}_\ell[A_I], \tag{B8}$$

其中我们设定了 $A = A_R + iA_I$，符号 $\delta^2\mathcal{E}_\ell[A_i]$ 表示在 $\delta f = A_i$处计算的二阶变分。该关系使我们能够将 $\mathcal{E}_\ell$ 的二阶变分的符号与 Q 的期望值的符号联系起来，并在我们的稳定性分析中发挥着关键作用。

附录 C：能量本征值的确定

在本附录中，我们介绍计算能量本征值的方法 E_ℓ，该本征值对应于背景系统的一个解（$\sigma_\ell^{(0)}$， $u^{(0)}$）（41）。我们的过程是对 $\ell \geq 0$ 中所给方法的直接推广 [24]。

[10] 请注意，在本附录中我们采用物理单位，使得$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{phys}$ 和 $E_\ell = E_\ell^{phys}$。

回顾引力势的表达式

$$U^{(0)}(t,r) = \triangle_s^{-1}\left(\left|\sigma_\ell^{(0)}\right|^2\right) = E_\ell - u^{(0)}(r), \qquad \text{(C1)}$$

其定义基于平移势 $u^{(0)}$，该势定义于小节III A中。由于 $U^{(0)}$ 在无穷远处趋于零，原则上我们可以通过取渐近极限 E_ℓ来计算能量本征值

$$E_\ell = \lim_{r\to\infty} u^{(0)}(r). \qquad \text{(C2)}$$

然而，问题在于，使用本文中的射击法时， $u^{(0)}$ 的渐近值无法获得。为了解决这一问题，我们采用如下近似。

回顾关系式 $\sigma_\ell^{(0)}$ （r） $= r^\ell \sigma$（r），对方程组（41）关于 r积分两次，利用分部积分，并考虑边界条件（43），可得到等价的积分系统：

$$\sigma(r) = \sigma_0 + \int_0^r \frac{u^{(0)}(x)\sigma(x)}{2\ell+1}\left[\left(\frac{x}{r}\right)^{2\ell+1} - 1\right] x dx, \qquad \text{(C3a)}$$

$$u^{(0)}(r) = u_0 + \int_0^r |\sigma(x)|^2\left(\frac{x}{r} - 1\right) x^{2\ell+1} dx. \qquad \text{(C3b)}$$

对方程（C3b）关于 r 求导可得

$$\frac{du^{(0)}(r)}{dr} = -\frac{1}{r^2}\int_0^r |\sigma(x)|^2 x^{2(\ell+1)} dx, \qquad \text{(C4)}$$

这意味着 $u^{(0)}$ 单调递减。因此，引力势 $U^{(0)}$ 单调增加并趋于零（这与图2所示的行为一致）。此外，由于 σ（x）随 $x\to\infty$呈指数衰减，因此可以将 $u^{(0)}$ 按 r^{-1}的幂展开，

$$u^{(0)}(r) = E_\ell + \frac{M}{r} + O(r^{-3}), \qquad \text{(C5)}$$

其中常数 E_ℓ 和 M 由下式给出

$$E_\ell = u_0 - \int_0^\infty x^{2\ell+1}|\sigma(x)|^2 dx, \qquad \text{(C6a)}$$

$$M = \int_0^\infty x^{2(\ell+1)}|\sigma(x)|^2 dx. \qquad \text{(C6b)}$$

注意， M 是质量密度$|\sigma_\ell^{(0)}(r)|^2$ 乘以 r^2后的积分；因此它表示该构型的无量纲总质量。

关系式 (C6a) 提供了一种计算 E_ℓ 的替代方法，前提是已知 u_0 以及 $\sigma(r)$ 的径向分布。[11] 然而，请记住，通过射击法得到的数值解并不直接满足归一化条件方程 (13)，这意味着方程 (C6a) 给出的是未重新缩放的能量本征值。计算正确缩放后的特征值有两种方法。第一种方法是利用方程 (27) 中的关系，对解 $(\sigma_\ell^{(0)}, u^{(0)})$ 进行重新缩放，其中$\Lambda = (2\ell+1)/M$ （见方程 (28)），然后根据方程 E_ℓ 计算 E_ℓ。第二种方法是先利用方程 (C6a) 计算 E_ℓ 的未重新缩放值，然后使用变换 $E_\ell^\Lambda = \Lambda^2 E_\ell$，得到

$$E_\ell^\Lambda = \frac{(2\ell+1)^2}{M^2} E_\ell. \qquad \text{(C7)}$$

本文报告的结果基于第二种方案，该方案根据 E_ℓ 式 (C6a) 使用未重标度的剖面确定。对应于 $N = K(2\ell+1$个粒子的（正确重标度后的）有量纲本征值由下式给出

$$E_\ell^{phys} = 2\mu v_c^2 K^2 E_\ell^\Lambda, \qquad \text{(C8)}$$

其中 E_ℓ^Λ 由式（C7）给出。不过，我们也使用第一种方案检查了结果。

作为本附录的结尾，我们注意到，物理质量由下式给出

$$M^{phys} = K\mu\Lambda M. \qquad \text{(C9)}$$

对于径向剖面 σ^Λ 满足式（13）所示归一化条件的构型，有 $M = (2\ell+1)/\Lambda$，因此物理质量为

$$M^{phys} = (2\ell+1)K\mu = N\mu, \qquad \text{(C10)}$$

正如预期。

附录 D：收敛性与独立残差分析

在本附录中，我们检验用于计算线性化系统（51）特征值的伪谱配置法的收敛性。此外，我们还基于对线性化方程进行龙格-库塔积分，给出独立残差分析。

如第 IVA 小节所述，我们的方法涉及将截断后的物理区域 $[0, r_\star]$ 映射到计算区域 $x\in[-1,1]$ 所采用的变换为

$$r = r_\star\left(\frac{x+1}{2}\right). \qquad \text{(D1)}$$

[11] 在实际 中，式 (C6) 中的积分无法计算 over 整个范围 $0 < x < \infty$，因为通过射击算法得到的剖面 σ 仅在某个最大半径 $r_{\max}$以内已知。不过，由于 σ呈指数衰减，可以将积分截断于 $r_{\max}$；区间 $r_{\max} < x < \infty$ 的贡献不会影响本文所报告的有效数字位数。

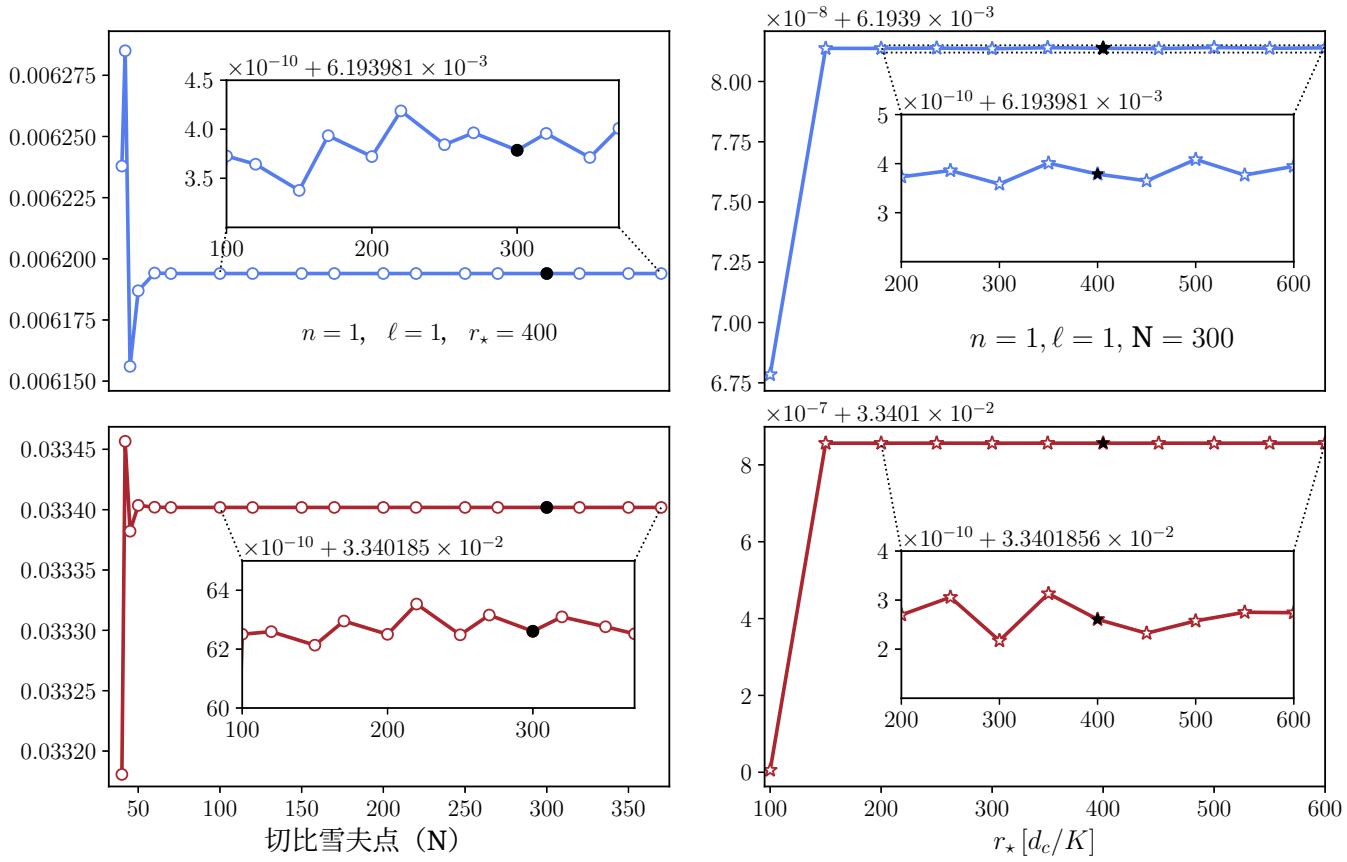


图 6. 对应于背景构型（n, ℓ）$=(1,1)$ 的特征值 $\lambda = 0.00619398 + 0.03340186i$ 的收敛性研究。左列图显示了在固定 $r_\star = 400$、改变切比雪夫点数 N 时，λ 的数值。右列图显示了相同的量，此时固定 N $= 300$，改变 $r_\star$。其中，顶部和底部图分别显示了 λ 的实部（λ_R）和虚部（λ_I）。与深色圆点和星号对应的点表示本文报告的数值；可以看出，它们位于相对误差与 10^{-7} 相当或更小的区域内。

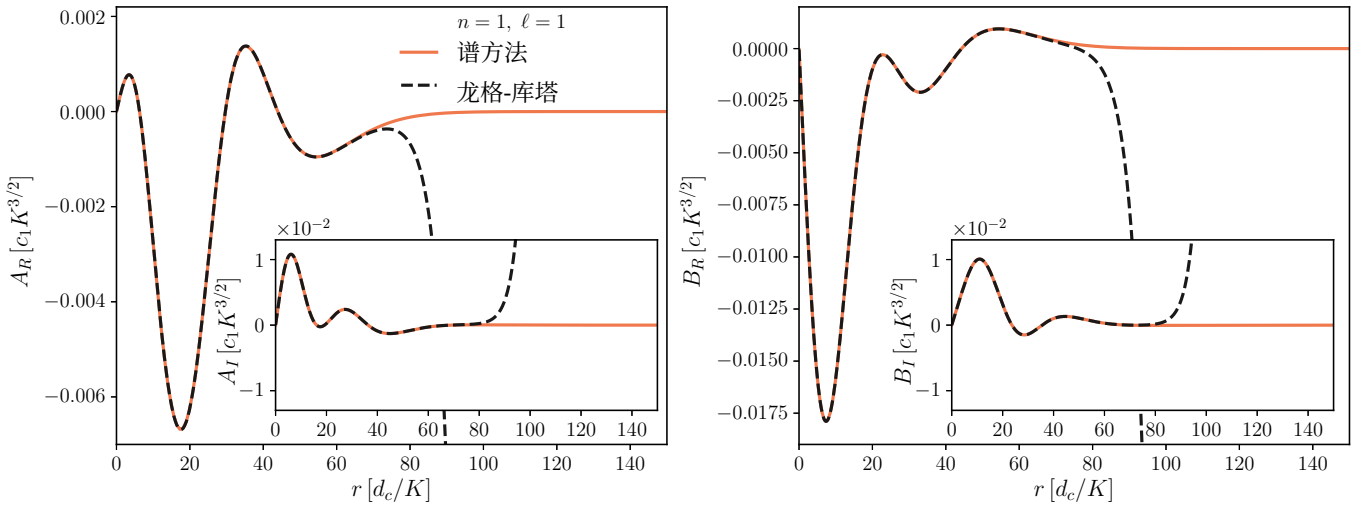


图 7. 对应于 (n, ℓ) $=(1,1)$ 的背景构型及特征值 $\lambda = 0.00619398 + 0.03340186i$，采用谱方法和龙格-库塔方法得到的线性化模态 (A, B) 的比较。从图中可以看出，龙格-库塔结果在半径达到 $r \sim 70$ 量级之前均与谱方法的结果一致。

或者，我们考虑如下变换

$$r = 2S\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{2}\right), \tag{D2}$$

其中 $S > 0$ 为特征距离，该变换将整个物理区域 $[0,\infty]$ 映射到 $y \in [-1,1]$，且独立于 $r_\star$。回想一下，我们使用切比雪夫分布将计算定义域离散化为 N $+1$ 个点；对于齐次狄利克雷边界条件，这种方法能达到最佳精度（见 [43]中的第五章）。因此，数值误差取决于两个参数 $r_\star$ 和 N（对于紧化y定义域，参数为 S 和 N），因此有必要分析数值结果相对于这些参数的收敛性。

本文展示的结果使用映射（D1）计算，而另一种映射（D2）则用于验证这些结果。 N 和 $r_\star$ 的理想取值取决于背景解；例如，如图 1所示，节点数较大时会产生范围更广的构型，要达到与基态相同的精度，需要采用更大的 N 和 $r_\star$（例如，参见 [43] 中的程序 15，其中给出了一个说明性示例）。我们发现，经验取值 $r_\star$: $= 200$（$n+1$），其中 n为背景解的节点数，以及 N: $= 3r_\star/4$能够得到可接受的结果（尤其是能够确保首批特征值具有七位有效数字的精度）。

图 6 展示了实部非零的特征值的收敛性研究，$\lambda = 0.00619398 + 0.03340186i$，对应于参数为（$\ell$， n）$=(1,$ 1) 的构型（相关特征函数见表 V 和图 5 ），其中两个参数值 N 和 $r_\star$ 均有所变化。该研究表明，即使对于这一构型，我们的选择也能使相对误差达到与 10^{-7} 相当或更小的水平。从这些图中还可以看出，可以选择远小于 N 的 $3r_\star/4$ ，同时保持特征值 λ的精度相当。然而，在这种情况下，我们发现，零特征值（对应于小节IIE中讨论的零模）可能不再达到机器精度的零值，并且可能与非零特征值混淆。

完成这项收敛性研究后，我们转而关注独立残差分析。为此，我们实现了一个显式五（四）阶龙格–库塔程序，并从原点 $r = 0$ 向外积分方程组（51），同时固定为谱分析所得的特征值。与背景方程的处理类似，我们按照（a， b）将扰动场（a， b）重新缩放 $= r^{\ell+1}$（X_2， X_3），使新场（X_2， X_3）在 $r = 0$ 处正则（见第 IVA小节）。此外，我们引入新的场

$$X_1(r) := \frac{2}{r}\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)^{-1}\left[\sigma_\ell^{(0)} a\right], \tag{D3}$$

其中 $\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)^{-1}$ 表示在 $r = 0$ 和 $r = \infty$处满足齐次狄利克雷条件的二阶导数算子的逆算子。采用这一记号，方程组（51）可写成如下常微分方程一阶系统

$$X_1' = Y_1, \tag{D4a}$$
$$X_2' = Y_2, \tag{D4b}$$
$$X_3' = Y_3, \tag{D4c}$$
$$Y_1' = 2r^\ell X_2 \sigma_\ell^{(0)} - \frac{2Y_1}{r}, \tag{D4d}$$
$$Y_2' = -i\lambda X_3 - X_2 u^{(0)} + \frac{X_1 \sigma_\ell^{(0)}}{r^\ell} - \frac{2(\ell+1)Y_2}{r}, \tag{D4e}$$
$$Y_3' = -i\lambda X_2 - X_3 u^{(0)} - \frac{2(\ell+1)Y_3}{r}, \tag{D4f}$$

其中（$\sigma_\ell^{(0)}$, $u^{(0)}$）为背景场， λ 为与相应线性模态对应的特征值。方程组通过数值方法求解，并满足边界条件

$$X_1(0) = x_1, \quad X_2(0) = x_2, \quad X_3 = x_3, \tag{D5a}$$
$$Y_1(0) = 0, \quad Y_2(0) = 0, \quad Y_3(0) = 0, \tag{D5b}$$

这里的条件 $Y_i(0) = 0$ 来自对场的标准正则性要求，而数值x_i 则由通过谱方法得到的相应场（a, b）计算得出。实际计算中，为避免奇异的 $1/r$ 项，我们在原点之后的第一个网格点处指定数据，并利用式（D3）确定 x_1。

图7 展示了收敛性研究中相同背景构型（n, ℓ） $=$ $(1,$ 1）和特征值$\lambda = 0.00619398 + 0.03340186i$ 对应的结果。图中展示了通过此处所述的龙格-库塔方法计算得到的场（A, B） $= r^\ell(X_2, X_3)$ ，以及通过第IVA小节所述谱计算得到的相同场。尽管龙格-库塔解对 $r = 0$处的数据（即式（ λ 和 x_i 中的值D5）） 十分敏感，但从图中可以看出，至少在半径$r \sim 70$范围内，两种结果是一致的。

[1] M. Alcubierre、J. Barranco、A. Bernal、J. C. Degollado、A. Diez-Tejedor、M. Megevand、D. N´u˜nez 和 O. Sar- bach。 ℓ 35 19 19 01, -玻色子星。 2018 *Class. Quant. Grav.*, () : LT。

[2] D. J. Kaup. 克莱因-戈尔登引力子. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, 1968. [3] R. Ruffini and S. Bonazzola. 广义相对论中的自引力粒子系统与

状态方程的概念. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, 1969. [4] P. Jetzer. 玻色子星. *Phys. Rept.*, 220(4):163–227, 1992. [5] F. E. Schunck and E. W. Mielke. 广义相对论玻色子星. *Class. Quant. Grav.*, 20:R301–R356, 2003. [6] S. L. Liebling and C. Palenzuela. 动力学玻色子星. *Living Rev. Rel.*, 15:6, 2012. [7] L. Visinelli. 玻色子星与振荡子星：综述. *Int.* , ( ): . [8] I. *J. Mod. Phys. D* 30 15 2130006, 2021 Olabarrieta, J. F. Ventrella, M. W. Choptuik, and W. G. Unruh. 球对称性下具有角动量的标量场引力坍缩中的临界行为. *Phys. Rev. D*, 76:124014, 2007. [9] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. N ´u ˜nez, and O. Sar- bach. 半经典引力中的玻色子星及其相关天体. *To appear in Phys. Rev. D, arXiv:2212.02530*, 2023.[10] V. Cardoso and P. Pani. 检验暗致密天体的本质：现状报告. *Living Rev. Rel.*, 22 4, 2019 1( ): .[11] J. Barranco, J. Chagoya, A. Diez-Tejedor, G. Niz, and A. A. Roque. 霍恩德斯基星. *JCAP*, 10:022, 2021. [12] A. A. Roque and L. A. Ure ˜na L ´opez. 霍恩德斯基费米子–玻色子星. *Class. Quant. Grav.*, 39 044001, 2022 4( ): .[13] M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, V. Jaramillo, M. Megevand, D. N ´u ˜nez, and O. Sarbach. 极端 ℓ *Class. Quant.* -玻色子星. , *Grav.* 39 9 094001, 2022 ( ): . [14] N. Sanchis-Gual, F. Di Giovanni, C. Herdeiro, E. Radu, and J. A. Font. 多场多频玻色星及一种稳定机制. *Phys. Rev. Lett.*, 126 24 241105, 2021 ( ): . [15] V. Jaramillo, N. Sanchis-Gual, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, C. Herdeiro, M. Megevand, and D. N ´˜ ℓ *Phys. Rev. D* 105 10 104057, 2022 unez. [16] 玻色子星的正面碰撞. , ( ): . *Phys. Rev. D*M. Gleiser. 玻色子星的稳定性. [, 38 1989 :2376, 1988.]勘误：Phys.Rev.D 39, 1257 ( )[17] . *Nucl. Phys. B*M. Gleiser and R. Watkins. 标量物质的引力稳定性. [18] , 319:733–746, 1989. ´M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degol- lado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. N ˜u ℓnez, and O. Sarbach. 关于*Class. Quant. Grav.*-玻色子星对径向微扰的线性稳定性. [19] , 38 17 174001, 2021 ( ): . *Phys. Rev. D*S. H. Hawley and M. W. Choptuik. 被推至黑洞形成边缘的玻色子星. [20] , 62:104024, 2000. ´M. Alcubierre, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, D. N ˜u ℓnez, and O. Sar- bach. 球对称性下 *Class. Quant. Grav.*-玻色子星的动力学演化. [21] , 36(21):215013, 2019. ´V. Jaramillo, N. Sanchis-Gual, J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, C. Herdeiro, and D. N ˜uℓ nez. *Phys. Rev. D*玻色子星的动力学演化：普遍稳定性及非球对称解的证据. [22] , 101(12):124020, 2020. *Studies in Applied Mathematics* 57 2 93 105, 1977 E. H. Lieb. Choquard 非线性方程极小化解的存在性与唯一性. [23] , ( ): – . ¨ *Modern* D. H. *Physics Letters A* 13 29 2327 2336, 1998 Bernstein, E. Giladi, and K. R. W. Jones. 引力薛定谔方程的本征态. , ( ): – . [24] I. M. Moroz , R. Penrose , 和 P. Tod。球对称的薛定谔-牛顿方程的度量解。*Class. Quant. Grav.*，15:2733–2742，1998。[25] H-Y Schive、T. Chiueh 和 T. Broadhurst。作为相干暗波量子干涉的宇宙结构。 *Nature Phys.*，10:496–499，2014。[26] H-Y Schive、M-H Liao、T-P Woo、S-K Wong、T. Chiueh、T. Broadhurst 和 W. Y. P. Hwang。通过三维模拟理解量子波暗物质的核晕关系。 *Phys. Rev. Lett.*，113(26):261302，2014。[27] D. J. E. Marsh 和 A-R Pop。轴子暗物质、孤子与尖峰-核心问题。 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*，451 3 2479 2492，2015 ( ): – 。[28] A. X. Gonz ´alez-Morales、D. J. E. Marsh、J. Pe ˜narrubia 和 L. A. Ure ˜na L ´opez。来自矮球状星系的超轻轴子质量无偏约束。 *Mon.* , ( ): – 。 *Not. Roy. Astron. Soc.* 472 2 1346 1360, 2017 [29] G. Jean 和 V. Giorgio。关于一类具有非局域相互作用的非线性薛定谔方程。 , : – 。[30] R. Illner、P. F. Zweifel 和 H. Lange。Wigner–Poisson 与薛定谔-泊松方程组解的整体存在性、唯一性及渐近行为。 *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 17 5 349 376, , ( ): – 。1994 [31] T. Cazenave 和 P. L. Lions。某些非线性薛定谔方程驻波的轨道稳定性。, : – 。[32] P. Tod 和 I. M. Moroz。薛定谔-牛顿方程的解析方法。 *Nonlinearity*，12(2):201–216，1999。[33] V. Moroz 和 J. Van Schaftingen。*Journal of Fixed Point Theory and Applications* 19 1 773 813, 2017 , ( ): – 。 [34] O. Kavian 和 S. Mischler。薛定谔-泊松方程组的整体方法：无限多个态情形下的存在性结果。 *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 104 5 942 964, 2015 , ( ): – 。 [35] F. Ch ´avez Nambo。 *Sobre la existencia de estrellas de bosones newtonianas con momento angular en simetría esférica* 。硕士论文，米却肯州圣尼古拉斯·德·伊达尔戈大学，2021。[36] V. Jaramillo。 *Límite de campo débil para el campo escalar autogravitante* 。硕士论文，墨西哥国立自治大学，2019。[37] E. Ch ´avez Nambo。 *Estrellas esféricas newtonianas y relativistas soportadas por un gas politrópico o campos de bosones* 。学士论文，米却肯州圣尼古拉斯·德·伊达尔戈大学，2019。[38] R. Harrison、I. M. Moroz 和 P. Tod。薛定谔-牛顿方程的数值研究。, ( ): – 。[39] F. S. Guzm ´an 和 L. A. Ure ˜na L ´opez。自引力标量场的薛定谔-牛顿方程组演化。 *Phys. Rev. D*，69:124033，2004。[40] A. Bernal 和 F. S. Guzm ´an。标量场暗物质：非球对称坍缩与晚期行为。 *Phys. Rev.* , : 。 *D* 74 063504, 2006 [41] L. A. Ure ˜na L ´opez 和 A. Bernal。作为银河系暗物质晕的玻色气体。 *Phys. Rev. D*，82:123535，2010。[42] F. S. Guzm ´an 和 L. A. Ure ˜na L ´opez。引力原子：构造薛定谔-泊松方程组多态轴对称解的一般框架。 *Phys. Rev. D*，101(8):081302，2020。[43] L. N. Trefethen。 *Spectral Methods in MATLAB*。Engi-

工程师专业系列，工业与应用数学学会，2000。[44] J. P. Boyd。*Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition*。多佛数学丛书。多佛出版社，2013。[45] L. Di´osi。引力与宏观物体的量子力学局域化。*Phys. Lett. A*，105：199–202，1984。[46] K. R. W. Jones。引力自能作为现实性的试金石。*Mod. Phys. Lett. A*，10：657–667，1995。[47] K. R. W. Jones。牛顿量子引力。*Austral.* ，（）：–。*J. Phys.* 48 6 1055 1081, 1995

[48] I. Bialynicki-Birula 和 J. Mycielski。非线性波动力学。*Annals Phys.*，100：62，1976。[49] E. H. Lieb 和 B. Simon。库仑系统的哈特里-福克理论。*Communications in Mathematical Physics* 53 3 185 194, 1977 ，（）：–。

[50] P. Tod。薛定谔-牛顿方程的基态能量。*Phys. Lett. A*，280(4)：173–176，2001。[51] J. Yang。*Nonlinear Waves in Integrable and Non-Integrable Systems*. 工业与应用数学学会，美国，2010年。[52] B. Simon。《斯图姆振荡与比较定理》。载于 D.P. Pearson、W.O. Amrein、A.M. Hinz 编，*Sturm-Liouville Theory* ¨ 2005 。Birkhauser，巴塞尔，。[53] P. Virtanen、R. Gommers 等。《SciPy 1.0：Python 科学计算的基础算法》。*Nature Methods*，17：261–272，2020年。[54] J. R. Dormand 和 P.J. Prince。一类嵌入式龙格－库塔公式。*Journal of Computational and Applied Mathematics* 6 1 19 26, 1980 ，（）：–。[55] F. S. Lawrence。一些实用的龙格－库塔公式。*Mathematics of Computation*，46：135–150，1986年。[56] 代码仓库。Github.com/Mandy8808/Implementation.git，2023年。[57] W. Heisenberg。*Theory of The Physical Principles of Quantum* 1930 。芝加哥大学出版社，。[58] E. Noether。《不变变分问题》。*Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1918 235 257, 1918 ，：–。