arXiv:2302.00729v1 [math.CT] 1 Feb 2023

双置换指标范畴的格罗滕迪克构造与伪对称逆K理论

Donald Yau

电子邮箱地址：yau.22@osu.edu

数学系，俄亥俄州立大学纽瓦克分校，美国俄亥俄州纽瓦克市大学大道1179号，邮编43055

摘要。格罗滕迪克构造是指标范畴与余纤维化之间的基本联系。本文在 Cat-富集多范畴的背景下，详细研究了在小紧双置换范畴上的格罗滕迪克构造，并将其应用于逆K理论和伪对称E_∞-代数。

小范畴 C 上的通常格罗滕迪克构造是一种 2-等价，它将 C-指标范畴映到 C 上的余纤维化。我们证明，小紧双置换范畴 D 上的格罗滕迪克构造是一个伪对称 Cat-多函子，但通常并非对称意义下的 Cat-多函子。将到 D 的投影纳入考量后，我们证明，D 上的格罗滕迪克构造提升为一个非对称 Cat-多重等价，其陪域是一个非对称 Cat-多范畴，其中对象为 D 上的小置换余纤维化。

作为应用，我们证明，逆K理论（从 Γ-范畴到小置换范畴）是一个伪对称 Cat-多函子，但不是对称意义下的 Cat-多函子。因此，逆K理论保留由非对称和伪对称 Cat-多函子参数化的代数结构，但一般不保留 Cat-多函子参数化的代数结构。作为一个特例，我们注意到，逆K理论将 Γ-范畴中的伪对称E_∞-代数映到小置换范畴中的伪对称E_∞-代数。

献给 Jacqueline

目录

前言 vii 目的与主要成果 vii 各章概要 xi 读者 xiv

第1部分。 双置换范畴、富化多重范畴与伪对称性 1

第 1 章 富集范畴与 2-范畴预备知识 3 1.1. 幺半范畴 4 1.2. 富集范畴 9 1.3. 2-范畴 11 1.4. Day 卷积 16

第 2 章. 对称双幺半范畴与双置换范畴 23 2.1. 对称双幺半范畴 24 2.2. 双置换范畴 28 2.3. 双对称幺半范畴的例子 32 2.4. Laplaza 的相干定理 40

第 3 章. 富集多范畴与多重等价 45 3.1. 富集多范畴 46 3.2. 富化多元范畴的 2-范畴 49 3.3. 范畴富化多元等价 55 3.4. Cat- 多重等价的刻画 57

第 4 章. 伪对称性 67 4.1. 伪对称 Cat-多函子 68 4.2. 伪对称 Cat-多自然变换 73 4.3. 伪对称 Cat-多重等价 79

第 2 部分：从双置换指标范畴到置换余纤维化的 Grothendieck 多重等价 87

第5章 指标范畴的富化多重范畴 89 5.1. 置换索引范畴的富化多范畴 91 5.2. 加性自然变换与修正 97 5.3. 双置换指标范畴的富化多重范畴 104

第6章 格罗滕迪克构造是一个伪对称 Cat-多函子 111

6.1. 置换范畴的富化多范畴 113 6.2. 加性对称幺半函子的格罗滕迪克构造 120 6.3. 加性自然变换的格罗滕迪克构造 123 6.4. 加性修正的格罗滕迪克构造 129 6.5. 格罗滕迪克构造保持单位与复合 133 6.6. 格罗滕迪克构造的伪对称同构 136 6.7. 伪对称 Cat-多函子性 142

第 7 章. 从双置换指标范畴得到的置换余纤维化 149 7.1. 置换余纤维化 151 7.2. 上笛卡尔多重线性函子与变换 155 7.3. 可交换上纤维化的多范畴 162 7.4. 通过格罗滕迪克构造得到的置换余纤维化 170 第8章. 格罗滕迪克构造是 Cat-多重等价 177 8.1. 对象上的本质满射性 178 8.2. 多态射范畴上的忠实性 186 8.3. 多态射范畴上的对象满性 188 8.4. 态射满性与主定理 195

第3部分. 伪对称富化多函子逆*K*理论 203

第9章 Cat-多重函子 A 205 9.1. Γ-范畴的对称幺半范畴 206 9.2. Γ-范畴的 Cat-多范畴 213 9.3. 函子 A 218 9.4. A 的多态射函子 222 9.5. A 的 Cat-多函子性 228 第10章 逆*K*理论是一个伪对称 Cat-多函子 233 10.1. 逆*K*理论函子 234 10.2. 伪对称 Cat-多函子性的逆*K*理论 238 10.3. 剖析伪对称 Cat-多函子性的逆*K*理论 241 10.4. Barratt-Eccles歌剧与E_∞-代数 246 10.5. 逆*K*理论保持伪对称E_∞-代数 251**参考文献与索引** 261 附录 A. 开放问题 263 参考文献 267 主要事实列表 269 符号列表 275 索引 281

前言

> “这是我听过的最差劲的笑话。”– 亚历山大·格罗滕迪克，布法罗的拓扑斯理论讲座，*1973*年*7*月*12*日

格罗滕迪克构造是指标范畴与余纤维化之间的基本联系。令 Cat 表示小范畴范畴，对于每个小范畴 C，格罗滕迪克构造将每个伪函子 $F : \mathsf{C}\ \mathsf{Cat}$ 关联到一个范畴 $\int_{\mathsf{C}} F$ 以及一个在 C 上的余纤维化：

$$\int_{\mathsf{C}} F \xrightarrow{U_F} \mathsf{C}.$$

将此构造扩展到强变换和修正后，它给出了 2-范畴之间的一个 2-等价 [**JY21**，10.6。16]

$$[\mathsf{C}, \mathsf{Cat}] \xrightarrow[\sim]{\int_{\mathsf{C}}} \mathsf{Fib}^{\mathsf{op}}(\mathsf{C}). \tag{0.0.1}$$

文献中有许多格罗滕迪克构造的变体和扩展。例如， **[BW19]** 给出了一个富集版本， **[MV20]** 给出了一个单体版本， **[Shu08]** 给出了涉及双范畴的版本，而 **[Her04]** 则考虑了 F 为多函子的情形。

目的与主要结果

本文在 Cat-富集多范畴的背景下，详细研究双幺半范畴 $(\mathsf{D}, \oplus, \otimes)$ 上的格罗滕迪克构造，并将其应用于逆 K-理论和伪对称 E_∞-代数。接下来我们将介绍本文的主要结果。

Cat-多重等价的刻画。证明 (0.0.1) 中 2-等价 $\int_{\mathsf{C}}$ 的一个关键要素，是将 2-等价刻画为满足以下条件的 2-函子：

- 本质满对象，并且
- 在每个同态范畴上都是同构。

详细证明见 **[JY21, 7.5.8]**。正如多范畴是范畴的多输入扩展，Cat-多范畴也是 2-范畴的多输入推广。从这个角度看，我们的第一个主要结果将 2-等价的刻画推广到 Cat-多重等价；它们是小 Cat-多范畴、Cat-多函子和 Cat-多自然变换构成的 2-范畴 Cat-Multicat 中的等价。多重等价定理 3.4.21 指出，Cat-多函子是 Cat-多重等价，当且仅当它

- 本质满对象且
- 在每个多态射范畴上都是同构。

没有对称群作用的非对称变体也成立。此外，将范围限制在一元多态射上，即可由此结果恢复对 2-等价的刻画；参见定理 3.4.22。

伪对称 Cat-多函子。我们引入一种较弱的 Cat-多函子变体，称为伪对称Cat-多函子，它在相容自然同构的意义下保持对称群作用

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}(\langle c\rangle; c') & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle; Fc') \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \overset{F_\sigma}{\underset{\cong}{\Longrightarrow}} & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathsf{M}(\langle c\rangle\sigma; c') & \xrightarrow[F]{} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle\sigma; Fc') \end{array} \tag{0.0.2}$$

称为伪对称同构 (4.1.2)。正如我们将很快讨论的，伪对称 Cat-多函子在双置换范畴上的格罗滕迪克构造以及逆K-理论的语境中十分重要。借助适当的伪对称Cat-多自然变换概念，我们在定理 4.2.16 中证明，存在一个 2-范畴 Cat-Multicat^{ps}，其具有

- 小 Cat-多范畴作为对象集，
- 伪对称 Cat-多函子作为 1-胞，以及
- 伪对称 Cat-多自然变换作为 2-胞。

在此背景下，我们将定理 3.4.21 扩展为对伪对称 Cat-多重等价的刻画；参见定理 4.3.28。

Cat-双置换指标范畴的多范畴。双置换范畴 $(\mathsf{D}, \oplus, \otimes)$ 配备了两个置换的——即严格对称幺半——结构 $\oplus$ 和 $\otimes$，它们通过分解自然变换相互作用

$$\begin{aligned} (A \otimes C) \oplus (B \otimes C) &\xrightarrow{\partial^l_{A,B,C}} (A \oplus B) \otimes C \\ (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) &\xrightarrow{\partial^r_{A,B,C}} A \otimes (B \oplus C) \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

并满足适当的公理（定义 2.2.12）。双置换范畴自然出现在乘法无穷环空间理论和代数 K-理论谱中；参见 **[EM06]** 以及 **[JY∞a**，第 11]章。在本文中，双置换范畴大多是小且紧的，这意味着 **(0.0.3)** 中的 ∂^l 和 ∂^r 是自然同构。

在原始的格罗滕迪克构造中，若 (0.0.1) 里的 C 是一个小范畴，则定义域 $[\mathsf{C}, \mathsf{Cat}]$ 是一个 2-范畴。对于一个小紧双置换范畴 $(\mathsf{D}, \oplus, \otimes)$，我们在定理 5.3.11 中证明，存在一个 Cat-多范畴

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}$$

带有对称幺半函子

$$(\mathcal{D}, \oplus) \longrightarrow (\mathsf{Cat}, \times)$$

作为对象。DCat 的多态射范畴（定义 5.2.12 和 5.2.25）充分利用了 D 的双置换结构。我们强调，DCat 上的 Cat-多范畴结构并非由幺半结构诱导而来（解释 5.3.4）。

伪对称 Cat-多函子格罗滕迪克构造。我们在定理 6.7.8 中证明，关于小紧双置换范畴 $(\mathsf{D}, \oplus, \otimes)$ 的格罗滕迪克构造是一个伪对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}. \tag{0.0.4}$$

陪域 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 是一个 Cat-多范畴，其对象为小置换范畴（定理 6.1.31）。此外，如果 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，那么 $\int_{\mathcal{D}}$是一个 Cat-多函子，这意味着它严格保持对称群作用。较弱的逆命题成立。如果 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子，那么

$$x \otimes y = y \otimes x$$

对于所有对象 x、$y \in \mathsf{D}$。该定理的一个重要推论是，逆K-理论是一个伪对称 Cat-多函子，但不是 对称意义下的 Cat-多函子。

由格罗滕迪克构造得到的置换余纤维化。对于一个对称幺半函子

$$(\mathcal{D}, \oplus) \xrightarrow{X} (\mathsf{Cat}, \times),$$

$\int_{\mathcal{D}}$ 在 (0.0.4) 中的对象赋值产生了一个小置换范畴 $\int_{\mathcal{D}} X$。另一方面，(0.0.1) 中的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathsf{C}}$不仅产生范畴 $\int_{\mathsf{C}} F$，还产生了 C 上的一个余纤维化 $\int_{\mathsf{C}} F \, \mathsf{C}$。为了考虑投影

$$\int_{\mathcal{D}} X \longrightarrow \mathcal{D}$$

到 D，在定理 7.3.16 中，我们证明存在一个非对称 Cat-多范畴 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$，其对象是 D 上的小置换余纤维化。与 DCat 类似，$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对象只涉及加法结构 $(\mathsf{D}, \oplus)$，但 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的多态射范畴充分利用了 D 的双置换结构。另一方面，与 DCat 不同，非对称 Cat-多范畴 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 很少是对称意义下的 Cat-多范畴（引理 7.3.9 和 7.3.13）。

为将 (0.0.1) 中的 2-等价 $\int_{\mathsf{C}}$ 扩展到双置换语境，首先我们构造一个非对称 Cat-多函子 (7.3.18)

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\mathsf{U}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

它遗忘了到 D 的投影。在定理 7.4.9 中，我们证明 (0.0.4) 中的 $\int_{\mathcal{D}}$ 可提升为一个非对称 Cat-多函子，映到如下交换图表中的 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$。

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\int_{\mathcal{D}}}{\nearrow} & \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}} \\ & & \downarrow \mathsf{U} \\ \mathcal{D}\mathsf{Cat} & \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \end{array} \tag{0.0.5}$$

利用刻画定理 3.4.21，我们在定理 8.4.17 中证明，提升后的格罗滕迪克构造

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow[\sim]{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}} \tag{0.0.6}$$

是一个非对称 Cat-多重等价。以下是概要表。

	结构	ref
$\mathcal{D}$	小紧双置换范畴	2.2.12
$\mathcal{D}\mathsf{Cat}$	Cat-多范畴	5.3.11
$\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$	Cat-多范畴	6.1.31
$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$	非对称 Cat-多范畴	7.3.16
$\int_{\mathcal{D}}\colon \mathrm{DCat} \longrightarrow \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$	伪对称 Cat-多函子	6.7.8
$\mathrm{U}\colon \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$	非对称 Cat-多函子	7.3.17
$\int_{\mathcal{D}}\colon \mathrm{DCat} \xrightarrow{\sim} \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$	非对称 Cat-多重等价	8.4.17

伪对称 Cat-多函子逆 K-理论。 上述定理在逆K理论中具有重要影响。在 [**Man10**] Mandell 构造了一个函子

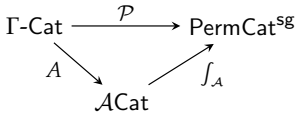
$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}, \tag{0.0.7}$$

从 Γ-范畴到小置换范畴的范畴，并证明了 P 是 Segal K-理论的同伦逆。 **[JY22b]**证明，逆K-理论函子 P 是一个非对称 Cat-多函子。我们强调，P不是 对称意义下的 Cat-多函子，因为它不能严格保留对称群作用。

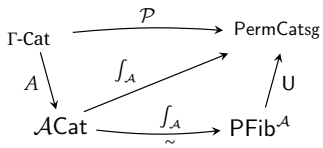
根据构造，P 是两个函子的复合 $\int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 。我们在定理 9.5.9 中证明，第一个函子A 扩张为一个 Cat-多函子

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{A} \mathcal{A}\mathsf{Cat}. \tag{0.0.8}$$

陪域 ACat 是上文针对例 2.3.17 中的小型紧双置换范畴 A 讨论的 Cat-多范畴 DCat。此外，由 (0.0.4)，格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{A}}$是一个伪对称 Cat-多函子。因此，逆K-理论 P

(0.0.9)


是一个伪对称 Cat-多函子，但不是Cat-多函子；参见定理 10.2.1。结合 (0.0.5)、(0.0.6) 和 (0.0.9)，可得到 P 的进一步分解

(0.0.10)


into

(i) 一个 Cat-多函子 A，(ii) 一个非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{A}}$，以及 (iii) 一个非对称 Cat-多函子 U。

以下是概要表。

	结构	ref
$\mathcal{A}$	小紧双置换范畴	2.3.17
$\mathcal{A}$Cat	Cat-多范畴	5.3.14
PFib$^{\mathcal{A}}$	非对称 Cat-多范畴	7.3.20
Γ-Cat	Cat-多范畴	9.1.23
$\int_{\mathcal{A}}$: ACat $\longrightarrow$ PermCatsg	伪对称 Cat-多函子	6.7.12
U : PFib$^{\mathcal{A}}$ $\longrightarrow$ PermCatsg	非对称 Cat-多函子	7.3.20
$\int_{\mathcal{A}}$: ACat $\xrightarrow{\sim}$ PFib$^{\mathcal{A}}$	非对称 Cat-多重等价	8.4.18
一个 : Γ-Cat $\longrightarrow$ $\mathcal{A}$Cat	Cat-多函子	9.5.9
P : Γ-Cat $\longrightarrow$ PermCatsg	伪对称 Cat-多函子	10.2.1

应用：伪对称代数的保留。 由于逆K-理论 P 不是 Cat-多函子，因此一般而言，它不会保留由 Cat-多函子参数化的代数结构。然而，P 的伪对称 Cat-多函子性（0.0.9）意味着它会保留由

- 非对称 Cat-多函子（推论 10.2.4）和
- 伪对称 Cat-多函子（推论 10.2.8）。

作为后者的一个特例，我们注意到，P 保持伪对称 E_∞-代数 （推论 10.5.2）；它们是从范畴 Barratt-Eccles 旋子 $E\Sigma_*$ 出发的伪对称 Cat-多函子。 Γ-Cat 和 PermCat$_{sg}$ 中的伪对称 E_∞-代数在第 10.5 节中有明确描述。

章节摘要

本著作由以下三个部分组成。

- 第 1 部分：双置换范畴、富化多重范畴与伪对称性
- 第 2 部分：从双置换指标范畴到置换余纤维的 Grothendieck 多重等价
- 第 3 部分：伪对称富化多函子逆K理论

以下简要概述各章内容。在正文中，每章开篇都会有一段导言，更详尽地介绍该章内容及其与其他章节的联系。

第 1 章：富化范畴与二范畴预备知识

为将预备知识降至最低，本预备章回顾与幺半范畴、富集范畴和2-范畴相关的基本概念。当定义域范畴 D 和陪域范畴 V 具有相关结构时，我们回顾图表范畴 D-V 上的对称幺半闭结构。由于 V = Cat 的特例在后续各章中十分重要，本文将对此作进一步说明。本章材料的更详细讨论见于**[JY21,JY∞a, Yau∞I]**。

第2章：对称双幺半范畴与双置换范畴

本章有两个主要目的。首先，我们回顾密切相关的概念：对称双幺半范畴和双置换范畴。我们讨论若干重要的小型紧双置换范畴实例，包括分别用于 Γ-范畴和逆K理论的指标范畴 F 和 A。

本章的第二个目的是回顾针对对称双幺半范畴的 Laplaza 相干定理 2.4.18。紧双置换范畴具有可逆的因子分解态射（0.0.3），是紧对称双幺半范畴的特例。因此，定理 2.4.18 也适用于紧双置换范畴。本章材料的更详细讨论见 **[Yau∞I，Yau∞II]**。

第 3 章：富化多重范畴与多重等价

本章讨论富化多范畴，并包含本文的第一个主定理。首先，我们回顾对称幺半范畴 V 上小 V-多范畴、V-多函子和 V-多自然变换所构成的 2-范畴 V-Multicat。本文最相关的情形是 V = Cat。关于富化多范畴的更详细讨论见 **[JY21，JY∞a，Yau16]**。本章后半部分致力于证明定理 3.4.21，该定理局部刻画了（伴随）Cat-多重等价。由此定理，我们还可以得到 2-等价的类似局部刻画（定理 3.4.22）。

第 4 章：伪对称性

本章引入了伪对称Cat-多函子的概念。它们在相容自然同构（0.0.2）的意义下保持对称群作用，而这些同构满足四条相干公理。它们必须严格保持带颜色的单位和复合。在后续章节中，我们将展示

- 格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$，适用于每个小紧双置换范畴 D，以及
- 逆 K-理论 P

都是伪对称 Cat-多函子。说明 4.2.17 和问题 A.0.1 讨论了 Cat-多函子的其他弱化变体。定理 4.2.16 证明了 2-范畴 Cat-Multicat^{ps} 的存在，其对象为小 Cat-多范畴，1-胞为伪对称 Cat-多函子，2-胞为伪对称 Cat-多自然变换。定理 4.3.28 给出了 2-范畴 Cat-Multicat^{ps} 中（伴随）等价的局部刻画。至此，第1部分结束。

第5章：指标范畴的富化多重范畴

第 2 部分讨论小紧双置换范畴 D 上的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$。在第5.1节中，我们首先详细讨论 Cat-多范畴 D-Cat（也记作 $D^{\otimes}$-Cat）；对于小置换范畴 $(D,\otimes)$，它由 D-指标范畴构成。本章其余部分讨论另一个 Cat-多范畴 DCat，它是小紧双置换范畴 $(D,\oplus,\otimes)$ 上 $\int_{\mathcal{D}}$ 的定义域。DCat 的对象是对称幺半函子 $(D,\oplus)$ Cat，而不只是 D- 指标范畴。此外，DCat 的多态射范畴充分体现了 D 的双置换结构以及 Laplaza 相干定理 2.4.18。此外，$D^{\otimes}$-Cat 上的 Cat-多范畴结构由其对称幺半闭结构诱导，而一般而言，DCat 上的 Cat-多范畴结构并非由某种幺半结构诱导（说明 5.3.4）。

第 6 章：格罗滕迪克构造是一个伪对称 Cat-多函子

第 6.1 节讨论 Cat-多范畴 PermCat 及其强变体 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$。当不考虑到 D 的投影时，它是 $\int_{\mathcal{D}}$ 的陪域。Cat-多范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 也是逆K理论的陪域。在 PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中，对象都是小的置换范畴，而n元 2-胞是n线性自然变换。PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的n元 1-胞分别是n线性函子及其强变体。本章其余部分将用于证明定理 6.7.8；该定理证明 (0.0.4) 中的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 是第 4 章意义下的伪对称 Cat-多函子。此外，如果 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等变换，那么它还是一个 Cat-多函子。反过来，如果 $\int_{\mathcal{D}}$ 是 Cat-多函子，那么对于 D 中所有对象 x、$y \in$，都有$x \otimes y = y \otimes x$。

第 7 章：由双置换指标范畴得到的置换余纤维化

本章研究小紧双置换范畴 D 上的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$，并将投影到 D 的映射纳入考量。定理 7.3.16 证明了非对称 Cat-多范畴 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$的存在，其对象为 D 上的小置换余纤维化。其多态射范畴更为微妙，涉及 D 上的双置换结构以及 Laplaza 相干定理 2.4.18。$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 通常不具对称性，这同样与 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 有关，详见引理 7.3.9 和 7.3.13。本章的第二个主要结果是定理 7.4.9，它将伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{D}}$提升为一个以 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 为陪域的非对称 Cat-多函子，如式 (0.0.5) 所示。

第8章：格罗滕迪克构造是 Cat-多重等价

本章的主要结果是定理 8.4.17，该定理证明了 (0.0.6) 中的提升格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$in 是一个非对称 Cat-多重等价。该证明使用了定理 3.4.21 中（伴随）等价的局部刻画。换言之，我们不显式构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 的伴随逆，而是证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 满足：(i) 在对象上本质满；(ii) 在每个多态射范畴上都是同构。至此，第 2 部分结束。

第9章：Cat-多函子 A

第3部分讨论

- 逆 K-理论P 的伪对称 Cat-多函子性，以及
- 它在保持伪对称代数结构意义下的延伸。

逆K理论 $\mathrm{P} = \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 涉及两种构造：

- (0.0.8) 中的A，以及
- 例 2.3.17 中小紧双置换范畴 A 的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{A}}$。

本章讨论第一种构造A。关于 P 和A的定义域，第9.1节和第9.2节讨论 Γ-Cat（Γ-范畴的范畴）这一对称幺半闭范畴及其 Cat-多范畴结构。然后我们讨论A 的底层函子及其向 Cat-多函子的扩张。

第10章：逆K理论是一个伪对称 Cat-多函子

本章包含关于逆K理论的主定理 10.2.1。它构造

● 如 (0.0.9) 中所示的伪对称 Cat-多函子性的逆K理论 $\mathrm{P}^{=}\int_{\mathcal{A}}\bigcirc A$ 以及

• 对 $\mathcal{P}$ 作进一步分解，如 (0.0.10) 所示，其中涉及非对称Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\mathrm{Cat}\tilde{}\ \mathrm{PFib}_{\mathcal{A}}$。

在第 10.3 节中，我们彻底展开了 P 的伪对称 Cat-多函子结构。本节后半部分，我们讨论文献中关于 P 的多函子性的相关工作 [**Elm∞, JY22b**] 。为展示定理 10.2.1 的用途，本章余下部分将讨论 P 保持伪对称 E_∞-代数这一事实。作为准备，我们在第 10.4 节讨论范畴论 Barratt-Eccles 歌剧 $E\Sigma_*$、其相容性定理 10.4.5，以及 Γ-Cat 中的 E_∞-代数。在第 10.5 节中，我们将伪对称 E_∞-代数 定义为来自 $E\Sigma_*$ 的伪对称 Cat-多函子。逆 K-理论将 Γ-Cat 中的伪对称E_∞-代数映到 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的相应代数（推论 10.5.2）。随后，我们在 Γ-Cat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中彻底展开这些结构。至此，第3部分结束。

附录 A：开放问题

本附录讨论若干与本文主题相关的开放问题。这些问题进一步说明了正文内容的意义。

受众

本文面向对范畴论、代数 K 理论和同伦论感兴趣的研究生和研究人员。我们精细详尽的阐述旨在让广大读者都能读懂本文。

相关文献。以下参考文献提供背景知识和进一步的讨论。二维范畴： [JY**21**] 幺半范畴和富化多范畴： [JY∞a, Yau**16**]双幺半范畴和双置换范畴： [Yau∞I, Yau∞II]格罗滕迪克构造： [BW19, Her04, JY21, MV20, Shu**08**]代数 K 理论谱： [BO20, JY∞a, JY∞b, JY22a, JY22c, BF78, May78, Qui73, Seg74, Tho95, Wal**85**]多函子 K 理论： [EM06, EM09, JY∞a]逆 K-理论： [GJO17, Man10, JY22b]

第1部分

双置换范畴、富化多重范畴与伪对称性

第 1 章

富化范畴与二范畴预备知识

为后续章节做准备，本章将回顾一些关于以下内容的相关定义和定理

- 幺半范畴（第 1.1 节），
- 富集范畴（第 1.2 节），
- 二范畴（第 1.3 节），以及
- 对称幺半范畴之间的函子的 Day 卷积（第 1.4 节）。

下面给出本章部分定义和结果的概要表。

幺半范畴（编织、对称、闭）	定义 1.1.3（1.1.8、1.1.11、1.1.14）
图表范畴	定义 1.1.15
幺半函子和自然变换	定义 1.1.17 和 1.1.21
富集范畴、函子和自然变换	定义 1.2.1、1.2.4 和 1.2.6
富化范畴的张量积	定义 1.2.7
2-范畴、2-函子和 2-自然变换	定义 1.3.1、1.3.5 和 1.3.6
修正	定义 1.3.10
2-范畴中的伴随等价	定义 1.3.15
2-等价	定义 1.3.18
Day 卷积	定义 1.4.1
对称幺半闭图表范畴	定理 1.4.14 和 1.4.16
置换索引范畴	说明 1.4.17

关于富集范畴和 Day 卷积的详细讨论见 **[JY∞a]**。本书所需的二维范畴论概念，包括粘贴图，均在 **[JY21]** 中作了详细讨论。

与后续各章的联系。 第 1.1 节中的对称幺半范畴概念是本书的核心内容。我们的主要目标之一是研究从 $\mathcal{D}\mathsf{Cat}$ 出发的格罗滕迪克构造，其对象为加性对称幺半函子 $\mathcal{D}^{\oplus}\ \mathsf{Cat}$，其中 $(\mathcal{D},\ \oplus,\ \otimes)$ 是一个小紧双置换范畴（定义 2.2.12）。在双置换范畴中，每个 $\oplus$ 和 $\otimes$都是一种置换结构，即严格对称幺半结构。定理 6.7.8 和 7.4.9 中格罗滕迪克构造的陪域也涉及小置换范畴。逆 K理论（定理 10.2.1）的陪域则以小置换范畴为对象。

从第 3 章起，我们将讨论富集多重范畴，尤其是 Cat-多范畴，即在带有笛卡尔积的小范畴的对称幺半范畴 $(\mathbf{Cat}, \times, \mathbf{1})$ 中富集的多范畴。第 1.2 节

以及关于富集范畴和 2-范畴的第 1.3 节，旨在为富集多重范畴及其构成的 2-范畴提供动机。2-范畴的语言也为定义 Cat-多范畴之间的（伴随）Cat-多重等价提供了方便的框架（定义 3.3.1）。本文的一项主要发现是，双置换指标范畴上的格罗滕迪克构造是一种非对称 Cat-多重等价（定理 8.4.17）。

第 1.4 节中的 Day 卷积为 D-指标范畴赋予了对称幺半结构，进而也赋予了 Cat-多范畴结构（定理 5.1.1）。反过来，这使我们能够定义 Cat-多范畴 DCat（定义 5.3.1）。然而，由于一般情况下可能不存在幺半单位，DCat 并非由对称幺半结构诱导（说明 5.3.4）。

1.1. 幺半范畴

本节回顾幺半范畴、幺半函子和幺半自然变换的定义。关于幺半范畴的进一步讨论，请参阅 **[JS93, ML98, JY∞a, Yau∞I, Yau∞II]**。

定义 1.1.1。 格罗滕迪克宇宙是一个集合 U，满足以下性质。

(1) 若 $x \in \mathrm{U}$ 且 $y \in x$，则 $y \in \mathrm{U}$。(2) 若 $x \in \mathrm{U}$，则 $\mathrm{P}(x) \in \mathrm{U}$，其中 $\mathrm{P}(x)$ 是 x 的子集所构成的集合。(3) 若 $J \in \mathrm{U}$，且对每个 $j \in J$，都有 $x_j \in \mathrm{U}$，则并集 $\bigcup_{j\in J} x_j \in \mathrm{U}$。(4) $\mathbb{N} \in \mathrm{U}$，其中 $\mathbb{N}$ 是有限序数构成的集合。

约定 1.1.2（格罗滕迪克宇宙）。我们采用格罗滕迪克的宇宙公理：每个集合都属于某个宇宙。固定一个宇宙 U，并称 U 中的元素为集合。U 的子集称为类。若某个范畴结构的对象集是一个集合，则称该结构为小。必要时，我们默认将 U 替换为一个更大的宇宙 U'，使得 U 是其中的一个集合。有关宇宙的更多讨论，参见 **[JY21**，第 1 节；1], **[ML98**，I.6], 以及 **[AGV72, ML69]**。

定义 1.1.3. 一个幺半范畴是一个六元组

$$(\mathsf{C}, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho)$$

由以下数据和公理组成。

- C 是一个范畴。
- $\otimes : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 是一个函子，称为幺半积。
- $1 \in \mathsf{C}$ 是一个对象，称为幺半单位。
- α、λ 和 ρ 是自然同构

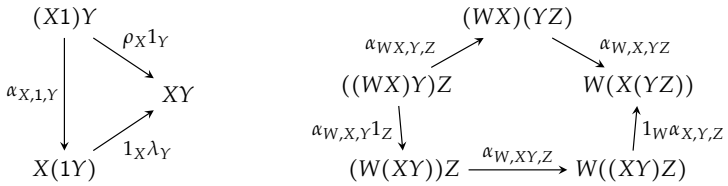
$$(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow[\cong]{\alpha_{X,Y,Z}} X \otimes (Y \otimes Z)$$

$$1 \otimes X \xrightarrow[\cong]{\lambda_X} X \xleftarrow[\cong]{\rho_X} X \otimes 1$$

对于对象 X、Y、$Z \in \mathsf{C}$。它们分别称为结合律同构、左单位同构和右单位同构。

对于对象W、X、Y、$Z \in \mathsf{C}$，要求以下中间单位性图和五边形图可交换，其中所有 $\otimes$ 符号均为节省空间而省略。

(1.1.4)



至此，幺半范畴的定义便完成了。此外，我们定义如下概念。

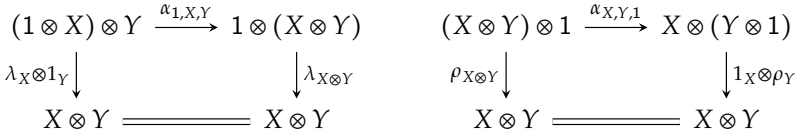
- 若 α、λ 和 ρ 是恒等自然变换，则称幺半范畴为**严格** 幺半范畴。
- （幺半）范畴也称为（幺半）*1*-范畴。

在每个幺半范畴中，以下态射等式成立：

$$\lambda_1 = \rho_1 : 1 \otimes 1 \longrightarrow 1. \tag{1.1.5}$$

此外，以下左、右单位图表交换 **[Kel74]**。

(1.1.6)

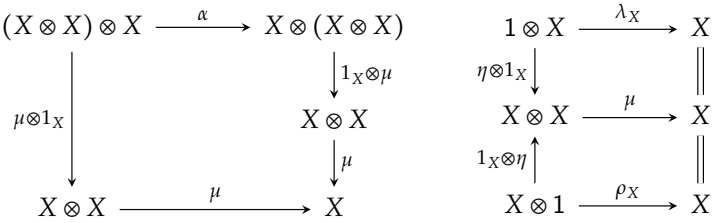


这些单位性质在更一般的双范畴语境中的证明见**[JY21**，第 2 节2]。

定义 1.1.7. 幺半范畴 C 中的一个**幺半群** 是一个三元组（X，μ，η），由以下数据和公理组成。

- $X \in \mathsf{C}$ 是一个对象。
- $\mu : X \otimes X \to X$ 是一个态射，称为**乘法**。
- $\eta : 1 \to X$ 是一个态射，称为**单位**。

以下结合律图表和单位图表必须满足交换性。



一个幺半群的态射

$$(X, \mu^X, \eta^X) \xrightarrow{f} (Y, \mu^Y, \eta^Y)$$

是一个态射$f : X Y$ 属于 C 使得以下图表

$$\begin{array}{ccc} X\otimes X & \xrightarrow{f\otimes f} & Y\otimes Y \\ {\scriptstyle \mu^X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu^Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\eta^X} & X \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ 1 & \xrightarrow{\eta^Y} & Y \end{array}$$

可交换。

定义 1.1.8。 一个辫编织幺半范畴 是一对 (C,ξ)，由以下数据和公理组成。

- $\mathsf{C} = (\mathsf{C},\otimes,1,\alpha,\lambda,\rho)$ 是一个幺半范畴。
- ξ 是一个自然同构

$$X\otimes Y \xrightarrow[\cong]{\xi_{X,Y}} Y\otimes X$$

对于X、$Y \in \mathsf{C}$，这称为编织。

六边形图表

(1.1.9)

$$\begin{array}{ccccc} (Y\otimes X)\otimes Z & \xrightarrow{\alpha} & Y\otimes(X\otimes Z) & & X\otimes(Z\otimes Y) & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & (X\otimes Z)\otimes Y \\ {\scriptstyle \xi^{\otimes}_{X,Y}\otimes 1_Z}\uparrow & & \searrow{\scriptstyle 1_Y\otimes\xi^{\otimes}_{X,Z}} & & {\scriptstyle 1_X\otimes\xi^{\otimes}_{Y,Z}}\uparrow & & \searrow{\scriptstyle \xi^{\otimes}_{X,Z}\otimes 1_Y} \\ (X\otimes Y)\otimes Z & & Y\otimes(Z\otimes X) & & X\otimes(Y\otimes Z) & & (Z\otimes X)\otimes Y \\ {\scriptstyle \alpha}\searrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} & & {\scriptstyle \alpha^{-1}}\searrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha^{-1}} \\ X\otimes(Y\otimes Z) & \xrightarrow{\xi^{\otimes}_{X,Y\otimes Z}} & (Y\otimes Z)\otimes X & & (X\otimes Y)\otimes Z & \xrightarrow{\xi_{X\otimes Y,Z}} & Z\otimes(X\otimes Y) \end{array}$$

对于对象X、Y、$Z \in \mathsf{C}$，要求这些图表可交换。

在辫编织幺半范畴中，对每个对象X，下列两个单位图表均可交换；证明见 [**Yau∞II**，1.3。21]

(1.1.10)

$$\begin{array}{ccc} X\otimes 1 & \xrightarrow{\xi_{X,1}} & 1\otimes X \\ {\scriptstyle \rho_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_X} \\ X & = & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1\otimes X & \xrightarrow{\xi_{1,X}} & X\otimes 1 \\ {\scriptstyle \lambda_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_X} \\ X & = & X \end{array}$$

定义 1.1.11. 对称幺半范畴 是一个由以下数据和公理构成的对 (C,ξ)。

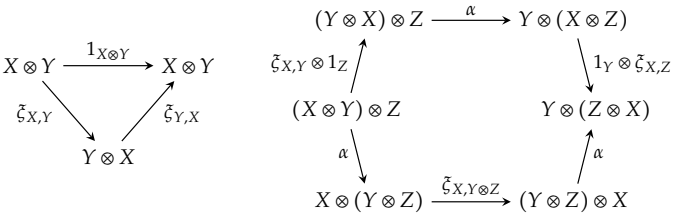
- $\mathsf{C} = (\mathsf{C},\otimes,1,\alpha,\lambda,\rho)$ 是一个幺半范畴。
- ξ 是一个自然同构

$$X\otimes Y \xrightarrow[\cong]{\xi_{X,Y}} Y\otimes X$$

对于X、$Y \in \mathsf{C}$，称其为对称同构 或编织。

对于X、Y、$Z \in \mathsf{C}$，以下对称性图表和六边形图表必须可交换。

(1.1.12)



置换范畴是严格对称幺半范畴。对于置换范畴，我们有时用 $\oplus$ 表示其幺半积，用 e 表示其幺半单位。

注 1.1.13. 对称公理 $\xi_{Y,X}\xi_{X,Y} = 1$ 意味着左、右六边形 (1.1.9) 等价。因此，对称幺半范畴恰好是满足对称公理的辫编织幺半范畴。由此可知，在每个对称幺半范畴中，单位图表 (1.1.10) 都可交换。

定义 1.1.14. 若对每个对象 $X \in \mathsf{C}$，函子 $- \otimes X : \mathsf{C}\ \mathsf{C}$ 都存在一个右伴随，且该右伴随称为内 Hom，则称对称幺半范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, 1, \xi)$ 是闭 的。$- \otimes X$ 的右伴随记作 $\mathrm{Hom}(X, -)$ 或 $[X, -]$。

定义 1.1.15 （图表）。对于小范畴 D 和范畴 C，图表范畴D-C 具有

- 函子 D C 作为对象，
- 这些函子之间的自然变换作为态射，
- 恒等自然变换作为恒等变换，以及
- 自然变换的垂直复合作为复合。

此外，我们定义如下内容。

- 一个函子 D C 也称为 C 中的 D-图表。
- 对于由小范畴及函子构成的范畴 Cat，函子 D Cat 称为 D-指标范畴。

例1.1.16 （小范畴）。$(\mathrm{Cat}, \times, \mathbf{1}, [,])$ 是一个对称幺半闭范畴，其中 Cat 是由小范畴及函子构成的范畴。

- 幺半积是笛卡尔积 $\times$。
- 幺半单位 $\mathbf{1}$ 是仅含有一个对象 $*$ 及其恒等态射 1_*的终端范畴。
- 闭结构 $[,]$ 由图表范畴给出（定义 1.1.15）。

范畴 Cat 是完备且余完备的 [**Yau20**，第 1.4] 节。

幺半函子与自然变换。

定义 1.1.17。 设 C 和 D 是幺半范畴。一个幺半函子

$$(F, F^2, F^0) : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$$

由以下数据和公理组成。

- $F : \mathsf{C}$ D 是一个函子。
- $F^0 : 1$ $F1$ 是 D 中的一个态射，称为单位约束。

● F^2 是一个自然变换

$$FX \otimes FY \xrightarrow{F^2_{X,Y}} F(X \otimes Y) \quad \text{for} \quad X, Y \in \mathsf{C},$$

这称为幺半约束。

对于对象X、Y、$Z \in \mathsf{C}$，要求以下单位性和结合图表可交换。

(1.1.18)
$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes FX & \xrightarrow{\lambda_{FX}} & FX \\ {\scriptstyle F^0 \otimes 1_{FX}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F\lambda_X} \\ F1 \otimes FX & \xrightarrow{F^2} & F(1 \otimes X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FX \otimes 1 & \xrightarrow{\rho_{FX}} & FX \\ {\scriptstyle 1_{FX} \otimes F^0}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F\rho_X} \\ FX \otimes F1 & \xrightarrow{F^2} & F(X \otimes 1) \end{array}$$

(1.1.19)
$$\begin{array}{ccc} \big(FX \otimes FY\big) \otimes FZ & \xrightarrow{\alpha} & FX \otimes \big(FY \otimes FZ\big) \\ {\scriptstyle F^2 \otimes 1_{FZ}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{FX} \otimes F^2} \\ F(X \otimes Y) \otimes FZ & & FX \otimes F(Y \otimes Z) \\ {\scriptstyle F^2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^2} \\ F\big((X \otimes Y) \otimes Z\big) & \xrightarrow{F\alpha} & F\big(X \otimes (Y \otimes Z)\big) \end{array}$$

若一个幺半函子满足以下条件，则称其为

● 若F^0 和F^2 都是同构，则称其为强；
● 若严格保单位的，则F^0 是恒等态射；并且
● 若严格，则F^0 和F^2 均为恒等变换。

对于辫幺半范畴 C 和 D，如上所述的幺半函子（F，F^2,F^0）称为编织的，若图表

(1.1.20)
$$\begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \xrightarrow[\cong]{\xi_{FX,FY}} & FY \otimes FX \\ {\scriptstyle F^2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^2} \\ F(X \otimes Y) & \xrightarrow[\cong]{F\xi_{X,Y}} & F(Y \otimes X) \end{array}$$

对所有对象X、$Y \in \mathsf{C}$ 均交换。若 C 和 D 是对称幺半范畴，则如上所述的辫编织幺半函子称为对称幺半函子。

定义 1.1.21。对于幺半函子

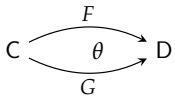
$$(F, F^2, F^0) \quad \text{and} \quad (G, G^2, G^0) : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$$

在幺半范畴 C 和 D 之间，幺半自然变换 $\theta : FG$是底层函子之间的自然变换，并且满足单位约束图表和幺半约束图表

(1.1.22)
$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{F^0} & F1 \\ & {\scriptstyle G^0}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \theta_1} \\ & & G1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FX \otimes FY & \xrightarrow{\theta_X \otimes \theta_Y} & GX \otimes GY \\ {\scriptstyle F^2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G^2} \\ F(X \otimes Y) & \xrightarrow{\theta_{X \otimes Y}} & G(X \otimes Y) \end{array}$$

对所有对象X、$Y \in \mathsf{C}$，都成立交换。

这样的（幺半）自然变换也用以下 2-胞腔记号表示。

(1.1.23)


涉及 2-胞的粘贴图见 [**JY21**，第 3] 章。

约定 1.1.24 (左规范括号化)。 除非另有说明，迭代幺半积均采用左规范化括号形式，即每对括号中左侧的半边都置于最左端。

例如，我们记作

$$a \otimes b \otimes c \otimes d = \big((a \otimes b) \otimes c\big) \otimes d.$$

对于迭代幺半积，我们省略括号，并默认插入必要的结合与单位同构。这样做是合理的，因为每个幺半范畴 C 都存在一个强幺半伴随等价 $\mathsf{C} \mathsf{C}_{\mathsf{st}}$，其中 C_{st} 是严格幺半范畴 [**ML98**，XI.3.1]。编织和对称版本见 [**Yau22**，21.3.1 和 21.6.1]。在每种情况下，严格图表可交换，当且仅当它们在 C 中的原像可交换。

1.2. 富集范畴

本节简要回顾富集范畴、富集函子、富集自然变换及其张量积的定义。更详细的讨论见 [**JY21**，第 1 节。3], [**JY∞a**，第 1], 章，以及 [**Kel05**]。

定义 1.2.1. 对于一个幺半范畴 $(\mathsf{V}, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho)$（定义 1.1.3），一个 V-范畴 C（也称为富集于 V 的范畴）由以下数据和公理构成。

- 配备一个对象集 Ob(C)。
- 对于 C 中的每一对对象X、Y，都配备一个同对象 $\mathsf{C}(X,Y) \in \mathsf{V}$，其定义域为$X$，陪域为$Y$。
- 对于 C 中的对象X、Y、Z，配备一个态射

$$\mathsf{C}(Y,Z) \otimes \mathsf{C}(X,Y) \xrightarrow{m_{X,Y,Z}} \mathsf{C}(X,Z) \quad \text{in} \quad \mathsf{V},$$

  称为复合。
- 对于 C 中的每个对象 X，它都配有一个态射

$$1 \xrightarrow{i_X} \mathsf{C}(X,X) \quad \text{in} \quad \mathsf{V},$$

  称为X的恒等。

对于 C 中的对象W、X、Y、Z，以下结合图表和单位图表必须可交换。

(1.2.2)
$$\begin{array}{ccc}
\big(\mathsf{C}(Y,Z)\otimes\mathsf{C}(X,Y)\big)\otimes\mathsf{C}(W,X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathsf{C}(Y,Z)\otimes\big(\mathsf{C}(X,Y)\otimes\mathsf{C}(W,X)\big) \\
\downarrow{\scriptstyle m\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes m} \\
\mathsf{C}(X,Z)\otimes\mathsf{C}(W,X) & & \mathsf{C}(Y,Z)\otimes\mathsf{C}(W,Y) \\
 & \searrow^{m} & \downarrow{\scriptstyle m} \\
 & & \mathsf{C}(W,Z)
\end{array}$$

(1.2.3)
$$\begin{array}{ccccc}
1\otimes\mathsf{C}(X,Y) & \xrightarrow{\lambda} & \mathsf{C}(X,Y) & \xleftarrow{\rho} & \mathsf{C}(X,Y)\otimes 1 \\
\downarrow{\scriptstyle i_Y\otimes 1} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes i_X} \\
\mathsf{C}(Y,Y)\otimes\mathsf{C}(X,Y) & \xrightarrow{m} & \mathsf{C}(X,Y) & \xleftarrow{m} & \mathsf{C}(X,Y)\otimes\mathsf{C}(X,X)
\end{array}$$

至此，V-范畴的定义便告完成。此外，若 Ob(C) 是一个集合，则称 V-范畴 C 为小 。

定义 1.2.4. 对于 V-范畴 C 和 D，一个 V-函子 F ：C D 由以下数据和公理组成。

- 它配备了一个对象赋值 F ：Ob(C) Ob(D)。 ⟶
- 对于 C 中每一对对象 X、Y，它配备了一个分量态射

$$\mathsf{C}(X,Y)\xrightarrow{F_{X,Y}}\mathsf{D}\big(FX,FY\big)\quad\text{in}\quad\mathsf{V}.$$

对于 C 中的对象 X、Y、Z，要求下面两个图表可交换。

(1.2.5)
$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{C}(Y,Z)\otimes\mathsf{C}(X,Y) & \xrightarrow{m} & \mathsf{C}(X,Z) \\
\downarrow{\scriptstyle F\otimes F} & & \downarrow{\scriptstyle F} \\
\mathsf{D}(FY,FZ)\otimes\mathsf{D}(FX,FY) & \xrightarrow{m} & \mathsf{D}(FX,FZ)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
1 & \xrightarrow{i_X} & \mathsf{C}(X,X) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle F} \\
1 & \xrightarrow{i_{FX}} & \mathsf{D}(FX,FX)
\end{array}$$

此外，恒等 V-函子和 V-函子的复合分别在对象和分量态射上定义。

定义 1.2.6. 对于 V-范畴 C 和 D 之间的 V-函子 ~~F~~、G ：C D，一个 V-自然变换 $\theta : F\,G$ 由以下部分组成：对 C 中的每~~个对~~象 X，一个态射

$$1\xrightarrow{\theta_X}\mathsf{D}(FX,GX)\quad\text{in}\quad\mathsf{V},$$

称为 θ 的 ***X*-分量**，使得对于 C 中的对象 X、Y，下图表具有交换性。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1\otimes\mathsf{C}(X,Y) & \xrightarrow{\theta_Y\otimes F} & \mathsf{D}(FY,GY)\otimes\mathsf{D}(FX,FY) \\
 & \overset{\lambda^{-1}}{\nearrow}{\scriptstyle\cong} & & & \searrow{\scriptstyle m} \\
\mathsf{C}(X,Y) & & & & \mathsf{D}(FX,GY) \\
 & \underset{\rho^{-1}}{\searrow}{\scriptstyle\cong} & & & \nearrow{\scriptstyle m} \\
 & & \mathsf{C}(X,Y)\otimes 1 & \xrightarrow{G\otimes\theta_X} & \mathsf{D}(GX,GY)\otimes\mathsf{D}(FX,GX)
\end{array}$$

至此，V-自然变换的定义完成。此外，以下概念均按分量定义：

- V-自然变换的恒等，
- V-自然变换的垂直复合，以及
- V-自然变换的水平复合。

以下定义引自 **[JY∞a**，第 1.3] 节。

定义 1.2.7. 设 V-范畴 C 和 D 所在的 $(\mathsf{V}, \otimes, 1, \xi)$ 是一个辫编织幺半范畴（定义 1.1.8），则张量积 C ⊗D 是由以下数据定义的 V-范畴。

对象集： $\mathrm{Ob}(\mathsf{C} \otimes \mathsf{D}) = \mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathsf{D})$，对象记为 $X \otimes Y$，其中 $X \in \mathsf{C}$ 且 $Y \in \mathsf{D}$。

同态对象： 对于对象 $X \otimes Y$ 和 $X' \otimes Y'$，同态对象定义为

$$(\mathsf{C} \otimes \mathsf{D})(X \otimes Y, X' \otimes Y') = \mathsf{C}(X, X') \otimes \mathsf{D}(Y, Y').$$

复合： 对于对象 $X \otimes Y$、$X' \otimes Y'$和 $X'' \otimes Y''$，复合由 V 中的以下复合给出，其中 ξ_{mid} 利用 V 中的结合同构和编织交换中间两个因子。

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathsf{C}(X', X'') \otimes \mathsf{D}(Y', Y'')\big) \otimes \big(\mathsf{C}(X, X') \otimes \mathsf{D}(Y, Y')\big) & & \mathsf{C}(X, X'') \otimes \mathsf{D}(Y, Y'') \\ & \xi_{\mathrm{mid}} \searrow \quad \nearrow m \otimes m & \\ & \big(\mathsf{C}(X', X'') \otimes \mathsf{C}(X, X')\big) \otimes \big(\mathsf{D}(Y', Y'') \otimes \mathsf{D}(Y, Y')\big) & \end{array}$$

恒等变换： 对象 $X \otimes Y$ 的恒等态射是以下复合。

$$1 \xrightarrow[\cong]{\lambda^{-1}} 1 \otimes 1 \xrightarrow{i_X \otimes i_Y} \mathsf{C}(X, X) \otimes \mathsf{D}(Y, Y)$$

至此完成了 V-范畴 C ⊗D 的定义。此外，张量积⊗ 也逐分量扩展到 V-函子和 V-自然变换。

1.3. 2-范畴

本节回顾 2-范畴、2-函子、2-自然变换、修正、2-范畴中的（伴随）等价，以及 2-范畴之间的（伴随）2-等价的定义。关于 2-范畴的入门介绍，请参阅 **[JY21]** 。

定义 1.3.1. 一个*2*-范畴 B由以下数据和公理构成。

对象集： 它配备了一个对象类 B_0。**1-胞：** 对于每一对对象X、$Y \in \mathrm{B}_0$，，它配备了一个由*1*-胞 组成的类 $\mathrm{B}_1(X,Y)$，这些 1-胞从X 指向Y。这样的 1-胞记作$X\ Y$。**2-胞：** 对于 1-胞f、$f\prime \in \mathrm{B}_1(X,Y)$，它配备了一个由*2*-胞组成的集合 $\mathrm{B}_2(f, f\prime)$，这些 2-胞从f指向f'。这样的 2-胞记作$ff\prime$。**恒等变换：** 它配备了

- 对每个对象恒等*1*-胞 $1_X \in \mathrm{B}1(X,X)$，以及
- 对每个1-胞$f \in \mathrm{B}1(X, Y)$，都有一个恒等*2*-胞 $1_f \in \mathrm{B}2(f, f)$。

复合： X、Y 和 Z 表示以下复合中的 B 中的对象。

● 对于 1-胞f、f'、$f''\in \mathrm{B1}(X,Y)$，它配备了一个赋值

$$\mathsf{B}_2(f',f'')\times \mathsf{B}_2(f,f') \xrightarrow{v} \mathsf{B}_2(f,f''),\qquad v(\alpha',\alpha)=\alpha'\alpha$$

称为 2-胞的垂直复合。

● 它配备了一个赋值

$$\mathsf{B}_1(Y,Z)\times \mathsf{B}_1(X,Y) \xrightarrow{c_1} \mathsf{B}_1(X,Z),\qquad c_1(g,f)=gf$$

称为 1-胞的水平复合。

● 对于 1-胞f、f' $\in \mathrm{B1}(X,Y)$ 以及g、g' $\in \mathrm{B1}(Y,Z)$，它配备了一个赋值

$$\mathsf{B}_2(g,g')\times \mathsf{B}_2(f,f') \xrightarrow{c_2} \mathsf{B}_2(gf,g'f'),\quad c_2(\beta,\alpha)=\beta*\alpha$$

称为2-胞的水平复合。

上述数据须满足以下四条公理：

(i) 垂直复合满足结合律，且恒等2-胞是其单位元。(ii) 水平复合保恒等2-胞与垂直复合。(iii) 1-胞的水平复合满足结合律，且恒等1-胞是其单位元。(iv) 2-胞的水平复合满足结合律，且恒等1-胞上的恒等2-胞是其单位元。

至此，2-范畴的定义完成。

此外，我们定义如下概念。

● 对于2-范畴 B 中的对象X 和Y，同态范畴 B(X,Y)是由以下数据定义的范畴。– 其对象是从X 到Y的1-胞。– 从1-胞f ：X Y 到1-胞f' ：X Y 的态射是2-胞f f'。– 其复合为2-胞的垂直复合。– 其恒等元为恒等2-胞。 ⟶ ⟶

● 若每个同态范畴都是小范畴，则称一个2-范畴为局部小。

● 若一个2-范畴局部小且其对象构成一个集合，则称其为小。

● 2-范畴的底层 *1*-范畴是由以下数据定义的范畴。– 它具有相同的对象类。– 其态射是 1- 胞。– 其复合是 1- 胞的水平复合。– 其恒等变换是恒等 1- 胞。

2-胞腔记号 (1.1.23) 同样适用于2-范畴中的2-胞。

例1.3.2（小范畴）。例1.1.16中的Cat是一个2-范畴的底层1-范畴，该2-范畴也记作Cat，其中2-胞是自然变换。2-胞的水平复合和垂直复合分别定义为自然变换的水平复合和垂直复合。

例1.3.3（小富化范畴）。每个幺半范畴 V 都有一个相关联的 2-范畴 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{V}}$，其由以下数据定义。

- 其对象是小 V-范畴。
- 其 1-胞是 V-函子。
- 其 2-胞是 V-自然变换。

例1.3.2 中的 2-范畴 Cat 是 V 为 $(\mathrm{Set}, \times, *)$ 时的 $\mathrm{Cat}^{\mathsf{V}}$，其中 $\mathsf{V} =$ 。

Cat-范畴——也就是说，在 $(\mathrm{Cat}, \times, \mathbf{1})$ 中富集的范畴——是一个 2-范畴。反过来，在满足一个集合论条件的情况下，这也成立。

命题 1.3.4。 局部小 *2*-范畴恰好是一个 Cat-范畴。

2-函子。 除了命题 1.3.4 中的集合论条件外，2-函子就是 Cat-范畴之间的 Cat-函子。我们将精确定义组织如下。

定义 1.3.5。 对于 2-范畴 B 和 C，一个 *2*-函子 $F : \mathsf{B} \to \mathsf{C}$ 由以下数据和公理组成。

- 配备一个对象赋值

$$\mathsf{B}_0 \xrightarrow{F_0} \mathsf{C}_0.$$

- 配备一个*1*-胞赋值

$$\mathsf{B}_1(X, Y) \xrightarrow{F_1} \mathsf{C}_1(F_0X, F_0Y)$$

对于 B 中每一对对象X、Y。

- 配备一个*2*-胞赋值

$$\mathsf{B}_2(f, f') \xrightarrow{F_2} \mathsf{C}_2(F_1f, F_1f')$$

对于每一对对象 X、Y 以及 1-胞 f、f' $\in \mathsf{B}_1(X, Y)$。

上述数据必须满足以下三个公理，其中 $F_0, F_1,$ 和F_2 均简写为 F:

（i）F 的对象和 1-胞赋值构成从 B 和 C 的底层 1-范畴之间的函子。（ii）对于 B 中的每一对对象 X、Y，F的 1-胞和 2-胞赋值构成一个函子

$$\mathsf{B}(X, Y) \xrightarrow{F} \mathsf{C}(FX, FY)$$

在同态范畴之间。

（iii）F 保持 2-胞的水平复合。

至此，2-函子的定义完成。

此外，给定一个 2-函子 $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，复合2-函子

$$\mathsf{B} \xrightarrow{GF} \mathsf{D}$$

通过分别复合对象、1-胞和2-胞赋值来定义。

2-自然变换。除命题1.3.4中的集合论条件外，2-自然变换就是Cat-函子之间的Cat-自然变换。我们将精确的定义整理如下。

定义 1.3.6。对于 2-函子 F、G : B C 之间的2-范畴 B 和 C，一个*2*-自然变换 ϕ : $F\ G$ 由以下数据组成：对于每个对象 $X \in$ B，一个 分量一胞

$$FX \xrightarrow{\phi_X} GX \quad \text{in} \quad \mathsf{C}$$

使得以下两个公理成立：

1-胞自然性： 对于 B 中的每个 1-胞 $f : X \to Y$，以下 C(FX,GY) 中的两个复合一胞相等。

(1.3.7)
$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\phi_X} & GX \\ {\scriptstyle Ff}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ FY & \xrightarrow{\phi_Y} & GY \end{array}$$

二胞自然性： 对于 B(X,Y) 中的每个二胞 $\theta : f \Rightarrow g$，以下两个复合二胞相等。

(1.3.8)
$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\phi_X} & GX \\ {\scriptstyle Ff}\Big(\overset{F\theta}{\Rightarrow}\Big){\scriptstyle Fg} & & {\scriptstyle Gf}\Big(\overset{G\theta}{\Rightarrow}\Big){\scriptstyle Gg} \\ FY & \xrightarrow{\phi_Y} & GY \end{array}$$

这意味着在 C(FX,GY) 中，以下二胞等式成立。

$$G\theta * 1_{\phi_X} = 1_{\phi_Y} * F\theta$$

至此，2-自然变换的定义完成。记号 (1.1.23) 适用于 2-自然变换。此外，*2*-自然同构是一个 2-自然变换，且其每个分量一胞都是底层 1-范畴中的同构。

定义 1.3.9。设 $\phi : F\ G$ 和 $\varphi : G\ H$ 是 2-函子 F、G、H : B C（它们是从 2-范畴 B 到 C 的 2-自然变换）。其水平复合2-自然变换

$$F \xrightarrow{\varphi\phi} H$$

定义为：对 B 中的每个对象 X，取水平复合分量一胞

$$FX \xrightarrow{\phi_X} GX \xrightarrow{\varphi_X} HX$$

位于 C(FX,HX) 中。

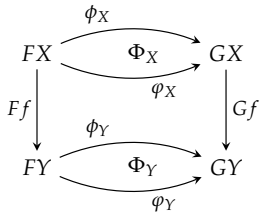
修正。

定义 1.3.10。设 ϕ、φ : $F\ G$ 是 2-函子 F、G : B C 从 2-范畴 B 到 C 的 2-自然变换。一个修正 $\Phi : \phi \to \varphi$ 由 B 中每个对象X 对应的一个分量 *2*-态射组成，

$$\phi_X \xrightarrow{\Phi_X} \varphi_X \quad \text{in} \quad \mathsf{C}(FX, GX)$$

使得以下在 C$(FX、GY)$ 中的两个复合二胞对于每个 1-态射 $f : X \to Y$ 在B中相等。

(1.3.11)



这意味着等式

$$1_{Gf} * \Phi_X = \Phi_Y * 1_{Ff}.$$

这称为修正公理。

定义 1.3.12. 设 $F、G、H$: B C 是 2-范畴 B 和 C 之间的 2-函子。

(i) 设 $\phi、\varphi、\psi : F \to G$ 是 2-自然变换，且 $\Phi : \phi \to \varphi$ 和 $\Psi : \varphi \to \psi$ 是修正。垂直复合修正

(1.3.13) $$\phi \xrightarrow{\Psi\Phi} \psi$$

定义为：对 B 中的每个对象 X，取垂直复合 2-胞腔

$$\phi X \xrightarrow{\Phi_X} \varphi X \xrightarrow{\Psi_X} \psi X$$

在 C(FX,GX) 中。

(ii) 假设 $\Phi' : \phi' \to \varphi'$ 是 2-自然变换 $\phi'、\varphi' : G \to H$ 的一个修正。水平复合修改

(1.3.14) $$\phi'\phi \xrightarrow{\Phi' * \Phi} \varphi'\varphi$$

定义为：对于 B 中每个对象 X，取水平复合 2-胞

$$\phi'_X \phi X \xrightarrow{\Phi'_X * \Phi_X} \varphi'_X \varphi X$$

在 C(FX,HX) 中。

伴随等价。 以下定义引自 **[JY21**，5.1.18、6.1.1 和 6.2.1]，并限制在 2-范畴中。

定义 1.3.15。 假设 B 是一个 2-范畴。

(i) B 中的 1-胞 $f : X \to Y$ 称为等价，如果存在

- 一个 1-胞 $h : Y \to X$，称为 f 的逆，并且
- 2-胞同构 $\eta : 1_X \xrightarrow{\cong} hf$ 和 $\varepsilon : fh \xrightarrow{\cong} 1_Y$。

(ii) B 中的伴随是一个四元组

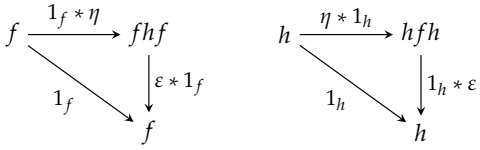
$$(f, h, \eta, \varepsilon)$$

由以下数据和公理组成。

- $f : X \to Y$ 和 $h : Y \to X$ 是 1-胞，分别称为左伴随和右伴随。
- $\eta : 1_X \to hf$ 和 $\varepsilon : fh \to 1_Y$ 是 2-胞，它们分别称为单位和余单位。

以下两个由 2-胞构成的图表分别称为左三角恒等式和右三角恒等式，要求它们可交换。

(1.3.16)



(iii) 若伴随的单位和余单位都是同构，则称该伴随为伴随等价。

至此，定义完成。

例 1.3.17. 考虑定义 1.3.15。

- 若f 是一个等价，且存在 (i) 中的 (h,η,ε)，则h 也是一个等价，其逆1-胞为f，2-胞同构为 $(\varepsilon^{-1},\eta^{-1})$。
- 四元组 (f,h,η,ε) 如 (iii) 中所示是一个伴随等价，当且仅当四元组 $(h,f,\varepsilon^{-1},\eta^{-1})$ 是一个伴随等价。
- 若 (f,h,η,ε) 是一个伴随等价，则 f和 h都是等价。反过来，根据[**JY21**, 6.2.4]，每个等价都是某个伴随等价的左伴随。根据前一项，它也是某个伴随等价的右伴随。

定义1.3.18. 若存在以下对象，则称 2-函子 $F : \mathrm{B}\ \mathrm{C}$ 为一个*2*-等价

- 一个 2-函子 $G : \mathrm{C}\ \mathrm{B}$，称为 F 的逆，以及
- 2-自然同构 $\eta : 1_{\mathrm{B}} \cong GF$ 和 $\varepsilon : FG \xrightarrow{\cong} 1_{\mathrm{C}}$。 ——

此外，如果四元组 (F,G,η,ε) 满足三角恒等式 (1.3.16)，则 n 称其为伴随*2*-等价。

范畴之间的函子是等价，当且仅当它

- 本质满对象，且
- 在态射集上完全忠实。

2-等价的类似刻画见 [**JY21**, 7.5.8]；另见定理 3.4.22。定理 3.4.21 是对 Cat-多重等价的推广。

1.4. Day 卷积

本节回顾对称幺半范畴之间函子的 Day 卷积及相关构造。陪域为对称幺半闭范畴 Cat 的特例，将在说明 1.4.17 中详细讨论。以下讨论改编自 [**JY∞a**, 第3], 章；其中可找到更多详细内容。我们在第 10 章讨论逆 K 理论时所需的 Γ-范畴的带基点 Day 卷积，见定义 9.1.17。

定义 1.4.1. 设 $(\mathrm{V},\otimes,1,\xi,[,])$ 是一个完备且余完备的对称幺半闭范畴，并且 $(\mathrm{D},\boxdot,e)$ 是一个小对称幺半范畴。设 $X,Y : \mathrm{D}\ \mathrm{V}$ 是 V 中的 D-图表。

- X 和Y 的*Day* 卷积 是 V 中由余端定义的 D-图表

$$X \otimes Y = \int^{(a,b)\in\mathcal{D}\times\mathcal{D}} \coprod_{\mathcal{D}(a\boxdot b,-)} (Xa \otimes Yb). \tag{1.4.2}$$

对于 $\phi : X\ X'$ 和 $\psi : Y\ Y'$ 之间的$\mathcal{D}$-V-中的图表，其*Day*-卷积 $\phi \otimes \psi$ 是如下自然变换

$$X \otimes Y \xrightarrow{\phi \otimes \psi} X' \otimes Y' \tag{1.4.3}$$

由 V 中的态射诱导

$$Xa \otimes Yb \xrightarrow{\phi_a \otimes \psi_b} X'a \otimes Y'b \quad \text{for} \quad a, b \in \mathcal{D}$$

通过余积和余端的泛性质。

- The编织

$$X \otimes Y \xrightarrow[\cong]{\xi_{X,Y}} Y \otimes X \tag{1.4.4}$$

是由 V 中的编织诱导的自然变换

$$Xa \otimes Yb \xrightarrow[\cong]{\xi_{Xa,Yb}} Yb \otimes Xa \quad \text{for} \quad a, b \in \mathcal{D},$$

D 中的编织，以及余积和余端的泛性质。

● 从X 到Y 的同态图表 定义为端

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \int_{(b,c) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}} \left[\coprod_{\mathcal{D}(-\boxdot b, c)} Xb,\ Yc \right]. \tag{1.4.5}$$

通过余积和端的泛性质，这一构造可延伸为 V 中 D-图表之间的自然变换。

● 单位图表 J 是如下 D-图表

$$J = \coprod_{\mathcal{D}(e,-)} 1 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{V}. \tag{1.4.6}$$

定义至此完成。

说明 1.4.7 （泛性质）。 式（1.4.2）中的 Day 卷积$X \otimes Y$ 由以下泛性质刻画。对于每一对对象（a，b） $\in$D $\times$D，它配备了一个结构态射

$$Xa \otimes Yb \xrightarrow{\zeta_{a,b}} (X \otimes Y)(a \boxdot b) \quad \text{in} \quad \mathsf{V} \tag{1.4.8}$$

使得以下两个条件成立。

自然性： 对于 D 中的每一对态射 $f\ : a\ a'$ 和 $g\ : b\ b'$，以下 V 中的图表交换。

$$\begin{array}{ccc} Xa \otimes Yb & \xrightarrow{Xf \otimes Yg} & Xa' \otimes Yb' \\ {\scriptstyle \zeta_{a,b}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{a',b'}} \\ (X \otimes Y)(a \boxdot b) & \xrightarrow{(X \otimes Y)(f \boxdot g)} & (X \otimes Y)(a' \boxdot b') \end{array} \tag{1.4.9}$$

普遍性： 二元组（$X \otimes Y$，ζ）相对于前述条件是始对象。我们将（1.4.9）称为 ζ 的自然性 。

说明 1.4.10（迭代 Day 卷积）。 对于$n \geq 2$，设X_1,.....、X_n是 V 中的 D-图表。根据一般的余端演算，它们的迭代 Day 卷积是由该余端给出的 D-图表

$$\bigotimes_{j=1}^{n} X_j \cong \int^{\{a_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{D}^n} \coprod_{\mathcal{D}(a_1 \boxdot \cdots \boxdot a_n, -)} \left(\bigotimes_{j=1}^{n} X_j a_j \right). \tag{1.4.11}$$

它由泛性质刻画，该性质涉及结构态射 (1.4.8) 的 n 变量版本以及自然性图表 (1.4.9)。更明确地说，对于 D 中每个由 n 个对象组成的对象组 $\{a_j\}_{j=1}^n$，都配备一个结构态射

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j a_j \xrightarrow{\zeta_{a_1,\ldots,a_n}} \big(\otimes_{j=1}^{n} X_j\big)(a_1 \boxdot \cdots \boxdot a_n) \quad \text{in} \quad \mathsf{V} \tag{1.4.12}$$

使得以下两个条件成立。

自然性：对于 D 中每个由 n 个态射组成的态射组 $\{f_j : a_j \to a'_j\}_{j=1}^n$，记为

$$a = a_1 \boxdot \cdots \boxdot a_n, \quad a' = a'_1 \boxdot \cdots \boxdot a'_n, \quad \text{and} \quad f = f_1 \boxdot \cdots \boxdot f_n.$$

则 V 中以下自然性图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \otimes_{j=1}^{n} X_j a_j & \xrightarrow{\otimes_{j=1}^{n} X_j f_j} & \otimes_{j=1}^{n} X_j a'_j \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \zeta_{a_1,\ldots,a_n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \zeta_{a'_1,\ldots,a'_n}} \\ \big(\otimes_{j=1}^{n} X_j\big)(a) & \xrightarrow{(\otimes_{j=1}^{n} X_j)(f)} & \big(\otimes_{j=1}^{n} X_j\big)(a') \end{array} \tag{1.4.13}$$

普遍性： 对于前述条件，数对 $(\otimes_{j=1}^{n} X^j, \zeta)$ 是始对象。

在 (1.4.11) 到 (1.4.13) 中，每个迭代幺半积都按照约定 1.1.24 左规范化。

对称幺半闭结构。 回顾图表范畴 D-C（定义 1.1.15）。以下定理归功于 Day [**Day70**]。详细证明见 [**JY∞a**，3.7。22],其中涵盖了更一般的情形，即 D 是一个小对称幺半 V-范畴。下文所述的较简单情形已足以满足本文的需要。

定理 1.4.14。 设 V 是一个完备且余完备的对称幺半闭范畴。设 $\mathcal{D}$ 是一个小对称幺半范畴。那么，图表范畴$\mathcal{D}$-V 是一个对称幺半闭范畴，其结构如下。

- 幺半积由 *Day* 卷积(1.4.2)给出。
- 编织由 (1.4.4) 给出。
- 闭结构由 *Hom* 图表(1.4.5) 给出。
- 幺半单位由单位图表 J (1.4.6) 给出。

定义 1.4.15（张量化与余张量化）。 设 C 是一个 V-范畴，且 $(\mathsf{V}, [,])$ 是一个对称幺半闭范畴。

张量化： 若 C 配备了对每个 $X \in \mathsf{C}$ 和$A \in \mathsf{V}$ 的对象 $X \otimes A \in \mathsf{C}$，以及 V 中的同构，则称 C 是在 V 上张量化的。

$$\mathsf{C}(X \otimes A, Y) \cong [A, \mathsf{C}(X, Y)]$$

对于所有$Y \in \mathsf{C}$。

余张量化： 如果对于每个$X \in \mathsf{C}$和$A \in \mathsf{V}$，C都配备了一个$X^A \in \mathsf{C}$中的对象以及V中的同构，我们就称C为在V上余张量化

$$\mathsf{C}(Y, X^A) \cong [A, \mathsf{C}(Y, X)]$$

对所有$Y \in \mathsf{C}$。

以下结果是 Day 定理 1.4.14 的一个非平凡推论，详见 **[JY∞a**，3.9.15]。

定理 1.4.16。 设V 是一个完备且余完备的对称幺半闭范畴。设$\mathcal{D}$ 是一个小对称幺半范畴。那么，对称幺半闭范畴$\mathcal{D}$-V 在V上是富集的、张量化的且余张量化的。

证明。详细证明请参见 **[JY∞a**，第 3.9] 节。这里我们给出简要概述。由于 D-V 是对称幺半闭范畴，它在自身上是富集的、张量化的且余张量化的。沿着对称幺半函子改变富集结构

$$\mathcal{D}\text{-}\mathsf{V} \xrightarrow{\mathsf{ev}_e} \mathsf{V},$$

该函子由在幺半范畴 D 中的幺半单位e 处求值给出，因此我们得出 D-V 在 V 上是富集的、张量化的且余张量化的。□

置换范畴指标范畴。 回顾一下，Cat-范畴是一个局部小 2-范畴（命题 1.3.4）。

说明 1.4.17。 下面我们结合定理 1.4.14 和 1.4.16 来说明 D-Cat 的结构

- V $= (\mathsf{Cat}, \times, \mathbf{1}, [,])$，见例 1.1.16 和 1.3.2，以及
- $(\mathsf{D}, \otimes, 1, \beta)$，一个小置换范畴。

1-范畴 D 也可被视为一个仅含恒等 2-胞的 2-范畴。我们首先描述 D-Cat 上的 2-范畴结构。

对象： D-Cat 中的一个对象是一个 2-函子 D Cat （定义 1.3.5）。由于 D 仅含恒等 2-胞，这与函子 D Cat 是同一回事。换言之，D-Cat 中的一个对象是一个 D-指标范畴（定义 1.1.15）。

1-胞： 对于 2-函子 F、G : D Cat，一态射对象

$$(\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})(F, G)$$

是一个小范畴。(D-Cat)(F,G) 中的一个对象 是一个 2-自然变换 $\phi : F \; G$（定义 1.3.6）。这意味着 ϕ 配备了一个分量函子

$$Fa \xrightarrow{\phi_a} Ga \quad \text{for each} \quad a \in \mathcal{D}.$$

对于 D 中每个态射f : a b，以下函子图表（即 1-胞自然性条件 (1.3.7)）都必须交换。

(1.4.18)
$$\begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{\phi_a} & Ga \\ {\scriptstyle Ff}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ Fb & \xrightarrow{\phi_b} & Gb \end{array}$$

二胞自然性条件 (1.3.8) 自动满足，因为 $\mathcal{D}$只有恒等 2-胞。换言之， $\phi : F \; G$ 是一个自然变换。

恒等*1*-胞 $1_F : F \; F$ 是恒等自然变换。它具有分量恒等函子：

$$(1_F)_a = 1_{Fa}.$$

1-胞腔的水平复合： 对于另一个2-函子H : D Cat以及一个2-自然变换 $\phi' \div G \; H$，其水平复合

$$F \xrightarrow{\phi'\phi} H$$

是定义1.3.9中的2-自然变换。它具有分量复合函子

$$Fa \xrightarrow{\phi_a} Ga \xrightarrow{\phi'_a} Ha \quad \text{for each} \quad a \in \mathcal{D}.$$

2-胞： 对于2-自然变换 $\phi, \varphi : F \; G$，一个态射

$$\phi \xrightarrow{\Phi} \varphi \quad \text{in} \quad (\mathcal{D}\text{-Cat})(F, G)$$

是一个修正（定义 1.3.10）。这意味着 Φ 配备了对每个对象 $a \in$ D 的分量自然变换 Φ_a，如下所示。

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\phi_a}{\curvearrowright} & \\ Fa & \Phi_a & Ga \\ & \underset{\varphi_a}{\curvearrowright} & \end{array}$$

在此情形下，修正公理 (1.3.11) 要求，对 D 中每个态射 $f : a \; b$，以下两个加楔的自然变换相等。

(1.4.19)

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\phi_a}{\curvearrowright} & \\ Fa & \Phi_a & Ga \\ & \underset{\varphi_a}{\curvearrowright} & \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ & \overset{\phi_b}{\curvearrowright} & \\ Fb & \Phi_b & Gb \\ & \underset{\varphi_b}{\curvearrowright} & \end{array}$$

换言之，在此情形下，修正公理就是如下等式

$$1_{Gf} * \Phi_a = \Phi_b * 1_{Ff}$$

对于 D 中的每个态射$f : a \; b$，自然变换的水平复合。

恒等*2*-胞

$$\phi \xrightarrow{1_\phi} \phi \quad \text{in} \quad (\mathcal{D}\text{-Cat})(F, G)$$

是恒等修正。其分量是恒等自然变换：

$$(1_\phi)_a = 1_{\phi_a}.$$

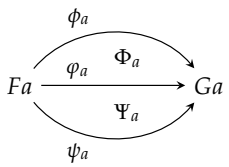
2-胞的垂直复合：对于另一个修正

$$\varphi \xrightarrow{\Psi} \psi \quad \text{in} \quad (\mathcal{D}\text{-Cat})(F,G)$$

该垂直复合修正

$$\phi \xrightarrow{\Psi\Phi} \psi \quad \text{in} \quad (\mathcal{D}\text{-Cat})(F,G)$$

如 (1.3.13) 中所示。它的分量是垂直复合自然变换



对于每个对象 $a \in \mathrm{D}$。

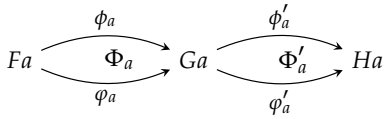
2-胞的水平复合：对于一个修正

$$\phi' \xrightarrow{\Phi'} \varphi' \quad \text{in} \quad (\mathcal{D}\text{-Cat})(G,H)$$

该水平复合修正

$$\phi'\phi \xrightarrow{\Phi'*\Phi} \varphi'\varphi \quad \text{in} \quad (\mathcal{D}\text{-Cat})(F,H)$$

如（1.3.14）中所述。它具有分量水平复合自然变换



对于每个对象 $a \in \mathrm{D}$。

至此完成了对 2-范畴 D-Cat 的描述。

D-Cat 在 Cat 上的（余）张量结构（定义 1.4.15）由 Cat 上的对称幺半闭结构诱导，即笛卡尔积 $\times$ 和图表范畴 $[-,-]$。更明确地，设 $F : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ 是一个 D-指标范畴，且 B 是一个小范畴。

张量化： D-指标范畴 $F \otimes \mathrm{B} : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ 是复合函子

$$\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathrm{Cat} \xrightarrow{-\times \mathrm{B}} \mathrm{Cat}.$$

余张量化： D-指标范畴 $F^{\mathrm{B}} : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ 是复合函子

$$\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathrm{Cat} \xrightarrow{[\mathrm{B},-]} \mathrm{Cat}.$$

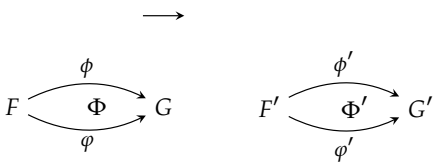
接下来我们描述 D-Cat 上的幺半结构。

幺半单位：它是单位图表

$$J = \mathcal{D}(1,-) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{Cat}. \tag{1.4.20}$$

对于每个$a \in \mathrm{D}$，态射集 D(1,a)被视为一个仅含恒等态射的离散范畴。

幺半积： 对于 $\mathcal{D}$-指标范畴和自然变换，幺半积是 (1.4.2) 和 (1.4.3) 中的 Day 卷积，其中$\otimes$ 在 Cat 中表示笛卡尔积 $\times$。设给定修正$\Phi : \phi \Rightarrow \varphi$ 和 $\Phi' : \phi' \Rightarrow \varphi'$，如下所示，针对 $\mathcal{D}$-指标范畴 F、G、F'、$G' : \mathcal{D} \to \mathsf{Cat}$。



幺半积 $\Phi \otimes \Phi'$

$$F \otimes F' \overset{\phi \otimes \phi'}{\underset{\varphi \otimes \varphi'}{\Downarrow \Phi \otimes \Phi'}} G \otimes G' \tag{1.4.21}$$

是这样一个修正，其分量自然变换由积自然变换诱导

$$Fa \times F'b \overset{\phi_a \times \phi'_b}{\underset{\varphi_a \times \varphi'_b}{\Downarrow \Phi_a \times \Phi'_b}} Ga \times G'b$$

对于 a、$b \in \mathrm{D}$。

至此，D-Cat 的描述就完成了。

第2章

对称双幺半范畴与双置换范畴

本章将讨论两种密切相关的范畴结构：对称双幺半范畴和双置换范畴；还将介绍几个详细示例，以及对称双幺半范畴的 Laplaza 相干定理。下面的概要表列出了本章的一些定义和结果。

对称双幺半范畴	定义 2.1.1
环范畴	定义 2.2.1
双置换范畴	定义 2.2.12
紧双置换范畴	定理 2.2.16
Laplaza 相干定理	定理 2.4.18

在后续各章中，Laplaza 相干定理是若干重要定义和构造的关键部分，包括

- 加性自然变换 (5.2.19),
- 加性修正 (5.2.28),
- 加性自然变换的格罗滕迪克构造 ((6.3.12) 和 (6.3.14))，以及
- 余笛卡尔 n-线性函子 (7.2.6)。

关于对称双幺半范畴和 Laplaza 相干定理的详细讨论，可参考 **[Yau∞I]**。双置换范畴及其与对称双幺半范畴的关系，在 **[Yau∞II]** 中有详细讨论。

组织结构。 在第 2.1 节中，我们回顾 Laplaza **[Lap72a]** 意义下的对称双幺半范畴。对称双幺半范畴是交换幺半环的范畴论类比；交换幺半环是没有加法逆元的交换环。

在第2.2节中，我们回顾 Elmendorf-Mandell **[EM06]** 意义下的双置换范畴。对称双幺半范畴与双置换范畴的主要区别在于，前者具有分配态射(2.1.3)，而后者具有因子分解态射 (2.2.2)，其方向与分配态射相反。由于这些结构态射通常都不要求可逆，双置换范畴既不构成对称双幺半范畴的子类，反之亦然。另一方面，具有可逆因子分解态射的紧双置换范畴，是具有可逆分配态射的紧对称双幺半范畴（定理 2.2.16）。

在第2.3节中，我们将讨论以下紧双置换范畴。

范畴	对象	态射	ref
$\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$	有限集	函数	2.3.2
Σ	有限集	置换	2.3.11
$\mathcal{F}$	带基点有限集	带基点函数	2.3.12
$\mathcal{A}$	正整数有限序列、无基点有限集的某些映射		2.3.17

特别是，例 2.3.17 在 Mandell 的逆K-理论指标范畴 A [**Man10**]上展示了一个双置换范畴结构。A 上的这一双置换结构是逆K-理论成为伪对称Cat-多函子的关键原因之一，具体讨论见第 6 章和第 10 章。

在第 2.4 节中，我们回顾对称双幺半范畴的 Laplaza 相干定理 2.4.18。与针对幺半范畴的 Mac Lane 相干定理类似 [**ML98**，VII.2], Laplaza 相干定理指出，在满足某个单态射条件的对称双幺半范畴中，只要定义域是正则的，由对称双幺半结构构成的每个形式图表都是交换的。正则性条件排除了通常不交换的图表，例如

$$x \otimes x \underset{\zeta^{\otimes}}{\overset{1}{\rightrightarrows}} x \otimes x$$

以及 $\zeta^{\otimes}$ 乘法编织。如果分配态射可逆，那么 Laplaza 相干定理中的单态射条件便得到满足。特别地，根据定理 2.2.16，Laplaza 相干定理适用于紧双置换范畴，包括第 2.3 节中的那些范畴。在第 5 章中，我们使用 Laplaza 相干定理 2.4.18，构造某些指标范畴的 Cat-富集多范畴，其中指标范畴是一个紧双置换范畴。

2.1. 对称双幺半范畴

本节回顾 Laplaza [**Lap72a**] 意义下的对称双幺半范畴。以下表述改编自 [**Yau∞I**，第 2], 章；其中可以找到更为详尽的讨论。

定义 2.1.1。一个对称双幺半范畴是一个由以下数据组成的元组

$$\big(\mathsf{C}, (\oplus, 0, \alpha^{\oplus}, \lambda^{\oplus}, \rho^{\oplus}, \zeta^{\oplus}), (\otimes, 1, \alpha^{\otimes}, \lambda^{\otimes}, \rho^{\otimes}, \zeta^{\otimes}), (\lambda^{\bullet}, \rho^{\bullet}), (\delta^{l}, \delta^{r})\big)$$

由以下数据组成。

加法结构： $\mathsf{C}^{\oplus} = (\mathsf{C}, \oplus, 0, \alpha^{\oplus}, \lambda^{\oplus}, \rho^{\oplus}, \zeta^{\oplus})$ 是一个对称幺半范畴（定义 1.1.11）。

乘法结构： $\mathsf{C}^{\otimes} = (\mathsf{C}, \otimes, 1, \alpha^{\otimes}, \lambda^{\otimes}, \rho^{\otimes}, \zeta^{\otimes})$ 是一个对称幺半范畴。

乘法零元： $\lambda^{\bullet}$ 和 $\rho^{\bullet}$ 是自然同构

$$0 \otimes A \xrightarrow[\cong]{\lambda^{\bullet}_{A}} 0 \xleftarrow[\cong]{\rho^{\bullet}_{A}} A \otimes 0 \quad \text{for} \quad A \in \mathsf{C}, \tag{2.1.2}$$

分别称为左乘法零元和右乘法零元。

分配律： δ^l 和 δ^r 是自然单态射

$$\begin{aligned} A\otimes(B\oplus C) &\xrightarrow{\delta^l_{A,B,C}} (A\otimes B)\oplus(A\otimes C)\\ (A\oplus B)\otimes C &\xrightarrow{\delta^r_{A,B,C}} (A\otimes C)\oplus(B\otimes C)\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

对于对象 A、B、$C\in\mathsf{C}$，分别称为左分配态射和右分配态射。

我们使用串接来缩写 $\otimes$，并规定 $\otimes$ 的优先级高于 $\oplus$。例如，左分配态射可缩写为 $A(B\oplus C)\longrightarrow AB\oplus AC$。

以下 C 中的 24 个图表称为*Laplaza* 公理，要求对于 C 中所有对象 A、B、C 和 D 均可交换。

分配律与乘法编织：

$$\begin{array}{ccc} (A\oplus B)C & \xrightarrow{\delta^r_{A,B,C}} & AC\oplus BC\\ {\scriptstyle \xi^{\otimes}_{A\oplus B,C}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi^{\otimes}_{A,C}\oplus\xi^{\otimes}_{B,C}}\\ C(A\oplus B) & \xrightarrow{\delta^l_{C,A,B}} & CA\oplus CB\end{array} \tag{2.1.4}$$

分配律与加法编织：

$$\begin{array}{ccc} A(B\oplus C) & \xrightarrow{\delta^l_{A,B,C}} & AB\oplus AC\\ {\scriptstyle 1_A\xi^{\oplus}_{B,C}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi^{\oplus}_{AB,AC}}\\ A(C\oplus B) & \xrightarrow{\delta^l_{A,C,B}} & AC\oplus AB\end{array} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{array}{ccc} (A\oplus B)C & \xrightarrow{\delta^r_{A,B,C}} & AC\oplus BC\\ {\scriptstyle \xi^{\oplus}_{A,B}1_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi^{\oplus}_{AC,BC}}\\ (B\oplus A)C & \xrightarrow{\delta^r_{B,A,C}} & BC\oplus AC\end{array} \tag{2.1.6}$$

分配律和加法结合律：

$$\begin{array}{ccccc} [(A\oplus B)\oplus C]D & \xrightarrow{\delta^r_{A\oplus B,C,D}} & (A\oplus B)D\oplus CD & \xrightarrow{\delta^r_{A,B,D}\oplus 1_{CD}} & (AD\oplus BD)\oplus CD\\ {\scriptstyle \alpha^{\oplus}_{A,B,C}1_D}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\oplus}_{AD,BD,CD}}\\ [A\oplus(B\oplus C)]D & \xrightarrow{\delta^r_{A,B\oplus C,D}} & AD\oplus(B\oplus C)D & \xrightarrow{1_{AD}\oplus\delta^r_{B,C,D}} & AD\oplus(BD\oplus CD)\end{array} \tag{2.1.7}$$

$$\begin{array}{ccccc} A[(B\oplus C)\oplus D] & \xrightarrow{\delta^l_{A,B\oplus C,D}} & A(B\oplus C)\oplus AD & \xrightarrow{\delta^l_{A,B,C}\oplus 1_{AD}} & (AB\oplus AC)\oplus AD\\ {\scriptstyle 1_A\alpha^{\oplus}_{B,C,D}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\oplus}_{AB,AC,AD}}\\ A[B\oplus(C\oplus D)] & \xrightarrow{\delta^l_{A,B,C\oplus D}} & AB\oplus A(C\oplus D) & \xrightarrow{1_{AB}\oplus\delta^l_{A,C,D}} & AB\oplus(AC\oplus AD)\end{array} \tag{2.1.8}$$

分配律和乘法结合律：

$$\begin{array}{ccccc} (AB)(C\oplus D) & & \xrightarrow{\delta^l_{AB,C,D}} & & (AB)C\oplus(AB)D\\ {\scriptstyle \alpha^{\otimes}_{A,B,C\oplus D}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\otimes}_{A,B,C}\oplus\alpha^{\otimes}_{A,B,D}}\\ A[B(C\oplus D)] & \xrightarrow{1_A\delta^l_{B,C,D}} & A(BC\oplus BD) & \xrightarrow{\delta^l_{A,BC,BD}} & A(BC)\oplus A(BD)\end{array} \tag{2.1.9}$$

(2.1.10)
$$\begin{array}{ccccc} [(A\oplus B)C]D & \xrightarrow{\delta^r_{A,B,C}1_D} & (AC\oplus BC)D & \xrightarrow{\delta^r_{AC,BC,D}} & (AC)D\oplus(BC)D \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\otimes}_{A\oplus B,C,D}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\otimes}_{A,C,D}\oplus\alpha^{\otimes}_{B,C,D}} \\ (A\oplus B)(CD) & & \xrightarrow{\qquad\qquad\delta^r_{A,B,CD}\qquad\qquad} & & A(CD)\oplus B(CD) \end{array}$$

(2.1.11)
$$\begin{array}{ccccc} [A(B\oplus C)]D & \xrightarrow{\delta^l_{A,B,C}1_D} & (AB\oplus AC)D & \xrightarrow{\delta^r_{AB,AC,D}} & (AB)D\oplus(AC)D \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\otimes}_{A,B\oplus C,D}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\otimes}_{A,B,D}\oplus\alpha^{\otimes}_{A,C,D}} \\ A[(B\oplus C)D] & \xrightarrow{1_A\delta^r_{B,C,D}} & A(BD\oplus CD) & \xrightarrow{\delta^l_{A,BD,CD}} & A(BD)\oplus A(CD) \end{array}$$

2×2 分配律：

(2.1.12)
$$\begin{array}{ccc} (A\oplus B)(C\oplus D) & \xrightarrow{\delta^r_{A,B,C\oplus D}} & A(C\oplus D)\oplus B(C\oplus D) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta^l_{A\oplus B,C,D}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta^l_{A,C,D}\oplus\delta^l_{B,C,D}} \\ (A\oplus B)C\oplus(A\oplus B)D & & (AC\oplus AD)\oplus(BC\oplus BD) \\ \downarrow{\scriptstyle \delta^r_{A,B,C}\oplus\delta^r_{A,B,D}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\oplus}_{AC,AD,BC\oplus BD}} \\ (AC\oplus BC)\oplus(AD\oplus BD) & & AC\oplus[AD\oplus(BC\oplus BD)] \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^{\oplus}_{AC,BC,AD\oplus BD}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{AC}\oplus(\alpha^{\oplus})^{-1}} \\ AC\oplus[BC\oplus(AD\oplus BD)] & & AC\oplus[(AD\oplus BC)\oplus BD] \\ \downarrow{\scriptstyle 1_{AC}\oplus(\alpha^{\oplus})^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{AC}\oplus(\xi^{\oplus}_{AD,BC}\oplus 1_{BD})} \\ AC\oplus[(BC\oplus AD)\oplus BD] & = & AC\oplus[(BC\oplus AD)\oplus BD] \end{array}$$

0 的乘法零元：

(2.1.13)
$$0\otimes 0 \underset{\rho^{\cdot}_0}{\overset{\lambda^{\cdot}_0}{\rightrightarrows}} 0$$

和的乘法零元：

(2.1.14)
$$\begin{array}{ccc} 0(A\oplus B) & \xrightarrow{\delta^l_{0,A,B}} & 0A\oplus 0B \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda^{\cdot}_{A\oplus B}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^{\cdot}_A\oplus\lambda^{\cdot}_B} \\ 0 & \xleftarrow{\lambda^{\oplus}_0} & 0\oplus 0 \end{array}$$

(2.1.15)
$$\begin{array}{ccc} (A\oplus B)0 & \xrightarrow{\delta^r_{A,B,0}} & A0\oplus B0 \\ \downarrow{\scriptstyle \rho^{\cdot}_{A\oplus B}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\cdot}_A\oplus\rho^{\cdot}_B} \\ 0 & \xleftarrow{\lambda^{\oplus}_0} & 0\oplus 0 \end{array}$$

乘法零元与乘法单位元：

(2.1.16)
$$0\otimes 1 \underset{\rho^{\otimes}_0}{\overset{\lambda^{\cdot}_1}{\rightrightarrows}} 0$$

(2.1.17)
$$1 \otimes 0 \underset{\lambda_0^{\otimes}}{\overset{\rho_1^{\cdot}}{\rightrightarrows}} 0$$

乘法零元的编织：

(2.1.18)
$$\begin{array}{ccc} A \otimes 0 & \xrightarrow{\xi_{A,0}^{\otimes}} & 0 \otimes A \\ & {\scriptstyle \rho_A^{\cdot}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \lambda_A^{\cdot}} & \\ & 0 & \end{array}$$

乘法零元与乘法结合律：

(2.1.19)
$$\begin{array}{ccc} (AB)0 & \xrightarrow{\alpha_{A,B,0}^{\otimes}} & A(B0) \\ {\scriptstyle \rho_{AB}^{\cdot}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_A\rho_B^{\cdot}} \\ 0 & \xleftarrow{\rho_A^{\cdot}} & A0 \end{array}$$

(2.1.20)
$$\begin{array}{ccccc} (A0)B & & \xrightarrow{\alpha_{A,0,B}^{\otimes}} & & A(0B) \\ {\scriptstyle \rho_A^{\cdot}1_B}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle 1_A\lambda_B^{\cdot}} \\ 0B & & & & A0 \\ & {\scriptstyle \lambda_B^{\cdot}} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \rho_A^{\cdot}} & \\ & & 0 & & \end{array}$$

(2.1.21)
$$\begin{array}{ccc} (0A)B & \xrightarrow{\lambda_A^{\cdot}1_B} & 0B \\ {\scriptstyle \alpha_{0,A,B}^{\otimes}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_B^{\cdot}} \\ 0(AB) & \xrightarrow{\lambda_{AB}^{\cdot}} & 0 \end{array}$$

加法零元和乘法零元：

(2.1.22)
$$\begin{array}{ccc} A(0 \oplus B) & \xrightarrow{\delta_{A,0,B}^{l}} & A0 \oplus AB \\ {\scriptstyle 1_A\lambda_B^{\oplus}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_A^{\cdot} \oplus 1_{AB}} \\ AB & \xleftarrow{\lambda_{AB}^{\oplus}} & 0 \oplus AB \end{array}$$

(2.1.23)
$$\begin{array}{ccc} (0 \oplus B)A & \xrightarrow{\delta_{0,B,A}^{r}} & 0A \oplus BA \\ {\scriptstyle \lambda_B^{\oplus}1_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_A^{\cdot} \oplus 1_{BA}} \\ BA & \xleftarrow{\lambda_{BA}^{\oplus}} & 0 \oplus BA \end{array}$$

(2.1.24)
$$\begin{array}{ccc} A(B \oplus 0) & \xrightarrow{\delta_{A,B,0}^{l}} & AB \oplus A0 \\ {\scriptstyle 1_A\rho_B^{\oplus}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{AB} \oplus \rho_A^{\cdot}} \\ AB & \xleftarrow{\rho_{AB}^{\oplus}} & AB \oplus 0 \end{array}$$

(2.1.25)
$$\begin{array}{ccc} (B\oplus 0)A & \xrightarrow{\delta^r_{B,0,A}} & BA\oplus 0A \\ {\scriptstyle \rho^{\oplus}_B 1_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{BA}\oplus\lambda^{\bullet}_A} \\ BA & \xleftarrow{\rho^{\oplus}_{BA}} & BA\oplus 0 \end{array}$$

分配律和乘法单位元：

(2.1.26)
$$\begin{array}{ccc} 1(A\oplus B) & \xrightarrow{\delta^l_{1,A,B}} & 1A\oplus 1B \\ & {\scriptstyle \lambda^{\otimes}_{A\oplus B}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \lambda^{\otimes}_A\oplus\lambda^{\otimes}_B} & \\ & A\oplus B & \end{array}$$

(2.1.27)
$$\begin{array}{ccc} (A\oplus B)1 & \xrightarrow{\delta^r_{A,B,1}} & A1\oplus B1 \\ & {\scriptstyle \rho^{\otimes}_{A\oplus B}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \rho^{\otimes}_A\oplus\rho^{\otimes}_B} & \\ & A\oplus B & \end{array}$$

至此，对称双幺半范畴的定义就完成了。

此外，我们定义如下。

● 若对称双幺半范畴的对象类是一个集合，则称其为小。

● 若 δl 和 δr 都是自然同构，则称对称双幺半范畴为紧 。

● 对象 0 和 1 分别称为<样式 id='1'>加法零元 </样式>和<样式 id='3'>乘法单位元</样式>。

● ⊕ 和 ⊗ 分别称为<样式 id='3'>和 </样式>和<样式 id='5'>积</样式>。

<样式 *id='1'*>● </样式> $\alpha^{\oplus}$<样式 *id='4'*>，</样式> $\lambda^{\oplus}$<样式 *id='7'*>，</样式> $\rho^{\oplus}$<样式 *id='10'*>，以及 </样式> $\zeta^{\oplus}$ <样式 *id='13'*>分别称为</样式>加法结合同构<样式 *id='15'*>、</样式>左加法零元<样式 *id='17'*>、</样式>右加法零元<样式 *id='19'*>和</样式>加法编织<样式 *id='21'*>。</样式>

<样式 *id='1'*>● </样式> $\alpha^{\otimes}$<样式 *id='4'*>，</样式> $\lambda^{\otimes}$<样式 *id='7'*>，</样式> $\rho^{\otimes}$<样式 *id='10'*>，以及 </样式> $\zeta^{\otimes}$ <样式 *id='13'*>分别称为</样式>乘法结合同构<样式 *id='15'*>、</样式>左乘法单位元<样式 *id='17'*>、</样式>右乘法单位元<样式 *id='19'*>和</样式>乘法编织<样式 *id='21'*>。</样式>

由于存在以下公理

● (2.1.4) 关联 δ<样式 id='2'>l </样式>和 δ<样式 id='5'>r </样式>以及

● (2.1.18) 联系 $\lambda_{\bullet}$ 和 $\rho_{\bullet}$,

定义 2.1.1 中的 24 条公理有 12 条可由其余 12 条推出。以下观察见 **[Yau∞I**，2.2.13]。

定理 2.1.28。 对于对称双幺半范畴的定义 *2.1.1*，只需假设十二组公理中每组的第一条公理成立，即(2.1.4)、(2.1.5)、(2.1.7)、(2.1.9)、(2.1.12)、(2.1.13)、(2.1.14)、(2.1.16)、(2.1.18)、(2.1.19)、(2.1.22)和(2.1.26)。

2.2. 双置换范畴

本节将按照 Elmendorf-Mandell **[EM06]** 的定义，回顾双置换范畴。以下论述改编自 **[Yau∞II**，第 9] 章。双置换范畴是一种环范畴，即下文将要定义的环范畴，并具有进一步的结构和公理。环范畴的以下概念源自 **[EM06**，定义 3.3], ，其表述见于 **[Yau∞II**，第 9 节.1]这些概念与对称双幺半范畴（定义 2.1.1）之间的主要区别在于，环范畴和双置换范畴具有

方向与分配态射（2.1.3）相反的因子分解态射。

定义 2.2.1。一个环范畴是一个组元

$$\big(\mathsf{C}, (\oplus, 0, \xi^{\oplus}), (\otimes, 1), (\partial^l, \partial^r)\big)$$

由以下数据组成。

加法结构： $\mathsf{C}^{\oplus} = (\mathsf{C}, \oplus, 0, \xi^{\oplus})$ 是一个置换范畴（定义 1.1.11），其中 $\oplus$、0 和 $\xi^{\oplus}$ 分别称为和、加法零元和加法编织。

乘法结构： $\mathsf{C}^{\otimes} = (\mathsf{C}, \otimes, 1)$ 是一个严格幺半范畴（定义 1.1.3），其中 $\otimes$ 和 1 分别称为积和乘法单位元。

因子分解态射： ∂^l 和 ∂^r 是自然变换

$$\begin{aligned} (A \otimes C) \oplus (B \otimes C) &\xrightarrow{\partial^l_{A,B,C}} (A \oplus B) \otimes C \\ (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) &\xrightarrow{\partial^r_{A,B,C}} A \otimes (B \oplus C) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

对于对象 A、B、$C \in \mathsf{C}$，分别称为左分解态射 和右分解态射。

我们将 $\otimes$ 简写为串接；若没有括号特别说明，则 $\otimes$ 优先于 $\oplus$。例如，左分解态射简写为

$$AC \oplus BC \longrightarrow (A \oplus B)C.$$

有时会省略 $\xi^{\oplus}$、∂^l和 ∂^r 中的下标。

上述数据必须满足以下七条公理，对 C 中的所有对象 A、A'、A''、B、B'、B''、C和C' 均成立，其中$\mathbf{1}$ 表示具有单对象 $*$及其恒等态射的终端范畴。

乘法零元公理： 以下函子图表交换。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} \times \mathsf{C} & \xrightarrow{\cong} & \mathsf{C} & \xleftarrow{\cong} & \mathsf{C} \times \mathbf{1} \\ {\scriptstyle 0 \times 1_{\mathsf{C}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathsf{C}} \times 0} \\ \mathsf{C} \times \mathsf{C} & \xrightarrow{\otimes} & \mathsf{C} & \xleftarrow{\otimes} & \mathsf{C} \times \mathsf{C} \end{array} \tag{2.2.3}$$

在 (2.2.3) 中，顶部的水平同构去掉了自变量$\mathbf{1}$。每个 0 都表示取值于 $0 \in \mathsf{C}$ 和 1_0处的常值函子。

零分解公理：

$$\begin{aligned} \partial^l_{0,B,C} &= 1_{B \otimes C} & \partial^r_{0,B,C} &= 1_0 \\ \partial^l_{A,0,C} &= 1_{A \otimes C} & \partial^r_{A,0,C} &= 1_{A \otimes C} \\ \partial^l_{A,B,0} &= 1_0 & \partial^r_{A,B,0} &= 1_{A \otimes B} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

∂^l 的三个等式称为左零因子分解公理。∂^r 的三个等式称为右零因子分解公理。

单位分解公理：

$$\partial^l_{A,B,\mathbf{1}} = 1_{A\oplus B} \qquad \partial^r_{\mathbf{1},B,C} = 1_{B\oplus C} \tag{2.2.5}$$

它们分别称为左单位分解公理和右单位分解公理。

编织分解公理： C 中的下列两个图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} AC\oplus BC & \xrightarrow{\partial^l} & (A\oplus B)C \\ {\scriptstyle \xi^{\oplus}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi^{\oplus}1_C} \\ BC\oplus AC & \xrightarrow{\partial^l} & (B\oplus A)C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} AB\oplus AC & \xrightarrow{\partial^r} & A(B\oplus C) \\ {\scriptstyle \xi^{\oplus}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_A\xi^{\oplus}} \\ AC\oplus AB & \xrightarrow{\partial^r} & A(C\oplus B) \end{array} \tag{2.2.6}$$

它们分别称为左对称分解公理和右对称分解公理。

内部分解公理： C 中的下列两个图表可交换。(2.2.7)

$$\begin{array}{ccc} AB\oplus A'B\oplus A''B & \xrightarrow{\partial^l\oplus 1} & (A\oplus A')B\oplus A''B \\ {\scriptstyle 1\oplus\partial^l}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^l} \\ AB\oplus(A'\oplus A'')B & \xrightarrow{\partial^l} & (A\oplus A'\oplus A'')B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} AB\oplus AB'\oplus AB'' & \xrightarrow{\partial^r\oplus 1} & A(B\oplus B')\oplus AB'' \\ {\scriptstyle 1\oplus\partial^r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^r} \\ AB\oplus A(B'\oplus B'') & \xrightarrow{\partial^r} & A(B\oplus B'\oplus B'') \end{array}$$

它们分别称为左内部分解公理和右内部分解公理。

外部分解公理： 下方 C 中的三个图表均可交换。

$$\begin{array}{ccc} ABC\oplus A'BC & \xrightarrow{\partial^l_{A,A',BC}} & (A\oplus A')BC \\ {\scriptstyle \partial^l_{AB,A'B,C}}\downarrow & & \| \\ (AB\oplus A'B)C & \xrightarrow{\partial^l_{A,A',B}1_C} & (A\oplus A')BC \end{array} \tag{2.2.8}$$

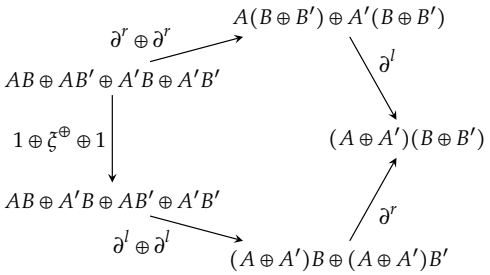
$$\begin{array}{ccc} ABC\oplus AB'C & \xrightarrow{\partial^l_{AB,AB',C}} & (AB\oplus AB')C \\ {\scriptstyle \partial^r_{A,BC,B'C}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^r 1_C} \\ A(BC\oplus B'C) & \xrightarrow{1_A\partial^l_{B,B',C}} & A(B\oplus B')C \end{array} \tag{2.2.9}$$

$$\begin{array}{ccc} ABC\oplus ABC' & \xrightarrow{\partial^r_{AB,C,C'}} & AB(C\oplus C') \\ {\scriptstyle \partial^r_{A,BC,BC'}}\downarrow & & \| \\ A(BC\oplus BC') & \xrightarrow{1_A\partial^r_{B,C,C'}} & AB(C\oplus C') \end{array} \tag{2.2.10}$$

它们分别称为左、中和右外部分解公理。

2×2 分解公理： C 中的下图是可交换图。

(2.2.11)



至此，环范畴的定义完成。

此外，上述环范畴称为

- 小，如果它的对象构成一个集合，并且
- 紧，如果 (2.2.2) 中的 ∂_l 和 ∂_r 是自然同构。

双置换范畴这一概念源自 [**EM06**，定义 3.6],，其表述见 [**Yau∞II**，第 9.3] 节。

定义 2.2.12. 一个 双置换范畴是一个元组

$$\big(\mathsf{C},(\oplus,0,\xi^{\oplus}),(\otimes,1,\xi^{\otimes}),(\partial^l,\partial^r)\big)$$

由以下数据组成。

- 元组
$$\big(\mathsf{C},(\oplus,0,\xi^{\oplus}),(\otimes,1),(\partial^l,\partial^r)\big)$$
是一个环范畴（定义 2.2.1）。
- 元组 $\mathsf{C}^{\otimes}=(\mathsf{C},\otimes,1,\xi^{\otimes})$ 是一个置换范畴（定义 1.1.11），其中 $\xi^{\otimes}$ 称为乘法编织。

上述数据必须满足以下两个关于对象A、B、$C\in\mathsf{C}$ 的公理。

零编织公理： 存在一个态射等式

$$\xi^{\otimes}_{A,0}=1_0:A\otimes 0=0\longrightarrow 0=0\otimes A. \tag{2.2.13}$$

乘法编织分解公理： 下图交换。

(2.2.14)

$$\begin{array}{ccc}(A\otimes C)\oplus(B\otimes C) & \xrightarrow{\partial^l_{A,B,C}} & (A\oplus B)\otimes C\\ \downarrow{\scriptstyle \xi^{\otimes}_{A,C}\oplus\xi^{\otimes}_{B,C}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi^{\otimes}_{A\oplus B,C}}\\ (C\otimes A)\oplus(C\otimes B) & \xrightarrow{\partial^r_{C,A,B}} & C\otimes(A\oplus B)\end{array}$$

至此，双置换范畴的定义完成。如果底层环范畴是小的，相应地，如果是紧的，则双置换范畴也称为小、相应地紧。

说明 2.2.15。 考虑双置换范畴的定义 2.2.12。

(1) 双置换范畴 C 具有

- 一个置换范畴 $(\mathsf{C},\oplus,0,\xi^{\oplus})$ 作为其加法结构，以及
- 一个置换范畴 $(\mathsf{C},\otimes,1,\xi^{\otimes})$ 作为其乘法结构。这证明了双置换范畴这一名称的合理性。

（2）根据置换范畴 $(\mathsf{C}, \xi^{\otimes})$ 中的对称公理 (1.1.12)，零编织公理 (2.2.13) 等价于如下等式

$$\xi^{\otimes}_{0,A} = 1_0 : 0 \otimes A = 0 \longrightarrow 0 = A \otimes 0.$$

态射。

双置换范畴并不 构成对称双幺半范畴的子类，反之亦然，因为

- (2.1.3) 中的分配态射 δ_l 和 δ_r 以及
- (2.2.2) 中的分解态射 ∂_l 和 ∂_r

通常并不可逆。另一方面，紧双置换范畴——也就是说，其中的 ∂^l 和 ∂^r 可逆——构成紧对称双幺半范畴的一个子类。以下结果见 [**Yau∞II**，9.3.7]。

定理 2.2.16。 以下两者之间存在典范双射对应：

(1) 定义 *2.2.12* 中的紧双置换范畴类，以及 *(2)* 定义 *2.1.1* 中具有以下结构的紧对称双幺半范畴类：

- 作为加法结构的置换范畴，
- 作为乘法结构的置换范畴，以及
- $\lambda_\bullet = 1$ 和 $\rho_\bullet = 1$。

以下两者之间的对应关系

- (2.2.2) 中的分解态射 ∂l 和 ∂r，以及
- (2.1.3)中的分配态射 δl 和 δr

由以下等式给出

$$\delta^l = (\partial^r)^{-1} \quad and \quad \delta^r = (\partial^l)^{-1}. \tag{2.2.17}$$

在定理 2.2.16 给出的双射对应中，加法结构 $(\mathsf{C}, \oplus, 0, \xi^{\oplus})$ 和乘法结构 $(\mathsf{C}, \otimes, 1, \xi^{\otimes})$ 保持不变。利用定理 2.2.16，我们将紧双置换范畴与相应的紧对称双幺半范畴的子类相对应，其中分配态射由 (2.2.17) 给出。

2.3. 双置换范畴的例子

本节讨论若干小型紧对称双幺半范畴，根据定理 2.2.16，它们也都是小型紧双置换范畴。

(1) 在例 2.3.2 中，底层范畴是 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$，它由有限集 $\{1, \ldots, n\}$ 及其函数构成。这是本节中最基本的例子。之后的每个例子都会重用它的对称双幺半结构。

(2) 在例 2.3.11 中，底层范畴是 Σ，即 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 中由置换构成的子范畴。(3) 例 2.3.12 中的 F 是 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 的带基点变体，其对象为带基点有限集，态射为带基点函数。这是 Γ-范畴的指标范畴（定义 9.1.11），也是 Segal K-理论的基础部分；参见 [**JY∞a**，第 8] 章。

(4) 例 2.3.17 将 Mandell 的范畴 A 描述为一个对称双幺半范畴，见 [**Man 10**] 。A 上的这一结构正是逆 K-理论成为伪对称 Cat-多函子的根本原因，我们将在第10章讨论这一点。

此外，在这些小紧对称双幺半范畴中，每个范畴都满足以下陈述：

- 加性结构和乘法结构都是置换范畴。
- 左乘法零元、右乘法零元和左分配态射都是恒等变换。
- 右分配态射是一个非恒等的自然同构。

根据定理 2.2.16，这些小紧对称双幺半范畴也都是小紧双置换范畴，其分解态射定义如下：

$$\partial^l = (\delta^r)^{-1} \quad \text{and} \quad \partial^r = (\delta^l)^{-1}. \tag{2.3.1}$$

含有n 个元素的对称群记为 Σ_n。

例 2.3.2 （有限集）。 存在一个小的紧对称双幺半范畴 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ ，由以下数据给出。上标 sk 表示范畴 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 是所有有限集及其函数构成的范畴的一个骨架。

范畴： 其对象集为$_{\mathbb{N}}$，即自然数集。对于每个$n \in {}_{\mathbb{N}}$，记

$$\overline{n} = \begin{cases} \{1, \dots, n\} & \text{if } n \geq 1, \\ \varnothing & \text{if } n = 0 \end{cases} \tag{2.3.3}$$

具有n 个元素的无基点有限集。为简化表述，我们将对象$n \in \mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 与n等同。$\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 中的态射是无基点有限集之间的函数：

$$\mathsf{Fin}^{\mathrm{sk}}(\overline{m}, \overline{n}) = \mathsf{Set}(\overline{m}, \overline{n}).$$

态射复合由函数复合给出。

加法结构： 在对象上通过取余积给出：

$$\overline{m} \oplus \overline{n} = \overline{m+n} = \overline{m} \coprod \overline{n}.$$

- 利用余积将其扩展到态射上。
- 和 $\oplus$ 严格结合，严格加法零元为空集 $\overline{0} = \varnothing$。

加法编织

$$\overline{m} \oplus \overline{n} \xrightarrow{\xi^{\oplus}_{m,n}} \overline{n} \oplus \overline{m} \tag{2.3.4}$$

是 Σ_{m+n} 中的块交换，由下式给出

$$\xi^{\oplus}_{m,n}(k) = \begin{cases} n+k & \text{if } 1 \leq k \leq m, \\ k-m & \text{if } m+1 \leq k \leq m+n. \end{cases}$$

它将前m 个元素与最后n 个元素互换。

乘法结构： 在对象上的定义是取积，并采用先比较第二个条目的字典序：

$$\overline{m}\otimes\overline{n}=\overline{mn}=\langle\langle i+(j-1)m\rangle_{i=1}^{m}\rangle_{j=1}^{n}. \tag{2.3.5}$$

● 它通过如下对应扩展到态射

$$\overline{m}\times\overline{n}\ni(i,j)\ \longleftrightarrow\ i+(j-1)m\in\overline{mn}.$$

● 积 $\otimes$ 严格结合，并具有严格乘法单位元 1。

乘法编织

$$\overline{m}\otimes\overline{n}\xrightarrow{\ \xi^{\otimes}_{m,n}\ }\overline{n}\otimes\overline{m} \tag{2.3.6}$$

是 转置置换在 Σ_{mn} 由下式给出

$$\xi^{\otimes}_{m,n}\big(i+(j-1)m\big)=j+(i-1)n$$

对于 $1\le i\le m$ 和 $1\le j\le n$。将 $m\otimes n$ 视为一个 $n\times m$ 矩阵，其 (j,i)-元素 $i+(j-1)m$，乘法编织 $\xi^{\otimes}_{m,n}$ 在 (2.3.6) 中对应取 g 该变 pose.

M乘法零元： $\lambda^{\bullet}$ 和 $\rho^{\bullet}$ 都是恒等自然变换 .

分配律： 左分配态射是恒等函数

$$\overline{m}\otimes(\overline{n}\oplus\overline{p})\ \xrightarrow[=]{\ \delta^{l}_{m,n,p}\ }\ (\overline{m}\otimes\overline{n})\oplus(\overline{m}\otimes\overline{p}). \tag{2.3.7}$$

右分配态射

$$(\overline{m}\oplus\overline{n})\otimes\overline{p}\ \xrightarrow[\cong]{\ \delta^{r}_{m,n,p}\ }\ (\overline{m}\otimes\overline{p})\oplus(\overline{n}\otimes\overline{p}) \tag{2.3.8}$$

是 $\Sigma_{(m+n)p}$ 中的俄罗斯方块置换，定义如下：

$$\begin{cases}\delta^{r}_{m,n,p}\big(i+(k-1)(m+n)\big)=i+(k-1)m\\ \delta^{r}_{m,n,p}\big(j+m+(k-1)(m+n)\big)=j+(k-1)n+pm\end{cases} \tag{2.3.9}$$

对于 $1\le i\le m$、$1\le j\le n$ 和 $1\le k\le p$。将 $(m\oplus n)\otimes p$ 视为一个 $\overline{p}\times(m+n)$ 矩阵，其形式为 $[A\,|\,B]$，其中

● A 由前m 列组成的 $p\times m$ 矩阵，且 d

● B 由最后n 列组成的 $p\times n$ 矩阵，

$\delta^{r}_{m,n,p}$ 将矩阵 $[A\,|\,B]$ 重新排列为数组 $\left[\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right]$，同时保持 A 和 B 中各项的顺序不变。(2.3.9) 中的两行分别对应于 $\delta^{r}_{m,n,p}$ 作用在A中的 (k,i) 项上，以及作用在B中的 (k,j) 项上。

至此，Fin^{sk}的构造完成。

定义 2.1.1 中关于 Fin^{sk} 的所有对称双幺半范畴公理都由以下事实推出：

- $\lambda_{\bullet}$、$\rho_{\bullet}$和 δ_{l} 是恒等自然变换，
- $\xi^{\oplus}$ 是块交换，并且
- $\xi^{\otimes}$ 和 δ_{r} 各自的矩阵描述。

例如，$\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$ 的公理 (2.1.4) 表示以下图表的交换性，其中 p、q、r 属于 $\mathbb{И}$。

$$\begin{array}{ccc} (\overline{p}\oplus\overline{r})\otimes\overline{q} & \xrightarrow{\delta^{r}_{p,r,q}} & (\overline{p}\otimes\overline{q})\oplus(\overline{r}\otimes\overline{q}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi^{\otimes}_{p+r,q}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi^{\otimes}_{p,q}\oplus\xi^{\otimes}_{r,q}} \\ \overline{q}\otimes(\overline{p}\oplus\overline{r}) & \xrightarrow[=]{\delta^{l}_{q,p,r}} & (\overline{q}\otimes\overline{p})\oplus(\overline{q}\otimes\overline{r}) \end{array} \tag{2.3.10}$$

如上所述，我们将 $(p \mathbin{\overline{\oplus}} r)^{\overline{}}\otimes q$ 视为一个形如 $[A\,|\,B]$ 的 $q\times(p+r)$ 矩阵，其中

- A 由前p 列组成的$q\times p$ 矩阵，以及
- B 由最后r 列组成的$q\times r$ 矩阵。

于是，(2.3.10) 中的 $\xi^{\otimes}_{p+r,q}$ 将矩阵 $[A\,|\,B]$ 转置为矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} A^{T} \\ B^{T}\end{smallmatrix}\right]$，其中$\underline{A}^{T}$ 和 B^{T} 分别表示A 和B的转置。另一方面，(2.3.10) 中右上方的复合将矩阵 $[A\,|\,B]$重新排列

- first to the array $\left[\begin{smallmatrix} A \\ B\end{smallmatrix}\right]$ and
- then to the matrix $\left[\begin{smallmatrix} A^{T} \\ B^{T}\end{smallmatrix}\right]$ by taking the transpose of each of A and B.

这证明 (2.3.10) 是交换的。(2.1.5) 至 (2.1.7) 以及 (2.1.10) 至 (2.1.12) 中的公理也可用类似方式验证。在定义 2.1.1 中关于 $\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$ 的其他每条公理里，每个态射都是恒等态射。

$\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$ 的加法结构和乘法结构都是置换范畴，两个分配态射均可逆，且乘法零元严格。根据定理 2.2.16，$\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$ 是一个小紧双置换范畴，其分解态射如 (2.3.1) 所示。

将 $\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$ 中的态射限制为仅包含置换，我们得到以下例子。

例 2.3.11 （对称群）。 存在一个由以下数据给出的小紧对称双幺半范畴 Σ。

范畴： 其对象集为 $\mathbb{И}$，即自然数集合。对于 m、$n\in\mathbb{И}$，态射集为

$$\Sigma(m,n)=\begin{cases}\Sigma_{n} & \text{if } m=n,\\ \varnothing & \text{if } m\neq n.\end{cases}$$

对称双幺半结构： 它是例 2.3.2 中 $\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$ 的对称双幺半结构在置换上的限制。此定义良好，因为

- $\xi^{\oplus}$ (2.3.4)、$\xi^{\otimes}$ (2.3.6) 和 δ_{r} (2.3.8) 都是置换，并且
- $\lambda_{\bullet}$、$\rho_{\bullet}$和 δ_{l} (2.3.7)是恒等函数。

该例在 [**Yau∞I**第 2.4] 节中有详细讨论。根据定理 2.2.16 Σ 是一个小紧双置换范畴，其因子分解态射如 (2.3.1) 所示。

下一个例子是 $\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$ 的带基点变体。在第 9 章和第 10 章关于逆K-理论的讨论中，它用于定义 Γ-范畴（定义 9.1.11）。

例 2.3.12 （带基点有限集）。 有一个小的紧对称双幺半范畴 F，由以下数据给出。

范畴： 其对象是带基点的 有限集

$$\underline{n} = \{0, \dots, n\} \quad \text{for} \quad n \geq 0 \tag{2.3.13}$$

带基点 0。其态射是带基点的 函数，也就是说，保持基点 0 不变的函数。

加法结构： 在对象上由楔和给出

$$\underline{m} \vee \underline{n} = \underline{m+n}.$$

● 它是将m 和n 中的基点识别后，对不交并取商所得。

● 它通过楔和扩展到态射上。

● 楔和严格结合，其严格加法零元为 0。

加法编织

$$\underline{m} \vee \underline{n} = \underline{m+n} \xrightarrow{\xi^{\vee}_{\underline{m},\underline{n}}} \underline{n+m} = \underline{n} \vee \underline{m}$$

将 0 映到 0；对于 $m+n$ 中的非零元素，它由 Fin^{sk} (2.3.4) 中 $\xi^{\oplus}_{m,n}$ 的块交换给出。

乘法结构： 它在对象上由楔积给出

$$\underline{m} \wedge \underline{n} = \underline{mn}.$$

● 它是积 $m \times n$ 的商，其中 $(x,0)$ 和 $(\underline{0}, y)$ 与 $0 \in mn$ 等同，其中 $x \in m$ 且 $y \in n$。

● 对于 $1 \leq i \leq m$ 和 $1 \leq j \leq n$，我们使用如下识别

$$\underline{m} \wedge \underline{n} \ni (i,j) = i + (j-1)m \in \underline{mn}$$

如 (2.3.5) 中所示。

● 利用保持基点条件，并对非基点元素使用表达式 $i+(j-1)m$，将其扩展到带基点函数。

● 楔积严格结合，其严格乘法单位元为 1。

乘法编织

$$\underline{m} \wedge \underline{n} = \underline{mn} \xrightarrow{\xi^{\wedge}_{\underline{m},\underline{n}}} \underline{nm} = \underline{n} \wedge \underline{m} \tag{2.3.14}$$

将 0 映为 0；对于 mn 中的非零元素，则由 Fin^{sk} (2.3.6) 中的转置置换 $\xi^{\otimes}_{m,n}$ 给出。

乘法零元： $\lambda^{\bullet}$ 和 $\rho^{\bullet}$ 都是恒等自然变换。

分配律： 左分配态射是恒等函数

$$\underline{m} \wedge (\underline{n} \vee \underline{p}) \xrightarrow[=]{\delta^{l}_{\underline{m},\underline{n},\underline{p}}} (\underline{m} \wedge \underline{n}) \vee (\underline{m} \wedge \underline{p}). \tag{2.3.15}$$

右分配态射

$$(\underline{m} \vee \underline{n}) \wedge \underline{p} \xrightarrow[\cong]{\delta^{r}_{\underline{m},\underline{n},\underline{p}}} (\underline{m} \wedge \underline{p}) \vee (\underline{n} \wedge \underline{p}) \tag{2.3.16}$$

将 0 映到 0，并由 $\delta^{r}_{m,n,p}$ in Fin^{sk} (2.3.8) 给出，用于 $(m+n)p$ 中的非零元素。

F 的对称双幺半范畴公理由例 2.3.2 中 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 的公理推出。根据定理 2.2.16，F 是一个小紧双置换范畴，其分解态射如 (2.3.1) 所示。在 [**JY∞a** 中，Ch. 8] 使用乘法结构 (F, ∧, 1) 定义 Segal K-理论。然而，在 [**JY∞a** 中，8.1.5] 楔积 $m \wedge n$ 使用的字典序是先比较第一项。这里$m \wedge n$ 采用先比较第二项的字典序定义。

下一个例子对于我们在第 9 章和第 10 章讨论逆K理论至关重要。

例 2.3.17 （Mandell 的逆K理论范畴）。 有一个由以下数据给出的小的紧对称双幺半范畴 A。

范畴： A 中的对象是正整数的有限序列。空序列记作 或 ∅。采用式 (2.3.3) 中无基点有限集的记号，一个态射

$$m = (m_1, \dots, m_p) \xrightarrow{\phi} (n_1, \dots, n_q) = n \quad \text{in} \quad \mathcal{A} \tag{2.3.18}$$

是无基点有限集之间的函数

$$\coprod_{i=1}^{p} \overline{m_i} \xrightarrow{\phi} \coprod_{j=1}^{q} \overline{n_j} \tag{2.3.19}$$

使得每个n_j 的原像要么为空，要么包含于单个m_i中，其中指标i 由指标j确定。不过请注意，每个m_i 可以映到多个不同的n_j。范畴 A 是 Mandell 的逆K理论指标范畴 [**Man10**]；另见 [**JY22b**] 以及第 9 章和第 10 章。

加法结构： 如 (2.3.18) 中的对象 m 和 n ，和由有限序列的串接给出：

$$m \oplus n = (m_1, \dots, m_p, n_1, \dots, n_q).$$

- 通过取函数的余积，将其扩展到态射上。
- 和 ⊕ 严格结合，严格加法零元为 y 空序列 。

加法编织

$$m \oplus n \xrightarrow{\beta^{\oplus}_{m,n}} n \oplus m \tag{2.3.20}$$

是 (2.3.4) 中 $\Sigma_{\mathtt{m+n}}$ 的块交换

$$\overline{\mathtt{m}+\mathtt{n}} = \Big(\coprod_{i=1}^{p} \overline{m_i}\Big) \amalg \Big(\coprod_{j=1}^{q} \overline{n_j}\Big) \xrightarrow{\zeta^{\oplus}_{\mathtt{m},\mathtt{n}}} \Big(\coprod_{j=1}^{q} \overline{n_j}\Big) \amalg \Big(\coprod_{i=1}^{p} \overline{m_i}\Big) = \overline{\mathtt{n}+\mathtt{m}}$$

其中

$$\mathtt{m} = m_1 + \cdots + m_p \quad \text{and} \quad \mathtt{n} = n_1 + \cdots + n_q. \tag{2.3.21}$$

等价地，

$$\beta^{\oplus}_{m,n} = \overline{\zeta^{\oplus}_{p,q}}$$

是由 (2.3.4) 中的块交换 $\zeta^{\oplus}_{p,\,q} \in \Sigma_{p+q}$ 所诱导的块置换，它置换长度为 $\{m_1, \dots\dots, m_p, n_1, \dots\dots, n_q\}$ 的 $p+q$ 个块。

乘法结构： 取 (2.3.18) 中的对象m 和n ，其积定义为

$$m \otimes n = \langle\langle m_i n_j \rangle_{i=1}^{p} \rangle_{j=1}^{q}. \tag{2.3.22}$$

我们将$m \otimes n$ 视为$q \times p$ 矩阵，其（j,i）项为$m_i n_j$，它也可视为无基点有限集$m_i \times n_j = m_i n_j$。

为定义 $\otimes$ 在态射上的作用，设 A 中给定如下态射。

$$\begin{aligned} m = (m_1, \dots, m_p) &\xrightarrow{\ \phi\ } (m'_1, \dots, m'_r) = m' \\ n = (n_1, \dots, n_q) &\xrightarrow{\ \psi\ } (n'_1, \dots, n'_s) = n' \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

态射

$$\langle\langle m_i n_j \rangle_i \rangle_j = m \otimes n \xrightarrow{\ \phi\otimes\psi\ } m' \otimes n' = \langle\langle m'_k n'_\ell \rangle_k \rangle_\ell \quad \text{in} \quad \mathcal{A}$$

是函数

$$\coprod_{j=1}^{q} \coprod_{i=1}^{p} \overline{m_i n_j} \xrightarrow{\ (\phi,\psi)\ } \coprod_{\ell=1}^{s} \coprod_{k=1}^{r} \overline{m'_k n'_\ell}$$

由下式给出

$$(\phi,\psi)(x,y) = (\phi x, \psi y) \quad \text{for} \quad (x,y) \in \overline{m_i n_j}.$$

在此定义中，$m_i n_j$ 和$m'_k n'_\ell$ 中~~的每~~一个都采用 (2.3.5) 中的字典序排列，先比较第二个条目。

积 $\otimes$ 严格结合，其严格乘法单位元为长度为 1 的序列 (1)。乘法编织

$$\langle\langle m_i n_j \rangle_i \rangle_j = m \otimes n \xrightarrow{\ \beta^{\otimes}_{m,n}\ } n \otimes m = \langle\langle n_j m_i \rangle_j \rangle_i \tag{2.3.24}$$

是复合双射

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{j=1}^{q} \coprod_{i=1}^{p} \overline{m_i n_j} & \xrightarrow{\ \beta^{\otimes}_{m,n}\ } & \coprod_{i=1}^{p} \coprod_{j=1}^{q} \overline{n_j m_i} \\ & {\scriptstyle \overline{\zeta^{\otimes}_{p,q}}} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \coprod_{i,j} \zeta^{\otimes}_{m_i,n_j}} & \\ & \coprod_{i=1}^{p} \coprod_{j=1}^{q} \overline{m_i n_j} & \end{array}$$

由下式给出

$$\beta^{\otimes}_{m,n}(x,y) = (y,x) \in \overline{n_j m_i} \quad \text{for} \quad (x,y) \in \overline{m_i n_j}.$$

● 令 $\mathrm{m} = m_1 + \cdots + m_p$ 和 $\mathrm{n} = n_1 + \cdots + n_q$ 如 (2.3.21) 中所示，$\overline{\zeta^{\otimes}_{p,q}} \in \Sigma_{\mathrm{mn}}$ 是由 (2.3.6) 中的转置置换 $\zeta^{\otimes}_{p,q} \in \Sigma_{pq}$ 诱导的块置换，它置换了 pq 个长度为 $\{\{m_i n_j\}_{p\ i=1}\}_{q\ j=1}$ 的块。

● 对每个 $1 \le i \le p$ 和每个 $1 \le j \le q$，$\zeta^{\otimes}_{m_i,n_j} \in \Sigma_{m_i n_j}$ 是 (2.3.6) 中的转置置换。

乘法零元： $\lambda^\bullet$ 和 $\rho^\bullet$ 都是恒等自然变换。这是良定义的，因为存在对象等式

$$m \otimes \langle\rangle = \langle\rangle = \langle\rangle \otimes m \quad \text{for} \quad m \in \mathcal{A}.$$

分配律： 设m、m'、n和n' 是 A 中如 (2.3.23) 所示的对象。左分配态射是恒等态射

$$m \otimes (n \oplus n') \xrightarrow[=]{\delta^{l}_{m,n,n'}} (m \otimes n) \oplus (m \otimes n'). \tag{2.3.25}$$

令 m 和 n 如（2.3.21）中所示，并令 $\mathtt{m}' = m'_1 + \cdots + m'_r$，则右分配态射

$$(m \oplus m') \otimes n \xrightarrow[\cong]{\delta^{r}_{m,m',n}} (m \otimes n) \oplus (m' \otimes n) \tag{2.3.26}$$

是 $\Sigma_{(\mathtt{m}+\mathtt{m}')\mathtt{n}}$ 中的块置换

$$\coprod_{j=1}^{q}\left[\left(\coprod_{i=1}^{p}\overline{m_i n_j}\right)\amalg\left(\coprod_{k=1}^{r}\overline{m'_k n_j}\right)\right] \xrightarrow{\overline{\delta^{r}_{p,r,q}}} \left(\coprod_{j=1}^{q}\coprod_{i=1}^{p}\overline{m_i n_j}\right)\amalg\left(\coprod_{j=1}^{q}\coprod_{k=1}^{r}\overline{m'_k n_j}\right)$$

它由俄罗斯方块置换（2.3.8）诱导

$$(\overline{p} \oplus \overline{r}) \otimes \overline{q} \xrightarrow[\cong]{\delta^{r}_{p,r,q}} (\overline{p} \otimes \overline{q}) \oplus (\overline{r} \otimes \overline{q})$$

该置换将长度为的 $(p+r)q$ 个块进行置换

$$\left\{\{m_i n_j\}_{i=1}^{p}, \{m'_k n_j\}_{k=1}^{r}\right\}_{j=1}^{q}.$$

至此，A 的构造完成。

范畴 A 的定义 2.1.1 中的对称双幺半范畴公理，可由例 2.3.2 中 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 的公理应用于诱导块置换而得。更明确地说，对于 (2.3.23) 中的对象 $m,m',n \in \mathrm{A}$，公理 (2.1.4) 表明下图是交换图表。

$$\begin{array}{ccc}
(m \oplus m') \otimes n & \xrightarrow{\delta^{r}_{m,m',n}} & (m \otimes n) \oplus (m' \otimes n) \\
{\scriptstyle \beta^{\otimes}_{m\oplus m',n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta^{\otimes}_{m,n} \oplus \beta^{\otimes}_{m',n}} \\
n \otimes (m \oplus m') & \xrightarrow[=]{\delta^{l}_{n,m,m'}} & (n \otimes m) \oplus (n \otimes m')
\end{array}$$

前一图表中的两个复合分别是以下两个复合函数，其中余积指标分别遍历 $i \in \{1, \ldots, p\}$、$j \in \{1, \ldots, q\}$ 和 $k \in \{1, \ldots, r\}$。

$$\begin{array}{ccc}
\amalg_j\left[\left(\amalg_i \overline{m_i n_j}\right)\amalg\left(\amalg_k \overline{m'_k n_j}\right)\right] & \xrightarrow{\overline{\delta^{r}_{p,r,q}}} & \left(\amalg_j \amalg_i \overline{m_i n_j}\right)\amalg\left(\amalg_j \amalg_k \overline{m'_k n_j}\right) \\
{\scriptstyle \overline{\zeta^{\otimes}_{p+r,q}}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \overline{\zeta^{\otimes}_{p,q}} \sqcup \overline{\zeta^{\otimes}_{r,q}}} \\
& \left(\amalg_i \amalg_j \overline{m_i n_j}\right)\amalg\left(\amalg_k \amalg_j \overline{m'_k n_j}\right) & \\
& {\scriptstyle (\sqcup_{i,j}\zeta^{\otimes}_{m_i,n_j})\sqcup}\downarrow{\scriptstyle (\sqcup_{k,j}\zeta^{\otimes}_{m'_k,n_j})} & \\
& \left(\amalg_i \amalg_j \overline{n_j m_i}\right)\amalg\left(\amalg_k \amalg_j \overline{n_j m'_k}\right) &
\end{array}$$

在前面的图表中，顶部三角形由 (2.3.10) 可交换；这是将 (2.1.4) 这一公理应用于诱导块置换后，对 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 得到的结果。这证明了 A 满足公理 (2.1.4)。唯一涉及乘法编织的其他公理是 (2.1.18)，它在 A 中成立，因为 $\lambda^{\bullet}$ 和 $\rho^{\bullet}$ 都是恒等自然变换。A 的定义 2.1.1 中其余所有公理也都成立，因为它们对 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 成立，

并且是将其应用于诱导块置换后得到的。由定理 2.2.16，A 是一个小的紧双乘法范畴，其分解态射如 (2.3.1) 所示。

2.4. Laplaza 相干定理

本节回顾对称双幺半范畴的 Laplaza 相干定理 2.4.18 **[Lap72a]**的陈述。详细证明以及对原始论证的修正见 **[Lap72a]**, **[Yau∞I**，第3]章。该相干定理的陈述需要先给出一些关于图的预备定义，我们先讨论这些定义。

初等图。

定义 2.4.1。 设S是一个集合。S的自由 $\{\oplus,\otimes\}$代数 是按以下两个条件归纳定义的集合S_{fr}。

- $S \subset S_{\mathrm{fr}}$。
- 若$a,b \in S_{\mathrm{fr}}$，则这些符号

$$a \oplus b \text{ 和 } a \otimes b$$

也属于S_{fr}。它们分别称为a 与b的和和积。

为简化表述，我们有时将$a \otimes b$ 简写为ab。若没有明确的括号说明，$\otimes$ 的优先级高于 $\oplus$。

定义 2.4.2. 一个图 $G = (V,E)$是由以下数据组成的一对。

- V 是一个类。V 中的元素称为 G中的顶点。
- E 为每个有序对（u,v）赋予一个集合$u,v \in V$，记作$E(u,v)$。其中的元素称为一条边，其定义域为 u，陪域为 v。我们也将这样的边记作

$$u \longrightarrow v, \quad e : u \longrightarrow v, \quad \text{or} \quad u \xrightarrow{e} v$$

如果e 是这条边的名称。

此类图中的一条路径是一个非空的有限边序列（$e_n, \ldots, e_1$），如

$$v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_n} v_n.$$

这样的路径记作$v_0\, v_n$，称其~~长度为~~ n，定义域为v_0，，陪域为v_n。

例 2.4.3。 每个范畴 C 都有一个关联图（V,E），其中V 是 C 的对象类，而对于 C 中的对象 u、$v \in v$，$E(u,v) = \mathrm{C}(u,v)$。C 中非空的有限可复合态射序列会在关联图中生成一条路径。

定义 2.4.4. 设X 是一个集合，带有两个指定元素 0^X 和 1^X，分别称为加性零和乘法单位元。X 的初等图记作 $\mathrm{Gr_{el}}(X)$，是按如下方式定义的图。

顶点： $\mathrm{Gr_{el}}(X)$ 中顶点的集合是由 X_{fr} 生成的自由 $\{\oplus,\otimes\}$-代数。**边：** 对于所有 x、y、$z \in X_{\mathrm{fr}}$，$\mathrm{Gr_{el}}(X)$ 中的边属于以下类型。

加法结构：

$$(x \oplus y) \oplus z \underset{\alpha^{-\oplus}_{x,y,z}}{\overset{\alpha^{\oplus}_{x,y,z}}{\rightleftarrows}} x \oplus (y \oplus z) \qquad x \oplus y \underset{\xi^{-\oplus}_{x,y}}{\overset{\xi^{\oplus}_{x,y}}{\rightleftarrows}} y \oplus x$$

$$0^X \oplus x \underset{\lambda^{-\oplus}_{x}}{\overset{\lambda^{\oplus}_{x}}{\rightleftarrows}} x \underset{\rho^{-\oplus}_{x}}{\overset{\rho^{\oplus}_{x}}{\rightleftarrows}} x \oplus 0^X$$

乘法结构：

$$(x \otimes y) \otimes z \underset{\alpha^{-\otimes}_{x,y,z}}{\overset{\alpha^{\otimes}_{x,y,z}}{\rightleftarrows}} x \otimes (y \otimes z) \qquad x \otimes y \underset{\xi^{-\otimes}_{x,y}}{\overset{\xi^{\otimes}_{x,y}}{\rightleftarrows}} y \otimes x$$

$$1^X \otimes x \underset{\lambda^{-\otimes}_{x}}{\overset{\lambda^{\otimes}_{x}}{\rightleftarrows}} x \underset{\rho^{-\otimes}_{x}}{\overset{\rho^{\otimes}_{x}}{\rightleftarrows}} x \otimes 1^X$$

乘法零元：

$$0^X \otimes x \underset{\lambda^{-\bullet}_{x}}{\overset{\lambda^{\bullet}_{x}}{\rightleftarrows}} 0^X \underset{\rho^{-\bullet}_{x}}{\overset{\rho^{\bullet}_{x}}{\rightleftarrows}} x \otimes 0^X$$

分配律：

$$x \otimes (y \oplus z) \xrightarrow{\delta^{l}_{x,y,z}} (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$
$$(x \oplus y) \otimes z \xrightarrow{\delta^{r}_{x,y,z}} (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

恒等：

$$x \xrightarrow{1_x} x$$

至此，$\mathrm{Gr}_{\mathrm{el}}(X)$ 的定义完成。

此外，我们定义如下内容。

- $\mathrm{Gr}_{\mathrm{el}}(X)$ 中边的集合记为 $\mathrm{E}_{\mathrm{el}}(X)$，其元素称为初等边。
- $\alpha^{\oplus}$ 和 $\alpha^{-\oplus}$ 互为形式逆元，上文前三组中的其他 9 对初等边也同样如此。
- 1_x 称为x的恒等元 。
- 定义 2.1.1 中的名称也用于初等边。例如，$\lambda_{\bullet}$ 称为左乘法零元，δ_r 称为右分配律。

图。 接下来的两个定义将结合起来，给出定义 2.4.7 中X 的图。

定义 2.4.5. 设（X，$0^X, 1^X$）如定义 2.4.4 所述，考虑由初等边集合 $\mathrm{E}_{\mathrm{el}}(X)$ 生成的自由 $\{\oplus, \otimes\}$-代数 $\mathrm{E}_{\mathrm{frel}}(X)$。元素$f \in \mathrm{E}_{\mathrm{frel}}(X)$ 的定义域 和陪域是 X_{fr} 中的元素，按如下方式归纳定义。

- 对于初等边$f \in \mathrm{E}_{\mathrm{el}}(X)$，其（陪）定义域即为初等图 $\mathrm{Gr}_{\mathrm{el}}(X)$ 中f 的（陪）定义域。
- 假设$f1$、$f_2 \in \mathrm{E}_{\mathrm{frel}}(X)$满足

– $\mathrm{u}_i \in \mathrm{Xfr}$ 是 f_i 的定义域，且 – $\mathrm{v}_i \in \mathrm{Xfr}$ 是 f_i 的陪域，这些对于 $\mathrm{i} = 1, 2$ 已定义。则 – $\mathrm{f}_1 \oplus \mathrm{f}_2$ 的定义域为 $\mathrm{u}_1 \oplus \mathrm{u}_2$，陪域为 $\mathrm{v}_1 \oplus \mathrm{v}_2$,；并且 – $\mathrm{f}_1 \otimes \mathrm{f}_2$ 的定义域为 $\mathrm{u}_1 \otimes \mathrm{u}_2$，陪域为 $\mathrm{v}_1 \otimes \mathrm{v}_2$。

定义 2.4.6。接续定义 2.4.5，恒等素边 和非恒等素边 是 $\mathrm{E}_{\mathrm{frel}}(X)$ 中按照以下四个条件归纳定义的元素。

- 类型为 1_x（其中 $x \in X_{\mathrm{fr}}$）的初等边是恒等素边。
- 非类型为 1_x（其中 $x \in X_{\mathrm{fr}}$）的初等边是非恒等素边。

- 如果 $e1$、$e_2 \in \mathrm{E}_{\mathrm{frel}}(X)$ 是恒等素边，那么 $e_1 \oplus e2$ 和 $e_1 \otimes e2$ 也是恒等素边。
- 若 f 是非恒等素边，且 e 是恒等素边，则

$$f \oplus e, \quad e \oplus f, \quad f \otimes e, \quad \text{and} \quad e \otimes f$$

它们是非恒等素边。

此外，我们定义如下。

- 素边 指恒等素边或非恒等素边。素边集合记为 $\mathrm{E}_{\mathrm{pr}}(X)$。

- δ-素边 是指涉及 δ_l 或 δ_r的素边。

定义 2.4.7。设 $(X, 0^X, 1^X)$ 如定义 2.4.4 所述，X 的图记为 $\mathrm{Gr}(X)$，定义如下。

顶点： $\mathrm{Gr}(X)$ 中的顶点集合是 X 的自由 $\{\oplus, \otimes\}$-代数 X_{fr}。**边：** $\mathrm{Gr}(X)$ 中的边集合是定义 2.4.6 中的素边集合 $\mathrm{E}_{\mathrm{pr}}(X)$，其（余）定义域如定义 2.4.5 所述。

路径的值。X 的图通过以下概念在对称双幺半范畴中解释。

定义 2.4.8。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是图（定义 2.4.2）。图态射 $\mathrm{f} : G_1 \longrightarrow G_2$ 由以下函数组成

- $f_V : V1 \to V2$ 和
- $f_E : E1(u, v) \to E2(f_V u, f_V v)$ 对于 u、$v \in V1$。

为简化记号，下文将 f_V 和 f_E 都记为 f。

定义 2.4.9. 设给定如下数据 (X, C, φ)。

- X 是一个集合，具有定义 2.4.4 中的两个指定元素 0_X 和 1_X。
- C 是一个对称双幺半范畴，如定义 2.1.1 所述，并配备了例 2.4.3 中的图结构。

- $\varphi : X \to \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ 是任意满足下述条件的函数：

$$\varphi(0^X) = 0 \quad \text{and} \quad \varphi(1^X) = 1. \tag{2.4.10}$$

将 φ 延拓为一个图态射

$$\mathrm{Gr}(X) \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathsf{C}$$

如下。

顶点： 对于x、$y \in X_{\mathrm{fr}}$使得 φx、$\varphi y \in$对象集(C) 已定义，我们定义

$$\begin{aligned}\varphi(x \oplus y) &= \varphi x \oplus \varphi y \quad \text{and}\\ \varphi(x \otimes y) &= \varphi x \otimes \varphi y.\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

初等边： φ 将每条初等边映射为 C 中同名的结构态射

with the 同名 and d with the sub脚本表示 laced by th它们在 φ 下的像。

素的 边： 如果$f_1, f_2 \in \mathrm{E}_{\mathrm{pr}}(X)$是素边，其中至多一条不是恒等边，并且 $\varphi(f_1)$和 $\varphi(f_2)$已经定义，则定义

$$\begin{aligned}\varphi(f_1 \oplus f_2) &= \varphi(f_1) \oplus \varphi(f_2) \quad \text{and}\\ \varphi(f_1 \otimes f_2) &= \varphi(f_1) \otimes \varphi(f_2).\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

这就完成了图态射 φ的定义。

此外，对于 Gr(X) 中的一条路径$P = (f_n, \ldots, f_1)$，其定义域为u、陪域为v，它在 C 中的值是复合

$$\varphi P = \varphi(f_n) \circ \cdots \circ \varphi(f_1) \tag{2.4.13}$$

在 $\mathrm{C}(\varphi u, \varphi v)$ 中。

正则性。 接下来，我们对X_{fr} 中的元素引入一个限制，称为正则性，以用于对称双幺半范畴的相干定理。

定义 2.4.14。 设 $(X, 0^X, 1^X)$ 如定义 2.4.4 中所述。将其严格$\{\oplus, \otimes\}$-代数 X_{st} 定义为定义 2.4.1 中X_{fr} 的商集，即取包含以下恒等关系的最小关系，其中对所有元素x、y、$z \in X_{\mathrm{fr}}$均成立。

加法结构：

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z)\\ 0^X \oplus x &= x = x \oplus 0^X\\ x \oplus y &= y \oplus x\end{aligned}$$

乘法结构：

$$\begin{aligned}(x \otimes y) \otimes z &= x \otimes (y \otimes z)\\ 1^X \otimes x &= x = x \otimes 1^X\\ x \otimes y &= y \otimes x\end{aligned}$$

乘法零元：

$$0^X \otimes x = 0^X = x \otimes 0^X$$

分配律：

$$\begin{aligned}x \otimes (y \oplus z) &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)\\ (x \oplus y) \otimes z &= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)\end{aligned}$$

至此完成了X_{st}的定义。此外，记

$$X^{\mathrm{fr}} \xrightarrow{\ \mathrm{supp}\ } X^{\mathrm{st}} \tag{2.4.15}$$

商映射，称为支撑。

定义 2.4.16。 元素 $x \in X_{\mathrm{fr}}$ 称为正则，如果存在元素 $x^i_j \in X$，对于$1 \le i \le m$ 以及 $1 \le j \le k_i$，对每个满足 i和 m、$k_1, \ldots, k_m > 0$的 <style id='i'>i，使得以下三个条件成立。

(i) 等式

$$\mathsf{supp}(x) = \mathsf{supp}\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\left(x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k_i}^i\right)\right) \tag{2.4.17}$$

在X_{st}中成立。迭代和 $\oplus_{i=1}^{m}$ 以及每个m 迭代积$x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k_i}^i$ 都有若干种括号化方式。根据X_{st}的定义，不同的括号化方式得到相同的支撑。

(ii) 对每个 $1 \le i \le m$，元素x_1^i、……、$x_{k_i}^i \in X$ 互不相同。

(iii) 这m个元素

$$\mathsf{supp}\left(x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k_i}^i\right) \in X^{\mathsf{st}}$$

对于 $1 \le i \le m$ 互不相同。

现在我们可以陈述以下关于对称双幺半范畴的相干定理。详细证明参见 **[Yau∞I**, 3.9。

定理 2.4.18 （Laplaza 相干定理）。在定义 *2.4.9* 的背景下，设C是一个对称双幺半范畴，其中每条 δ素边的值都是单态射。设

$$a \underset{P_2}{\overset{P_1}{\rightrightarrows}} b$$

是$\mathsf{Gr}(X)$ 中的两条路径，且 $\in X_{\mathsf{fr}}$ 正则。那么 P_1 和 P_2 在C 中的值相等。

例 2.4.19。如果 C 是一个紧对称双幺半范畴——也就是说，C 中的两个分配态射 δ^l 和 δ^r 都是可逆的——那么每条 δ素边的值都是同构，因而也必定是单态射。在这种情况下，定理 2.4.18 适用于 C。定理 2.4.18 中每条路径在 C 中的值称为 *Laplaza* 相干同构。

- 根据定理 2.2.16，每个紧双置换范畴也是紧对称双幺半范畴，因此 Laplaza 相干定理 2.4.18 适用于紧双置换范畴。

- 特别地，定理 2.4.18 分别适用于例 2.3.2、2.3.11、2.3.12 和 2.3.17 中的紧双置换范畴 $\mathsf{Fin}_{\mathsf{sk}}$、 Σ、F 和 A。

另有一个关于对称双幺半范畴的相干定理，同样归功于 Laplaza **[Lap72b]**。由于本文不会用到该相干定理，有兴趣的读者可参阅 **[Yau∞I**，第 4] 章，了解详细讨论。

第 3 章

富化多重范畴与多重等价

本章有两个主要目的:

(1) 我们回顾后续章节中会用到的富化多范畴及相关概念。(2) 我们用对象上的本质满射性以及多态射范畴上的可逆性来刻画范畴富化多元等价（定理 3.4.21）。这一刻画在对称和非对称情形下都成立。定理 3.4.21 在定理 4.3.28 中有一个伪对称变体。

以下是本章部分定义和结果的概要表。

富化多范畴与多函子	定义 3.1.2 和 3.2.1
富化多自然变换	定义 3.2.5
富集多范畴的 2-范畴	定理 3.2.10
Cat-多范畴与多自然变换	定义 3.2.13 和解释3.2.15
Cat-多重等价	定义 3.3.1
Cat-多重等价和 2-等价的刻画	定理 3.4.21 和 3.4.22

在定理 8.4.17 中，我们使用定理 3.4.21 来证明，小紧双置换范畴上的格罗滕迪克构造是一个非对称 Cat-多重等价。这一事实的一个重要推论是，逆K理论经由一个非对称 Cat-多重等价分解（10.2.3）。

组织结构。 在第 3.1 节中，我们回顾对称幺半范畴 V 中的多范畴。在第 3.2 节中，我们回顾 V-富集多函子、V-富集多自然变换，以及它们与以小 V-多范畴为对象所构成的 2-范畴 V-Multicat。第 3.1 节和第 3.2 节中的大部分内容在 **[JY∞a** 第 5 章以及 6] 和 **[Yau16]** 中有更为详尽的介绍。

在第 3.3 节中，我们证明 Cat-多重等价具有本质满对象和多态射范畴可逆这两种性质。第 3.4 节中的定理 3.4.21 表明，这些性质恰好刻画了 Cat-多重等价。此外，将此证明限制到一元多态射范畴，可得 2-范畴之间 2-等价的类似刻画（定理 3.4.22）。

在本章中，我们始终假设

$$\mathsf{V} = (\mathsf{V}, \otimes, 1, \alpha, \lambda, \rho, \xi)$$

是一个对称幺半范畴（定义 1.1.11）。我们提醒读者注意左规范化括号约定 1.1.24。

3.1. 富化多重范畴

本节回顾富集多范畴的定义及几个基本例子。更复杂的例子将在后面的各章中出现；参见说明 5.1.2 以及定理 5.3.11、6.1.31、7.3.16 和 9.1.23。我们先介绍一些记号。

定义 3.1.1. 设 D 是一个类。

● 用表示 D 中有限元组所成的类。$\mathsf{Prof}(D)$ 中的元素称为一个 D-剖面。

$$\mathsf{Prof}(D) = \coprod_{n\geq 0} D^{\times n}$$

● 长度为 $n = \mathrm{len} d$ 的 D-剖面记作 $d = (d1, \ldots, d_n) \in D_n$ 或 $d_{i\,ni=1}$。空的 D-剖面记作 。

● 我们用 $\oplus$ 表示剖面的串接。它满足结合律，单位元为空元组 。

● $\mathsf{Prof}(D) \times D$ 中的元素记作 $(d;\ d\prime)$，其中 $d\prime \in D$ 且 $d \in \mathsf{Prof}(D)$。

以 n 个字母为对象的对称群记作 Σ_n。

定义 3.1.2. 一个 V-多范畴 $(\mathsf{M},\ \gamma,\ 1)$ 由以下数据构成。

● M 配备了一个对象的类 $\mathrm{Ob}\,\mathsf{M}$。我们将 $\mathsf{Prof}(\mathrm{Ob}\,\mathsf{M})$ 简记为 $\mathsf{Prof}(\mathsf{M})$。

● 对于 $x\prime \in \mathrm{Ob}\mathsf{M}$ 以及 $x = x_{jnj=1} \in \mathsf{Prof}(\mathsf{M})$，M 配备了一个对象

$$\mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\, x'\big) = \mathsf{M}\big(x_1, \ldots, x_n\,;\, x'\big) \in \mathsf{V},$$

称为n 元运算对象或n 元多态射对象，其输入轮廓$\langle x\rangle$ 且输出为 x'。

● 对于上述的（x；$x\prime$）$\in \mathsf{Prof}(\mathsf{M}) \times \mathsf{M}$ 的对象以及置换 $\sigma \in \Sigma_n$，M 配备了 V 中的一个同构

$$\mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\, x'\big) \xrightarrow[\cong]{\sigma} \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\sigma\,;\, x'\big), \tag{3.1.3}$$

称为右 σ-作用或称为对称群作用，满足

$$\langle x\rangle\sigma = \big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big) \in \mathsf{Prof}(\mathsf{M})$$

x 经 σ 作用后的右置换。

● M 中的每个对象 x 都配备了一个态射

$$1 \xrightarrow{1_x} \mathsf{M}\big(x\,;\, x\big), \tag{3.1.4}$$

称为x-着色单位。

- For
  - $x'' \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{M}$,
  - $\langle x'\rangle = \langle x'_j\rangle_{j=1}^{n} \in \mathsf{Prof}(\mathsf{M})$,
  - $\langle x_j\rangle = \langle x_{j,i}\rangle_{i=1}^{k_j} \in \mathsf{Prof}(\mathsf{M})$ for each $j \in \{1, \ldots, n\}$ with $\langle x\rangle = \oplus_{j=1}^{n}\langle x_j\rangle$,

  M 配备了 V 中的一个态射 h

$$\mathsf{M}\big(\langle x'\rangle\,;\, x''\big) \otimes \otimes_{j=1}^{n} \mathsf{M}\big(\langle x_j\rangle\,;\, x'_j\big) \xrightarrow{\gamma} \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\, x''\big), \tag{3.1.5}$$

称为复合或多范畴复合。

上述数据必须满足以下公理。

对称群作用： 对于 $(x;\ x')\ \in \mathbf{Prof(M)}\ \times \mathbf{M}$ 的对象，其中 $n\ = \mathrm{len} x$ 且 $\sigma, \tau \in \Sigma_n$，$\mathbf{V}$ 中的下图可交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\,x'\big) & \xrightarrow{\ \sigma\ } & \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\sigma\,;\,x'\big) \\ & {\scriptstyle \sigma\tau}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\ & & \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\sigma\tau\,;\,x'\big) \end{array} \tag{3.1.6}$$

Σ_n 中的恒等元在 $\mathbf{M}(x;\ x')$ 上作为恒等态射作用。

结合律： 设给定

- $x''' \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{M}$,
- $\langle x''\rangle = \langle x''_j\rangle_{j=1}^{n} \in \mathsf{Prof}(\mathsf{M})$,
- $\langle x'_j\rangle = \langle x'_{j,i}\rangle_{i=1}^{k_j} \in \mathsf{Prof}(\mathsf{M})$ for each $j \in \{1,\dots,n\}$ with $\langle x'\rangle = \oplus_{j=1}^{n}\langle x'_j\rangle$ and $k_j > 0$ for at least one j, and
- $\langle x_{j,i}\rangle = \langle x_{j,i,p}\rangle_{p=1}^{\ell_{j,i}} \in \mathsf{Prof}(\mathsf{M})$ for each $j \in \{1,\dots,n\}$ and each $i \in \{1,\dots,k_j\}$ with $\langle x_j\rangle = \oplus_{i=1}^{k_j}\langle x_{j,i}\rangle$ and $\langle x\rangle = \oplus_{j=1}^{n}\langle x_j\rangle$.

Then the 结合律图 in 对象 x''' 可交换。

$$\begin{array}{ccc} & & \mathsf{M}\big(\langle x'\rangle\,;\,x'''\big) \otimes \bigotimes\limits_{j=1}^{n}\Big[\bigotimes\limits_{i=1}^{k_j}\mathsf{M}\big(\langle x_{j,i}\rangle\,;\,x'_{j,i}\big)\Big] \\ & {\scriptstyle(\gamma,1)}\nearrow & \searrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathsf{M}\big(\langle x''\rangle\,;\,x'''\big) \otimes \Big[\bigotimes\limits_{j=1}^{n}\mathsf{M}\big(\langle x'_j\rangle\,;\,x''_j\big)\Big] \otimes \bigotimes\limits_{j=1}^{n}\Big[\bigotimes\limits_{i=1}^{k_j}\mathsf{M}\big(\langle x_{j,i}\rangle\,;\,x'_{j,i}\big)\Big] & & \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\,x'''\big) \\ {\scriptstyle\text{permute}}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \uparrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathsf{M}\big(\langle x''\rangle\,;\,x'''\big) \otimes \bigotimes\limits_{j=1}^{n}\Big[\mathsf{M}\big(\langle x'_j\rangle\,;\,x''_j\big) \otimes \bigotimes\limits_{i=1}^{k_j}\mathsf{M}\big(\langle x_{j,i}\rangle\,;\,x'_{j,i}\big)\Big] & & \\ & {\scriptstyle(1,\otimes_j\gamma)}\searrow & \uparrow{\scriptstyle\gamma} \\ & & \mathsf{M}\big(\langle x''\rangle\,;\,x'''\big) \otimes \bigotimes\limits_{j=1}^{n}\mathsf{M}\big(\langle x_j\rangle\,;\,x''_j\big) \end{array} \tag{3.1.7}$$

单位性： 假设 $x' \in \mathbf{M}$ 的对象。

(1) 如果 $x\ = x_{j=1}^{n} \in \mathbf{Prof(M)}$ 的长度为 $n\ \geq 1$，那么下面的 右单位图可交换，其中 1^n 表示将 $\mathbf{1}$ 与自身作 n 重幺积。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\,x'\big) \otimes 1^n & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\,x'\big) \\ {\scriptstyle 1\otimes(\otimes_j 1_{x_j})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\,x'\big) \otimes \otimes_{j=1}^{n}\mathsf{M}\big(x_j\,;\,x_j\big) & \xrightarrow{\ \gamma\ } & \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\,x'\big) \end{array} \tag{3.1.8}$$

(2) 对任意 $x \in \mathrm{Prof(M)}$，下面的 左单位图可交换。

$$\begin{array}{ccc} 1 \otimes \mathsf{M}(\langle x\rangle; x') & \xrightarrow{\lambda} & \mathsf{M}(\langle x\rangle; x') \\ {\scriptstyle 1_{x'}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathsf{M}(x'; x') \otimes \mathsf{M}(\langle x\rangle; x') & \xrightarrow{\gamma} & \mathsf{M}(\langle x\rangle; x') \end{array} \tag{3.1.9}$$

等变性： 假设在 γ 的定义（3.1.5）中，$\mathrm{len} x^j = k_j \geq 0$。

(1) 对每个 $\sigma \in \Sigma_n$，以下顶层等变性图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}(\langle x'\rangle; x'') \otimes \otimes_{j=1}^n \mathsf{M}(\langle x_j\rangle; x'_j) & \xrightarrow{(\sigma,\sigma^{-1})} & \mathsf{M}(\langle x'\rangle\sigma; x'') \otimes \otimes_{j=1}^n \mathsf{M}(\langle x_{\sigma(j)}\rangle; x'_{\sigma(j)}) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathsf{M}(\langle x_1\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle; x'') & \xrightarrow{\sigma\langle k_{\sigma(1)},\ldots,k_{\sigma(n)}\rangle} & \mathsf{M}(\langle x_{\sigma(1)}\rangle, \ldots, \langle x_{\sigma(n)}\rangle; x'') \end{array} \tag{3.1.10}$$

Here

$$\sigma\langle k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(n)}\rangle \in \Sigma_{k_1+\cdots+k_n} \tag{3.1.11}$$

是一个块置换，它对n 个连续块进行置换，这些块的长度分别为$k_{\sigma(1)}$、.....、$k_{\sigma(n)}$，其方式与 σ 对$\{1, \ldots, n\}$的置换相同，同时保持每个块内的相对顺序不变。

(2) 给定置换 $\tau_j \in \Sigma_{k_j}$，其中 $1 \leq j \leq n$，以下底层等变性图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}(\langle x'\rangle; x'') \otimes \otimes_{j=1}^n \mathsf{M}(\langle x_j\rangle; x'_j) & \xrightarrow{(1,\otimes_j \tau_j)} & \mathsf{M}(\langle x'\rangle; x'') \otimes \otimes_{j=1}^n \mathsf{M}(\langle x_j\rangle\tau_j; x'_j) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathsf{M}(\langle x_1\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle; x'') & \xrightarrow{\tau_1\times\cdots\times\tau_n} & \mathsf{M}(\langle x_1\rangle\tau_1, \ldots, \langle x_n\rangle\tau_n; x'') \end{array} \tag{3.1.12}$$

这里的块和

$$\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \in \Sigma_{k_1+\cdots+k_n} \tag{3.1.13}$$

是 $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ 在典范包含下的像

$$\Sigma_{k_1} \times \cdots \times \Sigma_{k_n} \longrightarrow \Sigma_{k_1+\cdots+k_n}.$$

至此，V-多范畴的定义便完成了。

此外，我们定义如下。

- 若 V-多范畴的对象类是一个集合，则称其为小的。
- 非对称 V-多范畴的定义与 V-多范畴相同，但不含对称群作用，也不含公理 (3.1.6)、(3.1.10) 和 (3.1.12)。
- *(*非对称*)*多范畴 是一个 (非对称) Set-多范畴，其中 $(\mathrm{Set}, \times, *)$ 是由集合与函数构成、以笛卡尔积为积的对称幺半范畴。
- V-幺半群是一个只有单个对象的 V-多范畴。若 M 是 V-幺半群，则其n元运算的对象集记作 $\mathrm{M}_n \in \mathrm{V}$。
- 歌剧 是一种 Set-歌剧，也就是说，是一个只有单对象的多范畴。

注 3.1.14. 定义 3.1.2 中的非对称多范畴与 **[Lam69]** 中的多范畴相同。

例 3.1.15. 终端多范畴 T 由一个对象 $*$ 以及对每个 $n \geq 0$ 都有的一个 n 元运算 ι_n 组成。

例 3.1.16 （自同态运算子）。 对于每个 V-多范畴 M 及其对象x， 自同态V-歌剧 End(x)由单个对象 x 以及 n元运算对象组成

$$\mathsf{End}(x)_n = \mathsf{M}\big(\langle x\rangle ; x\big) \in \mathsf{V},$$

其中 x 是以 x 为值的常值n元组。End(x) 的对称群作用、单位和复合均由 M 中相应的结构给出。

例 3.1.17 （自同态多范畴）。 每个置换范畴 $(\mathsf{C}, \oplus, e, \xi)$ 都关联着一个自同态多范畴 End(C)，其对象集为 ObC，n元多态射集为

$$\mathsf{End}(\mathsf{C})\big(\langle x\rangle ; y\big) = \mathsf{C}(x_1 \oplus \cdots \oplus x_n, y)$$

对于 $y \in \mathrm{Ob}\ \mathsf{C}$ 以及 $x = x_{j=1}^{n} \in (\mathrm{Ob}\ \mathsf{C})^{\times n}$。空的 $\oplus$ 按定义是单位对象e。

例 3.1.18 （底层 V-范畴）。 每个非对称 V-多范畴 $(\mathsf{M}, \gamma, 1)$ 都有一个底层 V-范畴（定义 1.2.1），由以下数据定义。

- 它与 M 具有相同的对象类。
- 它具有同对象 M(a; b)，其定义域为 a，陪域为 b。
- 它的恒等变换由 M 中的带色单位给出。
- 它的复合由以下映射给出

$$\mathsf{M}\big(b ; c\big) \otimes \mathsf{M}\big(a ; b\big) \xrightarrow{\ \gamma\ } \mathsf{M}\big(a ; c\big)$$

对于对象 a、b、$c \in \mathrm{M}$。

V-范畴的结合图表 (1.2.2) 和单位图表 (1.2.3)，分别是 V-多范畴的结合图表 (3.1.7) 以及单位图表 (3.1.8) 和 (3.1.9) 的一元特殊情形。

3.2 富化多重范畴的 2-范畴

与第 3.1 节一样，我们假设 V 是一个对称幺半范畴。本节回顾小 V-富集多重范畴、V-富集多函子和 V-富集多自然变换所构成的 2-范畴。在解释 3.2.15 中，我们明确描述 Cat-富集多自然变换的数据和公理。

富集多函子与多自然变换。

定义 3.2.1. V-多范畴 M 与 N 之间的一个 V-多函子 F : M N 由以下数据和公理构成。

- 它配备了对象赋值 F :M 的对象 对象集 N。 $\longrightarrow$
- 对于每个 $(x;\ x\prime) \in \mathbf{Prof}(\mathrm{M}) \times \mathrm{M}$ 的对象，使得 $x = x_{jnj=1}$，它都配备了一个 V 中的分量态射

$$\mathsf{M}\big(\langle x\rangle ; x'\big) \xrightarrow{\ F\ } \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle ; Fx'\big)$$

with $F\langle x\rangle = \langle Fx_j\rangle_{j=1}^{n}$.

上述数据必须满足以下三个公理。

对称群作用： 对于如上所述的每个 $(x;\ x')$ 和置换 $\sigma \in \Sigma_n$，下面的 V 中图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle x\rangle;\, x'\big) & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle;\, Fx'\big) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow\cong & & {\scriptstyle\sigma}\downarrow\cong \\ \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\sigma;\, x'\big) & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle\sigma;\, x'\big) \end{array} \tag{3.2.2}$$

单位： 对于 M 中的每个对象 x，下面的 V 中图表交换。

$$\begin{array}{ccc} & & \mathsf{M}\big(x;\, x\big) \\ & {\scriptstyle 1_x}\nearrow & \big\downarrow{\scriptstyle F} \\ 1 & & \\ & {\scriptstyle 1_{Fx}}\searrow & \\ & & \mathsf{N}\big(Fx;\, Fx\big) \end{array} \tag{3.2.3}$$

复合： 对于如 (3.1.5) 中的 x''、x' 和 $x = \oplus_{j=1}^{n} xj$，下面的 V 中图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle x'\rangle;\, x''\big)\otimes\otimes_{j=1}^{n}\mathsf{M}\big(\langle x_j\rangle;\, x'_j\big) & \xrightarrow{(F,\otimes_j F)} & \mathsf{N}\big(F\langle x'\rangle;\, Fx''\big)\otimes\otimes_{j=1}^{n}\mathsf{N}\big(F\langle x_j\rangle;\, Fx'_j\big) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathsf{M}\big(\langle x\rangle;\, x''\big) & \xrightarrow{\qquad F\qquad} & \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle;\, Fx''\big) \end{array} \tag{3.2.4}$$

至此，V-多函子的定义完成。

此外，我们定义如下。

● 对于另一个介于 V-多范畴之间的 V-多~~函~~子 G ：N P，其中 P 的对象类为 ObP，复合 GF ：M P 是通过复合对象赋值定义的 V-多函子⟶

$$\mathsf{Ob}\,\mathsf{M} \xrightarrow{F} \mathsf{Ob}\,\mathsf{N} \xrightarrow{G} \mathsf{Ob}\,\mathsf{P}$$

以及 n 元多态射对象上的态射

$$\mathsf{M}\big(\langle x\rangle;\, x'\big) \xrightarrow{F} \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle;\, Fx'\big) \xrightarrow{G} \mathsf{P}\big(GF\langle x\rangle;\, GFx'\big).$$

● 恒等V-多函子 1_{M} ：M M 由对象上的~~恒~~等赋值以及 n 元多态射对象上的恒等态射定义。

● V-歌剧态射是两个各有一个对象的 V-多范畴之间的 V-多函子。

● 介于非对称 V-多范畴 M 和 N 之间的~~非对称~~V-多函子 F ：M N 的定义与 V-多函子相同，但不包含对称群作用公理 (3.2.2)。复合与恒等变换的定义同上。

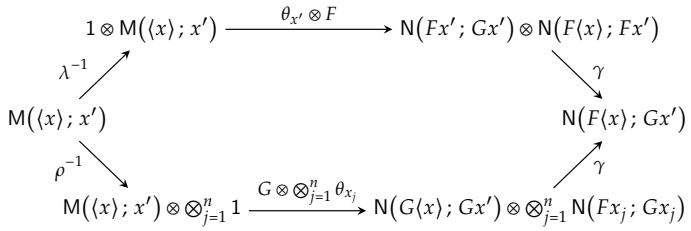
● （非对称）多函子是一个（非对称）Set-多函子。

定义 3.2.5。对于 V-多函子 F、G ：M N，一个 V-~~多~~自然变换 $\theta : F\ G$ 由以下内容组成：对 M 中的~~每~~个对象 x，都有一个 V 中的分量态射

$$1 \xrightarrow{\theta_x} \mathsf{N}\big(Fx;\, Gx\big)$$

使得对于每个 $(x\,;x')\ \in \mathrm{Prof(M)}\times \mathrm{M}$ 的对象集，其中 $x\ = x j_{j=1}^{n}$，下方的 V-自然性图表 在 V 中交换。

(3.2.6)



这就完成了 V-多自然变换的定义。

此外，我们定义如下概念。

- 该恒等V-多自然变换 $1F\ :F\ F$ 的分量为 $\longrightarrow$

$$(1_F)_x = 1_{Fx}\quad \text{for}\quad x\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{M}.$$

● 多自然变换是一个 Set-多自然变换。

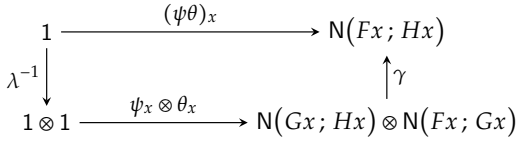
- 一个 非对称V-多自然变换 $\theta : F\ G$ 介于非 $\longrightarrow$ -对称 V-多函子 F,$G\ :\mathrm{M}\ \mathrm{N}$ 的定义如上。$\longrightarrow$

定义 3.2.7。 设 $\theta : F\ G$ 是定义 ~~3.2.5~~ 中 V-多函子之间的 V-多自然变换。

● 设 $\psi\ :\ G\ \ H$ 是~~一个~~ V-多自然变换，且$H\ :\mathrm{M}\ \mathrm{N}$ 是一个 V-多函子。垂直复合 $\longrightarrow$

(3.2.8)
$$F\ \xrightarrow{\psi\theta}\ H$$

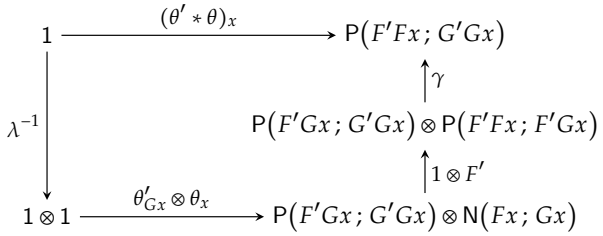
是一个 V-多自然变换，其在每个$x\ \in \mathrm{Ob}\mathrm{M}$ 处的分量由 V 中下述复合给出。



● 假设 $F\prime$,$G\prime\ :\mathrm{N}\ \mathrm{P}$ 是~~V-~~多函子，且 $\theta\prime : F\prime\ G\prime$ 是一个 V-多自然变换。水平复合

(3.2.9)
$$F'F\ \xrightarrow{\theta'*\theta}\ G'G$$

是 V-多自然变换，其在每个 $x\ \in \mathrm{Ob}\mathrm{M}$ 处的分量由 V 中的以下复合给出。



非对称 V-多自然变换的垂直复合和水平复合定义如上。至此，定义完成。

2-范畴结构。

定理 3.2.10。 对于每个对称幺半范畴 V，存在一个 *2*-范畴

$$\text{V-Multicat}$$

由以下数据构成。

- 其对象是小的 V-多重范畴。
- 对于小的 V-多重范畴M 和 N，同态范畴

$$\text{V-多范畴}(\mathsf{M}, \mathsf{N})$$

定义如下。– 其对象为 V-多函子 M N。– 其态射为 V-多自然变换。– 复合为 V-多自然变换的垂直复合。– 恒等态射为恒等 V-多自然变换。

- 恒等*1*-胞 1_{M} 是恒等 V-多函子 1_{M}。
- *1*-胞的水平复合是 V-多函子的复合。
- *2*-胞的水平复合是 V-多自然变换的水平复合。

此外，还有一个*2*-范畴V-多范畴^{ns}，由以下数据构成。

- 其对象是小的非对称V-多范畴。
- 其 *1*-胞是非对称V-多函子。
- 其 *2*-胞是非对称V-多自然变换。
- 其余的 *2*-范畴结构与V-Multicat中的相同。

证明。特例 $\mathsf{V} = \mathsf{Set}$ 是 **[JY21,** 2.4.26**]**。该证明经过调整后，基本无需改动即可证明 V-富集版本。非对称变体的证明只需省略涉及对称群作用的部分即可得到。□

回顾定义 1.3.1 中 2-范畴的底层 *1*-范畴 。接下来是 V-富集类比版本，见 **[JY∞a,** 5.5.14**]**,其证明自然可以推广到 V-富集情形。

定理 3.2.11。 设 V 是完备且余完备的对称幺半闭范畴。那么，以下 *2*-范畴的底层 *1*-范畴

$$\text{V-Multicat} \quad \textit{and} \quad \text{V-Multicat}^{\text{ns}}$$

是完备且余完备的。

例 3.2.12（始对象与终对象）。 初始 V-多重范畴的对象集为空。如果 V 有一个终对象 T，那么终 V-多范畴 T 只有一个对象 $*$，且其n元多态射对象

$$\mathsf{T}_n = \mathsf{T}(\overbrace{*, \ldots, *}^{n \text{ terms}}; *) = \mathsf{T}$$

对于每个$n \geq 0$。

范畴富化多范畴。回顾一下由小范畴和函子构成的对称幺半闭范畴（Cat, ×, **1**），其积为笛卡尔积（例1.1.16）。

定义 3.2.13。 设 $x = x_{j=1}^{n}, y, z$ 是 Cat-多范畴 (M, γ, 1) 中的对象。

- 范畴 $\mathsf{M}(x; y)$ 称为多态射范畴。
- 多态射范畴中的一个对象 $\mathsf{M}(\langle x\rangle; y)$ 称为一个 *n*元 *1*-胞，记作 $\langle x\rangle \longrightarrow y$。
- 一元 1-胞 $f : y \longrightarrow z$ 是一个同构，如果存在一元 1-胞 $g : z \longrightarrow y$ 使得

$$\gamma(g; f) = 1_y \quad \text{and} \quad \gamma(f; g) = 1_z.$$

  在这种情况下，我们称 f 为可逆的，其逆为 g，并记作 $y \overset{\cong}{\longrightarrow} z$。
- Cat-多函子 $F : \mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{N}$ 在对象上是本质满的，若对每个对象 $w \in \mathsf{N}$，都存在一个对象 $v \in \mathsf{M}$ 和一个同构 $h : Fv \overset{\cong}{\longrightarrow} w$（在 N 中）。
- 多态射范畴 $\mathsf{M}(x; y)$ 中的一个态射 $\theta : f \Longrightarrow g$ 称为一个*n*元*2*-胞。它也记作

(3.2.14)
$$\langle x\rangle \underset{g}{\overset{f}{\Downarrow \theta}} y$$

这扩展了 (1.1.23) 中的 2-胞腔记号。

同样的术语和记号也适用于非对称 Cat-多范畴和 Cat-多函子。

说明3.2.15 （Cat-多自然变换）。 设 M 和 N 是 Cat-多范畴，并且

$$F, G : \mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{N}$$

是 Cat-多函子。一个 Cat-多自然变换 $\theta : F \Longrightarrow G$ 由一个分量 1 元 1-胞组成

(3.2.16)
$$Fc \xrightarrow{\theta_c} Gc \qquad \text{in N for each } c \in \mathsf{Ob}\,\mathsf{M}$$

使得以下两个 Cat-自然性条件成立：

对象： 对于 M 中每个*k*元 1-胞 $p : c\ c'$，若 $c = c_{j=1}^{k}$，则记为

(3.2.17)
$$\begin{cases} F\langle c\rangle = \langle Fc_j\rangle_{j=1}^{k} \in (\mathsf{Ob}\,\mathsf{N})^k \\ \theta_{\langle c\rangle} = \langle \theta_{c_j}\rangle_{j=1}^{k} \in \prod_{j=1}^{k} \mathsf{N}\big(Fc_j\,;\, Gc_j\big). \end{cases}$$

则以下 *k*元1-胞等式成立，其中复合取在 Cat-多范畴 N 中：

(3.2.18)
$$\gamma\big(Gp\,;\, \theta_{\langle c\rangle}\big) = \gamma\big(\theta_{c'}\,;\, Fp\big) \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\,;\, Gc'\big).$$

M态射： 对于每个 k元 2-胞 $f : p\ q$ 在 $\mathsf{M}\big(\cancel{\langle c\rangle};\ c'\big)$中，以下 k元 2-胞等式成立，其中 $1_{\theta\langle c\rangle} = \langle 1_{\theta c_j}\rangle_{j=1}^{k}$:

$$\gamma\big(Gf\,;\,1_{\theta\langle c\rangle}\big) = \gamma\big(1_{\theta c'}\,;\,Ff\big) \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\,;\,Gc'\big). \tag{3.2.19}$$

条件 (3.2.18) 和 (3.2.19) 共同构成了当 V 为 Cat 时的 V-自然性条件 (3.2.6)。

对象 Cat-自然性条件 (3.2.18) 的两边使用了 N 中以下两个应用于对象的复合。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{N}\big(G\langle c\rangle\,;\,Gc'\big)\times\prod_{j=1}^{k}\mathsf{N}\big(Fc_j\,;\,Gc_j\big) & & \mathsf{N}\big(Fc'\,;\,Gc'\big)\times\mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\,;\,Fc'\big) \\ & {\scriptstyle\gamma}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\gamma} & \\ & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\,;\,Gc'\big) & \end{array} \tag{3.2.20}$$

对象 Cat-自然性条件 (3.2.18) 就是交换图

$$\begin{array}{ccc} F\langle c\rangle & \xrightarrow{\theta_{\langle c\rangle}} & G\langle c\rangle \\ {\scriptstyle Fp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gp} \\ Fc' & \xrightarrow{\theta_{c'}} & Gc' \end{array} \tag{3.2.21}$$

其中应理解为一个涉及 N 中复合 (3.2.20) 的 k元1-胞等式。

类似地，态射 Cat-自然性条件 (3.2.19) 的两边使用了 (3.2.20) 中应用于态射的复合。条件 (3.2.19) 是多范畴粘贴图的等式

$$\begin{array}{ccccc} F\langle c\rangle & \xrightarrow{\theta_{\langle c\rangle}} & G\langle c\rangle & & F\langle c\rangle \xrightarrow{\theta_{\langle c\rangle}} G\langle c\rangle \\ {\scriptstyle Fp}\searrow & {\scriptstyle Gp}\swarrow\!\!\searrow{\scriptstyle Gf} & \downarrow{\scriptstyle Gq} & = & {\scriptstyle Fp}\searrow\!\!\swarrow{\scriptstyle Ff}\searrow{\scriptstyle Fq} \quad \downarrow{\scriptstyle Gq} \\ Fc' & \xrightarrow{\theta_{c'}} & Gc' & & Fc' \xrightarrow{\theta_{c'}} Gc' \end{array} \tag{3.2.22}$$

理解为这是涉及 N 中复合的一个k元二胞等式。

根据 $\theta' : F'\ G'$ 的对象 Cat-自然性条件 (3.2.18)，对于 M 中的每个对象c，水平复合的c-分量有两种相等的写法:

$$\begin{aligned} (\theta' * \theta)_c &= \gamma\big(\theta'_{Gc}\,;\,F'\theta_c\big) \\ &= \gamma\big(G'\theta_c\,;\,\theta'_{Fc}\big). \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Cat-多自然变换 $\theta : F\ G$ 称为 Cat-多自然同构，如果 θ 关于垂直复合是可逆的。当且仅当每个分量 1 元 1-胞 θ_c (3.2.16) 关于 N 中的复合是可逆的。这也就是说，当且仅当底层一元 1-范畴 N 中的每个分量 1 元 1-胞 θ_c 是同构时，θ 才是 Cat-多自然同构（定义 1.3.1、命题 1.3.4 和例 3.1.18）。

非对称 Cat-多自然变换或同构的描述与上文相同。

3.3. 范畴富化多元等价

在本节中，我们证明 2-范畴 Cat-Multicat 和 Cat-Multicat^{ns} 中的等价是

(1) 对象本质满，且 (2) 多态射范畴之间存在同构。

参见引理 3.3.4。在第 3.4 节中，我们将说明等价实际上可由 - 这两个性质刻画。

回顾定理 3.2.10 中的 2-范畴 Cat-Multicat，它具有

- 小 Cat-多范畴作为对象，
- Cat-多函子作为 1-胞，且
- Cat-多自然变换作为 2-胞。

它有一个非对称变体 Cat-Multicat^{ns}。以下概念是定义 1.3.15 中相关概念在这两个 2-范畴上的限制。

定义 3.3.1. 我们定义如下概念。

- Cat-多重等价 是 2-范畴 Cat-Multicat 中的一个等价。
- 一个伴随 Cat-多重等价是 2-范畴 Cat-Multicat 中的伴随等价。

此外，它们的非对称变体也以同样的方式在 2-范畴 Cat-Multicat^{ns} 中定义。

解释3.3.2. 伴随 Cat-多重等价可以直接定义，无需提及 2-范畴Cat-Multicat。更具体地说，Cat-多函子$F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$是一个Cat-多重等价，如果存在

- 一个 Cat-多函子 $G : \mathsf{N} \to \mathsf{M}$，以及
- Cat-多重自然同构（解释3.2.15）

$$1_{\mathsf{M}} \xrightarrow[\cong]{\eta} GF \quad \text{and} \quad FG \xrightarrow[\cong]{\varepsilon} 1_{\mathsf{N}}. \tag{3.3.3}$$

四元组（F，G，η，ε）此外还是一个伴随 Cat-多重等价，如果它满足两个三角恒等式（1.3.16）；这两个恒等式涉及 Cat-多自然变换的垂直复合和水平复合。相同的说明也适用于非对称变体。换言之，在定义 3.3.1 中，无需假设 Cat-多范畴 M 和 N 是小的。

回顾定义 3.2.13，n元 1-胞和n元 2-胞分别是n元多态射范畴中的对象和态射。

引理 3.3.4. 设

$$\mathsf{N} \xrightarrow{G} \mathsf{M}$$

是一个Cat-多重等价。那么 G 是

- 本质满对象，且
- 在每个多态射范畴上都是一个同构。

此外，非对称变体也成立。

证明。由于G 是 Cat-多重等价，根据定义，存在

- 一个 Cat-多函子$F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$，以及
- Cat-多重自然同构 $\eta : 1_{\mathsf{M}} \xrightarrow{\cong} GF$ 和 $\varepsilon : FG \xrightarrow{\cong} 1_{\mathsf{N}}$，如 (3.3.3) 所示。

我们先讨论本质满射性，然后讨论G的多态射函子的可逆性。

步骤 1：对象上的本质满射性

对于每个对象 $x \in \mathsf{M}$，都存在一个可逆的分量 1 元 1-胞

$$x \xrightarrow[\cong]{\eta_x} G(Fx) \quad \text{in} \quad \mathsf{M}(x; GFx).$$

这表明 G 在底层一元 1-范畴上是本质满的。

步骤 2：n元 1-胞上的单射性

设给定一个由对象组成的$x = x_{j=1}^{n}$，其中$n \geq 0$，以及 N 中的一个对象y。我们要证明多态射函子

$$\mathsf{N}\big(\langle x\rangle; y\big) \xrightarrow{G} \mathsf{M}\big(G\langle x\rangle; Gy\big) \tag{3.3.5}$$

在对象上是单射。对于 N 中的每个 n 元 1-胞$f : x \not\longrightarrow y$下述计算表明，$f$由$Gf$唯一确定，其中 γ 表示 N 中的复合（3.1.5）。

$$\begin{cases} f = \gamma\big(f; \langle 1_{x_j}\rangle\big) & \text{by right unity (3.1.8)} \\ \quad = \gamma\big(f; \big\langle \gamma(\varepsilon_{x_j}; \varepsilon_{x_j}^{-1})\big\rangle\big) & \text{by invertibility of } \varepsilon \\ \quad = \gamma\big(\gamma(f; \varepsilon_{\langle x\rangle}); \varepsilon_{\langle x\rangle}^{-1}\big) & \text{by associativity (3.1.7)} \\ \quad = \gamma\big(\gamma(\varepsilon_y; FGf); \varepsilon_{\langle x\rangle}^{-1}\big) & \text{by object Cat-naturality (3.2.18)} \end{cases} \tag{3.3.6}$$

这表明（3.3.5）中的多态射函子G 在对象上是单射的。

将 ε 替换为下式后的计算（3.3.6）

$$\eta^{-1} : GF \xrightarrow{\cong} 1_{\mathsf{M}}$$

这也表明，Cat-多重等价 $F : \mathsf{M}\ \mathsf{N}$ 在n元 1-胞上是~~单~~射的。

步骤 3：在n元 2-胞上的单射性

设 $\theta : ff'$ 是 $\mathsf{N}(x, y)$ 中的一个n元 2-胞。将f、ε和（3.2.18）分别替换为 θ、1_ε 以及态射 Cat-自然性（3.2.19）后的计算（3.3.6）表明，θ 由$G\theta$唯一确定。这表明（3.3.5）中的多态射函子G 在态射上是单射的。将 1_ε 替换为 $1_{\eta^{-1}}$ 后，同一计算还表明，Cat-多重等价$F : \mathsf{M}\ \mathsf{N}$ 在n元 2-胞上是单射的。 $\longrightarrow$

步骤 4：关于n元 1-胞的满射性

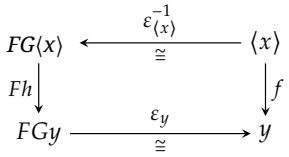
在 (3.3.5) 的背景下，设给定一个n元 1-胞

$$h : G\langle x\rangle \longrightarrow Gy \quad \text{in} \quad \mathsf{M}.$$

我们必须证明，N 中存在一个 n 元 1-胞$f : x \not\longrightarrow y$，使得 $Gf = h$。我们定义这个 n 元 1-胞

$$f = \gamma\big(\gamma(\varepsilon_y; Fh); \varepsilon_{\langle x\rangle}^{-1}\big) \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(\langle x\rangle; y\big),$$

我们将其形象地表示为下面的长复合。



类似于（3.3.6），我们作如下计算。

$$\text{(3.3.7)}\qquad \begin{cases} Fh = \gamma\big(\varepsilon_y^{-1}\,;\,\gamma(f\,;\,\varepsilon_{\langle x\rangle})\big) & \text{by (3.1.7) through (3.1.9)} \\ \quad = \gamma\big(\varepsilon_y^{-1}\,;\,\gamma(\varepsilon_y\,;\,FGf)\big) & \text{by (3.2.18)} \\ \quad = FGf & \text{by (3.1.7) and (3.1.9)} \end{cases}$$

上文确立的F 在n元1-胞上的单射性与（3.3.7）推出所需的等式，$Gf = h$。

步骤5：在n元2-胞上的满射性

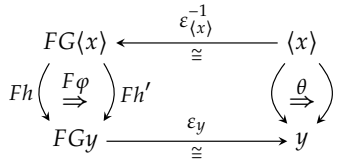
在（3.3.5）的语境下，设给定一个n元2-胞

$$h \xrightarrow{\ \varphi\ } h' \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(G\langle x\rangle\,;\,Gy\big).$$

我们必须证明存在一个 n 元 2-胞 $\theta : ff'$，属于 $\mathsf{N}(x\,;\,y)$，使得$G\theta = \varphi$。我们定义这个 n 元 2-胞

$$\theta = \gamma\big(\gamma(1_{\varepsilon_y}\,;\,F\varphi)\,;\,1_{\varepsilon_{\langle x\rangle}^{-1}}\big) \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(\langle x\rangle\,;\,y\big),$$

我们将其形象地表示为下方的长复合。



将 h、f、 ε 和 (3.2.18) 分别替换为 φ、 θ、1_ε 和态射 Cat-自然性 (3.2.19)，即可得到计算 (3.3.7)，它表明

$$F\varphi = FG\theta.$$

由上文确立的 F 在n 元 2-胞上的单射性，现可推出所需的等式，$G\theta = \varphi$。至此便完成了证明：G 的每个多态射函子 (3.3.5) 都是同构。

对于非对称变体，注意到并未用到对称群作用，因此可以沿用上面的证明。□

3.4. Cat-多重等价的刻画

在引理 3.3.4 中，我们注意到（非对称）Cat-多重等价在对象上本质满，并且在多态射范畴上是同构。本节将证明，这些性质恰好刻画了（非对称）Cat-多重等价；参见定理 3.4.21。在定理 8.4.17 中，我们应用定理 3.4.21 证明，双置换指标范畴上的格罗滕迪克构造是一个非对称 Cat-多重等价。

以下是本节的提纲。

（1）对于一个 Cat-多函子 G，它满足引理 3.3.4 的结论，我们在定义 3.4.1 中构造左伴随 F 以及单位 $\eta : 1 \longrightarrow GF$。

● 引理 3.4.7 和 3.4.8 表明，F 是一个 Cat-多函子；若G是非对称的，则它也是非对称的。

● 引理 3.4.13 表明，η 是一个 Cat-多自然同构；若G 是非对称的，则它也是非对称的。

(2) 余单位 $\varepsilon : FG \longrightarrow 1$ 在定义 3.4.15 中构造。

● 引理 3.4.18 表明，ε 是一个 Cat-多自然同构；若G 是非对称的，则它也是非对称的。

● 引理 3.4.20 验证了四元组 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ 的三角恒等式，从而完成了定理 3.4.21 证明的最后一部分。

（3）定理 3.4.22 是刻画 2-范畴之间 2-等价的一元特殊情形。

左伴随与单位。

定义 3.4.1。 设给定 Cat-多范畴之间的 Cat-多函子

$$\mathsf{N} \xrightarrow{\ G\ } \mathsf{M}$$

即

● 在对象集上本质满，并且

● 在每个多态射范畴上都是同构。

定义以下数据:

● 一个 Cat-多函子 $F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$，以及

• 一个Cat-多自然同构 $\eta : 1_{\mathsf{M}} \xrightarrow{\cong} GF$

如下所述。

***F* 在对象和分量 η：** 给定一个对象 $x \in \mathsf{M}$，根据 G 的本质满射性以及选择公理，我们选择一个对象 $Fx \in \mathsf{N}$ 和一个同构

$$x \xrightarrow[\cong]{\eta_x} G(Fx) \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(x\,;\, GFx\big). \tag{3.4.2}$$

这些选择定义了 $x \; Fx$，即 F 的对象赋值以及其一元 1-胞的分量 η。

关于 **n**元 *1*-胞：**给定一个** n元 *1*-胞 $\mathsf{f} : \langle x \rangle \; y$ 在 M 中，满足 $\langle x \rangle = \langle x^j \rangle_{j=1}^{n}$，考虑以下 n元1-胞

$$\gamma\left(\eta_y\,;\, \gamma\left(f\,;\, \eta_{\langle x \rangle}^{-1}\right)\right) \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(GF\langle x \rangle\,;\, GFy\big),$$

我们将其形象化为下方的长复合。

$$\begin{array}{ccc} \langle x \rangle & \xleftarrow[\cong]{\eta_{\langle x \rangle}^{-1}} & GF\langle x \rangle \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(Ff)} \\ y & \xrightarrow[\cong]{\eta_y} & GFy \end{array}$$

由于多态射函子

$$\mathsf{N}\big(F\langle x \rangle\,;\, Fy\big) \xrightarrow[\cong]{\ G\ } \mathsf{M}\big(GF\langle x \rangle\,;\, GFy\big) \tag{3.4.3}$$

是同构，因此存在唯一的n元 1-胞

$$F\langle x\rangle \xrightarrow{Ff} Fy \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle; Fy\big)$$

使得

$$G(Ff) = \gamma\left(\eta_y; \gamma\left(f; \eta^{-1}_{\langle x\rangle}\right)\right). \tag{3.4.4}$$

这定义了 n元 1-胞腔赋值，$f \mapsto Ff$，即 F。

F 在 n元 2-胞上： 给定一个 n元 2-胞 $\theta : f \Rightarrow f' \text{ in } \mathsf{M}(x; y)$，考虑该$n$元 2-胞

$$\gamma\left(1_{\eta_y}; \gamma\left(\theta; 1_{\eta^{-1}_{\langle x\rangle}}\right)\right) : GFf \longrightarrow GFf' \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(GF\langle x\rangle; GFy\big),$$

我们将其形象地表示为下方的长复合。

$$\begin{array}{ccc} \langle x\rangle & \xleftarrow[\cong]{\eta^{-1}_{\langle x\rangle}} & GF\langle x\rangle \\ f\Big(\overset{\theta}{\Rightarrow}\Big)f' & & GFf\Big(\overset{G(F\theta)}{\Rightarrow}\Big)GFf' \\ y & \xrightarrow[\cong]{\eta_y} & GFy \end{array}$$

根据 (3.4.3) 中的同构G，存在唯一的n元 2-胞

$$Ff \xrightarrow{F\theta} Ff' \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle; Fy\big)$$

使得

$$G(F\theta) = \gamma\left(1_{\eta_y}; \gamma\left(\theta; 1_{\eta^{-1}_{\langle x\rangle}}\right)\right). \tag{3.4.5}$$

这定义了 n元 2-胞腔赋值 $\theta \mapsto F\theta$，即 F。

这完成了对 F 和 η 的定义。此外，在非对称情形下，使用 G、F 和 η，我们作出相同的定义。

说明 3.4.6。考虑定义 3.4.1。

（i）即使 $G : \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ 是非对称 Cat-多范畴之间的非对称 Cat-多函子，该定义仍然有意义，因为没有使用 M 和 N 上的对称群作用，也没有使用 G 的对称群作用公理。（ii）定义（3.4.4）和（3.4.5）分别仿照 $\eta : 1_{\mathsf{M}} \Rightarrow GF$ 的对象 Cat-自然性条件和态射 Cat-自然性条件（3.2.18）和（3.2.19）。一旦我们证明F 是一个（非对称）Cat-多函子，关于 η 的这些 Cat-自然性条件就随之成立。

为了证明 $F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 是一个（非对称）Cat-多函子，首先检查它在多态射范畴之间的函子性。以下引理在对称和非对称情形下均成立。

引理 3.4.7. 在定义 *3.4.1* 的背景下，对于 $\langle x\rangle = \langle x^j\rangle_{j=1}^n$ 以及 M 中的对象 y，以下赋值

$$\mathsf{M}\big(\langle x\rangle; y\big) \xrightarrow{F} \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle; Fy\big)$$

构成一个函子。

证明。设 $f : \langle x\rangle\, y$ 是一个~~n元~~ 1-胞，属于 M。为证明 F 保留恒等 n元 2-胞 $1_f : ff \longrightarrow f$，我们作如下计算。

$$\begin{aligned}
GF1_f &= \gamma\big(1_{\eta_y}\,;\, \gamma(1_f\,;\, 1_{\eta_{\langle x\rangle}^{-1}})\big) && \text{by (3.4.5)}\\
&= 1_{\gamma(\eta_y\,;\,\gamma(f\,;\,\eta_{\langle x\rangle}^{-1}))} && \text{by functoriality of } \gamma \text{ in } \mathsf{M}\\
&= 1_{GFf} && \text{by (3.4.4)}\\
&= G1_{Ff} && \text{by functoriality of } G \text{ in (3.4.3)}
\end{aligned}$$

由G 在（3.4.3）中对n元2-胞的单射性可知

$$F1_f = 1_{Ff} \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle\,;\, Fy\big).$$

这表明F 保持恒等n元2-胞。

为证明F 保持n元2-胞的复合

$$f \xrightarrow{\ \theta\ } f' \xrightarrow{\ \theta'\ } f'' \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(\langle x\rangle\,;\, y\big),$$

我们按如下方式计算。

$$\begin{aligned}
&GF(\theta'\circ\theta)\\
&= \gamma\big(1_{\eta_y}\,;\, \gamma(\theta'\circ\theta\,;\, 1_{\eta_{\langle x\rangle}^{-1}})\big) && \text{by (3.4.5)}\\
&= \Big[\gamma\big(1_{\eta_y}\,;\, \gamma(\theta'\,;\, 1_{\eta_{\langle x\rangle}^{-1}})\big)\Big]\circ\Big[\gamma\big(1_{\eta_y}\,;\, \gamma(\theta\,;\, 1_{\eta_{\langle x\rangle}^{-1}})\big)\Big] && \text{by functoriality of } \gamma\\
&= (GF\theta')\circ(GF\theta) && \text{by (3.4.5)}\\
&= G\big(F\theta'\circ F\theta\big) && \text{by functoriality of } G
\end{aligned}$$

由G 在（3.4.3）中对n元2-胞的单射性可知

$$F(\theta'\circ\theta) = F\theta'\circ F\theta \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle\,;\, Fy\big).$$

由此完成了证明：F 在每个多态射范畴上都是一个函子。 □

引理 3.4.8. 在定义 *3.4.1* 的语境中，

$$\mathsf{M} \xrightarrow{\ F\ } \mathsf{N}$$

是一个 Cat-多函子。若 G 是一个非对称Cat-多函子，则 F 是一个非对称 Cat-多函子。

证明。我们必须证明 F 保留带色单位、复合，以及仅在对称情形下的对称群作用，如定义 3.2.1 所述。

步骤 1：带色单位

对于每个对象 $x \in \mathsf{M}$，其带色单位 $1_x : x\ x$ 是 ~~M 中~~的一个一元 1-胞。计算如下。

$$\begin{aligned}
GF1_x &= \gamma\big(\eta_x\,;\, \gamma(1_x\,;\, \eta_x^{-1})\big) && \text{by (3.4.4)}\\
&= \gamma\big(\eta_x\,;\, \eta_x^{-1}\big) && \text{by left unity (3.1.9)}\\
&= 1_{GFx} && \text{by (3.4.2)}\\
&= G1_{Fx} && \text{by (3.2.3) for } G
\end{aligned}$$

式 (3.4.3) 中 G 在一元 1-胞上的单射性表明

$$F1_x = 1_{Fx} \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(Fx\,;\, Fx\big).$$

这表明 F 按照式 (3.2.3) 的含义保持带色单位。

步骤 2：复合

为了证明 F 保持 (3.2.4) 中的复合，考虑对象

$$y, \quad \langle x\rangle = \langle x_j\rangle_{j=1}^{n}, \quad \text{and} \quad \langle w_j\rangle = \langle w_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j}$$

在 M 中，其中 $j \in \{1,\dots,n\}$ 满足 $w = w_j{}_{j=1}^{n}$。我们必须证明下图是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle x\rangle; y\big) \times \prod_{j=1}^{n} \mathsf{M}\big(\langle w_j\rangle; x_j\big) & \xrightarrow{F \times \sqcap_j F} & \mathsf{N}\big(F\langle x\rangle; Fy\big) \times \prod_{j=1}^{n} \mathsf{N}\big(F\langle w_j\rangle; Fx_j\big) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ \mathsf{M}\big(\langle w\rangle; y\big) & \xrightarrow{\qquad F \qquad} & \mathsf{N}\big(F\langle w\rangle; Fy\big) \end{array} \tag{3.4.9}$$

给定

- an n-ary 1-cell $f : \langle x\rangle \longrightarrow y$ and
- an ℓ_j-ary 1-cell $f_j : \langle w_j\rangle \longrightarrow x_j$ for each $j \in \{1,\dots,n\}$

在 M 中，我们按如下方式计算。

$$\begin{cases} \quad GF\gamma\big(f; \langle f_j\rangle\big) & \\ = \gamma\Big(\eta_y; \gamma\big(\gamma(f; \langle f_j\rangle); \eta_{\langle w\rangle}^{-1}\big)\Big) & \text{by (3.4.4)} \\ = \gamma\Big(\gamma\big(\eta_y; \gamma(f; \eta_{\langle x\rangle}^{-1})\big); \big\langle \gamma\big(\eta_{x_j}; \gamma(f_j; \eta_{\langle w_j\rangle}^{-1})\big)\big\rangle\Big) & \text{by (3.1.7) and (3.1.8)} \\ = \gamma\big(GFf; GF\langle f_j\rangle\big) & \text{by (3.4.4)} \\ = G\gamma\big(Ff; F\langle f_j\rangle\big) & \text{by (3.2.4) for } G \end{cases} \tag{3.4.10}$$

计算 (3.4.10) 以及 G 在 $(\ell_1 + \cdots + \ell_n)$-元 1-胞上的单射性蕴含

$$F\gamma\big(f; \langle f_j\rangle\big) = \gamma\big(Ff; F\langle f_j\rangle\big) \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle w\rangle; Fy\big).$$

这证明了 (3.4.9) 在对象上的交换性。

设给定

- an n-ary 2-cell $\theta : f \longrightarrow f'$ in $\mathsf{M}(\langle x\rangle; y)$ and
- an ℓ_j-ary 2-cell $\theta_j : f_j \longrightarrow f_j'$ in $\mathsf{M}(\langle w_j\rangle; x_j)$ for each $j \in \{1,\dots,n\}$.

Then

- the computation (3.4.10) with (f, f_j, η) and (3.4.4) replaced by, respectively, $(\theta, \theta_j, 1_\eta)$ and (3.4.5), and
- the injectivity of G on $(\ell_1 + \cdots + \ell_n)$-ary 2-cells

蕴含了 (3.4.9) 在态射上的交换性。这证明了 F 保持复合。

到目前为止，证明在 G 为非对称 Cat-多函子的情况下仍然有效。在这种情况下，我们证明了 F 是一个非对称 Cat-多函子。

步骤 3：对称群作用

此情形仅适用于 G 是一个 Cat-多函子时。使用上述记号，对于每个置换 $\sigma \in \Sigma_n$，如果下图交换，则F按照（3.2.2）的意义保持对称群作用。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}(\langle x\rangle; y) & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle x\rangle; Fy) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathsf{M}(\langle x\rangle\sigma; y) & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle x\rangle\sigma; Fy) \end{array} \tag{3.4.11}$$

对于 M 中的一个 n 元 1-胞 $f : x\ y$，计算如下。

$$\begin{cases} \quad G\big((Ff)\sigma\big) & \\ = (GFf)\sigma & \text{by (3.2.2) for } G \\ = \gamma\big(\eta_y ; \gamma(f ; \eta_{\langle x\rangle}^{-1})\big)\sigma & \text{by (3.4.4)} \\ = \gamma\big(\eta_y ; \gamma(f ; \eta_{\langle x\rangle}^{-1})\sigma\big) & \text{by bottom eq. (3.1.12)} \\ = \gamma\big(\eta_y ; \gamma(f\sigma ; \eta_{\langle x\rangle\sigma}^{-1})\big) & \text{by top eq. (3.1.10)} \\ = GF(f\sigma) & \text{by (3.4.4)} \end{cases} \tag{3.4.12}$$

G 在 n 元 1-胞上的单射性意味着

$$(Ff)\sigma = F(f\sigma).$$

这证明了 (3.4.11) 在对象上的交换性。

(3.4.11) 在态射上的交换性可通过以下方法证明

- 将 f、η 和 (3.4.4) 分别替换为 M(x; y) 中的一个 n 元 2-胞、1_η 和 (3.4.5)，再进行计算 (3.4.12)，以及
- G 在n元 2-胞上的单射性。

由此完成证明：若G 是 Cat-多函子，则F 保留对称群作用。□

回顾解释3.2.15中对（非对称）Cat-多自然变换或同构的描述。

引理 3.4.13。 在定义 *3.4.1* 的上下文中，

$$1_{\mathsf{M}} \xrightarrow{\eta} GF$$

是一个Cat-多自然同构。若 G 是非对称Cat-多函子，则 η 是一个非对称Cat-多自然同构。

证明。在引理 3.4.8 中，我们证明了$F : \mathsf{M}\ \mathsf{N}$ 是一个（非对称）Cat-多函子。根据定义 (3.4.2)，每个分量 1 元 1-胞 $\eta_x : x\ GFx$都是 M 中的同构。接下来只需验证 η 的两个 Cat-自然性条件 (3.2.18) 和 (3.2.19)。

对于一个 n元 1-胞 $f : \langle x\rangle \to$ 属于 M，且满足 $x = x^n_{j=1}$，下面的等式证明了 $\eta : 1 \longrightarrow$ M GF 的对象 Cat-自然性条件 (3.2.18)。

$$\begin{cases} \gamma\big(GFf\,;\,\eta_{\langle x\rangle}\big) & \\ = \gamma\Big(\gamma\big(\eta_y\,;\,\gamma(f\,;\,\eta^{-1}_{\langle x\rangle})\big)\,;\,\eta_{\langle x\rangle}\Big) & \text{by (3.4.4)} \\ = \gamma\Big(\eta_y\,;\,\gamma\big(f\,;\,\langle\gamma(\eta^{-1}_{x_j}\,;\,\eta_{x_j})\rangle\big)\Big) & \text{by (3.1.7)} \\ = \gamma\big(\eta_y\,;\,f\big) & \text{by (3.1.8)} \end{cases} \tag{3.4.14}$$

对于 η 的态射 Cat-自然性条件 (3.2.19)，通过以下计算 (3.4.14) 得以证明：分别将 f、η 和 (3.4.4) 替换为 M(x; y) 中的一个 n 元 2-胞、1_η 和 (3.4.5)。□

余单位。接下来我们为 (F,G) 定义余单位。下面的公式 (3.4.17) 来源于伴随的右三角恒等式 (1.3.16)。

定义 3.4.15。在定义 3.4.1 的语境下，定义一个 Cat-多自然同构的数据

$$FG \xrightarrow[\cong]{\varepsilon} 1_{\mathsf{N}}$$

如下。对于每个对象 $z \in$ N，η 在 M 中的 (Gz)-分量 1 元 1-胞

$$Gz \xrightarrow[\cong]{\eta_{Gz}} GFGz$$

是一个同构 (3.4.2)，其逆记作

$$GFGz \xrightarrow[\cong]{\eta^{-1}_{Gz}} Gz.$$

由于多态射函子

$$\mathsf{N}\big(FGz\,;\,z\big) \xrightarrow[\cong]{G} \mathsf{M}\big(GFGz\,;\,Gz\big)$$

是一个同构，因此存在唯一的可逆一元 1-胞，属于 N

$$FGz \xrightarrow[\cong]{\varepsilon_z} z \tag{3.4.16}$$

使得

$$G\varepsilon_z = \eta^{-1}_{Gz}. \tag{3.4.17}$$

这定义了 ε 的z-分量。

引理 3.4.18。在定义 *3.4.1* 和 *3.4.15* 的语境下，

$$FG \xrightarrow{\varepsilon} 1_{\mathsf{N}}$$

是一个 Cat-多自然同构。若 G 是一个非对称 Cat-多函子，则 ε 是一个非对称Cat-多自然同构。

证明。由于 ε 的每个分量都是同构（3.4.16），只需检验 ε 是否满足两个 Cat-自然性条件（3.2.18）和（3.2.19）。设 g ：

$\langle w\rangle$ ~~是~~ N 中的一个 n 元 1-胞，且 $w = w_{j=1}^{n}$。G 在 n 元 1-胞上的单射性以及以下等式证明了 $\varepsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathsf{N}}$ 的对象 Cat-自然性条件（3.2.18）。

$$
\begin{cases}
\quad G\gamma\big(g\,;\,\varepsilon_{\langle w\rangle}\big) & \\
= \gamma\big(Gg\,;\,G\varepsilon_{\langle w\rangle}\big) & \text{by (3.2.4) for } G \\
= \gamma\big(Gg\,;\,\eta^{-1}_{G\langle w\rangle}\big) & \text{by (3.4.17)} \\
= \gamma\big(\eta^{-1}_{Gz}\,;\,GFGg\big) & \text{by (3.1.7) through (3.1.9) and (3.4.14)} \\
= \gamma\big(G\varepsilon_z\,;\,GFGg\big) & \text{by (3.4.17)} \\
= G\gamma\big(\varepsilon_z\,;\,FGg\big) & \text{by (3.2.4) for } G
\end{cases}
\tag{3.4.19}
$$

ε 的态射 Cat-自然性条件 (3.2.19) 的证明利用了

- G 在n元 2-胞上的单射性，以及
- 计算 (3.4.19)，其中将g、 η、 ε和 (3.4.14) 分别替换为 N 中的一个n元 2-胞、 1_η、 1_ε以及 η 的态射 Cat-自然性条件 (3.2.19)（引理 3.4.13）。

证明至此完成。 □

引理 3.4.20. 在定义 *3.4.1* 和 *3.4.15* 的背景下，(1.3.16) 中的三角恒等式对$(F, G, \eta, \varepsilon)$成立。

证明。右三角恒等式

$$\gamma\big(G\varepsilon_z\,;\,\eta_{Gz}\big) = 1_{Gz}$$

由 ε_z 的定义 (3.4.17) 得出，只需对两边应用 $\gamma(-;\,\eta_{Gz})$。

左三角恒等式由以下对每个对象 $x \in \mathsf{M}$ 的计算以及 G 在 1-元1-胞上的单射性得出。

$$
\begin{aligned}
& G\gamma\big(\varepsilon_{Fx}\,;\,F\eta_x\big) & \\
= {} & \gamma\big(G\varepsilon_{Fx}\,;\,GF\eta_x\big) & \text{by (3.2.4) for } G \\
= {} & \gamma\Big(\eta^{-1}_{GFx}\,;\,\gamma\big(\eta_{GFx}\,;\,\gamma(\eta_x\,;\,\eta_x^{-1})\big)\Big) & \text{by (3.4.4) and (3.4.17)} \\
= {} & 1_{GFX} & \text{by (3.1.8)} \\
= {} & G1_{Fx} & \text{by (3.2.3) for } G
\end{aligned}
$$

证明至此完成。 □

Cat-多重等价。 现在我们可以给出本节的主要结果，即 Cat-多重等价的一种实用刻画（定义 3.3.1）。

定理 3.4.21（多重等价）。 *Sup pose*

$$\mathsf{N} \xrightarrow{\;G\;} \mathsf{M}$$

是 Cat-多函子范畴之间的 Cat-多函子。则以下三个陈述等价。

（*1*）G 是伴随 Cat-多重等价 (F, G, η, ε) 的右伴随。（*2*）G 是一个 Cat-多重等价。（*3*）G 是

- 本质满对象且

在每个多态射范畴上都是同构。
此外，非对称变体也成立，其中 M、N、G 和 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ 都是非对称的。

证明。我们分别考虑如下各个蕴含。

- (1) ⇒ (2) 根据定义 1.3.15 和 3.3.1 得出。
- (2) ⇒ (3) 根据引理 3.3.4 得出。
- (3) ⇒ (1) 根据引理 3.4.8、3.4.13、3.4.18 和 3.4.20 得出。

证明至此完成。 □

回顾定义 1.3.18 中（伴随）2-等价的概念。将定理 3.4.21 证明中引用的引理的证明限制到一元情形，可得到 2-等价的如下刻画 **[JY21，7.5.8]**。

定理 3.4.22（2-等价）。设

$$\mathsf{C} \xrightarrow{G} \mathsf{B}$$

是 *2*-范畴之间的一个 *2*-函子。那么以下三个陈述等价。

(1) G 是伴随 *2*-等价（F，G，η，ε）的右伴随。*(2) G* 是一个 *2*-等价。*(3) G* 是

- 本质满对象，且
- 每个同态范畴上的一个同构。

在 **[JY21，7.5.8]**中，该定理是通过限定双范畴之间双等价的一个类似刻画的证明而得到的，参见 **[JY21，7.4.1]**。相比之下，在这里，我们通过限定定理 3.4.21 的证明得到定理 3.4.22，而定理 3.4.21 是对 Cat-多重等价的一个刻画。关于涉及 Cat-多范畴的弱变体的一种可能推广，参见问题 A.0.1。

第 4 章

伪对称性

本章中，我们定义 Cat-多范畴之间的伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1）。它们是 Cat-多函子的较弱变体，只要求在相容同构意义下保持对称群作用。相应的伪对称 Cat-多自然变换概念见定义 4.2.1。这些概念构成一个以小 Cat-多范畴为对象的 2-范畴 Cat-Multicat^{ps} 的 1-胞和 2-胞（定理 4.2.16）。定理 4.3.28 用对象上的本质满性和多态射范畴上的可逆性来刻画伪对称 Cat-多重等价。这是定理 3.4.21 的伪对称版本。下面给出本章部分定义和结果的概要表。

伪对称 Cat-多函子	定义 4.1.1
伪对称 Cat-多自然变换	定义 4.2.1
2-范畴 Cat-Multicat^{ps}	定理 4.2.16
伪对称 Cat-多重等价	定义 4.3.1
伪对称 Cat-多重等价的刻画	定理 4.3.28

伪对称 Cat-多函子将在后续章节中用于如下内容。

格罗滕迪克构造与逆*K*-理论。 伪对称 Cat-多函子的典型例子是格罗滕迪克构造

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

在任意小紧双置换范畴 $(\mathsf{D}, \oplus, \otimes)$ 上（定理 6.7.8）。

- 定义域 Cat-多范畴 DCat（定理 5.3.11）的对象是加性对称幺半函子 $\mathsf{D}^{\oplus}\mathsf{Cat}$。其多态射范畴（定义 5.2.31）的定义充分运用了 D 的双置换结构以及 Laplaza 的相干定理 2.4.18。
- 陪域 Cat-多范畴 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 的对象是小置换范畴（定理 6.1.31）。

一个重要的推论是，逆*K*理论 $\int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$（它涉及例 2.3.17 中小紧双置换范畴 A 上的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{A}}$）是伪对称 Cat-多函子，*not* 而非 Cat-多函子（定理 10.2.1）。

考虑到向 D 的投影，上述格罗滕迪克构造提升为一个非对称 Cat-多函子（7.4.10）

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}.$$

陪域 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴，其对象是 D 上的小置换的余纤维化（定理 7.3.16）。虽然这些对象只使用了 $\mathrm{D}^{\oplus}$ 的加法结构，但 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的多态射范畴（定义 7.2.25）充分运用了 D 的双置换结构。定理 3.4.21 中对 Cat-多重等价的刻画被用于证明，这个提升后的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多重等价（定理 8.4.17）。

组织结构。 在第 4.1 节中，我们定义伪对称 Cat-多函子。这些 Cat-多函子的较弱变体仅在对称群作用方面不严格。它们必须严格保留带色单位和 Cat-多范畴复合。我们之所以如此定义，是因为格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$恰好具有这些性质（定理 6.7.8）。关于 Cat-多范畴和 Cat-多函子的进一步弱化变体，请参见说明 4.2.17 和问题 A.0.1。

在第 4.2 节中，我们定义伪对称 Cat-多自然变换，其作用于伪对称 Cat-多函子之间。它们的数据与 Cat-多自然变换相同，即分量一元 1-胞，并满足 Cat-自然性条件 (3.2.18) 和 (3.2.19)。此外，每个伪对称 Cat-多自然变换都与其定义域和陪域的伪对称同构相容。存在一个 2-范畴 $\mathrm{Cat}\text{-}\mathrm{Multicat}^{\mathrm{ps}}$，其 1-胞为伪对称 Cat-多函子，2-胞为伪对称 Cat-多自然变换（定理 4.2.16）。

在第 4.3 节中，我们将定理 3.4.21 推广到伪对称情形。定理 4.3.28 证明，伪对称 Cat-多函子是伪对称 Cat-多重等价，当且仅当它本质满对象，并且在每个多态射范畴上都是同构。

提醒读者注意我们的左规范化括号约定 1.1.24。

4.1. 伪对称Cat-多函子 s

本节定义一种 Cat-多函子 F ：M N 之间的Cat-多范畴，称为伪对称 Cat-多函子，它在相容自然同构意义下保持对称群作用 (3.2.2)。伪对称 Cat-多函子在复合下封闭（引理 4.1.16），且复合严格结合并满足单位律。第 4.2 节讨论它们之间的变换。

伪对称 Cat-多函子这一概念的主要用途是定理 6.7.8。该结果表明，对于每个小紧双置换范畴 D，格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个伪对称 Cat-多函子，但通常不是 Cat-多函子。实际而言，逆K理论是一个伪对称 Cat-多函子，但不是 Cat-多函子（定理 10.2.1）。

定义 4.1.1. 设 M 和 N 是 Cat-多范畴。一个伪对称Cat-多函子

$$\mathsf{M} \xrightarrow{\left(F,\{F_{\sigma,\{c\},c'}\}\right)} \mathsf{N}$$

由以下部分组成

- 一个对象赋值 F ：对象集M 对象集N；

● 对于每个 $(c;\ c\prime) \in \mathbf{Prof}(\mathsf{M}) \times$对象集$\mathsf{M}$，其中 $c = cjnj{=}1$，一个分量函子

$$\mathsf{M}\big(\langle c\rangle; c'\big) \xrightarrow{\ F\ } \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle; Fc'\big)$$

与 $Fc = Fcj_{j=1}^{n}$；以及

● 对每个置换 $\sigma \in \Sigma_n$ 及上述对象 $(c;\ c\prime)$，都有一个自然同构态射

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle c\rangle; c'\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle; Fc'\big) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \overset{F_{\sigma,\langle c\rangle,c'}}{\underset{\cong}{\Longrightarrow}} & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathsf{M}\big(\langle c\rangle\sigma; c'\big) & \xrightarrow[\ F\ ]{} & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma; Fc'\big) \end{array} \tag{4.1.2}$$

称为伪对称同构。

当定义域对象 $(c;\ c')$ 可由上下文推知时，我们将 $F_{\sigma,\langle c\rangle,c'}$ 简写为 F_σ。上述数据须满足

● 单位公理(3.2.3)，

● 复合公理 (3.2.4)，以及

● 以下四条公理 (4.1.3) 至 (4.1.6)，其中 $(c;\ c\prime)$ 如上所述。

单位置换： 对于恒等置换 $\mathrm{id}_n \in \Sigma_n$，有以下等式成立。

$$F_{\mathrm{id}_n,\langle c\rangle,c'} = 1_F \tag{4.1.3}$$

乘积置换： 对于 $\sigma,\tau \in \Sigma_n$，有以下粘贴图等式成立。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle c\rangle; c'\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle; Fc'\big) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \overset{F_\sigma}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathsf{M}\big(\langle c\rangle\sigma; c'\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma; Fc'\big) \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & \overset{F_\tau}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ \mathsf{M}\big(\langle c\rangle\sigma\tau; c'\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma\tau; Fc'\big) \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle c\rangle; c'\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle; Fc'\big) \\ {\scriptstyle\sigma\tau}\downarrow & \overset{F_{\sigma\tau}}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle\sigma\tau} \\ \mathsf{M}\big(\langle c\rangle\sigma\tau; c'\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma\tau; Fc'\big) \end{array} \tag{4.1.4}$$

顶层等变性： 在 (3.1.10) 的上下文中，我们使用以下简写记号。

$$\begin{cases} \langle\langle c_j\rangle\rangle_{j=1}^{n} = \big(\langle c_1\rangle,\dots,\langle c_n\rangle\big) & \langle\langle c_{\sigma(j)}\rangle\rangle_{j=1}^{n} = \big(\langle c_{\sigma(1)}\rangle,\dots,\langle c_{\sigma(n)}\rangle\big) \\ \langle\langle Fc_j\rangle\rangle_{j=1}^{n} = \big(F\langle c_1\rangle,\dots,F\langle c_n\rangle\big) & \langle\langle Fc_{\sigma(j)}\rangle\rangle_{j=1}^{n} = \big(F\langle c_{\sigma(1)}\rangle,\dots,F\langle c_{\sigma(n)}\rangle\big) \\ \overline{\sigma} = \sigma\langle k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(n)}\rangle \end{cases}$$

那么，下面的粘贴图等式成立。

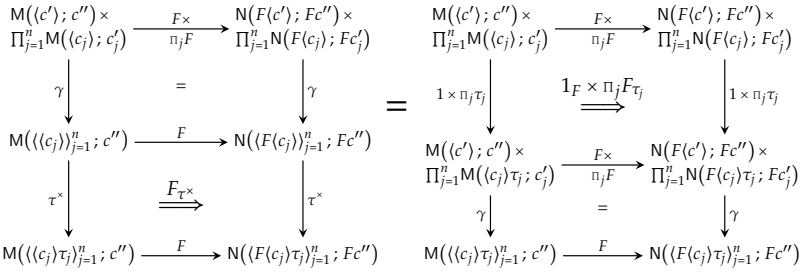
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle c'\rangle; c''\big)\times \prod_{j=1}^{n}\mathsf{M}\big(\langle c_j\rangle; c_j'\big) & \xrightarrow{F\times\ \prod_j F} & \mathsf{N}\big(F\langle c'\rangle; Fc''\big)\times \prod_{j=1}^{n}\mathsf{N}\big(F\langle c_j\rangle; Fc_j'\big) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathsf{M}\big(\langle\langle c_j\rangle\rangle_{j=1}^{n}; c''\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(\langle F\langle c_j\rangle\rangle_{j=1}^{n}; Fc''\big) \\ {\scriptstyle\overline{\sigma}}\downarrow & \overset{F_{\overline{\sigma}}}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle\overline{\sigma}} \\ \mathsf{M}\big(\langle\langle c_{\sigma(j)}\rangle\rangle_{j=1}^{n}; c''\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(\langle F\langle c_{\sigma(j)}\rangle\rangle_{j=1}^{n}; Fc''\big) \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle c'\rangle; c''\big)\times \prod_{j=1}^{n}\mathsf{M}\big(\langle c_j\rangle; c_j'\big) & \xrightarrow{F\times\ \prod_j F} & \mathsf{N}\big(F\langle c'\rangle; Fc''\big)\times \prod_{j=1}^{n}\mathsf{N}\big(F\langle c_j\rangle; Fc_j'\big) \\ {\scriptstyle(\sigma,\sigma^{-1})}\downarrow & \overset{F_\sigma\times 1}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle(\sigma,\sigma^{-1})} \\ \mathsf{M}\big(\langle c'\rangle\sigma; c''\big)\times \prod_{j=1}^{n}\mathsf{M}\big(\langle c_{\sigma(j)}\rangle; c'_{\sigma(j)}\big) & \xrightarrow{F\times\ \prod_j F} & \mathsf{N}\big(F\langle c'\rangle\sigma; Fc''\big)\times \prod_{j=1}^{n}\mathsf{N}\big(F\langle c_{\sigma(j)}\rangle; Fc'_{\sigma(j)}\big) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & = & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ \mathsf{M}\big(\langle\langle c_{\sigma(j)}\rangle\rangle_{j=1}^{n}; c''\big) & \xrightarrow{\ F\ } & \mathsf{N}\big(\langle F\langle c_{\sigma(j)}\rangle\rangle_{j=1}^{n}; Fc''\big) \end{array} \tag{4.1.5}$$

底部等变性： 在（3.1.12）的上下文中，我们采用以下简写。

$$\begin{cases} \langle\langle c_j\rangle\tau_j\rangle_{j=1}^n = \big(\langle c_1\rangle\tau_1, \dots, \langle c_n\rangle\tau_n\big) & \tau^\times = \tau_1 \times \cdots \times \tau_n \\ \langle F\langle c_j\rangle\tau_j\rangle_{j=1}^n = \big(F\langle c_1\rangle\tau_1, \dots, F\langle c_n\rangle\tau_n\big) \end{cases}$$

于是，下列粘贴图等式成立。

(4.1.6)



至此，伪对称 Cat-多函子的定义完成。

此外，M 的恒等伪对称 Cat-多函子 记作 1_{M}，由以下部分组成：

- ObM 上的恒等对象赋值，
- 恒等分量函子，以及
- 将恒等自然变换作为伪对称同构。

这就完成了 1_{M} 的定义。

例 4.1.7（Cat-多函子）。（4.1.2）中的伪对称同构的定义域和陪域构成了对称群作用公理（3.2.2）的边界。因此，以下两者之间存在一个典范双射：

- Cat-多函子 $F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$，以及
- 伪对称 Cat-多函子 $(F, \{F_\sigma\}) : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$，其中每个伪对称同构 F_σ 均由恒等自然变换给出。

在本文中，当 Cat-多函子 F 被视为伪对称 Cat-多函子时，我们总是指将每个 F_σ 取为恒等自然变换。关于一种可能的变体，请参见问题 A.0.2。

例 4.1.8（非对称 Cat-多函子）。每个伪对称 Cat-多函子 $(F, \{F_\sigma\}) : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 忘掉伪对称同构 $\{F_\sigma\}$ 后，便得到一个非对称 Cat-多函子 $F : \mathsf{M} \to \mathsf{N}$。

说明4.1.9（伪对称数据）。（4.1.2）中的伪对称同构 F_σ 由以下部分构成：对于每个 n元 1-胞 $p \in \mathsf{M}(c; c')$，一个可逆的 n元 2-胞

$$F(p^\sigma) \xrightarrow[\cong]{F_{\sigma;p}} (Fp)^\sigma \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma\,;\, Fc'\big)$$

使得，对于 $\mathsf{M}(c; c')$ 中每个 n 元 2-胞 $f : p \to q$，自然性图表

$$\begin{array}{ccc} F(p^\sigma) & \xrightarrow{F(f^\sigma)} & F(q^\sigma) \\ {\scriptstyle F_{\sigma;p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\sigma;q}} \\ (Fp)^\sigma & \xrightarrow{(Ff)^\sigma} & (Fq)^\sigma \end{array}$$

是交换的。此处及下文，我们将 p 上的右 σ-作用记作

$$p^{\sigma} = p \cdot \sigma \in \mathsf{M}\big(\langle c\rangle\sigma\,;\, c'\big)$$

以及 p-分量 F_{σ} 作为 $F^{\sigma;p}$ 或 $F_{\sigma,p}$。

说明 4.1.10 （伪对称公理）。 考虑定义 4.1.1 中的伪对称 Cat-多函子（F,{F_{σ}}）。

（1）假定单位公理（3.2.3）和复合公理（3.2.4）严格成立。这两条公理不涉及对称群作用和伪对称同构。（2）单位置换公理（4.1.3）和乘积置换公理（4.1.4）仿照 Cat-多范畴的对称群作用公理（3.1.6）。乘积置换公理（4.1.4）意味着，对于每个 n 元 1-胞 $p \in \mathsf{M}(c;\, c')$，$n$ 元 2-胞的图表

$$\begin{array}{ccc} F(p^{\sigma\tau}) & \xrightarrow{\;F_{\sigma\tau;p}\;} & (Fp)^{\sigma\tau} \\ & {\scriptstyle F_{\tau;\,p^{\sigma}}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle (F_{\sigma;p})^{\tau}} & \\ & (F(p^{\sigma}))^{\tau} & \end{array}$$

在 $\mathsf{N}(Fc\sigma\tau;\, Fc')$ 中是交换的。

(3) 根据单位置换公理 (4.1.3)，当 c 为空序列或长度为 1 时，伪对称同构 $F_{\sigma,\langle c\rangle,c'}$ 是恒等自然变换。因此，伪对称 Cat-多函子在底层一元 2-范畴上的限制是一个 2-函子。参见命题 1.3.4、定义 1.3.5 和例 3.1.18。

(4) 在顶部和底部等变公理 (4.1.5) 和 (4.1.6) 中，标记为 $=$ 的四个区域根据复合公理 (3.2.4) 是交换的；该公理假定对伪对称 Cat-多函子成立。伪对称 Cat-多函子的顶部和底部等变公理分别参照 Cat-多范畴的顶部和底部等变公理 (3.1.10) 和 (3.1.12) 建立。

顶层等变公理 (4.1.5) 表示，对于n元 1-胞

$$p \in \mathsf{M}\big(\langle c'\rangle\,;\, c''\big) \quad \text{and} \quad p_j \in \mathsf{M}\big(\langle c_j\rangle\,;\, c_j'\big),$$

在 $\mathsf{N}(Fc^{\sigma(j)}{}_{j=1}^{n};\, Fc'')$ 中，以下n元 2-胞的等式成立。

$$F_{\overline{\sigma};\gamma\left(p\,;\langle p_j\rangle_{j=1}^{n}\right)} = \gamma\left(F_{\sigma;p}\,;\,\left\langle 1_{Fp_{\sigma(j)}}\right\rangle_{j=1}^{n}\right) \tag{4.1.11}$$

底部等变公理 (4.1.6) 表示n元 2-胞的等式

$$F_{\tau^{\times};\gamma\left(p\,;\langle p_j\rangle_{j=1}^{n}\right)} = \gamma\left(1_{Fp}\,;\,\left\langle F_{\tau_j;\,p_j}\right\rangle_{j=1}^{n}\right) \tag{4.1.12}$$

在 $\mathsf{N}(Fc^{j\tau_j}{}_{j=1}^{n};\, Fc'')$ 中成立。

伪对称Cat-多函子的复合。

定义 4.1.13. 设给定伪对称 Cat-多函子

$$\mathsf{M} \xrightarrow{\left(F\,,\{F_{\sigma,\langle c\rangle,c'}\}\right)} \mathsf{N} \xrightarrow{\left(G\,,\{G_{\sigma,\langle d\rangle,d'}\}\right)} \mathsf{P}.$$

它们的 复合

$$\mathsf{M} \xrightarrow{\left(GF,\{GF_{\sigma,\langle c\rangle,c'}\}\right)} \mathsf{P}$$

由以下部分组成

- the composite function $GF : \mathrm{Ob}\,\mathsf{M} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathsf{P}$;
- for each $(\langle c\rangle\,;c') \in \mathrm{Prof}(\mathsf{M}) \times \mathrm{Ob}\,\mathsf{M}$ the composite component functor

$$\mathsf{M}\big(\langle c\rangle\,;c'\big) \xrightarrow{F} \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\,;Fc'\big) \xrightarrow{G} \mathsf{P}\big(GF\langle c\rangle\,;GFc'\big)\ ;$$

and

● 对于每个置换 $\sigma \in \Sigma_n$ 以及如上所述的对象 $(c;c_\prime)$，自然同构 $GF_{\sigma,\langle c\rangle,c_\prime}$ 由以下伪对称同构的粘合给出。

(4.1.14)
$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{M}\big(\langle c\rangle\,;c'\big) & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\,;Fc'\big) & \xrightarrow{G} & \mathsf{P}\big(GF\langle c\rangle\,;GFc'\big) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle\sigma} & \overset{F_{\sigma,\langle c\rangle,c'}}{\underset{\cong}{\Longrightarrow}} & \Big\downarrow{\scriptstyle\sigma} & \overset{G_{\sigma,F\langle c\rangle,Fc'}}{\underset{\cong}{\Longrightarrow}} & \Big\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\
\mathsf{M}\big(\langle c\rangle\sigma\,;c'\big) & \xrightarrow[F]{} & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma\,;Fc'\big) & \xrightarrow[G]{} & \mathsf{P}\big(GF\langle c\rangle\sigma\,;GFc'\big)
\end{array}$$

这就完成了复合 $(GF, \{GF_{\sigma,\langle c\rangle,c'}\})$ 的定义。

说明 4.1.15. 对于每个n元 1-胞 $p \in \mathsf{M}(c;c')$，(4.1.14) 中 GF_σ 的p-分量由以下范畴复合给出

$$\begin{array}{ccc}
GF(p^\sigma) & \xrightarrow{(GF)_{\sigma;p}} & (GFp)^\sigma \\
& {\scriptstyle G(F_{\sigma;p})}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle G_{\sigma;Fp}} & \\
& G\left((Fp)^\sigma\right) &
\end{array}$$

在 $\mathsf{P}(GFc\sigma;GFc')$ 中。

引理 4.1.16。 在定义 *4.1.13* 的语境下，以下陈述成立。

(i) 复合 $(GF,\ \{GF_{\sigma,\ \langle c\rangle,\ c'}\})$ 是一个伪对称 Cat-多函子。*(ii)* 伪对称 Cat-多函子的复合满足结合律，并且相对于恒等伪对称Cat-多函子具有单位元。

证明。对于断言 (i)，首先注意到复合 GF 满足单位公理 (3.2.3) 和复合公理 (3.2.4)，这是因为 F 和 G 各自都满足这些公理，而这些公理不涉及对称群作用。GF 满足单位置换公理 (4.1.3)，因为两个恒等自然变换的粘合 (4.1.14) 是一个恒等自然变换。

GF 的其他三个公理，即 (4.1.4) 至 (4.1.6)，均由F 和G各自的粘贴图粘合而成。例如，对于GF的乘积置换公理 (4.1.4)，左侧如下所示

粘贴图。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{M}(\langle c\rangle; c') & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle; Fc') & \xrightarrow{G} & \mathsf{P}(GF\langle c\rangle; GFc') \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma} & \overset{F_\sigma}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & \overset{G_\sigma}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\
\mathsf{M}(\langle c\rangle\sigma; c') & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle\sigma; Fc') & \xrightarrow{G} & \mathsf{P}(GF\langle c\rangle\sigma; GFc') \\
\downarrow{\scriptstyle \tau} & \overset{F_\tau}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \tau} & \overset{G_\tau}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \tau} \\
\mathsf{M}(\langle c\rangle\sigma\tau; c') & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle\sigma\tau; Fc') & \xrightarrow{G} & \mathsf{P}(GF\langle c\rangle\sigma\tau; GFc')
\end{array} \tag{4.1.17}$$

根据 F 和G各自的乘积置换公理 (4.1.4)，前面的粘贴图等于下面的图，即$GF_{\sigma\tau}$。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{M}(\langle c\rangle; c') & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle; Fc') & \xrightarrow{G} & \mathsf{P}(GF\langle c\rangle; GFc') \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma\tau} & \overset{F_{\sigma\tau}}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \sigma\tau} & \overset{G_{\sigma\tau}}{\Longrightarrow} & \downarrow{\scriptstyle \sigma\tau} \\
\mathsf{M}(\langle c\rangle\sigma\tau; c') & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle\sigma\tau; Fc') & \xrightarrow{G} & \mathsf{P}(GF\langle c\rangle\sigma\tau; GFc')
\end{array} \tag{4.1.18}$$

这证明了GF满足公理 (4.1.4)。GF 的顶部与底部等变公理 (4.1.5) 和 (4.1.6) 也可用同样的方法验证。这证明了断言 (i)。

断言 (ii) 成立，因为

- 对象上函数的复合，
- 分量函子的复合，以及
- 自然同构的粘合 (4.1.14)

都满足结合律和单位律。 □

4.2. 伪对称 Cat-多自然变换

本节讨论伪对称 Cat-多函子之间的变换。

- 这些变换定义于定义 4.2.1 中。
- 引理 4.2.10 和 4.2.11 表明，这些变换的恒等变换、垂直复合和水平复合都是良定义的。
- 定理 4.2.16 表明，存在一个 2-范畴 Cat-Multicat$_{\mathsf{ps}}$，其对象为小 Cat-多范畴，1-胞为伪对称 Cat-多函子，2-胞为伪对称 Cat-多自然变换。

伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1）不仅具有对象指派和多态射函子，还具有伪对称同构。因此，伪对称 Cat-多函子之间的变换也应像下一个定义中那样保持伪对称同构。

定义 4.2.1。 设给定如下伪对称 Cat-多函子。

$$\mathsf{M} \underset{\left(G, \{G_{\sigma,\langle c\rangle,c'}\}\right)}{\xrightarrow[\left(F, \{F_{\sigma,\langle c\rangle,c'}\}\right)]{}} \mathsf{N}$$

一个伪对称 Cat-多自然变换 $\theta : F \Rightarrow G$ 由一个分量 1-元1-胞组成

$$Fc \xrightarrow{\theta_c} Gc \qquad \text{in } \mathsf{N} \text{ for each } c \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{M}. \tag{4.2.2}$$

这些数据必须满足

- 对象 Cat-自然性条件 (3.2.18),
- 态射 Cat-自然性条件 (3.2.19)，以及
- 以下的伪对称性保持公理 (4.2.3)。

对于每个 n 元 1-胞 $p \in \mathrm{M}(c\,;c')$ 以及置换 $\sigma \in \Sigma_n$，在 $\mathrm{N}(Fc\sigma;\, Gc')$ 中，以下 n 元 2-胞等式成立。

$$\gamma\big(1_{\theta_{c'}}\,;\, F_{\sigma;p}\big) = \gamma\big(G_{\sigma;p}\,;\, 1_{\theta_{\langle c\rangle\sigma}}\big) \tag{4.2.3}$$

这里 $F^{\sigma;p}$ 表示 F_σ 的 p 分量，$G^{\sigma;p}$ 也同理。

伪对称 Cat-多自然同构是指一种伪对称 Cat-多自然变换，其每个分量 1 元 1-胞相对于 γ in N 可逆。

此外，对于伪对称 Cat-多函子之间的伪对称 Cat-多自然变换，我们定义

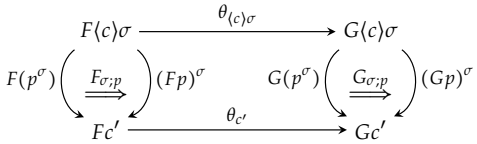
- 垂直复合，如 *(3.2.8)* 中所示，
- 水平复合，如 *(3.2.9)* 中所示，以及
- 由分量着色单位 (3.2.16) 构成的恒等伪对称 Cat-多自然变换 1F

$$(1_F)_c = 1_{Fc} : Fc \longrightarrow Fc.$$

根据下面的引理 4.2.10，垂直复合和恒等变换是良定义的。根据下面的引理 4.2.11，水平复合是良定义的。至此定义完成。

说明 4.2.4. 与 (3.2.22) 类似，伪对称性保持公理 (4.2.3) 表明，N 中以下两个多范畴复合相等，其中 $(\text{–})^\sigma$ 表示右侧的 σ-作用。

(4.2.5)



(4.2.5) 中两个 n 元 2-胞复合的定义域 n 元 1-胞

$$\gamma\big(G(p^\sigma)\,;\, \theta_{\langle c\rangle\sigma}\big) = \gamma\big(\theta_{c'}\,;\, F(p^\sigma)\big), \tag{4.2.6}$$

由将对象 Cat-自然性条件 (3.2.18) 应用于 p^σ 可知，两者相等。(4.2.5) 中两个 n 元 2- 胞复合的陪域 n 元 1- 胞由以下等式可知相等。

$$\begin{cases} \gamma\big((Gp)^\sigma\,;\, \theta_{\langle c\rangle\sigma}\big) = \gamma\big(Gp\,;\, \theta_{\langle c\rangle}\big)\cdot\sigma & \text{by (3.1.10)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \gamma\big(\theta_{c'}\,;\, Fp\big)\cdot\sigma & \text{by (3.2.18)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \gamma\big(\theta_{c'}\,;\, (Fp)^\sigma\big) & \text{by (3.1.12)} \end{cases} \tag{4.2.7}$$

伪对称 Cat-多自然变换的定义与 Cat-多自然变换（解释3.2.15）相同，但多了一个公理（4.2.3），而没有 额外数据。

例 4.2.8 (Cat-多自然变换)。 设 $\theta : F\ G$ 是 Cat-多自然变换（解释3.2.~~15~~），它是 Cat-多函子 F、G :M N之间的变换。我们将 F 和 G 都视为具有恒等伪对称同构的伪对称 Cat-多函子（例4.1.7）。那么 θ 是一个伪对称 Cat-多自然变换。其伪对称性保持公理（4.2.3）由对象 Cat-自然性条件（3.2.18）如（4.2.6）所示，以及 γ 的函子性推出。

例 4.2.9 （非对称 Cat-多自然变换）。 假设θ : F G 是伪对称 Cat-多函子之间的伪对称 Cat-多自然变换。那么， θ 给出了F 和G 的底层非对称 Cat-多函子之间的非对称 Cat-多自然变换（例 4.1.8），因为 θ 满足 Cat-自然性条件 (3.2.18) 和 (3.2.19)。

引理 4.2.10。 在定义 *4.2.1* 中，

- 伪对称Cat-多自然变换的恒等变换，以及
- 伪对称Cat-多自然变换的垂直复合

是良定义的。

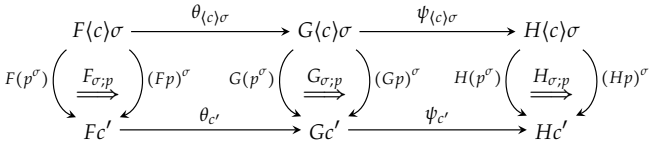
证明。Cat-自然性条件 (3.2.18) 和 (3.2.19) 不涉及对称群作用。作为 Cat-Multicat^{ns} 上的 2-范畴结构的一部分，这些条件由恒等变换和垂直复合满足（定理 3.2.10）。

接下来需要验证伪对称性保持公理 (4.2.3)。对于恒等变换 1_F，由左右单位公理 (3.1.8) 和 (3.1.9)，公理 (4.2.3) 成立，因为 1_F 的每个分量都是带色单位。

考虑伪对称 Cat-多自然变换

$$F \xrightarrow{\ \theta\ } G \xrightarrow{\ \psi\ } H.$$

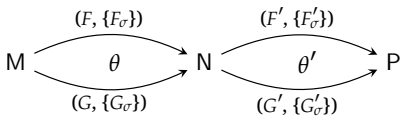
垂直复合 $\psi\theta$ (3.2.8) 的公理 (4.2.3)，可通过粘合 (4.2.5) 与 ψ 对应的公理得到，如下所示。



根据 N 中的结合律公理 (3.1.7)，以及 θ 和 ψ 满足的伪对称性保持公理 (4.2.3)，这便成立。□

引理 4.2.11。 在定义 *4.2.1* 中，伪对称 Cat-多自然变换的水平复合是良定义的。

证明。考虑以下伪对称 Cat-多自然变换的水平复合 $\theta' * \theta$ (3.2.9)。



Cat-自然性条件 (3.2.18) 和 (3.2.19) 不涉及对称群作用，并且作为 Cat-Multicat^{ns} 上 2- 范畴结构的一部分，水平复合满足这些条件（定理 3.2.10 ）。剩下需要验证伪对称性保持公理 (4.2.3)，即对于每个 n 元 1-胞 $p \in \mathrm{M}(c; c')$ 和置换 $\sigma \in \Sigma_n$，以下等式在 $\mathrm{P}(F'Fc\sigma\,;\, G'Gc')$ 中成立。

$$\gamma\left(1_{(\theta' * \theta)_{c'}}\,;\,(F'F)_{\sigma;p}\right) = \gamma\left((G'G)_{\sigma;p}\,;\,1_{(\theta' * \theta)_{\langle c\rangle\sigma}}\right) \tag{4.2.12}$$

为了证明 (4.2.12)，我们使用

- 水平复合的 (3.2.23) 中的第二种表达式

$$(\theta' * \theta)_{c'} = \gamma\big(G'\theta_{c'}\,;\,\theta'_{Fc'}\big)$$

对于 $(\theta' * \theta)^{c_{\sigma(j)}}$，以及 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 的情形，同理；

- 伪对称同构的定义 (4.1.14)

$$(F'F)_{\sigma;p} = F'_{\sigma;Fp} \circ F'(F_{\sigma;p})$$

以及 $(G'G)^{\sigma;p}$ 的情形，同理；以及

- γ 在 P 中的函子性和结合律 (3.1.7)。

那么，所需的等式 (4.2.12) 就变为以下等式。

$$\begin{aligned}&\gamma\left(1_{G'\theta_{c'}}\,;\,\gamma\left(1_{\theta'_{Fc'}}\,;\,F'_{\sigma;Fp}\right)\right) \circ \gamma\left(1_{G'\theta_{c'}}\,;\,\gamma\left(1_{\theta'_{Fc'}}\,;\,F'(F_{\sigma;p})\right)\right)\\ &= \gamma\left(\gamma\left(G'_{\sigma;Gp}\,;\,1_{G'\theta_{\langle c\rangle\sigma}}\right)\,;\,1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right) \circ \gamma\left(\gamma\left(G'(G_{\sigma;p})\,;\,1_{G'\theta_{\langle c\rangle\sigma}}\right)\,;\,1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right)\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

我们通过证明两边的左因子和右因子分别相等来证明 (4.2.13)，所用依据为

- θ 和 $\theta\prime$ 的 Cat-自然性条件 (3.2.18) 和 (3.2.19),
- γ的结合律 (3.1.7)，以及
- G’ 作为伪对称 Cat-多函子，严格保留多范畴复合 (3.2.4) 这一事实。

等式 (4.2.13) 中右侧因子的证明如下。

$$\begin{aligned}&\gamma\left(1_{G'\theta_{c'}}\,;\,\gamma\left(1_{\theta'_{Fc'}}\,;\,F'(F_{\sigma;p})\right)\right)\\ &= \gamma\left(1_{G'\theta_{c'}}\,;\,\gamma\left(G'(F_{\sigma;p})\,;\,1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right)\right) && \text{by (3.2.19) for } \theta'\\ &= \gamma\left(\gamma\left(1_{G'\theta_{c'}}\,;\,G'(F_{\sigma;p})\right)\,;\,1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right) && \text{by (3.1.7)}\\ &= \gamma\left(G'\gamma\left(1_{\theta_{c'}}\,;\,F_{\sigma;p}\right)\,;\,1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right) && \text{by (3.2.4)}\\ &= \gamma\left(G'\gamma\left(G_{\sigma;p}\,;\,1_{\theta_{\langle c\rangle\sigma}}\right)\,;\,1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right) && \text{by (4.2.3)}\\ &= \gamma\left(\gamma\left(G'(G_{\sigma;p})\,;\,1_{G'\theta_{\langle c\rangle\sigma}}\right)\,;\,1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right) && \text{by (3.2.4)}\end{aligned}$$

等式 (4.2.13) 中左侧因子的证明如下。

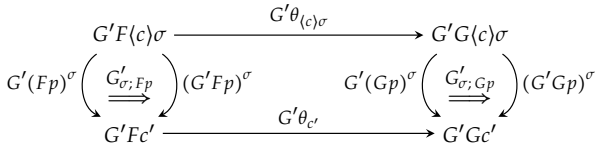
$$\begin{aligned}
&\gamma\left(1_{G'\theta_{c'}} ; \gamma\left(1_{\theta'_{Fc'}} ; F'_{\sigma;Fp}\right)\right) \\
&= \gamma\left(1_{G'\theta_{c'}} ; \gamma\left(G'_{\sigma;Fp} ; 1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right)\right) && \text{by (4.2.3) for } \theta' \\
&= \gamma\left(\gamma\left(1_{G'\theta_{c'}} ; G'_{\sigma;Fp}\right) ; 1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right) && \text{by (3.1.7)} \\
&= \gamma\left(\gamma\left(G'_{\sigma;Gp} ; 1_{G'\theta_{\langle c\rangle\sigma}}\right) ; 1_{\theta'_{F\langle c\rangle\sigma}}\right) && \text{by (4.2.14) below}
\end{aligned}$$

最后一个等式由以下计算得出，该计算使用了针对 G' 的顶部和底部等变公理 (4.1.11) 和 (4.1.12)。

$$\begin{cases}
\gamma\left(1_{G'\theta_{c'}} ; G'_{\sigma;Fp}\right) & \\
= G'_{\sigma;\gamma(\theta_{c'};Fp)} & \text{by (4.1.12) for } (\theta_{c'}, Fp) \\
= G'_{\sigma;\gamma(Gp;\theta_{\langle c\rangle})} & \text{by (3.2.18)} \\
= \gamma\left(G'_{\sigma;Gp} ; 1_{G'\theta_{\langle c\rangle\sigma}}\right) & \text{by (4.1.11) for } (Gp, \theta_{\langle c\rangle})
\end{cases} \tag{4.2.14}$$

至此，所需等式 (4.2.13) 的证明完成。 □

说明 4.2.15。 计算 (4.2.14) 断言，P 中以下两个复合n元 2-胞相等。



伪对称 Cat-多函子的顶部和底部等变公理（4.1.11）和（4.1.12）是证明此等式所必需的。

定理 4.2.16。 存在一个 *2*-范畴Cat-Multicat^{ps}，由以下数据组成。

- 其对象是小的Cat-多范畴。
- 对于小的Cat-多范畴M 和N，同态范畴具有– 伪对称Cat-多函子M N （定义 *4.1.1* ）作为 *1*- 胞，以及伪对称 Cat-多自然变换（定义 *4.2.1* ）作为 *2*- 胞。

Cat-Multicat(M, N)

$\longrightarrow$

- 对于伪对称Cat-多自然变换，垂直复合、水平复合和恒等 *2*-胞均如定义 *4.2.1* 所述。
- 恒等 *1*-胞1M 是恒等伪对称Cat-多函子1M（定义 *4.1.1*）。
- *1*-胞的水平复合是伪对称 Cat-多函子（定义 *4.1.13*）的复合。

证明。考虑 Cat-Multicat^{ps} 的 2-范畴定义 1.3.1 中的公理 (i) 至 (iv)。

● 由引理 4.1.16，1-胞的水平复合是良定义的，且 1-胞公理 (iii) 成立。

● 2-胞的垂直复合与水平复合，以及恒等 2-胞，均良定义（引理 4.2.10 和 4.2.11）。

● 2-胞公理 (i)、(ii) 和 (iv) 与 2-范畴 Cat-Multicat$_{ns}$ （定理 3.2.10）中的情形相同，因为这里不涉及对称群作用。

证明完毕。 □

说明 4.2.17 （松弛对称 Cat-多函子）。 第 4.1 节和本节的讨论不 依赖于伪对称同构F_σ (4.1.2)的可逆性。

● 如果 (4.1.2) 中的每个伪对称同构F_σ 仅要求是自然变换而非自然同构，那么伪对称 Cat-多函子<style>定义 4.1.1仍然有意义。我们称这个弱变体为松弛对称Cat-多函子 ，并称F_σ 为松对称性。

● 松弛对称 Cat-多函子的复合是良定义的，其复合松对称性由粘合 (4.1.14) 给出。

● 引理 4.1.16、4.2.10 和 4.2.11、定义 4.2.1 以及定理 4.2.16 的弱化变体同样成立。

因此，存在一个 2-范畴，其

$$\mathsf{Cat\text{-}Multicat}^{\mathsf{lax}}$$

with

● 以小 Cat-多范畴为对象，
● 以松弛对称 Cat-多函子为 1-胞，
● 以松弛对称 Cat-多自然变换为 2-胞（如定义 4.2.1 所述），并且

● 恒等 1-胞和 2-胞、垂直复合以及水平复合，如引理 4.1.16、4.2.10 和 4.2.11 所述。

它通过以下 2-函子与定理 3.2.10 和 4.2.16 中的 2-范畴相关联。

(4.2.18)
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Cat\text{-}Multicat} & & \mathsf{Cat\text{-}Multicat}^{\mathsf{ns}} \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ \mathsf{Cat\text{-}Multicat}^{\mathsf{ps}} & \xhookrightarrow{i_2} & \mathsf{Cat\text{-}Multicat}^{\mathsf{lax}} \end{array}$$

这些 2-函子中的每一个在以下对象上都是恒等的

● 对象，它们是小 Cat-多范畴，以及
● 2-胞（例 4.2.8 和 4.2.9）。

它们在 1-胞上的定义如下。

● 指派 $i1$ 将一个 Cat-多函子 F 映射为伪对称 Cat-多函子 (F,{Id})（例 4.1.7）。

● 指派 $i2$ 是将拟对称 Cat-多函子包含到松弛对称 Cat-多函子中的包含映射。

● 指派 j 将松弛对称 Cat-多函子 (F,{F_σ}) 映射为其底层非对称 Cat-多函子 F （例 4.1.8）。

相关讨论请参见问题 A.0.1 和 A.0.2。

4.3. 伪对称Cat-多重等价

本节将证明，定理 3.4.21 中对 Cat-多重等价的刻画同样适用于定理 4.2.16 中的 2-范畴 Cat-Multicat^{ps}。参见定理 4.3.28。换言之，一个伪对称 Cat-多函子是伪对称 Cat-多重等价，当且仅当它在对象上本质满，并且在每个多态射范畴上都是同构。对于 *if* 方向，大部分工作涉及为伴随定义伪对称同构，并证明（余）单位保持这些同构。

伪对称 Cat-多重等价的性质。以下概念是定义 1.3.15 在 2-范畴 Cat-Multicat^{ps}上的限制，也是定义 3.3.1 中概念的类似版本。

定义 4.3.1。我们定义如下概念。

- 伪对称 Cat-多重等价 是 2-范畴 Cat-Multicat$_{ps}$中的一个等价。
- 伴随伪对称 Cat-多重等价 是 2-范畴 Cat-Multicat$_{ps}$中的一个伴随等价。

说明 4.3.2. 在定义 4.3.1 中使用 2-范畴 Cat-Multicat^{ps} 仅仅是出于概念上的便利。事实上，伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1）

$$\mathsf{M} \xrightarrow{(F,\{F_\sigma\})} \mathsf{N}$$

是一个伪对称 Cat-多重等价，如果存在

- 一个伪对称 Cat-多函子（G,{G_σ}) : N M，以及 $\longrightarrow$
- 伪对称 Cat-多重自然同构（定义 4.2.1）

$$1_{\mathsf{M}} \xrightarrow[\cong]{\eta} GF \quad \text{and} \quad FG \xrightarrow[\cong]{\varepsilon} 1_{\mathsf{N}}. \tag{4.3.3}$$

四元组（F, G, η, ε）是一个伴随伪对称Cat-多重等价，此外还需满足两个三角恒等式 (1.3.16)。

例 4.3.4（Cat-多重等价）。根据 2-函子

$$\text{Cat-Multicat} \xhookrightarrow{i_1} \text{Cat-Multicat}^{ps}$$

在 (4.2.18) 中，Cat-多重等价 F : M N 在配备恒等伪对称同构后，给出一个伪对称 Cat-多重等价（F,{Id}）。根据 i_1 的 2-函子性，伴随变体同样成立。

例 4.3.5（非对称 Cat-多重等价）。由 2-函子

$$\text{Cat-Multicat}^{ps} \xrightarrow{j \circ i_2} \text{Cat-Multicat}^{ns}$$

在 (4.2.18) 中，一个伪对称 Cat-多重等价（F, {F_σ}）通过遗忘伪对称同构，给出一个非对称 Cat-多重等价 F 。根据 $j \bigcirc i_2$ 的 2-函子性，伴随变体同样成立。

引理 4.3.6。 每个伪对称 Cat-多重等价都是

- 本质满对象的，并且
- 在每个多态射范畴上都是一个同构。

证明。根据例 4.3.5，每个伪对称 Cat-多重等价 $(F,\{F_\sigma\})$ 都导出一个非对称 Cat-多重等价 F；根据引理 3.3.4，它具有上述两个性质。□

伴随、单位与余单位。 定理 4.3.28 的主要部分是引理 4.3.6 的逆命题。我们按照第 3.4 节的做法进行。给定一个满足引理 4.3.6 中两个性质的伪对称 Cat-多函子，我们如下所示，仿照非对称情形定义其伴随、单位与余单位。

定义 4.3.7。 设给定一个伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1）

$$\mathsf{N} \xrightarrow{(G,\{G_\sigma\})} \mathsf{M}$$

满足

- 在对象集上本质满，且
- 在每个多态射范畴上都是同构。

定义

- 一个非对称 Cat-多函子 $F : \mathsf{M}\ \mathsf{N}$，如定义 3.4.1 所述；
- 一个非对称 Cat-多自然同构 $\eta : 1_{\mathsf{M}} \overset{\cong}{\to} GF$，如式 (3.4.2) 所述；以及
- 一个非对称 Cat-多自然同构 $\varepsilon : FG \overset{\cong}{\to} 1_{\mathsf{N}}$，如定义 3.4.15 所述。

根据引理 3.4.8、3.4.13 和 3.4.18，F、η 和 ε 分别是良定义的。此外，根据引理 3.4.20，四元组 $(F, G, \eta, \varepsilon)$ 满足三角恒等式 (1.3.16)。

在定义 4.3.7 的背景下，为完成定理 4.3.28 的证明，我们按如下步骤进行。

(i) 为 F 定义伪对称同构 F_σ（定义 4.3.12）。（ii）证明（F，$\{F_\sigma\}$）：$\mathsf{M}\ \mathsf{N}$ 是伪对称 Cat-多函子（引理 4.3.19）。（iii）证明定义 4.3.7 中的 η 和 ε 各自都是伪对称 Cat-多自然同构（引理 4.3.20 和引理 4.3.22）。（iv）得出四元组（F，G，η，ε）是伴随伪对称 Cat-多重等价（定理 4.3.28）。

定义 F_σ 需要以下预备观察。回顾一下，$(-)^\sigma$ 表示右侧 σ-作用。

引理 4.3.8。 在定义 *4.3.7* 的语境下，设 $\sigma \in \Sigma_n$ 是一个置换，并且

$$p \in \mathsf{M}(\langle c\rangle ; c') \quad \textit{and} \quad q \in \mathsf{N}(\langle d\rangle ; d')$$

是 n 元 *1*-胞。则下列等式成立。

$$\begin{cases} GF(p^\sigma) = (GFp)^\sigma \in \mathsf{M}\big(GF\langle c\rangle\sigma\,;\, GFc'\big) \\ FG(q^\sigma) = (FGq)^\sigma \in \mathsf{N}\big(FG\langle d\rangle\sigma\,;\, FGd'\big) \end{cases} \tag{4.3.9}$$

证明。为证明 (4.3.9) 中的第一个等式，我们利用 η (3.4.14) 的对象 Cat-自然性以及顶部和底部等变公理进行如下计算：

在 M 中，应用 (3.1.10) 和 (3.1.12)。

$$\begin{cases} \gamma\big(GF(p^\sigma)\,;\,\eta_{\langle c\rangle\sigma}\big) & \\ = \gamma\big(\eta_{c'}\,;\,p^\sigma\big) & \text{by (3.4.14)} \\ = \gamma\big(\eta_{c'}\,;\,p\big)\cdot\sigma & \text{by (3.1.12) in M} \\ = \gamma\big(GFp\,;\,\eta_{\langle c\rangle}\big)\cdot\sigma & \text{by (3.4.14)} \\ = \gamma\big((GFp)^\sigma\,;\,\eta_{\langle c\rangle\sigma}\big) & \text{by (3.1.10) in M} \end{cases} \tag{4.3.10}$$

由于每个分量 1 元 1-胞 η_{c_j} 根据 (3.4.2) 可逆，我们由此得到 (4.3.9) 中的第一个等式：

- applying $\gamma\big(-\,;\,\eta^{-1}_{\langle c\rangle\sigma}\big)$ to (4.3.10) and
- using associativity (3.1.7) and right unity (3.1.8) in M.

类似地，利用 ε 的对象 Cat-自然性 (3.4.19) 以及 N 中的顶部和底部等变公理，先得到以下等式，即可证明 (4.3.9) 中的第二个等式。

$$\begin{cases} \gamma\big(\varepsilon_{d'}\,;\,FG(q^\sigma)\big) & \\ = \gamma\big(q^\sigma\,;\,\varepsilon_{\langle d\rangle\sigma}\big) & \text{by (3.4.19)} \\ = \gamma\big(q\,;\,\varepsilon_{\langle d\rangle}\big)\cdot\sigma & \text{by (3.1.10) in N} \\ = \gamma\big(\varepsilon_{d'}\,;\,FGq\big)\cdot\sigma & \text{by (3.4.19)} \\ = \gamma\big(\varepsilon_{d'}\,;\,(FGq)^\sigma\big) & \text{by (3.1.12) in N} \end{cases} \tag{4.3.11}$$

由于分量 1 元 1-胞 $\varepsilon_{d'}$ 根据 (3.4.16) 可逆，我们由此得到 (4.3.9) 中的第二个等式：

● 将 $\gamma(\varepsilon^{-1}{}_{d'}\,;\,-)$ 应用于 (4.3.11)，并且

● 使用 N 中的结合律 (3.1.7) 和左单位律 (3.1.9)。

证明至此完成。 □

定义 4.3.12. 在定义 4.3.7 和引理 4.3.8 的背景下，定义自然同构的数据

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M}\big(\langle c\rangle\,;\,c'\big) & \xrightarrow{\quad F\quad} & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\,;\,Fc'\big) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \overset{F_\sigma}{\underset{\cong}{\Longrightarrow}} & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathsf{M}\big(\langle c\rangle\sigma\,;\,c'\big) & \xrightarrow[\quad F\quad]{} & \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma\,;\,Fc'\big) \end{array}$$

如下。对于每个 n 元 1-胞 $p \in \mathsf{M}(c\,;\,c')$，伪对称同构 Fp-分量 G_σ 有一个逆 n 元 2-胞

$$GF(p^\sigma) = (GFp)^\sigma \xrightarrow[\cong]{G^{-1}_{\sigma;Fp}} G(Fp)^\sigma \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(GF\langle c\rangle\sigma\,;\,GFc'\big)$$

满足来自 (4.3.9) 的等式。由于多态射函子

$$\mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma\,;\,Fc'\big) \xrightarrow[\cong]{G} \mathsf{M}\big(GF\langle c\rangle\sigma\,;\,GFc'\big) \tag{4.3.13}$$

是一个同构，存在唯一的n元 2-胞

$$F(p^\sigma) \xrightarrow[\cong]{F_{\sigma;p}} (Fp)^\sigma \quad \text{in} \quad \mathsf{N}\big(F\langle c\rangle\sigma\,;\,Fc'\big) \tag{4.3.14}$$

使得

$$G(F_{\sigma;p}) = G^{-1}_{\sigma;Fp}. \tag{4.3.15}$$

我们将$F^{\sigma;p}$定义为F_σ的p-分量。此外，由于（4.3.13）中的G是同构，$F^{\sigma;p}$是一个可逆的n元 2-胞。由G_σ的自然性以及同构G（4.3.13），可得F_σ的自然性。

说明 4.3.16. F_σ的定义（4.3.15）意味着，以下粘合

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{M}(\langle c\rangle; c') & \xrightarrow{F} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle; Fc') & \xrightarrow{G} & \mathsf{M}(GF\langle c\rangle; GFc') \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & \overset{F_\sigma}{\Longrightarrow}_{\cong} & \downarrow{\scriptstyle\sigma} & \overset{G_\sigma}{\Longrightarrow}_{\cong} & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathsf{M}(\langle c\rangle\sigma; c') & \xrightarrow[F]{} & \mathsf{N}(F\langle c\rangle\sigma; Fc') & \xrightarrow[G]{} & \mathsf{M}(GF\langle c\rangle\sigma; GFc') \end{array} \tag{4.3.17}$$

等于恒等自然变换

$$1_{GF(-)^\sigma} = 1_{(GF(-))^\sigma}$$

并且等式来自（4.3.9）。由函子G（4.3.13）的可逆性以及伪对称同构G_σ，等式

$$G_{\sigma;F(-)} \circ G(F_{\sigma;-}) = 1_{GF(-)^\sigma} \tag{4.3.18}$$

唯一确定F_σ。此外，如果我们已知（F,{F_σ}）是一个伪对称 Cat-多函子，那么粘合（4.3.17）就是（GF)$_\sigma$在（4.1.14）中的伪对称同构。

引理 4.3.19。在定义 *4.3.7* 和 *4.3.12* 的背景下，

$$\mathsf{M} \xrightarrow{(F,\{F_\sigma\})} \mathsf{N}$$

是一个伪对称 Cat-多函子。

证明。根据引理 3.4.8，F 保持带色单位 (3.2.3) 和复合 (3.2.4)。接下来只需验证 (F,{F_σ}) 满足公理 (4.1.3) 至 (4.1.6)。

单位置换 (4.1.3)。该公理表明

$$F_{\mathrm{id}_n} = 1_F.$$

为证明这个等式，考虑一个 n 元 1-胞 $p \in \mathsf{M}(c\,;c')$。(G, {G_σ}) 的单位置换公理 (4.1.3) 给出了以下 n 元 2-胞的等式

$$G^{-1}_{\mathrm{id}_n;Fp} = 1^{-1}_{GFp} = 1_{GFp}.$$

令 G 为 (4.3.13) 中的同构，将 G^{-1} 作用于 F_σ 的定义 (4.3.15)，得到以下等式。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{id}_n;p} &= G^{-1}\left(G^{-1}_{\mathrm{id}_n;Fp}\right) \\ &= G^{-1}\left(1_{GFp}\right) \\ &= 1_{Fp} \end{aligned}$$

这证明了F的单位置换公理。

乘积置换*(4.1.4)*。由

- 函子G (4.3.13)的可逆性,
- 每个伪对称同构G_σ的可逆性，以及
- 对于（G，{G_σ}）的乘积置换公理（4.1.4），

只需证明，将（4.1.4）的两边分别与（G，$\{G_\sigma\}$）对应的两边进行粘合后所得的结果相等即可。所得的两次粘合分别为（4.1.17）和（4.1.18）。根据 σ、τ 和 $\sigma\tau$ 的（4.3.18），这两次粘合均等于恒等自然变换。

顶部与底部等变性。对于 $(F,\{F_\sigma\})$，公理 (4.1.5) 和 (4.1.6) 的证明方法相同。在每种情况下，我们

● 将所需等式的每一边分别与 $(G,\{G_\sigma\})$ 的相应粘合相粘合，并且

● 注意到根据 (4.3.18)，两边都等于恒等映射。

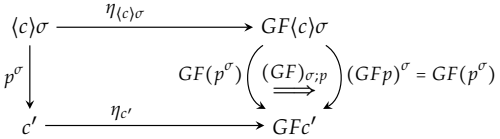
这证明 $(F,\{F_\sigma\})$ 是一个伪对称 Cat-多函子。 □

引理 4.3.20。 在定义 *4.3.7* 和 *4.3.12* 的背景下，

$$1_{\mathsf{M}} \xrightarrow{\ \eta\ } GF$$

是一个伪对称 Cat-多自然同构。

证明。由引理 3.4.13 η 是一个非对称 Cat-多自然同构。还需检验伪对称性保持公理 (4.2.3)。对于 η，公理 (4.2.3) 表示：对每个 n 元 1-胞 $p \in \mathsf{M}(c\,;c')$，M 中以下两个复合 n 元 2-胞相等。

(4.3.21)


由说明 4.3.16 和引理 4.3.19，可得等式

$$(GF)_\sigma = 1_{GF(-)^\sigma} = 1_{(GF(-))^\sigma}.$$

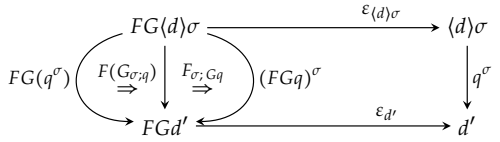
因此，根据 η 的对象 Cat-自然性条件，(4.3.21) 中的两个复合相等；该条件已在 (3.4.14) 中证明。□

引理 4.3.22。 在定义 *4.3.7* 和 *4.3.12* 的背景下，

$$FG \xrightarrow{\ \varepsilon\ } 1_{\mathsf{N}}$$

is 一个伪对称 Cat-多自然同构 映射。

证明。由引理 3.4，18 ε 是一个非对称 Cat-多自然同构映射。还需检验伪对称性保持公理 (4.2.3)。根据 $(FG)_\sigma$ 的定义 (4.1.14)，ε 的公理 (4.2.3) 表明，对于每个 n 元 1-胞 $q \in \mathsf{N}(d;d')$，N 中以下两个复合的 n 元 2-胞相等，其中未标记的垂直箭头由 $F(Gq)^\sigma$ 给出。

(4.3.23)


只需证明，(4.3.23) 中的两个复合在该同构下的像相同。

$$\mathsf{N}\big(FG\langle d\rangle\sigma\,;d'\big) \xrightarrow[\cong]{\ G\ } \mathsf{M}\big(GFG\langle d\rangle\sigma\,;Gd'\big).$$

由 γ 的函子性可知，这意味着 M 中以下 n 元 2-胞之间的等式。

$$G\left[\gamma\left(1_{\varepsilon_{d'}}\,;\,F_{\sigma;Gq}\right)\circ\gamma\left(1_{\varepsilon_{d'}}\,;\,F(G_{\sigma;q})\right)\right]=G1_{\gamma(q^{\sigma};\varepsilon_{\langle d\rangle\sigma})} \tag{4.3.24}$$

由 G 的函子性和复合公理 (3.2.4)，等式 (4.3.24) 化为以下等式。

$$\gamma\left(1_{G\varepsilon_{d'}}\,;\,G(F_{\sigma;Gq})\right)\circ\gamma\left(1_{G\varepsilon_{d'}}\,;\,GF(G_{\sigma;q})\right)=1_{\gamma(G(q^{\sigma});G\varepsilon_{\langle d\rangle\sigma})} \tag{4.3.25}$$

我们通过计算 (4.3.25) 左侧的两项，并观察到它们互为逆，来证明 (4.3.25)。

对于 (4.3.25) 中最左边的一项，我们作如下计算，其中尤其用到了 G 的顶部与底部等变性公理 (4.1.11) 和 (4.1.12)。

$$\begin{cases}\gamma\left(1_{G\varepsilon_{d'}}\,;\,G(F_{\sigma;Gq})\right)\\ =\gamma\left(1_{G\varepsilon_{d'}}\,;\,G^{-1}_{\sigma;FGq}\right) & \text{by (4.3.15)}\\ =\gamma\left(1_{G\varepsilon_{d'}}\,;\,G_{\sigma;FGq}\right)^{-1} & \text{by functoriality of } \gamma\\ =\left(G_{\sigma;\gamma(\varepsilon_{d'}\,;FGq)}\right)^{-1} & \text{by (4.1.12) for } (\varepsilon_{d'},FGq)\\ =\left(G_{\sigma;\gamma(q\,;\varepsilon_{\langle d\rangle})}\right)^{-1} & \text{by (3.4.19)}\\ =\gamma\left(G_{\sigma;q}\,;\,1_{G\varepsilon_{\langle d\rangle\sigma}}\right)^{-1} & \text{by (4.1.11) for } (q,\varepsilon_{\langle d\rangle})\end{cases} \tag{4.3.26}$$

对于 (4.3.25) 中的第二项，我们作如下计算。

$$\begin{cases}\gamma\left(1_{G\varepsilon_{d'}}\,;\,GF(G_{\sigma;q})\right)\\ =\gamma\left(1_{\eta^{-1}_{Gd'}}\,;\,\gamma\left(1_{\eta_{Gd'}}\,;\,\gamma\left(G_{\sigma;q}\,;\,1_{\eta^{-1}_{G\langle d\rangle\sigma}}\right)\right)\right) & \text{by (3.4.5) and (3.4.17)}\\ =\gamma\left(1_{\gamma(\eta^{-1}_{Gd'}\,;\,\eta_{Gd'})}\,;\,\gamma\left(G_{\sigma;q}\,;\,1_{\eta^{-1}_{G\langle d\rangle\sigma}}\right)\right) & \text{by (3.1.7) and functoriality}\\ =\gamma\left(G_{\sigma;q}\,;\,1_{\eta^{-1}_{G\langle d\rangle\sigma}}\right) & \text{by (3.1.9)}\\ =\gamma\left(G_{\sigma;q}\,;\,1_{G\varepsilon_{\langle d\rangle\sigma}}\right) & \text{by (3.4.17)}\end{cases} \tag{4.3.27}$$

由于 (4.3.26) 和 (4.3.27) 中的最后两项互为逆，我们已证明所需的等式 (4.3.25)。□

伪对称 Cat-多重等价的刻画。现在我们已经准备好给出本节的主要结果，即伪对称 Cat-多重等价（定义 4.3.1）的实用刻画。下一个结果是定理 3.4.21 的伪对称变体。

定理 4.3.28。设

$$\mathsf{N}\xrightarrow{(G,\{G_\sigma\})}\mathsf{M}$$

是 *Cat*Cat-多范畴之间的伪对称 *Cat*-多函子。那么以下三个陈述等价。

(1) G 是某个伴随伪对称 *Cat*-多重等价$(F,\ G,\ \eta,\ \varepsilon)$的右伴随。*(2)* G 是伪对称 *Cat*-多重等价。*(3)* G 是

- 本质满对象且

● 每个多态射范畴上的一个同构。证明。我们分别考察如下各个蕴含。

● (1) ⇒ (2) 根据定义 1.3.15 和 4.3.1 成立。

● (2) ⇒ (3) 根据引理 4.3.6 成立。

● (3) ⇒ (1) 根据引理 3.4.20、4.3.19、4.3.20 和 4.3.22 成立。

证明完毕。 □

第 2 部分

从双置换指标范畴到置换余纤维化的 Grothendieck 多重等价

第5章

富化的指标范畴多重范畴

回顾一下，$(\mathrm{Cat}, \times, \mathbf{1}, [,])$ 是由小范畴及其函子构成的完备且余完备的对称幺半闭范畴，其中

- 笛卡尔积作为幺半积，并且
- 图表范畴作为闭结构（例 1.1.16）。

设 D 是一个小紧双置换范畴（定义 2.2.12）。本章的主要目的是构造一个 Cat-多范畴 DCat，其对象为具有加性的*style id='1'*>对称幺半函子，并且它完整地体现 *D* 的双置换结构（定理 *5.3.11*）。我们强调，*DCat* 上的 *Cat*-多范畴结构通常并非由对称幺半结构诱导。

格罗滕迪克构造与逆*K*理论。在后续章节中，我们将如下使用 Cat-多范畴 DCat。

(1) 在第6章中，DCat 是格罗滕迪克构造的定义域

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}.$$

陪域 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 是一个 Cat-多范畴，其对象为小置换范畴。利用 DCat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$上的 Cat-多范畴结构，我们证明 $\int_{\mathcal{D}}$是一个伪对称Cat-多函子（定义 4.1.1）。

(2) 在第 7 章中，我们将 $\int_{\mathcal{D}}$提升为一个非对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}.$$

陪域 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴，其对象为 D 上的小置换余纤维化。

(3) 在第8章中，我们证明第 7 章中提升的 $\int_{\mathcal{D}}$是一个非对称 Cat-多重等价。这意味着提升后的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$是

- 本质满对象，且
- 在每个多态射范畴上都是同构。

(4) 在第 9 章和第 10 章中，我们将这些结果应用于逆 K 理论 $\int_{\mathcal{A}}$*K*-theory $\int_{\mathcal{A}}$ *A*(–) 的指标范畴 A（例 2.3.17）。格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{A}}$ 的伪对称 Cat-多函子性意味着，逆 K 理论是一个伪对称 Cat-多函子，但不是 一个 Cat-多函子。

组织结构。 在第5.1节中，我们首先考察图表范畴 D-Cat，其中 $(\mathrm{D}, \otimes, 1)$ 仅仅是一个置换范畴（定义 1.1.11）。我们回顾

一个重要事实：图表范畴 D-V 上的对称幺半闭结构会在 D-V 上诱导出 V-多范畴结构。将 V 专门取为 = Cat，可得 D-Cat 上的 Cat-多元范畴结构。本节其余部分将详细描述 Cat-多元范畴 D-Cat。为强调所使用的幺半结构，在后续各节中，我们也将 D-Cat 记为 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat。

设 $(\mathsf{D}, \oplus, \otimes)$ 是一个小紧双置换范畴。在第 5.2 节中，我们定义了 DCat 的部分数据。

- 其对象是 加性的对称幺半函子，即相对于加法结构而言的对称幺半函子 $\mathcal{D}^{\oplus} = (\mathcal{D}, \oplus, \oplus 0)$ 的 $\mathcal{D}$。这与 $\mathcal{D}^{\otimes}$-Cat不同，后者的对象是函子 $\mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}$，且不假定具有任何额外结构。
- 在 DCat 的每个多态射范畴中，对象都是加性自然变换。这些自然变换满足单位公理和可加性公理，它们是对幺半自然变换相应公理的推广；参见说明 5.2.21(4)。
- 它们之间的态射是加性修正。这些修正满足单位公理和可加性公理。

加性自然变换和加性修正同时运用 $\mathsf{D}^{\oplus}$ 的加法结构和 $\mathsf{D}^{\otimes}$ 的乘法结构。此外，它们的可加性公理涉及 D 中的 Laplaza 相干同构；参见 (5.2.19) 和 (5.2.28)。本节最后验证 DCat 中每个正元数多态射范畴都是 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 中相应多态射范畴的子范畴；参见引理 5.2.33。

在第 5.3 节中，我们以一种适当的意义，将 DCat 上的 Cat-多范畴结构定义为从 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 继承而来的结构。大部分工作都在于验证，$\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 上的 Cat-多范畴结构限制到加性自然变换和加性修正后仍然成立。换言之，我们需要验证，它们的单位性公理和可加性公理在 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 中的对称群作用和复合下保持不变。

总结。 DCat 与 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 之间有两个重要区别。
(1) $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 上的 Cat-多范畴结构由其对称幺半闭结构诱导，该闭结构是相对于 D 中的乘法结构 $\otimes$ 给出的 Day 卷积。另一方面，DCat 上的 Cat-多范畴结构并非 源自对称幺半结构。参见说明 5.3.4。(2) DCat 上的 Cat-多范畴结构利用 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 上的 Cat-多范畴结构来定义。然而，DCat并非 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 的子 Cat-多范畴。参见说明 5.3.13。

下表概述了 $\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat 和 DCat，其中对称幺半和多态射范畴 分别缩写为*sm* 和*mc*。

Cat-多范畴	$\mathsf{D}^{\otimes}$-Cat (5.1.2)	$\mathcal{D}$Cat (5.3.11)
对象	函子 $\mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}$ (1.1.15)	加性函子 $\mathsf{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$ (5.2.4)
MC 对象	自然变换 (5.1.5)	加性自然变换 (5.2.12)
MC 态射	修正 (5.1.10)	加性修正 (5.2.25)
由 sm结构诱导	yes (5.1.1)	no (5.3.4)

提醒读者注意，我们对迭代幺半积采用左规范化括号约定 1.1.24。

5.1. 置换指标范畴的富集多范畴

回顾图表范畴 D-C（定义 1.1.15），其对象是 C 中的 D-图表，态射是自然变换；以及 V-多范畴的概念（定义 3.1.2）。对于小置换范畴 D，我们在说明 1.4.7 和 1.4.17 中描述了图表范畴 D-Cat 上的对称幺半结构。该范畴的对象是 D-指标范畴，并且它具有关于 Cat 的富集、张量化和余张量化结构。本节将详细描述 D-Cat 上的 Cat-富集多范畴结构。下述定理是 **[JY∞a，6.3.6]** 的一个实例，并保证 Cat- 多范畴 D-Cat 的存在。

定理 5.1.1。 设 V 是一个完备且余完备的对称幺半闭范畴。设$\mathcal{D}$ 是一个小对称幺半范畴。则定理 *1.4.14* 中的对称幺半闭范畴 $\mathcal{D}$-V 具有V-多范畴的结构，其底层 V-范畴与$\mathcal{D}$-V的底层V-范畴相同。

现在我们专门考虑 $\mathsf{V} = \mathsf{Cat}$ 的情形，这是本文主要关注的情形。

说明 5.1.2 （置换索引范畴的 Cat-多范畴）。 在定理 5.1.1 的背景下，设

- $\mathsf{V} = (\mathsf{Cat}, \times, \mathbf{1}, [,])$ 是小范畴与函子构成的对称幺半闭范畴，其幺半积为笛卡尔积，闭结构为图表范畴（例1.1.16），并且
- $(\mathsf{D}, \otimes, 1, \beta)$ 是一个小置换范畴（定义 1.1.11）。

根据定理 5.1.1，D-Cat 具有 Cat-多范畴结构，我们也将其记作 D-Cat，其底层 2-范畴与 D-Cat 的相同。这里我们详细描述这一 Cat-多范畴结构。

对象： Cat-多范畴 D-Cat 的对象是$\mathcal{D}$-指标范畴（定义 1.1.15），也就是函子 $\mathcal{D} \to \mathsf{Cat}$。

Mu零元数多态射范畴： 设 $Z : \mathsf{D} \to \mathsf{Cat}$ 是一个 D-指标范畴。其零元多重态射范畴 定义为

$$(\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})\big(\langle\rangle\,;\, Z\big) = (\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})(J\,,\, Z)$$

其中 $\langle\rangle$ 表示空序列，且

$$J = \mathcal{D}(1, -) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

即 (1.4.20) 中的单位图表。正如说明 1.4.17 所述，范畴 (D-Cat)(J, Z) 具有

- 以自然变换 $J \to Z$ 作为对象，$\longrightarrow$
- 将修正作为态射，
- 将恒等修正作为恒等变换，并且
- 复合由修正的垂直复合给出。

由双范畴 Yoneda 引理 **[JY21，8.3.28]**应用于当前的 2-范畴语境，可得一个范畴的典范同构

$$(\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})\big(\langle\rangle\,;\, Z\big) = (\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})(J\,,\, Z) \cong Z1 \tag{5.1.3}$$

由以下赋值给出

$$\phi \longmapsto \phi_1(1_1)$$
$$\Phi \longmapsto (\Phi_1)_{1_1}$$

对于每个

- 自然变换 $\phi : J\,Z$ 和 $\longrightarrow$
- 修正 $\Phi : \phi \;\; \rightarrow \phi\prime$，其中 $\phi, \phi\prime : J\,Z$ 是自然变换。

正元数下的多态射范畴： 设给定 $\mathcal{D}$-指标范畴

$$Z, X_1, \ldots, X_n : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

具有 $n > 0$ 和 $\langle X \rangle = (X_1, \ldots, X_n)$。其 n 元多态射范畴定义为

$$(\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})\big(\langle X \rangle ; Z\big) = (\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})\big(\otimes_{j=1}^{n} X_j , Z\big). \tag{5.1.4}$$

对于 $n \geq 2$，D-指标范畴 $\otimes_{j=1}^{n} X_j$ 是说明 1.4.10 中 $\mathsf{V} = \mathsf{Cat}$ 上的迭代 Day 卷积。如说明 1.4.17 所述，范畴 (D-Cat)$(\otimes_{j=1}^{n} X_j , Z)$ 具有

- 自然变换 $\otimes_{nj=1} X_j\, Z$ 作为对象，$\longrightarrow$
- 修正作为态射，
- 恒等修正作为恒等变换，以及
- 复合由修正的垂直复合给出 s.

剖析迭代 Day 卷积 (1.4.11)，我们将在下文明确描述这些自然变换和修正。

一个自然变换

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\;\phi\;} Z \tag{5.1.5}$$

对于每个由对象组成的n元组

$$\langle a \rangle = \langle a_j \rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{D}^n \quad \text{and} \quad a = \otimes_{j=1}^{n} a_j \in \mathcal{D}, \tag{5.1.6}$$

一个分量函子

$$\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \xrightarrow{\;\phi_{\langle a \rangle}\;} Z a. \tag{5.1.7}$$

对于 D 中每个由态射组成的n元组 $fj : a\!\!\not{\jmath} \xrightarrow{\prime\prime\prime}{}_{jj=1}$，记作

$$\langle a' \rangle = \langle a'_j \rangle_{j=1}^{n}, \quad a' = \otimes_{j=1}^{n} a'_j, \quad \text{and} \quad f = \otimes_{j=1}^{n} f_j : a \longrightarrow a'. \tag{5.1.8}$$

以下函子的自然性图表必须交换。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^{n} X_j a_j & \xrightarrow{\;\phi_{\langle a \rangle}\;} & Z a \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \prod_{j=1}^{n} X_j f_j} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Z f} \\ \prod_{j=1}^{n} X_j a'_j & \xrightarrow{\;\phi_{\langle a' \rangle}\;} & Z a' \end{array} \tag{5.1.9}$$

A *modification* $\Phi : \phi \longrightarrow \varphi$ in $(\mathcal{D}\text{-Cat})\big(\otimes_{j=1}^{n} X_j\,,\, Z\big)$ as in

(5.1.10)
$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \;\underset{\varphi}{\overset{\phi}{\Downarrow \Phi}}\; Z$$

由一个分量自然变换组成

(5.1.11)
$$\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \;\underset{\varphi_{\langle a\rangle}}{\overset{\phi_{\langle a\rangle}}{\Downarrow \Phi_{\langle a\rangle}}}\; Za$$

对于如 (5.1.6) 中的每个由 n 个对象组成的组 $a = \{aj\}_{j=1}^{n}$ in D。本例中的 修正公理 等价于在 (5.1.6) 和 (5.1.8) 的背景下，以下两个复合自然变换相等。

(5.1.12)
$$\begin{array}{ccc}
\prod_{j=1}^{n} X_j a_j & \underset{\varphi_{\langle a\rangle}}{\overset{\phi_{\langle a\rangle}}{\Downarrow \Phi_{\langle a\rangle}}} & Za \\
{\scriptstyle \prod_{j=1}^{n} X_j f_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Zf} \\
\prod_{j=1}^{n} X_j a'_j & \underset{\varphi_{\langle a'\rangle}}{\overset{\phi_{\langle a'\rangle}}{\Downarrow \Phi_{\langle a'\rangle}}} & Za'
\end{array}$$

至此，完成了对 (5.1.4) 中范畴 (D-Cat)(X; Z) 的描述。**带色单位：** 对于一个 D-指标范畴 Z : D Cat，其 Z-着色单位

(5.1.13)
$$Z \xrightarrow{1_Z} Z$$

是恒等自然变换。

对称群作用： 对于一个置换 $\sigma \in \Sigma_n$，对称群作用

(5.1.14)
$$(\mathcal{D}\text{-Cat})\big(\langle X\rangle\,;\, Z\big) \xrightarrow[\cong]{\sigma} (\mathcal{D}\text{-Cat})\big(\langle X\rangle\sigma\,;\, Z\big)$$

是将如 (5.1.5) 中的自然变换 $\phi : \otimes_{j=1}^{n} Xj\ Z$ 映射为自然变换的函子

$$\otimes_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)} \xrightarrow{\phi^{\sigma}} Z.$$

对于 D 中如 (5.1.6) 所示的对象的n元组 $a = aj_{j=1}^{n}$， ϕ^{σ} 具有如下分量复合函子。

(5.1.15)
$$\begin{array}{ccc}
\prod_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)} a_j & \xrightarrow{\phi^{\sigma}_{\langle a\rangle}} & Za \\
{\scriptstyle \sigma}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\uparrow{\scriptstyle Z(\sigma^{-1})} \\
\prod_{j=1}^{n} X_j a_{\sigma^{-1}(j)} & \xrightarrow{\phi_{\sigma\langle a\rangle}} & Za_{\sigma^{-1}}
\end{array}$$

(5.1.15) 中的箭头如下给出。

● 左侧垂直箭头根据 $\sigma \in \Sigma_n$ 对 n 个因子进行置换。

● 底部水平箭头$\phi_{\sigma\langle a\rangle}$ 是 ϕ 在式 (5.1.7) 中所示的分量函子，对应于由对象组成的n 元组

$$\sigma\langle a\rangle = \langle a_{\sigma^{-1}(j)}\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{D}^n \quad \text{with} \quad a_{\sigma^{-1}} = \otimes_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)} \in \mathcal{D}. \tag{5.1.16}$$

● 右侧垂直箭头 $Z(\sigma^{-1})$ 是将唯一的相干同构 [**ML98**，XI.1] 经 Z 映射所得的像

$$a_{\sigma^{-1}} = \otimes_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)} \xrightarrow[\cong]{\sigma^{-1}} \otimes_{j=1}^{n} a_j = a \quad \text{in} \quad (\mathcal{D}, \otimes, \beta) \tag{5.1.17}$$

它按照 $\sigma^{-1} \in \Sigma_n$ 对n 个因子进行置换。

至此，完成了对自然变换上对称群作用 (5.1.14) 的描述。

对于 (5.1.10) 中的修正 $\Phi : \phi \Rightarrow \varphi$，其在 (5.1.14) 中对称群作用 σ 下的像是如下修正。

$$\otimes_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)} \;\underset{\varphi^{\sigma}}{\overset{\phi^{\sigma}}{\Downarrow \Phi^{\sigma}}}\; Z$$

对于 (5.1.6) 中的 n 元对象组 $a = a_{j=1}^{n}$ inD，Φ^{σ} 具有如下胡须运算给出的分量自然变换 $\Phi^{\sigma}_{\langle a\rangle}$。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)} a^j & \overset{\phi^{\sigma}_{\langle a\rangle}}{\underset{\varphi^{\sigma}_{\langle a\rangle}}{\Downarrow \Phi^{\sigma}_{\langle a\rangle}}} & Za \\ \sigma \downarrow \cong & & \cong \uparrow Z(\sigma^{-1}) \\ \prod_{j=1}^{n} X_j a_{\sigma^{-1}(j)} & \overset{\phi_{\sigma\langle a\rangle}}{\underset{\varphi_{\sigma\langle a\rangle}}{\Downarrow \Phi_{\sigma\langle a\rangle}}} & Za_{\sigma^{-1}} \end{array} \tag{5.1.18}$$

在 (5.1.18) 中，$\Phi_{\sigma\langle a\rangle}$ 是 Φ 在 (5.1.11) 中针对 (5.1.16) 里的 n 元对象组 σa 所对应的分量自然变换。这就完成了对 Cat-多范畴 D-Cat 上的对称群作用 (5.1.14) 的描述。

复合： 设给定 D-指标范畴

$$Z\,,\ \langle X_j\rangle_{j=1}^{n}\,,\ \langle\langle W_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j}\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

with $n > 0$, $\langle X\rangle = (X_1, \ldots, X_n)$,

$$\langle W_j\rangle = \big(W_{j1}, \ldots, W_{j\ell_j}\big), \quad \text{and} \quad \langle W\rangle = \big(\langle W_1\rangle, \ldots, \langle W_n\rangle\big).$$

该多范畴复合

$$(\mathcal{D}\text{-Cat})\big(\langle X\rangle; Z\big) \times \prod_{j=1}^{n} (\mathcal{D}\text{-Cat})\big(\langle W_j\rangle; X_j\big) \xrightarrow{\gamma} (\mathcal{D}\text{-Cat})\big(\langle W\rangle; Z\big) \tag{5.1.19}$$

是以下复合函子。

(5.1.20)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}\text{-Cat}\big(\otimes_{j=1}^{n} X_j\,,\,Z\big)\times\prod_{j=1}^{n}\mathcal{D}\text{-Cat}\big(\otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji}\,,\,X_j\big) & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\times\otimes} & \searrow^{\gamma} & \\ \mathcal{D}\text{-Cat}\big(\otimes_{j=1}^{n} X_j\,,\,Z\big)\times\mathcal{D}\text{-Cat}\big(\otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji}\,,\,\otimes_{j=1}^{n} X_j\big) & \nearrow_{m} & \mathcal{D}\text{-Cat}\big(\otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji}\,,\,Z\big) \end{array}$$

● 在 (5.1.20) 中，标记为 m 的箭头是 2-范畴 D-Cat 中的水平复合（说明 1.4.17）。

● 在 (5.1.20) 中的左侧垂直箭头中，$\otimes$ 是针对 D-指标范畴的– (1.4.2) 中的 Day 卷积、针对自然变换的– (1.4.3) 中的 Day 卷积，以及针对修正的– (1.4.21) 中的 Day 卷积。

图表 (5.1.20) 假设每个 $\ell_j > 0$。

若对某些但并非所有 $j \in \{1,\dots,n\}$，都有 $\ell_j = 0$，则需对 (5.1.20) 作如下调整。

● 由于对于满足 $\ell_j = 0$ 的每个指标 j，W_j =，沿着 (5.1.20) 中的左侧垂直箭头，D-指标范畴 $\otimes^{\ell_j}{}_{i=1} W_{ji}$ 应解释为 (1.4.20) 中的单位图表 J = D(1, –)；它是相对于 Day 卷积而言 D-Cat 中的幺半群单位。

● 在水平复合 m 之前，使用 D-Cat 中的左、右单位同构，删去这些 J 的副本（其中 $\ell_j = 0$）。

● 在 γ 的陪域中，定义域 D-指标范畴

$$\otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji}$$

应省略满足 $\ell_j = 0$ 的那些指标 j。

最后，若对所有 $j \in \{1,\dots,n\}$ 都成立，则还需要进行一项调整。由于 W 也是空序列，在 γ 的陪域中，定义域 D-指标范畴应为 J。

至此，完成了对 Cat-多范畴 D-Cat 的描述，其中 $(\mathbf{D}, \otimes, 1, \beta)$ 是一个小置换范畴。

说明 5.1.21（D-Cat 中的复合）。(5.1.20) 中的复合 γ 可以更明确地描述如下。假设给定自然变换

(5.1.22)
$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\ \phi\ } Z \quad \text{and} \quad \otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \xrightarrow{\ \phi_j\ } X_j$$

对于 $1 \le j \le n$，且每个 $\ell_j > 0$ 都成立。它们的复合是自然变换

(5.1.23)
$$\otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \xrightarrow{\ \gamma(\phi;\langle\phi_j\rangle)\ } Z$$

定义如下。假设给定对象 $a^{ji} \in \mathbf{D}$，其中 $1 \le j \le n$ 且 $1 \le i \le \ell_j$，以及以下记号。

(5.1.24)
$$\begin{cases} \langle a_j\rangle = (a_{j1},\dots,a_{j\ell_j}) \in \mathcal{D}^{\ell_j} & a_j = \otimes_{i=1}^{\ell_j} a_{ji} \in \mathcal{D} \\ \langle a\rangle = (a_1,\dots,a_n) \in \mathcal{D}^{n} & a = \otimes_{j=1}^{n} a_j \in \mathcal{D} \end{cases}$$

$\gamma(\phi; \phi_j)$ 在 (5.1.23) 中对应的分量函子如下复合所示。

(5.1.25)
$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^{n} \prod^{\ell_j}{}_{i=1} W^{ji} a^{ji} & \xrightarrow{\gamma(\phi;\langle\phi_j\rangle)_{\langle\langle a_{ji}\ i\ j}} & Za \\ & \searrow^{\prod_j(\phi_j)_{\langle a_j\rangle}} \quad \nearrow_{\phi_{\langle a\rangle}} & \\ & \prod_{j=1}^{n} X^j a^j & \end{array}$$

这里，$\phi_{\langle a\rangle}$ 和 $(\phi_j)_{\langle a_j\rangle}$ 分别是 (5.1.7) 中所示的 ϕ 和 ϕ_j 的分量函子。

接下来，假设给定修正 Φ 和 Φ_j，它们对应于 $1 \le j \le n$，如下所示。

(5.1.26)
$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \underset{\varphi}{\overset{\phi}{\Rightarrow}} Z \qquad \otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \underset{\varphi_j}{\overset{\phi_j}{\Rightarrow}} X_j$$

它们的复合修正

$$\otimes_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \underset{\gamma(\varphi;\langle\varphi_j\rangle)}{\overset{\gamma(\phi;\langle\phi_j\rangle)}{\Rightarrow}} Z$$

具有如下的分量水平复合自然变换。

(5.1.27)
$$\prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} a_{ji} \underset{\prod_j(\varphi_j)_{\langle a_j\rangle}}{\overset{\prod_j(\phi_j)_{\langle a_j\rangle}}{\Rightarrow}} \prod_{j=1}^{n} X_j a_j \underset{\varphi_{\langle a\rangle}}{\overset{\phi_{\langle a\rangle}}{\Rightarrow}} Za$$

这里，$\Phi_{\langle a\rangle}$ 和 $(\Phi_j)_{\langle a_j\rangle}$ 分别是 (5.1.11) 中所示的 Φ 和 Φ_j 的分量自然变换。

上述讨论假设每个 $\ell_j > 0$。假设至少存在一个指标 $j \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $\ell_j = 0$。然后按照 (5.1.20) 后的讨论作出适当调整，并使用 (5.1.3) 中的范畴典范同构

$$(\mathcal{D}\text{-Cat})\big(\langle\rangle\,;\, X_j\big) = (\mathcal{D}\text{-Cat})(J\,,\, X_j) \cong X_j 1.$$

例如，假设对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$，$\ell_j = 0$。那么 (5.1.20) 中的复合

$$\mathcal{D}\text{-Cat}\big(\otimes_{j=1}^{n} X_j\,,\, Z\big) \times \prod_{j=1}^{n} X_j 1 \xrightarrow{\ \gamma\ } Z1$$

在对象集上的定义为

$$\gamma\big(\phi\,;\langle x\rangle\big) = \phi_{\langle 1\rangle}\langle x\rangle \in Z1$$

for

- 每个自然变换 $\phi : \otimes_{nj=1} X_j\, Z$ 以及 $\longrightarrow$
- 对象 $x_j \in X_j 1$，其中 $x = (x1, \ldots, xn)$。

这里的1是由 $1 \in \mathrm{D}$ 的副本组成的n元组，并且

$$\prod_{j=1}^{n} X_j 1 \xrightarrow{\ \phi_{\langle 1\rangle}\ } Z1$$

是 ϕ 的对应分量函子。这是良定义的，因为 1 是 D 中的严格幺半单位，并且 $\otimes_{j=1}^{n} 1 = 1$。

5.2. 加性自然变换与修正

在本节中，始终假设

$$\big(\mathcal{D}, (\oplus, 0, \beta^{\oplus}), (\otimes, 1, \beta^{\otimes}), (\partial^{l}, \partial^{r})\big) \tag{5.2.1}$$

是一个小型紧双置换范畴（定义 2.2.12）。紧性条件意味着因子分解态射 ∂^{l} 和 ∂^{r} 是自然同构。例如，第2.3节中的 $\mathrm{Fin}^{\mathsf{sk}}$, Σ、F 和 A 都是小型紧双置换范畴。与第2.2节一样，将 D 的加法结构记为

$$\mathcal{D}^{\oplus} = (\mathcal{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus}) \tag{5.2.2}$$

以及 D 的乘法结构定义为

$$\mathcal{D}^{\otimes} = (\mathcal{D}, \otimes, 1, \beta^{\otimes}). \tag{5.2.3}$$

$\mathrm{D}^{\oplus}$ 和 $\mathrm{D}^{\otimes}$ 各自都是置换范畴（定义 1.1.11）。

我们的下一个目标是在第 5.1 节构造 Cat-富集多范畴 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat 的一个变体，记作 DCat，它包含 D 的双置换结构。本节中，我们定义其

- 对象，称为加性对称幺半函子（定义 5.2.4），以及
- 正元数下的多态射范畴，其中– 加性自然变换（定义 5.2.12）作为对象，而– 加性修正（定义 5.2.25）作为态射。

在第 5.3 节中，我们证明 DCat 是一个 Cat-多范畴。

对象：加性对称幺半函子。 我们首先定义 DCat 中的对象，它们是相对于 D 的加法结构的对称幺半函子。

定义 5.2.4. 加性对称幺半函子是一个对称幺半函子（定义 1.1.17）

$$(X, X^{2}, X^{0}) : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}.$$

我们称 (X^2, X^0) 为 X 的加法结构；若上下文清楚，则在记号中省略它。

说明 5.2.5. 加性对称幺半函子 (X, X^2, X^0) 是利用 (5.2.2) 中 D 的加法结构 $\mathrm{D}^{\oplus} = (\mathrm{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$ 定义的。注意，一般而言，我们不要求 X^0 或 X^2 可逆。

- 函子 X : D Cat 是一个 D-指标范畴。
- 单位约束 X^0 是一个函子

$$\mathbf{1} \xrightarrow{X^{0}} X0.$$

因此 X^0 由单位对象确定

$$X^{0}{*} \in X0 \tag{5.2.6}$$

其中 $* \in \mathbf{1}$ 是唯一的对象，$0 \in$D 是加法零元。

● 幺半约束 X^2 是一个自然变换，其分量函子为

$$Xa \times Xb \xrightarrow{X^2_{a,b}} X(a \oplus b) \tag{5.2.7}$$

对于每一对对象 a、$b \in \mathrm{D}$。

数据（X、X^2,X^0）满足对称幺半函子的单位公理（1.1.18）、结合律公理（1.1.19）和编织公理（1.1.20）。为便于后续参考，我们在下文明确陈述这些公理。

自然性： X^2 的自然性表明，对于态射

$$f : a \longrightarrow b \quad \text{and} \quad f' : a' \longrightarrow b'$$

在 D 中，下列图表交换，其中 $(-)_* = X(-)$。

$$\begin{array}{ccc} Xa \times Xa' & \xrightarrow{X^2_{a,a'}} & X(a \oplus a') \\ {\scriptstyle f_* \times f'_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f \oplus f')_*} \\ Xb \times Xb' & \xrightarrow{X^2_{b,b'}} & X(b \oplus b') \end{array} \tag{5.2.8}$$

单位性： 对于（X,X^2,X^0），单位公理 (1.1.18) 表明，对于对象 $a \in \mathrm{D}$ 和 $w \in Xa$ 以及态射 $f \in Xa$，以下等式在 Xa 中成立。

$$\begin{cases} X^2_{0,a}\left(X^0 *, w\right) = w = X^2_{a,0}\left(w, X^0 *\right) \\ X^2_{0,a}\left(1_{X^0 *}, f\right) = f = X^2_{a,0}\left(f, 1_{X^0 *}\right) \end{cases} \tag{5.2.9}$$

结合律： 对于（X,X^2,X^0），结合律公理 (1.1.19) 表明，对于对象 a、b、$c \in \mathrm{D}$ 以及

$$(x, y, z) \in Xa \times Xb \times Xc$$

要么全为对象，要么全为态射，等式

$$X^2_{a \oplus b, c}\left(X^2_{a,b}(x, y), z\right) = X^2_{a, b \oplus c}\left(x, X^2_{b,c}(y, z)\right) \tag{5.2.10}$$

在 $X(a \oplus b \oplus c)$ 中成立。

编织： 对于（X,X^2,X^0），编织公理 (1.1.20) 表明等式

$$\beta^{\oplus}_* X^2_{a,b}(x, y) = X^2_{b,a}(y, x) \tag{5.2.11}$$

在 $X(b \oplus a)$ 中成立，其中

- $\beta^{\oplus} : a \oplus b \to b \oplus a$ D 中的编织以及
- $\beta^{\oplus}_* = X\beta^{\oplus} : X(a \oplus b) \to X(b \oplus a)$ 它在 X 下的像。

多态射范畴：加性自然变换。接下来，我们定义 DCat 中多态射范畴的对象。这些对象是 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat 中相应多态射范畴的子范畴（说明 5.1.2），其中 $\mathrm{D}^{\otimes} = (\mathrm{D}, \otimes, 1, \beta^{\otimes})$ 是式 (5.2.3) 中 D 的乘法结构。回顾式 (5.1.4)，$(\mathrm{D}^{\otimes}\text{-Cat})(X; Z)$ 包含

- 自然变换 $\bigotimes_{j=1}^{n} X_j \to Z$ 作为对象（5.1.5），
- 修正作为态射（5.1.10），以及
- 恒等变换和复合由垂直复合下修正所给出。

在 DCat 的每个多态射范畴中，对象是 $\mathbf{D}^{\otimes}$-Cat 中满足以下两个相容条件（即下文的 (5.2.16) 和 (5.2.18)）的自然变换，这两个条件与输入和输出中的加性对称幺半函子的 加性结构有关。

定义 5.2.12。 设给定加性对称幺半函子

$$(Z, Z^2, Z^0) \quad \text{and} \quad \left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

其中 $n > 0$ 如定义 5.2.4 所述。一个 加性自然变换

$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} \xrightarrow{\phi} (Z, Z^2, Z^0) \tag{5.2.13}$$

是 $\mathbf{D}^{\otimes}$-Cat 中如 (5.1.5) 所述的自然变换

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\phi} Z \tag{5.2.14}$$

满足以下单位公理 (5.2.16) 和可加性公理 (5.2.18)。

Unity: 对于每个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 以及对象 $a_j \in \mathbf{D}$（其中 $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$），考虑 ϕ 的分量函子，如 (5.1.7) 所示

$$X_1 a_1 \times \cdots \times X_i 0 \times \cdots \times X_n a_n \xrightarrow{\phi_{(a_1,\dots,0,\dots,a_n)}} Z0 \tag{5.2.15}$$

with

- i 个定义域因子 $X_i 0$ 和
- j 个定义域因子 $X_j a_j$（其中 $j \neq i$）。

对于每个 $j \neq i$，设 $x_j \in X_j a_j$ 是一个对象，且 $f_j \in X_j a_j$ 是一个态射。则要求以下对象等式、态射等式分别在 $Z0$ 中成立，其中 $\phi = \phi_{(a_1,\dots,0,\dots,a_n)}$。

$$\begin{cases} \phi\left(x_1, \dots, X_i^0 *, \dots, x_n\right) = Z^0 * \\ \phi\left(f_1, \dots, 1_{X_i^0 *}, \dots, f_n\right) = 1_{Z^0 *} \end{cases} \tag{5.2.16}$$

这里，$X_i^0 * \in X_i 0$ 和 $Z^0 * \in Z0$ 分别是 X_i 和 Z 的单位对象 (5.2.6)。

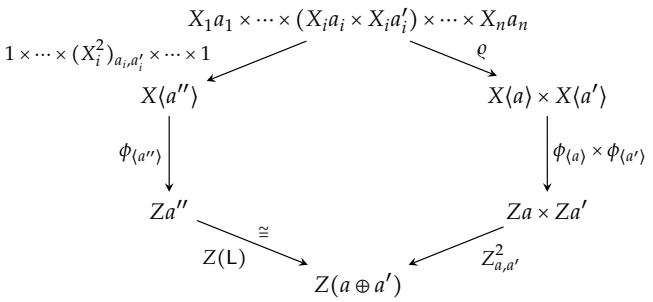
Addi性： 假设给定对象 $a = a_j{}_{j=1}^{n} \in \mathbf{D}^n$ 和 $a_i' \in \mathbf{D}$，其中某个 $i \in \{1, \dots, n\}$，以及以下记号。

$$\begin{cases} a = a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_n & a_i'' = a_i \oplus a_i' \\ a' = a_1 \otimes \cdots \otimes a_i' \otimes \cdots \otimes a_n & \langle a' \rangle = (a_1, \dots, a_i', \dots, a_n) \\ a'' = a_1 \otimes \cdots \otimes a_i'' \otimes \cdots \otimes a_n & \langle a'' \rangle = (a_1, \dots, a_i'', \dots, a_n) \\ X\langle a \rangle = X_1 a_1 \times \cdots \times X_i a_i \times \cdots \times X_n a_n & \\ X\langle a' \rangle = X_1 a_1 \times \cdots \times X_i a_i' \times \cdots \times X_n a_n & \\ X\langle a'' \rangle = X_1 a_1 \times \cdots \times X_i a_i'' \times \cdots \times X_n a_n & \end{cases} \tag{5.2.17}$$

- 在 a、a' 和 a'' 中，第 j 个因子均为 a_j，其中 $j \neq i$；而第 i 个因子分别为 a_i、a'_i 和 a''_i。
- 在 a' 和 a'' 中，j 项均为 a_j（$j \neq i$），而第 i 项分别为 a'_i 和 a''_i。

● 在 Xa、Xa' 和 Xa'' 中，第 j 个因子均为 X_ja_j （$j \neq i$），而第 i 个因子分别为 X_ia_i、$X_ia'_i$ 和 $X_ia''_i$。于是，以下函子图表要求可交换。

(5.2.18)



(5.2.18) 的细节如下。

● 在 (5.2.18) 的顶端节点，第 i 个因子是 $X_ia_i \times X_ia'_i$，而第 j 个因子是 X_ja_j，其中 $j \neq i$。

● $Z^2_{a,a'}$ 与

$$X_ia_i \times X_ia'_i \xrightarrow{(X_i^2)_{a_i,a'_i}} X_i(a_i \oplus a'_i) = X_ia''_i$$

分别是 Z 和 X_i 的幺半约束 (5.2.7) 的指定分量函子。

● $\phi_{\langle a\rangle}$、$\phi_{\langle a'\rangle}$ 和 $\phi_{\langle a''\rangle}$ 均为 ϕ 的指定分量函子 (5.1.7)。

● 省略 $\otimes$ 符号以节省空间，态射

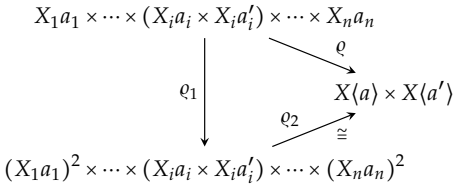
(5.2.19)

$$\begin{array}{ccc} a'' & \xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}} & a \oplus a' \\ \| & & \| \\ a_1 \cdots (a_i \oplus a'_i) \cdots a_n & & (a_1 \cdots a_i \cdots a_n) \oplus (a_1 \cdots a'_i \cdots a_n) \end{array}$$

在 (5.2.18) 中，是紧双置换范畴 D（例 2.4.19）中关于和的唯一 Laplazacoherence 同构。

● ϱ 在 (5.2.18) 中是以下复合函子。

(5.2.20)



- ϱ_1 is the product of
  (i) the diagonal functors $X_ja_j \longrightarrow (X_ja_j)^2$ for $j \neq i$ and
  (ii) the identity functor of $X_ia_i \times X_ia'_i$.
- ϱ_2 permutes the $2n$ factors according to the transpose permutation $\xi^{\otimes}_{2,n} \in \Sigma_{2n}$ in (2.3.6).

至此，加性自然变换的定义完成。可加性公理 (5.2.18) 的显式形式见 (5.2.24)。

解释 5.2.21（加性自然变换）。参见定义 5.2.12。

（1）加性自然变换是$\mathcal{D}^{\otimes}$-Cat中的自然变换，具有两个附加性质——单位公理（5.2.16）和加性公理（5.2.18）——但没有额外结构。（2）自然变换 $\phi : \otimes_{j=1}^{n} X^j Z$ 在（5.2.14）中的定义域是（1.4.11）中的迭代 Day 卷积 $\otimes_{j=1}^{n} X^j$。它由乘法结构D(D$^{\otimes}$ = , ⊗,1 $\beta^{\otimes}$,) 以及底层函子X^j $\mathcal{D}$ Cat构造而成。

（3）(5.2.15)中的分量函子 ϕ 是良定义的，因为D中的迭代积

$$\overbrace{a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes 0}^{\text{empty if } i=1} \overbrace{\otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n}^{\text{empty if } i=n} = 0$$

根据环的乘法零元公理（2.2.3），因此该范畴也是双幺半范畴。

(4) 当 $n = 1$ 时，加性自然变换

$$X_1 \xrightarrow{\phi} Z$$

恰好是幺半自然变换（定义 1.1.21）。单位公理 (5.2.16) 和可加性公理 (5.2.18) 在 $n = 1$ 时化为 (1.1.22) 中的图表。

(5) 在 (5.2.20) 中，ϱ_2 是对称幺半范畴 Cat 中唯一的相干同构，它将各因子置换为 $Xa \times Xa'$，并使以下两类因子各自的相对顺序保持不变：

- 对每个$X_{ja_j})^2$，其中 $j \neq i$，以及
- $X_{ia_i} \times X_{ia_i}$

保持不变。

(6) 可加性公理 (5.2.18) 明确表述如下。设给定

$$\langle x \rangle = \langle x_j \rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} X_j a_j \quad \text{and} \quad x'_i \in X_i a'_i \tag{5.2.22}$$

它们要么全都是对象，要么全都是态射，并采用以下记号。

$$\begin{cases} x''_i = (X_i^2)_{a_i, a'_i}(x_i, x'_i) \in X_i a''_i = X_i(a_i \oplus a'_i) \\ \langle x' \rangle = (x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_n) \in X\langle a' \rangle \\ \langle x'' \rangle = (x_1, \ldots, x''_i, \ldots, x_n) \in X\langle a'' \rangle \end{cases} \tag{5.2.23}$$

那么，可加性公理 (5.2.18) 就是等式

$$\mathrm{L}_* \phi_{\langle a'' \rangle} \langle x'' \rangle = Z^2_{a,a'} \left(\phi_{\langle a \rangle} \langle x \rangle , \phi_{\langle a' \rangle} \langle x' \rangle \right) \tag{5.2.24}$$

在 $Z(a \oplus a')$ 中，其中 $\mathrm{L}_* = Z(\mathrm{L})$。

多态射范畴：加性修正。接下来，我们定义 DCat 中多态射范畴的态射。

定义 5.2.25。在定义 5.2.12 的情境中，假设 ϕ 和 ψ 如

$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} (Z, Z^2, Z^0)$$

是加性自然变换。一个加性修正 $\Phi:\phi \Rightarrow \psi$，也记作

(5.2.26)
$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\right\rangle_{j=1}^{n} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\Phi}} (Z, Z^2, Z^0),$$

是一个修正

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \underset{\psi}{\overset{\phi}{\Phi}} Z$$

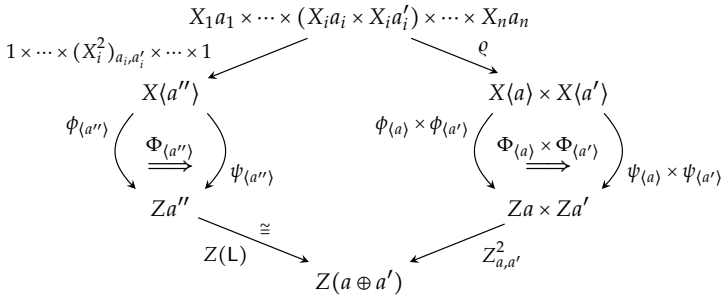
如（5.1.10）中所示，并满足以下单位元与可加性公理。

单位性： 在（5.2.15）和（5.2.16）的情形下，Φ 在$Z0$中的分量态射

(5.2.27)
$$\begin{array}{c} \phi(x_1,\dots,X_i^0 *,\dots,x_n) = Z^0 * \\ \Big\downarrow \Phi_{(x_1,\dots,X_i^0 *,\dots,x_n)} \\ \psi(x_1,\dots,X_i^0 *,\dots,x_n) = Z^0 * \end{array}$$

是恒等态射 $1_{Z^0 *}$。

可加性： 在（5.2.17）和（5.2.18）的情形下，以下两个复合自然变换相等，其中每个 $\Phi_?$ 都是 Φ 的相应分量自然变换，如（5.1.11）中所示。

(5.2.28)


至此，加性修正的定义完成。

说明 5.2.29（加性修正）。考虑定义 5.2.25。

（1）对于 Φ，单位公理（5.2.27）中的态射是 Φ 的分量自然变换在

$$X_1a_1 \times \cdots \times X_i0 \times \cdots \times X_na_n \underset{\psi_{(a_1,\dots,0,\dots,a_n)}}{\overset{\phi_{(a_1,\dots,0,\dots,a_n)}}{\Phi_{(a_1,\dots,0,\dots,a_n)}}} Z0$$

对象（$x_1,\dots,X_i^0 *,\dots,x_n$）处的分量。

（2）在（5.2.23）和（5.2.24）的语境中，给定对象 $x^j \in Xia^j$ 和 $x_i' \in X_ia_i'$，Φ 的可加性公理（5.2.28）是以下态射等式

(5.2.30)
$$\mathsf{L}_*\left(\Phi_{\langle a''\rangle}\right)_{\langle x''\rangle} = Z^2_{a,a'}\left((\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, (\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\right)$$

在$Z(a \oplus a')$中。

多态射范畴。 接下来，我们定义 DCat 中正元数下的多态射范畴，并检验它们是否良定义。回顾 (5.1.4) 中的多态射范畴 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat(X; Z)。

定义 5.2.31. 在定义 5.2.12 的语境下，给定 $X = X_j{}_{j=1}^{n}$，定义子范畴

$$\mathcal{D}\mathrm{Cat}\big(\langle X\rangle ; Z\big) \tag{5.2.32}$$

$\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat(X; Z) 的数据如下。
对象集： 对象是如 (5.2.13) 中所述的加性自然变换。**态射：** 态射是如 (5.2.26) 中所述的加性修正。**恒等变换：** 恒等态射是恒等修正。**复合：** 复合为修正的垂直复合 (1.3.13)。至此完成了 DCat(X; Z) 的定义。

引理 5.2.33。 在定义 *5.2.31* 的背景下，$\mathcal{D}\mathrm{Cat}(\langle X\rangle; Z)$ 在(5.1.4)中定义了 $\mathcal{D}^{\otimes}$-Cat($\langle X\rangle$; Z) 的一个子范畴。

证明。修正关于垂直复合是结合且含单位的 **[JY21, 4.4.8 (2)]**。对于恒等修正，单位公理 (5.2.27) 和可加性公理 (5.2.28) 可化简为加性自然变换所满足的相应条件，即 (5.2.16) 和 (5.2.18)。因此，只需验证加性修正在垂直复合下封闭。

假设给定如下加性修正 Φ 和 Ψ。

$$\big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\big\rangle_{j=1}^{n} \;\underset{\omega}{\overset{\phi}{\overset{\psi \quad \Phi}{\underset{\Psi}{\longrightarrow}}}}\; (Z, Z^2, Z^0)$$

我们必须证明垂直复合修正 $\Psi\Phi : \phi \to \omega$ 是加性的。垂直复合 $\Psi\Phi$ 根据态射等式满足单位公理 (5.2.27)

$$1_{Z^0 *} 1_{Z^0 *} = 1_{Z^0 *} \quad \text{in} \quad Z0.$$

下面的计算表明，垂直复合 $\Psi\Phi$ 满足加法公理 (5.2.30)。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_*\big((\Psi\Phi)_{\langle a''\rangle}\big)_{\langle x''\rangle} \\
&= \mathrm{L}_*\Big(\big(\Psi_{\langle a''\rangle}\big)_{\langle x''\rangle}\big(\Phi_{\langle a''\rangle}\big)_{\langle x''\rangle}\Big) \\
&= \Big(\mathrm{L}_*\big(\Psi_{\langle a''\rangle}\big)_{\langle x''\rangle}\Big)\Big(\mathrm{L}_*\big(\Phi_{\langle a''\rangle}\big)_{\langle x''\rangle}\Big) \\
&= \Big(Z^2_{a,a'}\big((\Psi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, (\Psi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\big)\Big)\Big(Z^2_{a,a'}\big((\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, (\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\big)\Big) \\
&= Z^2_{a,a'}\big((\Psi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, (\Psi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}(\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\big) \\
&= Z^2_{a,a'}\big(((\Psi\Phi)_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, ((\Psi\Phi)_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\big)
\end{aligned}$$

上述等式成立的原因如下：

- 第一个和最后一个等式由垂直复合修正 $\Psi\Phi$的定义得出。
- 第二个等式由 $\mathrm{L}_* = Z(\mathrm{L})$ 的函子性推出。

● 第三个等式由适用于 Φ 和 Ψ 的可加性公理 (5.2.30) 推出。
● 第四个等式由$Z^2{}_{a,a'}$的函子性得出。

这证明垂直复合 $\Psi\Phi$ 是加性修正。 □

5.3. 双置换指标范畴的富集多范畴

我们继续假设 D 是 (5.2.1) 中所述的小紧双置换范畴。本节中，我们构造 Cat-富集多范畴 DCat，以纳入 D 的双置换结构（定理 5.3.11）。虽然 DCat 上的 Cat-多范畴结构继承自说明 5.1.2 中 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat 上的结构，但有几点细微之处需要注意：

(1) Cat-多范畴结构由对称幺半闭结构（定理 5.1.1）诱导而来。对于 $\mathcal{D}^{\otimes}$-Cat，这一点成立；但对于 *Cat*-多范畴 Cat-，则$\mathcal{D}$Cat并非如此。我们将在说明 5.3.4 中讨论这一点。(2) 加性自然变换（定义 5.2.12）是具有额外性质的自然变换。因此，我们必须检查 Cat-多范畴结构是否保留加性自然变换。对于加性修正（定义 5.2.25）也同样如此；加性修正是具有额外性质的修正。(3) $\mathcal{D}$Cat 通常并非DCat-范畴 $\mathcal{D}^{\otimes}$-Cat的子多范畴，因为Cat-多函子不是对象上的单射；参见说明 5.3.13。

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \longrightarrow \mathcal{D}^{\otimes}\text{-}\mathsf{Cat}$$

定义。 现在我们定义 DCat 上的 Cat-多范畴结构。

定义 5.3.1。 对于 (5.2.1) 中的小紧双置换范畴 D，按如下方式定义 Cat-多范畴 DCat 的数据。

对象集： 这些是加性对称幺半函子 $\mathrm{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$（定义 5.2.4）。

零元数的多态射范畴： 对于每个加性对称幺半函子

$$(Z, Z^2, Z^0) : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat},$$

定义零元多重态射范畴

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle\,;\, Z\big) = Z1. \tag{5.3.2}$$

正元数的多态射范畴： 设给定加性对称幺半函子

$$(Z, Z^2, Z^0) \quad \text{and} \quad \big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\big\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat} \tag{5.3.3}$$

其中 $n > 0$ 和 $X = X j_{j=1}^{n}$。定义n元多态射范畴

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\, Z\big)$$

为（5.2.32）中的范畴。

C带色单位： 对于加性对称幺半函子（Z，Z^2,Z^0），Z-带色单位是恒等自然变换 $1_Z : Z \longrightarrow Z$。

对称群作用与复合： 这些是 Cat-多范畴 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat 中相应内容的限制——即（5.1.14）和（5.1.19）——使用

- （5.1.3）和（5.3.2）将具有零元数输入的多态射范畴与
- 正元数输入的多态射范畴对应的引理 5.2.33。

至此，DCat 的定义完成。

说明 5.3.4（DCat 并非对称幺半）。这里我们讨论 $\mathbb{D}^{\otimes}$-Cat 与 DCat 之间一个微妙的区别。一方面，$\mathbb{D}^{\otimes}$-Cat 上的 Cat-多范畴结构由 $\mathbb{D}^{\otimes}$-Cat 上的对称幺半闭结构诱导（说明 5.1.2）。其幺半单位是单位图表(1.4.20)

$$J = \mathcal{D}(1, -) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}.$$

根据所诱导的 Cat-多范畴的定义，对于每个 D-指标范畴 Z :D Cat，$\mathbb{D}^{\otimes}$-Cat 中的零元多重态射范畴为

$$(\mathcal{D}^{\otimes}\text{-}\mathsf{Cat})\big(\langle\rangle\,;\, Z\big) = (\mathcal{D}\text{-}\mathsf{Cat})(J\,,\, Z) \cong Z1,$$

其中典范同构由双范畴 Yoneda 引理给出。

另一方面，在 (5.3.2) 中，我们直接将零元多重态射范畴 DCat(; Z) 定义为 $Z1$，而不使用 J。原因在于，一般而言，J =D(1, –) 不具备 $\mathbb{D}^{\oplus}$ Cat 中对称幺半函子的结构。因此，我们很快将验证，Cat-多范畴 DCat 一般并非由 $\mathbb{D}^{\otimes}$-Cat 上的对称幺半结构限制而诱导得到。

更具体地说，根据定义，J 上的幺半函子结构包含一个单位约束，即选择一个单位对象 (5.2.6)

$$J^0{*} \in J0 = \mathcal{D}(1, 0).$$

对于一般的双置换范畴 D，态射集 D(1,0) 可能为空，因此这样的单位对象 $J^0{*}$ 并不存在。以下是一些该态射集为空的小型紧双置换范畴的具体例子：

（1）在 $\mathsf{Fin}^{\mathsf{sk}}$（例 2.3.2）中，存在一个空态射集

$$\mathsf{Fin}^{\mathsf{sk}}(\overline{1}, \overline{0}) = \mathsf{Set}\big(\{1\}\,,\, \varnothing\big) = \varnothing.$$

（2）在 Σ（例 2.3.11）中，存在一个空态射集

$$\Sigma(1, 0) = \varnothing.$$

（3）在 A（例 2.3.17）中，存在一个空态射集

$$\mathcal{A}\big((1)\,,\, \langle\rangle\big) = \varnothing$$

因为不存在函数 $\overline{1} = \{1\} \varnothing$。 $\longrightarrow$

在这些例子中的每一个里，J 都不能具有单位对象，因此也不具有幺半函子 $\mathbb{D}^{\oplus}$ Cat 的结构。 $\longrightarrow$

对称群作用。为了证明定义 5.3.1 中的 DCat 是一个 Cat- 多范畴，我们首先检查对称群作用是否良定义；该作用是 $\mathbb{D}^{\otimes}$-Cat 中对称群作用的限制。

引理 5.3.5. 加性自然变换和加性修正在$\mathcal{D}^{\otimes}$-Cat中关于对称群作用(5.1.14) 是闭合的。

PROOF. 设给定加性对称幺半函子 Z 和 X^j，如 (5.3.3) 中所述，其中 $n > 0$ 且 $\langle X\rangle = \langle X^j\rangle_{j=1}^n$。设 $\sigma \in \Sigma_n$ 是一个置换。给定一个加性自然变换 $\phi : \otimes_{j=1}^n X^j \; Z$，如 (5.2.14) 中所述，我们必须证明自然变换 $\longrightarrow$

$$\otimes_{j=1}^n X_{\sigma(j)} \xrightarrow{\phi^\sigma} Z$$

满足加性自然变换的单位公理 (5.2.16) 和可加性公理 (5.2.18)。根据定义 (5.1.15)，对于 D 中的对象 $a = a^j{}_{j=1}^n$，分量函子 $\phi^\sigma_{\langle a\rangle}$ 是以下复合。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^n X_{\sigma(j)} a_j & \xrightarrow{\phi^\sigma_{\langle a\rangle}} & Za \\ \sigma \downarrow \cong & & \cong \uparrow Z(\sigma^{-1}) \\ \prod_{j=1}^n X_j a_{\sigma^{-1}(j)} & \xrightarrow{\phi_{\sigma\langle a\rangle}} & Za_{\sigma^{-1}} \end{array}$$

对于 ϕ^σ 的单位公理 (5.2.16)，假设 $a_i = 0$，其中指标 $i \in \{1,\dots,n\}$。单位公理中的两个等式对 $\phi^\sigma_{\langle a\rangle}$ 成立，这是因为

- $\phi_{\sigma\langle a\rangle}$ 的单位公理 (5.2.16)；
- Laplaza 相干同构的唯一性（定理 2.4.18），这意味着相干同构

$$a_{\sigma^{-1}} = \otimes_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j)} = 0 \xrightarrow[\cong]{\sigma^{-1}} 0 = \otimes_{j=1}^n a_j = a$$

是 D 中的恒等态射 1_0；并且

- Z 的函子性，这意味着 $Z(1_0) = 1_{Z0}$。

对于 ϕ^σ 的可加性公理 (5.2.18)，除了 (5.1.16) 和 (5.2.17) 中的记号外，我们还使用以下记号。

$$\text{(5.3.6)} \qquad \begin{cases} \sigma\langle a'\rangle = (a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,a'_i,\dots,a_{\sigma^{-1}(n)}) \in \mathcal{D}^n \\ a'_{\sigma^{-1}} = a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a'_i \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} \in \mathcal{D} \\ \sigma\langle a''\rangle = (a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,a''_i,\dots,a_{\sigma^{-1}(n)}) \in \mathcal{D}^n \\ a''_{\sigma^{-1}} = a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a''_i \otimes \cdots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} \in \mathcal{D} \end{cases}$$

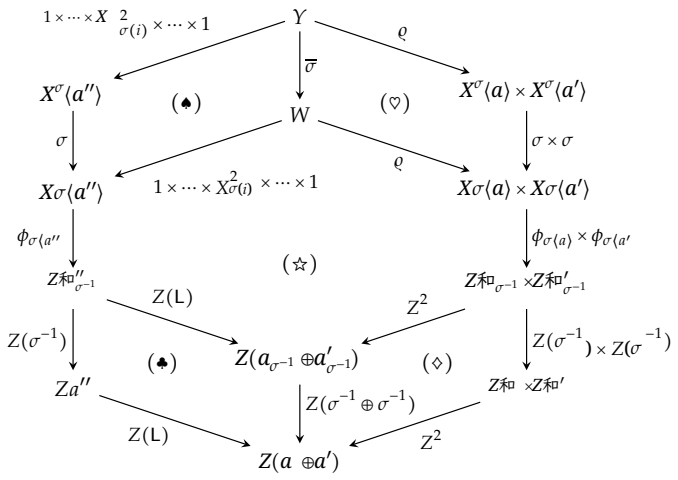
$$\begin{cases} X\sigma\langle a\rangle = X_1 a_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times X_{\sigma(i)} a_i \times \cdots \times X_n a_{\sigma^{-1}(n)} \\ X\sigma\langle a'\rangle = X_1 a_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times X_{\sigma(i)} a'_i \times \cdots \times X_n a_{\sigma^{-1}(n)} \\ X\sigma\langle a''\rangle = X_1 a_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times X_{\sigma(i)} a''_i \times \cdots \times X_n a_{\sigma^{-1}(n)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X^\sigma\langle a\rangle = X_{\sigma(1)} a_1 \times \cdots \times X_{\sigma(i)} a_i \times \cdots \times X_{\sigma(n)} a_n \\ X^\sigma\langle a'\rangle = X_{\sigma(1)} a_1 \times \cdots \times X_{\sigma(i)} a'_i \times \cdots \times X_{\sigma(n)} a_n \\ X^\sigma\langle a''\rangle = X_{\sigma(1)} a_1 \times \cdots \times X_{\sigma(i)} a''_i \times \cdots \times X_{\sigma(n)} a_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = X_{\sigma(1)} a_1 \times \cdots \times (X_{\sigma(i)} a_i \times X_{\sigma(i)} a'_i) \times \cdots \times X_{\sigma(n)} a_n \\ W = X_1 a_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times (X_{\sigma(i)} a_i \times X_{\sigma(i)} a'_i) \times \cdots \times X_n a_{\sigma^{-1}(n)} \end{cases}$$

使用这些记号， ϕ^{σ} 的可加性公理 (5.2.18) 断言以下函子图表边界的交换性。

(5.3.7)



图表（5.3.7）的具体内容如下。

● 同构 $\overline{\sigma}:Y\ W$ 是由 $\sigma\in\Sigma_n$ 诱导的块置换，它将 $X_{\sigma(i)a_i}\times X_{\sigma(i)a_{ri}}$ 中的积视为 Y 中的单个块。

● 区域 (♠) 由对称幺半范畴 (Cat, ×) 中编织的自然性可交换。

● 区域 (♡) 可交换，因为将两个复合投影到公共陪域的任意因子上后，它们都变为$X\sigma a\times X\sigma a_r$。

● 区域 (♣) 由– Z 的函子性以及– Laplazacoherence 同构的唯一性（定理 2.4.18）可交换。

● 区域 (♢) 由加性对称幺半函子 $(Z,Z2,Z^0)$ 的幺半约束Z^2的自然性可交换。

● 六边形 (☆) 由 ϕ 的可加性公理 (5.2.18) 可交换

因此， ϕ^{σ} 是一个加性自然变换。这证明加性自然变换在 D$^{\otimes}$-Cat 中关于对称群作用 (5.1.14) 封闭。

在 D$^{\otimes}$-Cat 中，加性修正关于对称群作用封闭的证明，可由上述论证将 ϕ 替换为加性修改 Φ 得到。这样做有以下两个理由：

● Φ^{σ} (5.1.18) 的定义方式与 ϕ^{σ} 相同，只是用 $\Phi_{\sigma\langle a\rangle}$ 替换了 $\phi_{\sigma\langle a\rangle}$。

● 加性修正的单位公理 (5.2.27) 和可加性公理 (5.2.28)，可由加性自然变换的相应公理——即 (5.2.16) 和 (5.2.18)——将 ϕ 替换为 Φ 得到。

证明至此完成。 □

复合。 接下来我们检验 DCat 中的复合（它是 D$^{\otimes}$-Cat 中复合的限制）是否良定义。

引理 5.3.8. 加性自然变换和加性修正在$\mathcal{D}^{\otimes}$-Cat中关于复合(5.1.19) 封闭。

证明。设给定加性对称幺半函子（定义 5.2.4）

$$Z, \langle X_j\rangle_{j=1}^{n}, \langle\langle W_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j}\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

其中 $n > 0$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$,

$$\langle W_j\rangle = \big(W_{j1}, \ldots, W_{j\ell_j}\big), \quad \text{and} \quad \langle W\rangle = \big(\langle W_1\rangle, \ldots, \langle W_n\rangle\big).$$

设给定加性自然变换（定义 5.2.12）

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\ \phi\ } Z \quad \text{and} \quad \otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \xrightarrow{\ \phi_j\ } X_j$$

对于 $1 \le j \le n$。若某个 $\ell_j = 0$，则我们会对下文的
自变量作适当调整，具体如说明 5.1.21 的最后一段所述。在
本证明余下部分中，我们假设每个 $\ell_j > 0$.

我们必须证明复合自然变换 (5.1.23)

$$\otimes_{j=1}^{n} \otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \xrightarrow{\ \gamma(\phi;\langle\phi_j\rangle)\ } Z$$

满足单位公理 (5.2.16) 和可加性公理 (5.2.18)。$\gamma(\phi; \phi_j)$ 的单位公理由以下内容推出：

- ϕ 和 ϕ_j 的单位公理，以及
- $\gamma(\phi; \phi_j)$ 的每个分量函子的定义 (5.1.25)，即将其定义为以下复合

$$\prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} a_{ji} \xrightarrow{\ \prod_j(\phi_j)_{\langle a_j\rangle}\ } \prod_{j=1}^{n} X_j a_j \xrightarrow{\ \phi_{\langle a\rangle}\ } Za.$$

为检验 $\gamma(\phi; \phi_j)$ 的可加性公理 (5.2.18)，设给定对象

- $a_{ji} \in \mathcal{D}$ for $j \in \{1, \ldots, n\}$ and $i \in \{1, \ldots, \ell_j\}$ and
- $a'_{hk} \in \mathcal{D}$ for one index $h \in \{1, \ldots, n\}$ and one index $k \in \{1, \ldots, \ell_h\}$,

以及 (5.1.24) 中和下文中的记号。

$$\begin{cases} a''_{hk} = a_{hk} \oplus a'_{hk} & \overline{a} = a_1 \otimes \cdots \otimes (a_h \oplus a'_h) \otimes \cdots \otimes a_n \\ a'_h = a_{h1} \otimes \cdots \otimes a'_{hk} \otimes \cdots \otimes a_{h\ell_h} & a' = a_1 \otimes \cdots \otimes a'_h \otimes \cdots \otimes a_n \\ a''_h = a_{h1} \otimes \cdots \otimes a''_{hk} \otimes \cdots \otimes a_{h\ell_h} & a'' = a_1 \otimes \cdots \otimes a''_h \otimes \cdots \otimes a_n \end{cases}$$

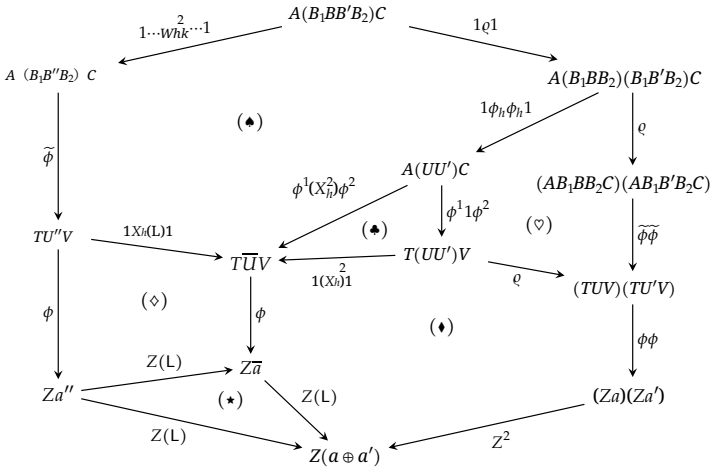
$$\begin{cases} A = \prod_{j=1}^{h-1} \prod_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} a_{ji} & B_1 = \prod_{t=1}^{k-1} W_{ht} a_{ht} \\ C = \prod_{j=h+1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} a_{ji} & B_2 = \prod_{t=k+1}^{\ell_h} W_{ht} a_{ht} \\ B = W_{hk} a_{hk} & B' = W_{hk} a'_{hk} \qquad B'' = W_{hk} a''_{hk} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi^1 = \prod_{j=1}^{h-1} \phi_j & \phi^2 = \prod_{j=h+1}^{n} \phi_j & \widetilde{\phi} = \prod_{j=1}^{n} \phi_j = \phi^1 \times \phi_h \times \phi^2 \\ T = \prod_{j=1}^{h-1} X_j a_j & V = \prod_{j=h+1}^{n} X_j a_j & \overline{U} = X_h(a_h \oplus a'_h) \\ U = X_h a_h & U' = X_h a'_h & U'' = X_h a''_h \end{cases}$$

在上述 ϕ^1、ϕ^2 和 $\widetilde{\phi}$ 中，每个分量函子下标都省略了。为进一步简化下方的图表，我们省略符号 $\times$，并用并置表示

积。采用这些记号和约定后，$\gamma(\phi;\phi_j)$ 的可加性公理 (5.2.18) 断言下列图表边界的交换性。

(5.3.9)



图表 (5.3.9) 的详细内容如下。

- 每个 L 都是 Laplazacoherence 同构（定理 2.4.18）。
- 每个 ϱ 都是 (5.2.20) 中的复合，其中涉及对某些因子取对角函子的积和恒等函子，随后进行一次置换。

- 区域 (♠) 根据 ϕ_h 的可加性公理 (5.2.18) 交换。
- 区域 (♡) 和 (♣) 根据构造交换。
- 区域 (♢) 根据 ϕ 的自然性 (5.1.9) 交换。
- 区域 (★) 由 – Z 的– 函子性以及 Laplazacoherence 同构（定理 2.4.18）的唯一性而交换。

- 该区域(⧫)根据 ϕ 的可加性公理 (5.2.18) 可交换。

这证明 $\gamma(\phi;\phi_j)$ 满足可加性公理 (5.2.18)。我们已证明，加性自然变换在 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat 中的复合下封闭。

通过将上述论证中的 ϕ 和 ϕ_j 分别替换为加性修正 $\Phi:\phi \Rightarrow \varphi$ 和 $\Phi_j:\phi_j \Rightarrow \varphi_j$，即可得到加性修正在 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat 中的复合下封闭的证明。这样做有以下两个理由：

- $\gamma(\Phi;\Phi_j)$ 的每个分量自然变换都是水平复合 (5.1.27)。

- 加性修正的单位公理 (5.2.27) 和可加性公理 (5.2.28)，可由加性自然变换的相应公理——即 (5.2.16) 和 (5.2.18)——将 ϕ 替换为 Φ 得到。

证明至此完成。 □

解释 5.3.10 （一元情形）。 正如我们在解释 5.2.21（4）中提到的，元数 1 中的加性自然变换恰好就是幺半自然变换。基于这一点，引理 5.3.8 的证明推广了幺半自然变换在垂直复合下是闭的这一事实的证明。

现在我们可以介绍本章的主要观察结果了。

定理 5.3.11. 对于每个小紧双置换范畴 $\mathcal{D}$，定义 *5.3.1* 中的 $\mathcal{D}$Cat 是一个Cat-多范畴。

证明。我们注意到以下事实。

● 根据引理 5.2.33，DCat 中的每个正元数多态射范畴都是 D$^{\otimes}$-Cat 中相应多态射范畴的子范畴。

● 根据 (5.1.3) 和 (5.3.2)，DCat 与 D$^{\otimes}$-Cat 中的零元多态射范畴在典范意义下同构。

● D$^{\otimes}$-Cat 和 DCat 中的带色单位均由恒等自然变换给出。

● 根据引理 5.3.5 和 5.3.8，D$^{\otimes}$-Cat 中的对称群作用和复合分别限制到 DCat。

因此，DCat 满足 Cat-多范畴的公理（定义 3.1.2），因为 D$^{\otimes}$-Cat 满足这些公理（定理 5.1.1 ）。□

由于 DCat 上的 Cat-多范畴结构（定理 5.3.11）——带色单位、对称群作用和复合——继承自 D$^{\otimes}$-Cat 上的结构（定理 5.1.1），我们得到以下结果。回顾定义 3.2.1 中 V-多范畴之间的 V-多函子这一概念。

推论 5.3.12。 对于每个小紧双置换范畴 $\mathcal{D}$，存在一个遗忘的 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\ U\ } \mathcal{D}^{\otimes}\text{-}\mathsf{Cat}$$

定义如下。

- U 将每个加性对称幺半函子 $(Z,\ Z_2,\ Z^0)$ 映射为底层函子 $Z : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}$。
- 对于零元数多态射范畴，U 是由(5.1.3) 和(5.3.2) 给出的典范同构。
- 对于正元数多态射范畴，U 是引理 *5.2.33* 中的子范畴包含。

说明 5.3.13 （对象上的非单射性）。对于推论 5.3.12 中的 Cat-多函子U ，每个多态射函子要么是同构，要么是子范畴包含。然而，一般而言，U 在对象上不是单射的，因为一个 D-指标范畴$\underrightarrow{Z}$: D Cat 可能具有多个不同的加性结构（Z^2,Z^0）。因此，DCat 一般不是D$^{\otimes}$-Cat 的子 Cat-多范畴。

例 5.3.14。 设 D 是例 2.3.2、2.3.11、2.3.12 和 2.3.17 中分别给出的任意一个小型紧双置换范畴

$$\mathsf{Fin}^{\mathsf{sk}},\quad \Sigma,\quad \mathcal{F},\quad \text{and}\quad \mathcal{A}$$

那么定理 5.3.11 和推论 5.3.12 适用于 DCat。特别地，存在一个 Cat-多范畴 ACat，其对象是对称幺半函子

$$\mathcal{A}^{\oplus} = \left(\mathcal{A}, \oplus, \langle\rangle, \beta^{\oplus}\right) \longrightarrow \left(\mathsf{Cat}, \times, \mathbf{1}, \xi\right).$$

正如我们将在第 9 章和第 10 章讨论的那样，ACat 是逆K-理论中的一个中间 Cat-多范畴。

第6章

格罗滕迪克构造是一个伪对称 Cat-多函子

对于一个小紧双置换范畴 $(\mathcal{D},\oplus,\otimes)$，在定理 5.3.11 中我们曾观察到 $\mathcal{D}$Cat 是一个 Cat-多范畴，其对象为加性对称幺半函子 $\mathcal{D}^{\oplus}$ Cat （定义 5.2.4）。本章的主要结果是定理 6.7.8。它表明，指标范畴的格罗滕迪克构造扩展为一个 伪对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}.$$

此外，若 D 中的乘法编织是恒等态射，则它是一个 Cat-多函子。反过来，若 $\int_{\mathcal{D}}$是一个 Cat-多函子，则

$$x \otimes y = y \otimes x$$

对所有对象 $x,y \in$ D。陪域 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$（第 6.1 节）是一个 Cat-多范畴，其对象为小置换范畴。

总结。 在第5章引言中的表格基础上进行扩展，下面的表格总结了 Cat-多范畴 DCat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 以及伪对称 Cat- 多函子 $\int_{\mathcal{D}}$。我们分别将对称幺半、多重态射范畴和自然变换 缩写为sm、mc和nt。

	$\mathcal{D}$Cat (5.3.11)	PermCat$_{sg}$ (6.1.31)	$\int_{\mathcal{D}}$ (6.7.8)
对象	加性 SM 函子 (5.2.4)	小的置换范畴 (1.1.11)	6.2.10
MC 对象	加性 NT (5.2.12)	强多线性函子 (6.1.4)	6.3.1、6.3.3
MC 态射	加性修正 (5.2.25)	多线性自然变换 (6.1.16)	6.4.1
单位	恒等自然变换 (5.1.13)	恒等 1-线性函子 (6.1.12)	6.5.1
复合	5.1.19, 5.1.21	6.1.28	6.5.2
对称性	5.1.14	6.1.24	6.6.2
由 sm结构 诱导	no (5.3.4)	no (6.1.32)	no

伪对称性与逆 K-理论。 回顾定义 4.1.1，伪对称 Cat-多函子严格地 保留带色单位和多范畴复合。它通过伪对称同构保留对称群作用，而这些同构满足四个相干公理 (4.1.3) 至 (4.1.6)。(i) Cat-多函子与 (ii) 具有恒等伪对称同构的伪对称 Cat-多函子之间存在典范双射对应（例 4.1.7）。

格罗滕迪克构造的伪对称同构的分量定义于（6.6.5）中。它们充分利用了 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$，因此在实际应用中几乎从来不是恒等变换。格罗滕迪克

构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 是 Cat-多函子，当且仅当 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 恰好是恒等自然变换。例如，对于第2.3节中的每个小型紧双置换范畴 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$、 Σ、F 和 A，格罗滕迪克构造的伪对称同构都不是恒等变换。在这些情形中，格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 确实是一个伪对称 Cat- 多函子，而不是 Cat- 多函子（例 6.7.12 ）。

定理 6.7.8 的一个重要推论是，逆K理论函子从 Γ-范畴到小置换范畴，是一个伪对称 Cat-多函子，而不是Cat-多函子。正如我们将在第 9 章和第 10 章中讨论的，逆K理论函子 $\int_{\mathcal{A}} A(-)$ 是两个函子的复合，其中第二个是以指标范畴 A 为指标的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{A}}$（例 2.3.17）。由于 A 中的乘法编织不是恒等变换，$\int_{\mathcal{A}}$的伪对称同构不是恒等变换。

组织结构。在第 6.1 节中，我们讨论 Cat-多范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$。它是格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 的陪域。

- 其对象是小置换范畴。
- 其n元1-胞——即多态射范畴中的对象——是强 n线性函子。强条件（上标 sg 所指的正是这一点）表示每个线性约束都是自然同构。

- 其n元2-胞是n线性自然变换。

在第6.2节中，我们首先回顾指标范畴的格罗滕迪克构造。该构造将一个范畴 $X : \mathcal{D}$ Cat 函子$\int_{\mathcal{D}} X$与之关联；若$\mathcal{D}$ 是小范畴，则该范畴也是小范畴。文献中有时将格罗滕迪克构造称为缀饰积，记作$\mathcal{D} \int X$。接下来，我们讨论$\mathcal{D}$ 为置换范畴，且 X 为对称幺半函子的情形。在这种情况下，格罗滕迪克构造具有置换范畴的典范结构。我们强调，对称幺半函子X 并不假设为强函子。换言之，其单位约束和幺半约束不要求可逆。构造$X \int_{\mathcal{D}} X$ 是格罗滕迪克构造的对象赋值。

$$\longmapsto$$

在第6.3节中，我们将格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$扩展到 DCat 中的n元 1-胞，它们是加性自然变换（定义 5.2.12）。对于这样的加性自然变换 ϕ，格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} \phi$ 是一个强 n-线性函子。其线性约束的分量（$\int_{\mathcal{D}} \phi$）$^{2}_{i}$定义于 (6.3.14) 中。

- 作为格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} Z$中的一个态射，（$\int_{\mathcal{D}} \phi$）$^{2}_{i}$ 每个分量中的第一项都是指标小紧双幺半范畴 D 中的一个态射。事实上，它定义为 Laplaza 相干同构的逆（例 2.4.19）。关于这些线性约束的证明通常会用到 Laplaza 相干定理 2.4.18 中的唯一性。例如，在引理 6.3.15 中，我们通过应用定理 2.4.18，证明了 $\int_{\mathcal{D}} \phi$ 满足每一条多重线性约束公理。

- $(\int_{\mathcal{D}} \phi)^{2}_{i}$ 中每个分量的第二个条目都是恒等态射。

在第 6.4 节中，我们将格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$扩展到 DCat 中的n元 2-胞，它们是加性修正（定义 5.2.25）。对于这样的加性

修正 Φ，格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 是一个n线性自然变换。它的每个分量都是格罗滕迪克构造$\int_{\mathcal{D}}Z$中的一个态射；参见 (6.4.3)。

- 第一项是 D 中的一个恒等态射。
- 第二项是 Φ 的一个分量自然变换的分量态射。

引理 6.4.9 表明，以下对象的格罗滕迪克构造

- 加性对称幺半函子 $\mathcal{D}^{\oplus}$ Cat, $\longrightarrow$
- 加性自然变换，以及
- 加性修正

定义了从 DCat 到 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 的多态射范畴的函子。

在第 6.5 节中，我们证明格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 保持 Cat-多范畴 DCat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中的带色单位与复合。对于加性自然变换，证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 保持复合时，需要证明相关的线性约束相等。这再一次是 Laplaza 相干定理 2.4.18 的应用；参见 (6.5.11) 和 (6.5.12)。

在第 6.6 节中，我们首先构造格罗滕迪克构造的伪对称同构 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma}$。对于加性自然变换 ϕ，$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 的每个分量都是格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}Z$ 中的一个同构；参见 (6.6.5)。

- 其第一项是乘法结构 $\mathsf{D}^{\otimes}$ 中的一个相干同构，它会置换张量因子。

- 其第二项是一个恒等态射。

在本节的其余部分，我们将证明

- 每个分量 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 都是多线性自然同构（引理 6.6.8 和 6.6.11），并且

- 它关于 ϕ 变量是一个自然同构（引理 6.6.16）。

在第 6.7 节中，我们将通过检验定义 4.1.1 中的四条公理，完成格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$是一个伪对称 Cat-多函子的证明。这些证明主要涉及展开各种构造的定义，不涉及定理 2.4.18。我们给出所有明确的步骤，因为我们希望毫无疑问地确认，我们所做的大量构造和定义都是正确的。此外，如果 D 中的乘法编织是恒等态射，那么 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子；一个较弱的逆命题也成立。

提醒读者注意，我们对迭代幺半积采用左规范化括号约定 1.1.24。

6.1. 置换范畴的富集多范畴

本节回顾 Cat-富集多范畴 PermCat，其中包含

- 小置换范畴（定义 1.1.11）作为对象，
- n-线性函子（定义 6.1.4）作为 n-元 1-胞，以及
- n-线性自然变换（定义 6.1.16）作为 n-元 2-胞。

Cat-多范畴 PermCat 的存在性见 **[EM06**，页面 174]。详细证明见 **[JY∞a** 第 6.5 节和第 6.6], 节，下面的表述据此改编。将范围限定为强多线性函子，即得到 Cat-富集多范畴 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$，它是格罗滕迪克构造的陪域。

多线性函子。多线性函子和多线性自然变换的定义涉及变量代换。为简化相关表述，我们采用以下记号。

记号 6.1.1。设

$$\langle x\rangle = (x_1, \dots, x_n)$$

是一个由符号组成的 n 元组，并且 x'_i 是某个指标 $i \in \{1, \dots, n\}$ 所对应的符号。

- 我们记

$$\langle x \circ_i x'_i\rangle = \langle x\rangle \circ_i x'_i = \big(\overbrace{x_1, \dots, x_{i-1}}^{\text{empty if } i=1}, x'_i, \overbrace{x_{i+1}, \dots, x_n}^{\text{empty if } i=n}\big) \tag{6.1.2}$$

  由 x 将其第 i 个元素替换为 x'_i 后得到的 n 元组。
- 对于 $i \neq \ell \in \{1, \dots, n\}$ 以及符号 $x_{\prime\ell}$，我们用下式表示

$$\langle x \circ_i x'_i \circ_\ell x'_\ell\rangle = \langle x\rangle \circ_i x'_i \circ_\ell x'_\ell \tag{6.1.3}$$

  由 $x\bigcirc_i x'_i$ 将其第 ℓ 个元素替换为 x'_ℓ 后得到的 n 元组。

n-线性函子的以下定义出自 [**EM06**，3.2]，，并按 [**JY∞a**，6.5.4] 所述。在本节余下部分，设 $\mathsf{C}_1, \dots, \mathsf{C}_n$ 和 D 均为置换范畴（定义 1.1.11）。在每个置换范畴中，幺半积、幺半单位和编织分别记作 $\oplus$、e 和 β。

定义 6.1.4。一个 n-线性函子

$$\prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j \xrightarrow{\left(F, \langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\right)} \mathsf{D} \tag{6.1.5}$$

由以下数据构成。

- $F : \prod_{nj=1}\mathsf{C}_j$ ~~D~~ 是一个函子。
- 对于每个 $j \in \{1, \dots, n\}$，$F^2{}_j$ 是一个自然变换，称为第 j 个线性约束，其分量态射为

$$F\langle X \circ_j X_j\rangle \oplus F\langle X \circ_j X'_j\rangle \xrightarrow{F_j^2} F\langle X \circ_j (X_j \oplus X'_j)\rangle \in \mathsf{D} \tag{6.1.6}$$

  for objects $\langle X\rangle = \langle X_j\rangle \in \prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j$ and $X'_j \in \mathsf{C}_j$.

上述数据须满足以下五条公理。

单位性： F 满足以下关于$j \in \{1, \dots, n\}$、对象X以及态射f的单位元公理，其中 $\prod_{j=1}^n \mathsf{C}j$。

$$\begin{cases} F\langle X \circ_j e\rangle = e \\ F\langle f \circ_j 1_e\rangle = 1_e \end{cases} \tag{6.1.7}$$

约束单位性：

$$F_j^2 = 1 \qquad \text{if any } X_i = e \text{ or if } X'_j = e. \tag{6.1.8}$$

约束结合律： 对于每个$i \in \{1, \dots, n\}$以及$\in \prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_j$中的对象$X$，以下图表交换，其中$X_i'$，$X_i'' \in \mathsf{C}_i$。

$$\begin{array}{ccc} F\langle X \circ_i X_i\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i'\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i''\rangle & \xrightarrow{1 \oplus F_i^2} & F\langle X \circ_i X_i\rangle \oplus F\langle X \circ_i (X_i' \oplus X_i'')\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle F_i^2 \oplus 1} & & \downarrow{\scriptstyle F_i^2} \\ F\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i')\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i''\rangle & \xrightarrow{F_i^2} & F\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i' \oplus X_i'')\rangle \end{array} \tag{6.1.9}$$

约束对称性： 对每个$i \in \{1, \dots, n\}$，下图交换
and objects $\langle X\rangle \in \prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_j$, with $X_i' \in \mathsf{C}_i$.

$$\begin{array}{ccc} F\langle X \circ_i X_i\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i'\rangle & \xrightarrow{F_i^2} & F\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i')\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle F\langle 1 \circ_i \beta\rangle} \\ F\langle X \circ_i X_i'\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i\rangle & \xrightarrow{F_i^2} & F\langle X \circ_i (X_i' \oplus X_i)\rangle \end{array} \tag{6.1.10}$$

约束 2×2： 下图对每个值都交换

$$i \neq k \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle X\rangle \in \prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_j, \quad X_i' \in \mathsf{C}_i, \quad \text{and} \quad X_k' \in \mathsf{C}_k.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & F\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i') \circ_k X_k\rangle \oplus F\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i') \circ_k X_k'\rangle & & \\ & \nearrow{\scriptstyle F_i^2 \oplus F_i^2} & & \searrow{\scriptstyle F_k^2} & \\ F\langle X \circ_i X_i \circ_k X_k\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i' \circ_k X_k\rangle & & & & \\ \oplus F\langle X \circ_i X_i \circ_k X_k'\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i' \circ_k X_k'\rangle & & & & F\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i') \circ_k (X_k \oplus X_k')\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \oplus \beta \oplus 1} & & & & \\ F\langle X \circ_i X_i \circ_k X_k\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i \circ_k X_k'\rangle & & & & \\ \oplus F\langle X \circ_i X_i' \circ_k X_k\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i' \circ_k X_k'\rangle & & & \nearrow{\scriptstyle F_i^2} & \\ & \searrow{\scriptstyle F_k^2 \oplus F_k^2} & & & \\ & & F\langle X \circ_i X_i \circ_k (X_k \oplus X_k')\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i' \circ_k (X_k \oplus X_k')\rangle & & \end{array} \tag{6.1.11}$$

这就完成了n-线性函子的定义。

此外，我们定义如下。

- 若 $n = 0$，则 *0*-线性函子 就是在 D 中选取一个对象。
- 若每个线性约束 $F^2{}_j$ 都是自然同构，则 n-线性函子 $(F, F^2{}_j)$ 称为强 的。
- 多线性函子 是指某个 $n \geq 0$ 对应的n-线性函子。

例 6.1.12 （恒等变换）。 每个置换范畴 C 都有一个恒等 *1*-线性函子

$$\mathsf{C} \xrightarrow{1_{\mathsf{C}}} \mathsf{C}$$

由以下部分组成

- C 上的恒等函子和
- 恒等线性约束。

后者逐分量是$X \oplus X'$在对象X、$X' \in \mathsf{C}$上的恒等态射。因此，1_{C} 是一个强 1-线性函子。

例 6.1.13（1-线性函子）。 置换的范畴之间的一个 1-线性函子

$$\mathsf{C} \xrightarrow{(F,F^2)} \mathsf{D}$$

恰好是一个严格幺对称幺半函子（定义 1.1.17），因为当 $n = 1$ 时，2×2 约束公理 (6.1.11) 是空的。

例 6.1.14（双置换范畴）。 设有一个紧 双置换范畴（定义 2.2.12）

$$\big(\mathsf{C}, (\oplus, 0, \beta^{\oplus}), (\otimes, 1, \beta^{\otimes}), \partial^l, \partial^r\big)$$

具有加法结构 $\mathsf{C}^{\oplus} = (\mathsf{C}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$。对于每个 $n \geq 0$，都有一个强n-线性函子

$$\prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}^{\oplus} \xrightarrow{\left(\otimes, \langle \otimes_j^2 \rangle_{j=1}^{n}\right)} \mathsf{C}^{\oplus}$$

定义如下。

- 函子

$$(\mathsf{C}^{\oplus})^n \xrightarrow{\otimes} \mathsf{C}^{\oplus}$$

  是 $\otimes : \mathsf{C}^2 \mathsf{C}$ 的任意一个相等的迭代。它是– 乘法单位元 $1 \in \mathsf{C}$（若 $n = 0$）以及 – 恒等函子 1_{C}（若 $n = 1$）。

- 对于 $n \geq 1$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$，第 j 个线性约束 t

$$\begin{array}{c} (X_1 \otimes \cdots \otimes X_j \otimes \cdots \otimes X_n) \oplus (X_1 \otimes \cdots \otimes X_j' \otimes \cdots \otimes X_n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \otimes_j^2 = \mathsf{L}_j^{-1}} \\ X_1 \otimes \cdots \otimes (X_j \oplus X_j') \otimes \cdots \otimes X_n \end{array} \tag{6.1.15}$$

  是唯一的 Laplaza 相干同构 L^j（例 2.4.19）的逆，该同构在第 j 个张量因子上对和 $X^j \oplus X_j'$ 进行分配。$\otimes_j^2 = \mathsf{L}_j^{-1}$ 的自然性可由 Laplaza 相干同构的自然性推出。

n-线性函子的公理如下成立。

- 单位公理 (6.1.7) 由 C 中的乘法零元公理 (2.2.3) 得出。

- 四个约束公理 (6.1.8) 至 (6.1.11) 由 Laplaza 相干定理 2.4.18 中的唯一性得出。

例如，若 $n = 2$则

- $\otimes_1^2 = \mathsf{L}_1^{-1}$是左分解态射 ∂^l，并且
- $\otimes_2^2 = \mathsf{L}_2^{-1}$是右分解态射 ∂^r (2.2.2)。

四个约束公理（(6.1.8) 至 (6.1.11)）分别由 C 中环范畴公理 (2.2.4)、(2.2.7)、(2.2.6) 和 (2.2.11) 得出。

多线性自然变换。以下多线性自然变换的类比摘自 **[EM06**，第 174],页，按 **[JY∞ a**，6.5.11] 所述。

定义 6.1.16。 设F 和G 是如下所示的n-线性函子。

$$\prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_j \;\underset{(G,\langle G_j^2\rangle)}{\overset{(F,\langle F_j^2\rangle)}{\Downarrow \theta}}\; \mathsf{D} \tag{6.1.17}$$

一个n-线性自然变换 $\theta : F\ G$ 是底层函子的自然变换，并满足以下两个公理。

单位性：

$$\theta_{\langle X\rangle} = 1_e \qquad \text{if any } X_i = e \in \mathsf{C}_i. \tag{6.1.18}$$

约束相容性： 图表

$$\begin{array}{ccc} F\langle X \circ_i X_i\rangle \oplus F\langle X \circ_i X_i'\rangle & \xrightarrow{F_i^2} & F\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i')\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle \theta\oplus\theta} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ G\langle X \circ_i X_i\rangle \oplus G\langle X \circ_i X_i'\rangle & \xrightarrow{G_i^2} & G\langle X \circ_i (X_i \oplus X_i')\rangle \end{array} \tag{6.1.19}$$

对每个$i \in \{1, \dots, n\}$、对象 $X \in \prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}^j$ 以及 $X_i' \in \mathsf{C}_i$，该式均成立。

至此，n-线性自然变换的定义就完成了。

此外，我们定义如下概念。

- n-线性自然同构 是可逆的n-线性自然变换。

- A 0-线性自然变换是 D中的一个态射。
- 多线性自然变换 是某个 n-线性自然变换，其中 $n \geq 0$。

定义 6.1.20. 对于小置换范畴 $\mathsf{C} = \mathsf{C}_{j=1}^{n}$ 和 D，定义范畴

$$\mathsf{PermCat}\big(\langle \mathsf{C}\rangle\,;\,\mathsf{D}\big) = \mathsf{PermCat}\big(\mathsf{C}_1, \dots, \mathsf{C}_n\,;\,\mathsf{D}\big) \tag{6.1.21}$$

with

- 以n-线性函子 $\prod_{nj=1}\mathsf{C}_j\ \mathsf{D}$（定义 6.1.4）为对象,
- 以n-线性自然变换（定义 6.1.16）为态射,
- 以恒等自然变换作为恒等态射，以及
- 以自然变换的垂直复合作为复合。

至此，范畴 PermCat(C ; D) 的定义完成。

此外，我们定义如下内容。

- 强变体

$$\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \mathsf{C}\rangle\,;\,\mathsf{D}\big) = \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\mathsf{C}_1, \dots, \mathsf{C}_n\,;\,\mathsf{D}\big) \tag{6.1.22}$$

是 PermCat(C ; D) 的满子范畴，其中对象为强n-线性函子

。

- 如果$n = 0$，则我们定义

$$\mathsf{PermCat}\big(\langle\rangle\,;\,\mathsf{D}\big) = \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle\rangle\,;\,\mathsf{D}\big) = \mathsf{D} \tag{6.1.23}$$

作为范畴。

在 [**JY∞a** 中，第 6.5 节和第 6.6] 节将 PermCat 记作 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{su}}$，上标 su 指的是定义 6.1.4 和 6.1.16 中的严格单位条件。接下来，我们描述 PermCat 上的 Cat-富集多范畴结构，首先介绍对称群作用。

对称群作用。设给定

- n-linear functors $F, G : \prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_j \longrightarrow \mathsf{D}$ and
- an n-linear natural transformation $\theta : F \longrightarrow G$ as in (6.1.17).

对于一个置换 $\sigma \in \Sigma_n$，对称群作用函子

$$\mathsf{PermCat}\big(\langle \mathsf{C}\rangle ; \mathsf{D}\big) \xrightarrow[\cong]{\sigma} \mathsf{PermCat}\big(\langle \mathsf{C}\rangle\sigma ; \mathsf{D}\big) \tag{6.1.24}$$

将（6.1.17）中的n-线性函子和自然变换映为以下复合函子和复合自然变换。

$$\prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_{\sigma(j)} \xrightarrow{\ \sigma\ } \prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_j \underset{(G,\langle G_j^2\rangle)}{\overset{(F,\langle F_j^2\rangle)}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{\ \theta\ }}}} \mathsf{D} \tag{6.1.25}$$

对于每个$j \in \{1, \dots, n\}$，$F^\sigma = F \bigcirc \sigma$的第$j$个线性约束是 D 中对象之间的复合

$$\begin{array}{ccc} F^\sigma\langle A\rangle \oplus F^\sigma\langle A \circ_j A'_j\rangle & \xrightarrow{(F^\sigma)_j^2} & F^\sigma\langle A \circ_j (A_j \oplus A'_j)\rangle \\ \| & & \| \\ F\big(\sigma\langle A\rangle\big) \oplus F\big(\sigma\langle A\rangle \circ_{\sigma(j)} A'_j\big) & \xrightarrow{F^2_{\sigma(j)}} & F\big(\sigma\langle A\rangle \circ_{\sigma(j)} (A_j \oplus A'_j)\big) \end{array} \tag{6.1.26}$$

对于对象

$$\langle A\rangle = \langle A_j\rangle_{j=1}^{n} \in \textstyle\prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_{\sigma(j)} \quad \text{and} \quad A'_j \in \mathsf{C}_{\sigma(j)}.$$

若F 是强的——也就是说，每个F_j^2都是自然同构——那么F^σ 也是强的。

复合。对于复合，假设对每个$j \in \{1, \dots, n\}$，给定

- 小置换范畴$\mathsf{B}_j = \mathsf{B}_{j i k_j\, i=1}$，其中 $k_j \geq 0$,
- k_j-线性函子 $F_{\prime j}$、$G_{\prime j} : \prod_{k_j\, i=1} \mathsf{B}_{ji}\, \mathsf{C}_j$，以及
- 一个k_j-线性自然变换 $\theta_j : F_{\prime j}\, G_{\prime j}$ 如下。 $\longrightarrow$

$$\prod_{i=1}^{k_j} \mathsf{B}_{ji} \underset{G'_j}{\overset{F'_j}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{\ \theta_j\ }}}} \mathsf{C}_j \tag{6.1.27}$$

对于 $\langle \mathsf{B}\rangle = \langle\langle \mathsf{B}^j\rangle\rangle_{j=1}^{n}$，该多范畴复合函子

$$\mathsf{PermCat}\big(\langle \mathsf{C}\rangle ; \mathsf{D}\big) \times \textstyle\prod_{j=1}^{n} \mathsf{PermCat}\big(\langle \mathsf{B}_j\rangle ; \mathsf{C}_j\big) \xrightarrow{\ \gamma\ } \mathsf{PermCat}\big(\langle \mathsf{B}\rangle ; \mathsf{D}\big) \tag{6.1.28}$$

将数据 (6.1.17) 和 (6.1.27) 映射为以下复合函子及水平复合自然变换。

(6.1.29)
$$\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k_j}\mathsf{B}_{ji} \underset{\prod_j G'_j}{\overset{\prod_j F'_j}{\Downarrow \prod_j\theta_j}} \prod_{j=1}^{n}\mathsf{C}_j \underset{G}{\overset{F}{\Downarrow \theta}} \mathsf{D}$$

如果有 $k_j = 0$，那么空积 $\prod^{k_j}{}_{i=1}\mathbf{B}_{ji}$ 按定义是终端范畴 $\mathbf{1}$。在这种情况下，

- $F_{\prime j}$ 由对象 $F_{\prime j}* \in \mathsf{C}_j$确定，并且
- θ_j 由分量态射确定

$$(\theta_j)_* : F'_j * \longrightarrow G'_j * \quad \text{in} \quad \mathsf{C}_j.$$

在（6.1.29）中

- 最左侧的积应省略那些满足 $j\ k_j = 0$ 的索引，并且
- 在中间的积中，C_j 使用了 $F_{\prime j}*$、$G_{\prime j}*$ 和 $(\theta_j)_*$。

若对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $k_j = 0$，则 (6.1.29) 中最左侧的积为 $\mathbf{1}$。

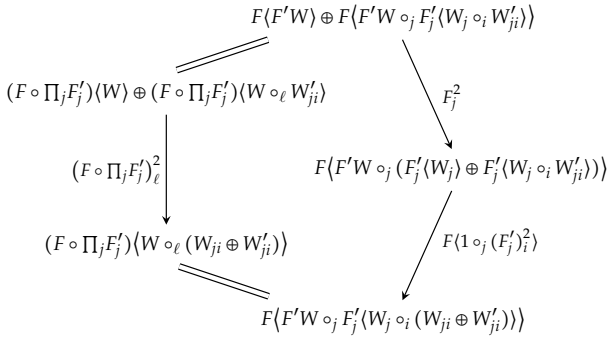
复合线性约束。 为描述 (6.1.29) 中复合函子 $F \bigcirc \prod_j F'_j$ 的线性约束，设给定对象

- $\langle W_j\rangle = \langle W_{ji}\rangle_{i=1}^{k_j} \in \prod_{i=1}^{k_j}\mathsf{B}_{ji}$ for each $j \in \{1, \ldots, n\}$,
- $\langle W\rangle = \langle\langle W_j\rangle\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{k_j}\mathsf{B}_{ji}$,
- $W'_{ji} \in \mathsf{B}_{ji}$ for some choice of (j,i) with $\ell = k_1 + \cdots + k_{j-1} + i$, and
- $\langle F'W\rangle = \langle F'_j\langle W_j\rangle\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n}\mathsf{C}_j$.

以下对象出现在下面的 (6.1.30) 中。

$$\langle W_j \circ_i W'_{ji}\rangle = \big(\overbrace{W_{j1}, \ldots, W_{j,i-1}}^{\text{empty if } i=1},\ W'_{ji},\ \overbrace{W_{j,i+1}, \ldots, W_{jk_j}}^{\text{empty if } i=k_j}\big)$$
$$\big\langle W_j \circ_i (W_{ji} \oplus W'_{ji})\big\rangle = \big(\underbrace{W_{j1}, \ldots, W_{j,i-1}}_{\text{empty if } i=1},\ W_{ji} \oplus W'_{ji},\ \underbrace{W_{j,i+1}, \ldots, W_{jk_j}}_{\text{empty if } i=k_j}\big).$$

ℓ-元线性约束 $(F \bigcirc \prod_j F'_j)^{\,2}_{\ell}$ 定义为 D 中如下的复合态射。

(6.1.30)


如果F 和每个F'_j 都是强的——也就是说，它们各自的线性约束都是自然同构——那么$F \bigcirc \prod_j F'_j$也同样是强的。

关于 PermCat 的以下定理的详细证明见 **[JY∞a** 第 6.6] 节。该证明也适用于强变体 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$：将分量范畴定义为 (6.1.22) 和 (6.1.23)，并限制为强多线性函子即可。

定理 6.1.31。 存在一个 Cat-多范畴PermCat ， 其

- 对象为小置换范畴（定义 *1.1.11*），
- 多态射范畴 PermCat(⟨C⟩；D) 如 (6.1.21)所示，
- 恒等 *1*-线性函子（例 *6.1.12*）作为带色单位，
- 对称群作用函子如 (6.1.24)所示，以及
- 复合函子如 (6.1.28)所示。

此外，强变体 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 也是一个 Cat-多范畴。

注 6.1.32。 PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 上的 Cat-多范畴结构并非由小带基点多重范畴的 Cat-多范畴上的某个对称幺半结构诱导而来。 **[JY∞a**，5.7.23 和 10.2.17]对此有详细说明。PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 无法具有幺半结-构的根本原因在于不存在合适的幺半单位。这与 DCat 不存在幺半结构的原因类似（说明 5.3.4）。

6.2. 加性对称幺半函子的格罗滕迪克构造

现在我们开始证明：当指标范畴是一个小紧双置换范畴时，格罗滕迪克构造是一个伪对称 Cat-多函子。作为第一步，本节回顾

- 格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} X$ 指标范畴 $X : \mathcal{D}\,\mathrm{Cat}$（定义 1.1.15）以及 $\longrightarrow$
- ● 当 $(\mathrm{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$ 是一个小置换范畴并带有X 对称幺半函子时，它的置换结构。

赋值 $X \int_{\mathcal{D}} X$ 在置换情形下是伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{D}}$的对象赋值。加性自然变换和加性修正的格罗滕迪克构造，以及伪对称 Cat-多函子性，将在后续各节中讨论。

作为范畴的格罗滕迪克构造。 关于格罗滕迪克构造的详细参考文献是 **[JY21**, 第 10], ，其中讨论了更一般的情形：当 X 是一个松函子时，或在某些结果中是一个伪函子时。该参考文献实际上讨论的是 逆变的 格罗滕迪克构造，针对 $\mathcal{D}_{\mathrm{op}} \xrightarrow{} \mathrm{Cat}$。通过考虑 D_{op} 的对偶范畴，即 D，这里的所有结果同样适用。当我们引用 **[JY21**, 第 10], 章的结果时，指的是协变的 版本。

定义6.2.1. 设 D 是一个小范畴，且X : D Cat 是一个 D-指标范畴。X的格罗滕迪克构造记为 $\int_{\mathcal{D}} X$，是由以下数据定义的范畴。

对象： $\int_{\mathcal{D}} X$ 中的一个对象 是一对对象

$$(a, x) \in \mathcal{D} \times Xa.$$

态射： A态射

$$(a,x) \xrightarrow{(f,p)} (b,y) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} X$$

由以下部分组成

- 一个态射 $f : a\ b$ 在 ~~D~~ 中，以及
- 一个态射 $p : f_* x\ y$ 在 ~~X~~b 中，且该函子

$$f_* = Xf : Xa \longrightarrow Xb.$$

恒等变换： 对于 $\int_{\mathcal{D}} X$ 中的每个对象（a，x），其 恒等态射 由一对恒等态射组成：

$$1_{(a,x)} = (1_a, 1_x). \tag{6.2.2}$$

复合： 对于另一个态射

$$(b,y) \xrightarrow{(g,q)} (c,z) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} X$$

该 复合

$$(a,x) \xrightarrow{(f,p)} (b,y) \xrightarrow{(g,q)} (c,z)$$

定义为

$$(g,q) \circ (f,p) = \big(gf, q \circ g_* p\big). \tag{6.2.3}$$

至此，$\int_{\mathcal{D}} X$ 的定义完成。

读者不应将格罗滕迪克构造的记号 $\int_{\mathcal{D}} X$ 与 (1.4.2) 中的余端或 (1.4.5) 中的端混淆。下面的观察是 [**JY21**，10.1.8] 的特例。

引理 6.2.4. 在定义 *6.2.1* 的语境下，$\int_{\mathcal{D}} X$ 是一个小范畴。

作为置换范畴的格罗滕迪克构造。 接下来我们讨论格罗滕迪克构造的置换变体。可参见 [**GJO17**，第 4 节29]，，其中讨论了陪域为 2-范畴而非 Cat 时更一般的情形。回顾定义 1.1.17 中对称幺半范畴之间的对称幺半函子的概念。

定义 6.2.5. 设 $(\mathrm{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$ 是一个小置换范畴，并且

$$(X, X^2, X^0) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

是一个对称幺半函子。现定义格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} X$ 上的置换范畴结构如下。

幺半单位： 它是对象

$$(0, X^0 *) \in \int_{\mathcal{D}} X \tag{6.2.6}$$

其中 $X^0 * \in X0$ 是单位对象（5.2.6）。

幺半群 对象上的积： 对于 $\int_{\mathcal{D}} X$ 中的对象 (a, x) 和 (a', x')，它们的幺半积定义为对象

$$(a,x) \square (a',x') = \big(a \oplus a', X^2_{a,a'}(x,x')\big) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} X \tag{6.2.7}$$

with

$$Xa \times Xa' \xrightarrow{X^2_{a,a'}} X(a \oplus a')$$

幺半约束 X^2 (5.2.7) 的 (a,a')-分量函子。**态射上的幺半积：**对于态射

$$(a,x) \xrightarrow{(f,p)} (b,y) \quad \text{and} \quad (a',x') \xrightarrow{(f',p')} (b',y') \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} X$$

其幺半积定义为如下态射。

$$\begin{array}{ccc} (a,x)\,\square\,(a',x') & \xrightarrow{(f,p)\square(f',p')} & (b,y)\,\square\,(b',y') \\ \| & & \| \\ \left(a\oplus a', X^2_{a,a'}(x,x')\right) & \xrightarrow{\left(f\oplus f', X^2_{b,b'}(p,p')\right)} & \left(b\oplus b', X^2_{b,b'}(y,y')\right) \end{array} \tag{6.2.8}$$

编织：对象 (a, x) 和 (a', x') 在 $\int_{\mathcal{D}} X$中的编织分量定义为如下同构。

$$\begin{array}{ccc} (a,x)\,\square\,(a',x') & \xrightarrow{\beta^{\square}} & (a',x')\,\square\,(a,x) \\ \| & & \| \\ \left(a\oplus a', X^2_{a,a'}(x,x')\right) & \xrightarrow[\cong]{(\beta^{\oplus},1)} & \left(a'\oplus a, X^2_{a',a}(x',x)\right) \end{array} \tag{6.2.9}$$

定义至此完成。

引理 6.2.10。 在定义 *6.2.5* 的语境下，四元组

$$\left(\int_{\mathcal{D}} X, \square, (0, X^0 *), \beta^{\square}\right)$$

是一个小置换范畴。

证明。根据引理 6.2.4 $\int_{\mathcal{D}} X$ 是一个小范畴。其函子性

$$\int_{\mathcal{D}} X \times \int_{\mathcal{D}} X \xrightarrow{\square} \int_{\mathcal{D}} X$$

由下列事实可得：

- 幺半积 $\oplus : \mathrm{D} \times \mathrm{D}\ \mathrm{D}$ 的函子性，
- 幺半约束的每个分量函子的函子性X^2 (5.2.7)，以及
- X^2 (5.2.8)的自然性。

$\square$ 的结合律由以下内容推出：

- D 中 $\oplus$的结合律，以及
- (X, X^2) 的结合律公理 (5.2.10)。

$\square$的左幺元和右幺元由以下内容推出：

- $0 \in \mathrm{D}$ 的单位性以及
- $(X, X2, X^0)$ 的单位公理 (5.2.9)。

因此，$(\int_{\mathcal{D}} X, \square, (0, X^0 *))$ 是一个严格幺半范畴。

编织 $\beta^{\square}$ (6.2.9) 由 (X, X^2) 的编织公理 (5.2.11) 良定义。$\beta^{\square}$ 的自然性由以下内容推出：

- $\beta^{\oplus}$ 在 D 中的自然性以及
- (X, X^2) 的编织公理 (5.2.11)。

$(\int_{\mathcal{D}} X,\ \beta^{\square})$ 的对称性公理和六边形公理（1.1.12）由以下内容推出：

● 置换范畴 D 中的相同公理，以及
● X^2 的每个分量函子的函子性（5.2.7）。

因此，$(\int_{\mathcal{D}} X, \beta^{\square})$ 是一个严格对称幺半范畴。 □

在下文中，我们根据引理 6.2.10 将格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} X$ 视为一个置换范畴。注意，虽然 D 必须是一个小置换范畴，但既不要求 X^0 也不要求 X^2 是同构。

6.3. 加性自然变换的格罗滕迪克构造

本章余下部分，我们假设

$$\big(\mathcal{D}, (\oplus, 0, \beta^{\oplus}), (\otimes, 1, \beta^{\otimes}), (\partial^l, \partial^r)\big)$$

是一个小的 紧双置换范畴（定义 2.2.12），具有

● 加法结构 $\mathrm{D}^{\oplus} = (\mathrm{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$ 和
● 乘法结构 $\mathrm{D}^{\otimes} = (\mathrm{D}, \otimes, 1, \beta^{\otimes})$。

回顾定理 5.3.11 中的 Cat-多范畴 DCat，它具有

• 加性对称幺半函子$\mathcal{D}^{\oplus}$ Cat 作为对象，　　⟶
● 加性自然变换作为多态射范畴中的对象，以及

● 加性修正作为多态射范畴中的态射。

另请回顾定理 6.1.31 中的 Cat-多范畴 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$，其中包含

● 小置换范畴作为对象，
● 强多线性函子作为多态射范畴中的对象，以及

● 多线性自然变换作为多态射范畴中的态射。

本节将继续证明格罗滕迪克构造

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

是一个伪对称 Cat-多函子。对象赋值 $X \; \int_{\mathcal{D}} X$ 由引理 6.2.10 给出。本节将证明，格罗滕迪克构造将加性对称幺半函子之间的每个加性自然变换映为强多线性函子；参见引理 6.3.15。

元数为 0。 首先讨论元数为 0 的情形，它有自己的定义，而且比正元数的情形更简单。

定义 6.3.1。 设给定一个加性对称幺半函子（定义 5.2.4）

$$(Z, Z^2, Z^0) : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}.$$

根据 DCat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中零元多态射范畴的定义（分别见（5.3.2）和（6.1.23）），定义函子

$$Z1 = \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle\,;\, Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle\rangle\,;\, \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z\big) = \int_{\mathcal{D}} Z \tag{6.3.2}$$

通过将

- 每个对象 $x \in Z1$ 映射到对象

$$(1, x) \in \int_{\mathcal{D}} Z$$

and

- 每个态射 $f : x\ y$ 中的 ~~$Z1$~~ 到态射

$$(1, x) \xrightarrow{(1_1, f)} (1, y) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} Z.$$

这些对象和态射赋值定义了一个函子，因为 $Z(1_1) = 1_{Z1}$ 由Z的函子性可知。

如文中所述

- 引理 5.3.8 的证明中的第一段以及
- (6.1.29) 之后的段落,

涉及元数为 0 的情形的证明需要进行一些小幅调整。鉴于此，在本章余下部分中，我们将专门讨论正元数情形；当某些输入的元数为 0 时，则使用定义 6.3.1 进行必要的调整。

正元数。 接下来，我们定义加性自然变换上的格罗滕迪克构造（定义 5.2.12）。回顾一下，加性自然变换是在 $\mathrm{D}^{\otimes}$-Cat (5.1.5) 中满足单位公理 (5.2.16) 和可加性公理 (5.2.18) 的自然变换。还要回顾定义 6.1.4：n-线性函子是配备了 n 个线性约束 (6.1.6) 的函子，并且这些线性约束满足公理 (6.1.7) 至 (6.1.11)。

定义 6.3.3。设

$$(Z, Z^2, Z^0) \quad \text{and} \quad \left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

是加性对称幺半函子，且 $n > 0$。设

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\phi} Z$$

是一个加性自然变换 (5.2.13)。定义一个 n-线性函子的 r

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathcal{D}} X_j \right) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}} \phi} \int_{\mathcal{D}} Z \tag{6.3.4}$$

数据，其对象赋值为 (6.3.7)，态射赋值为 (6.3.10)，线性约束为 (6.3.14)。

对象赋值： 设给定一个由以下对象组成的 n 元组

$$\langle (a_j, x_j) \rangle \in \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{\mathcal{D}} X_j \right) \tag{6.3.5}$$

由对象 $aj \in \mathrm{D}$ 和 $xj \in Xiaj$ 组成，其中 $j \in \{1, \ldots, n\}$。首先定义以下对象。

$$\begin{cases} \langle a \rangle = \langle a_j \rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{D}^n & a = \otimes_{j=1}^{n} a_j \in \mathcal{D} \\ \langle x \rangle = \langle x_j \rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} X_j a_j \end{cases} \tag{6.3.6}$$

然后， $\int_{\mathcal{D}} \phi$ 将 (aj, xj) 发送到对象

$$\left(\int_{\mathcal{D}} \phi \right) \langle (a_j, x_j) \rangle = \left(a\,,\, \phi_{\langle a \rangle} \langle x \rangle \right) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} Z \tag{6.3.7}$$

其中， $\phi_{\langle a\rangle}$ 的 a-分量函子如 (5.1.7) 中所示：

$$\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \xrightarrow{\phi_{\langle a\rangle}} Za.$$

态射赋值： 设给定一个n元组的态射

$$\Big\langle (f_j, p_j) : (a_j, x_j) \longrightarrow (b_j, y_j) \Big\rangle \in \prod_{j=1}^{n} \Big(\int_{\mathcal{D}} X_j \Big) \tag{6.3.8}$$

由以下态射组成：对每个$j \in \{1, \dots, n\}$

- f_j ：a_j b_j属于$\mathcal{D}$ 且
- p_j ：$(f_j)_* x_j$ y_j属于 $X_j b_j$ ，其中

$$(f_j)_* = Xf_j : Xa_j \longrightarrow Xb_j.$$

除 (6.3.6) 中的对象外，还定义以下对象和态射。

$$\begin{cases} \langle b\rangle = \langle b_j\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{D}^n & b = \otimes_{j=1}^{n} b_j \in \mathcal{D} \\ \langle y\rangle = \langle y_j\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} X_j b_j & f = \otimes_{j=1}^{n} f_j \in \mathcal{D} \\ \langle p\rangle = \langle p_j\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} X_j b_j \end{cases} \tag{6.3.9}$$

于是， $\int_{\mathcal{D}} \phi$ 将 (f_j, p_j) 映射为 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下态射。

$$\begin{array}{ccc} (\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (a_j, x_j)\rangle & \xrightarrow{(\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (f_j, p_j)\rangle} & (\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (b_j, y_j)\rangle \\ \| & & \| \\ \big(a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) & \xrightarrow{(f\,,\, \phi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle)} & \big(b\,,\, \phi_{\langle b\rangle}\langle y\rangle\big) \end{array} \tag{6.3.10}$$

由 ϕ 的自然性图表 (5.1.9)，这一定义良好。

线性约束： 为了定义 $\int_{\mathcal{D}} \phi$ 的线性约束，设给定一个指标 $i \in \{1, \dots, n\}$ 和一个对象

$$(a_i', x_i') \in \int_{\mathcal{D}} X_i$$

其中 $a_i' \in \mathrm{D}$ 且 $x_i' \in X_i a_i'$。除了 (6.3.5) 和 (6.3.6) 中的对象外，使用 (6.1.2) 中的 $\bigcirc_i$ 记号定义以下对象。

$$\begin{cases} a_i'' = a_i \oplus a_i' \in \mathcal{D} \\ a' = a_1 \otimes \cdots \otimes a_i' \otimes \cdots \otimes a_n \in \mathcal{D} \qquad \langle a'\rangle = \langle a\rangle \circ_i a_i' \in \mathcal{D}^n \\ a'' = a_1 \otimes \cdots \otimes a_i'' \otimes \cdots \otimes a_n \in \mathcal{D} \qquad \langle a''\rangle = \langle a\rangle \circ_i a_i'' \in \mathcal{D}^n \\ x_i'' = (X_i^2)_{a_i, a_i'}(x_i, x_i') \in X_i a_i'' \\ \langle x'\rangle = \langle x\rangle \circ_i x_i' \in X_1 a_1 \times \cdots \times X_i a_i' \times \cdots \times X_n a_n \\ \langle x''\rangle = \langle x\rangle \circ_i x_i'' \in X_1 a_1 \times \cdots \times X_i a_i'' \times \cdots \times X_n a_n \end{cases} \tag{6.3.11}$$

上述对x_i''的定义使用了X_i的幺半约束 (5.2.7)：

$$X_i a_i \times X_i a_i' \xrightarrow{(X_i^2)_{a_i, a_i'}} X_i(a_i \oplus a_i') = X_i a_i''.$$

对于对象 (a_j,x_j) 和 (a'_i,x'_i)，$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的第i个线性约束 (6.1.6) 在 $\int_{\mathcal{D}}Z$ 中具有以下定义域对象。

$$\begin{cases} (\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle(a_j,x_j)\rangle \square (\int_{\mathcal{D}}\phi)\big(\langle(a_j,x_j)\rangle \circ_i (a'_i,x'_i)\big) & \\ = \big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \square \big(a'\,,\,\phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\big) & \text{by (6.3.7)} \\ = \big(a\oplus a'\,,\,Z^2_{a,a'}(\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\,,\,\phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle)\big) & \text{by (6.2.7)} \\ = \big(a\oplus a'\,,\,\mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\big) & \text{by (5.2.24)} \end{cases} \tag{6.3.12}$$

在前一行中，L 是 D 中唯一的 Laplaza 相干同构

$$a'' \xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}} a\oplus a'$$

在 (5.2.19) 中，它对和 $a_i \oplus a'_i$ in a'' 满足分配律。

$\int_{\mathcal{D}}Z$ 中同一个第i个线性约束的陪域对象$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 如下。

$$\begin{cases} (\int_{\mathcal{D}}\phi)\Big(\langle(a_j,x_j)\rangle \circ_i \big((a_i,x_i)\square(a'_i,x'_i)\big)\Big) & \\ = (\int_{\mathcal{D}}\phi)\Big(\langle(a_j,x_j)\rangle \circ_i (a''_i\,,\,x''_i)\Big) & \text{by (6.2.7) and (6.3.11)} \\ = \big(a''\,,\,\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\big) & \text{by (6.3.7)} \end{cases} \tag{6.3.13}$$

利用 (6.3.12) 和 (6.3.13) 中各自的最后一个表达式，(6.1.6) 的 第 i 个线性约束$(\int_{\mathcal{D}}\phi)^2_i$ $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 是 $\int_{\mathcal{D}}Z$ 中的同构

$$\big(a\oplus a'\,,\,\mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\big) \xrightarrow[\cong]{(\mathsf{L}^{-1},1)} \big(a''\,,\,\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\big) \tag{6.3.14}$$

with

$$(\mathsf{L}^{-1})_*\mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle = \phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle \xrightarrow{1} \phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle$$

$\phi_{\langle a''\rangle}x''$ 在 Za'' 中的恒等态射。

至此完成了 (6.3.4) 中 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的定义。

引理 6.3.15. 在定义 *6.3.3* 的上下文中，这些数据

$$\textstyle\prod_{j=1}^n\big(\int_{\mathcal{D}}X_j\big) \xrightarrow{\left(\int_{\mathcal{D}}\phi\,,\,\langle(\int_{\mathcal{D}}\phi)^2_i\rangle_{i=1}^n\right)} \int_{\mathcal{D}}Z$$

构成一个强 n-线性函子。

证明。根据定义 6.1.4，我们必须验证以下陈述。

(i) $\int_{\mathcal{D}}\phi$，如 (6.3.7) 和 (6.3.10) 中所定义，是一个函子。(ii) 对每个 $i\in\{1,\dots,n$，第 i 个线性约束 $(\int_{\mathcal{D}}\phi)^2_i$（见 (6.3.14)）都是自然同构。(iii) 公理 (6.1.7) 至 (6.1.11) 对 $(\int_{\mathcal{D}}\phi,(\int_{\mathcal{D}}\phi)^{2n}_{i\,i=1})$ 成立。

我们先从陈述 (i) 开始。

(i) 函子性。首先我们注意到，$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 保持恒等态射。根据定义（6.2.2），格罗滕迪克构造中的恒等态射由一对恒等态射组成。在（6.3.8）中，对于每个 $j\in\{1,\dots,n$

$$f_j = 1 : a_j \longrightarrow a_j \in \mathcal{D} \quad \text{and}$$
$$p_j = 1 : x_j \longrightarrow x_j \in X_j a_j$$

then

$$f = \otimes_{j=1}^{n} f_j = 1_a \quad \text{and}$$
$$\phi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle = \phi_{\langle a\rangle}\langle 1\rangle = 1$$

根据 $\otimes$ 在 D 中的函子性以及分量函子 $\phi_{\langle b\rangle} = \phi_{\langle a\rangle}$，因此，按照定义（6.3.10），$(\int_{\mathcal{D}}\phi)(f_j, p_j)$ 是恒等态射。

类似地，$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 通过以下方式保持态射复合 (6.2.3)：

- $\otimes$ 在 D 中的函子性，以及 ϕ 的每个分量函子；
- 关于 D 中态射的 ϕ 自然性图表 (5.1.9)。

因此，$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 是一个函子。

(ii) 自然性。接下来我们证明，(6.3.14) 中的每个线性约束 $(\int_{\mathcal{D}}\phi)_i^2$ 虽然逐分量是同构，但也是自然同构。除 (6.3.8) 中的态射 (f_j, p_j) 外，设给定一个态射

$$(a_i', x_i') \xrightarrow{(f_i', p_i')} (b_i', y_i') \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} X_i$$

with

- $f_i' : a_i' \longrightarrow b_i'$ a morphism in $\mathcal{D}$ and
- $p_i' : (f_i')_* x_i' \longrightarrow y_i'$ a morphism in Xb_i'.

我们将记号 (6.3.11) 推广到

- 对象 (b_j, y_j) 和 (b_{ri}, y_{ri})，以及
- 态射 (f_j, p_j) 和 (f_{ri}, p_{ri})。

那么 $(\int_{\mathcal{D}}\phi)_i^2$ 的自然性意味着 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中下图的交换性。

(6.3.16)
$$\begin{array}{ccc} \left(a \oplus a', \mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1},1)} & \left(a'', \phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) \\ \downarrow{\scriptstyle (f\oplus f', \mathsf{L}_*\phi_{\langle b''\rangle}\langle p''\rangle)} & & \downarrow{\scriptstyle (f'', \phi_{\langle b''\rangle}\langle p''\rangle)} \\ \left(b \oplus b', \mathsf{L}_*\phi_{\langle b''\rangle}\langle y''\rangle\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1},1)} & \left(b'', \phi_{\langle b''\rangle}\langle y''\rangle\right) \end{array}$$

为验证图表 (6.3.16) 的交换性，我们分别考虑两个自变量。

- 在第一个自变量中，态射等式

$$\mathsf{L}^{-1}(f \oplus f') = f''\mathsf{L}^{-1} : a \oplus a' \longrightarrow b'' \quad \text{in} \quad \mathcal{D}$$

由 Laplaza 相干同构 L 的自然性以及f、f_r和f_{rr}的定义可得。

- Zb'' 中关于第二个自变量的态射等式由以下等式推出。

$$\begin{aligned} 1 \circ \mathsf{L}_*^{-1}\mathsf{L}_*\phi_{\langle b''\rangle}\langle p''\rangle &= \phi_{\langle b''\rangle}\langle p''\rangle \\ &= \phi_{\langle b''\rangle}\langle p''\rangle \circ 1 \\ &= \phi_{\langle b''\rangle}\langle p''\rangle \circ (f''_* 1) \end{aligned}$$

因此，每个线性约束 $(\int_{\mathcal{D}}\phi)_i^2$ 都是自然同构。

(iii) 多重线性。接下来，我们检验 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的公理 (6.1.7) 至 (6.1.11)。

单位性(6.1.7)。根据格罗滕迪克构造中恒等态射和幺半单位的定义 (6.2.2) 和 (6.2.6)，$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的单位性公理陈述了 $\int_{\mathcal{D}}Z$ 中的以下等式。

$$\begin{cases} (\int_{\mathcal{D}}\phi)\Big(\langle(a_j,x_j)\rangle\circ_i(0,X_i^0*)\Big)=(0,Z^0*) \\ (\int_{\mathcal{D}}\phi)\Big(\langle(f_j,p_j)\rangle\circ_i\big(1_0,1_{X_i^0*}\big)\Big)=\big(1_0,1_{Z^0*}\big)\end{cases} \tag{6.3.17}$$

等式 (6.3.17) 由以下事实成立：

- 分别关于对象和态射的 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ on 定义 (6.3.7) 和 (6.3.10)，
- $0\in\mathrm{D}$ 是严格乘法零元 (2.2.3)，以及
- 加性自然变换 ϕ 的单位公理 (5.2.16)。

约束单位性 (6.1.8)。关于 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的这一公理指出，如果

$$(a_i',x_i')=(0,X_i^0*)\in\int_{\mathcal{D}}X_i \quad \text{or}$$
$$(a_j,x_j)=(0,X_j^0*)\in\int_{\mathcal{D}}X_j \quad \text{for any} \quad j\in\{1,\dots,n\},$$

那么 (6.3.14) 中第 i 个线性约束 $(\mathsf{L}^{-1},1)$ 是恒等态射。这一公理成立，因为，如果

$$a_i'=0 \quad \text{or} \quad a_j=0 \quad \text{for any} \quad j\in\{1,\dots,n\},$$

那么 (5.2.19) 中的 Laplaza 相干同构 $\mathsf{L}:a''a\oplus a'$ 根据定理 2.4.18 中的唯一性，是恒等态射。

其他约束公理。与约束单位性公理类似，以下各项

- 约束结合律公理 (6.1.9)，
- 约束对称公理 (6.1.10)，以及
- 约束 2×2 公理 (6.1.11)

对于 $\int_{\mathcal{D}}\phi$，由 Laplaza 相干定理 2.4.18 中的唯一性可知其成立。事实上，回忆一下，格罗滕迪克构造中的编织 $\beta^{\square}$ 的每个分量都具有 $(\beta^{\oplus},1)$ 的形式，其中

- $\beta^{\oplus}\,\mathrm{D}^{\oplus}=(\mathrm{D},\oplus,0,\beta^{\oplus})$ 中的编织，以及
- 第二个自变量是一个恒等态射。

因此，在 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的公理 (6.1.9) 至 (6.1.11) 各自对应的图表中，每个复合的第二个自变量都是 Z 某个分量范畴中的恒等态射。在每种情况下，定理 2.4.18 都给出了 D 中第一个自变量所需的态射等式。例如，在 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的约束对称公理 (6.1.10) 中，第一个自变量是 D 中的以下图表，其中将 $\otimes$ 缩写为并置形式以节省空间。

$$\begin{array}{ccc} a\oplus a' & \xrightarrow{\mathsf{L}^{-1}} & a_1\cdots(a_i\oplus a_i')\cdots a_n \\ {\scriptstyle\beta^{\oplus}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\cdots\beta^{\oplus}\cdots 1} \\ a'\oplus a & \xrightarrow{\mathsf{L}^{-1}} & a_1\cdots(a_i'\oplus a_i)\cdots a_n \end{array}$$

由定理 2.4.18 可知，此图表是可交换的。 □

注 6.3.18 （**一元情形**）。在引理 6.3.15 中，当$n=1$时，这一对

$$\big(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi,(\int_{\mathcal{D}}\phi)^2\big):\int_{\mathcal{D}}X\longrightarrow\int_{\mathcal{D}}Z$$

基于以下原因，是一个严格对称幺半函子。

● 它是一个 1-线性函子，这与严格保单位的对称幺半函子是一回事（例 6.1.13）。

● 线性约束 $(\int_{\mathcal{D}} \phi)^2$ 在 (6.3.14) 中逐分量为 $(\mathsf{L}^{-1}, 1)$。这是一个恒等态射，因为 Laplaza 相干同构

$$a \oplus a' \xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}} a \oplus a'$$

由唯一性可知是恒等态射（定理 2.4.18）。

对于$n > 1$，线性约束 $(\int_{\mathcal{D}} \phi)_i^2$通常是自然同构，而不是恒等态射。

6.4. 加性修正的格罗滕迪克构造

与第6.3节一样，我们继续假设 D 是一个小紧双置换范畴，具有加法结构 $\mathsf{D}^{\oplus}$ 和乘法结构 $\mathsf{D}^{\otimes}$。回顾定义 5.2.25，加性修正是满足单位公理（5.2.27）和可加性公理（5.2.28）的修正（5.1.10）。另请回顾定义 6.1.16，n-线性自然变换是满足单位公理（6.1.18）和约束相容公理（6.1.19）的自然变换。

本节介绍构造伪对称 Cat-多函子性格罗滕迪克构造的下一步

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}.$$

对象赋值 $X \int_{\mathcal{D}} X$ 由引理 6.2.10 给出。多态射函子的对象赋值见

● 零元数输入见定义 6.3.1，且
● 正元数输入见定义 6.3.3。

本节将证明格罗滕迪克构造

● 将 DCat 中的加性修正映射为 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中的多线性自然变换，且

● 保持垂直复合。

由于元数为 0 时的多态射函子已在定义 6.3.1 中构造，因此我们只需考虑正元数情形。

● 加性修正的格罗滕迪克构造见定义 6.4.1。

● 其自然性和n-线性在引理 6.4.4 和 6.4.7 中得到证明。
● 引理 6.4.9 表明，$\int_{\mathcal{D}}$ 定义了一个多态射范畴之间的函子。

定义 6.4.1。设有

● 加性对称幺半函子（定义 5.2.4）

$$(Z, Z^2, Z^0) \quad \text{and} \quad \left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

带有 $n > 0$和

● 一个加性修正

$$\big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\big\rangle_{j=1}^{n} \overset{\phi}{\underset{\psi}{\overset{\Phi}{\rightrightarrows}}} (Z, Z^2, Z^0)$$

如同 (5.2.26)，其中 ϕ 和 ψ 是加性自然变换 (5.2.13)。
定义一个n-线性自然变换的数据

$$\prod_{j=1}^{n}\big(\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j\big) \overset{\int_{\mathcal{D}}\phi}{\underset{\int_{\mathcal{D}}\psi}{\overset{\int_{\mathcal{D}}\Phi}{\rightrightarrows}}} \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z \tag{6.4.2}$$

如下。使用 (6.3.5) 至 (6.3.7) 中的记号，对于每个由对象组成的n元组

$$\langle (a_j, x_j)\rangle \in \prod_{j=1}^{n}\big(\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j\big)$$

$\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 的分量态射定义为 $\int_{\mathcal{D}} Z$中的如下态射。

$$\begin{array}{ccc} (\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle (a_j,x_j)\rangle & \xrightarrow{(\int_{\mathcal{D}}\Phi)_{\langle (a_j,x_j)\rangle}} & (\int_{\mathcal{D}}\psi)\langle (a_j,x_j)\rangle \\ \| & & \| \\ \big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) & \xrightarrow{\big(1_a\,,\,(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\big)} & \big(a\,,\,\psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \end{array} \tag{6.4.3}$$

Here

$$\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \overset{\phi_{\langle a\rangle}}{\underset{\psi_{\langle a\rangle}}{\overset{\Phi_{\langle a\rangle}}{\rightrightarrows}}} Za$$

是 Φ 的 a-分量自然变换，如 (5.1.11) 中所示。至此完成了 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$的定义

引理 6.4.4. 在定义 *6.4.1* 的语境下，$\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 是一个自然变换。

证明。沿用 (6.3.8) 至 (6.3.10) 中的记号，设给定任意一个由 n 个态射组成的元组

$$\big\langle (f_j, p_j) : (a_j, x_j) \longrightarrow (b_j, y_j)\big\rangle \in \prod_{j=1}^{n}\big(\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j\big).$$

$\int_{\mathcal{D}}\Phi$的自然性意味着以下图表在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中交换。

$$\begin{array}{ccc} (a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle) & \xrightarrow{\big(1_a\,,\,(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\big)} & (a\,,\,\psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle) \\ {\scriptstyle (f\,,\,\phi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f\,,\,\psi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle)} \\ (b\,,\,\phi_{\langle b\rangle}\langle y\rangle) & \xrightarrow{\big(1_b\,,\,(\Phi_{\langle b\rangle})_{\langle y\rangle}\big)} & (b\,,\,\psi_{\langle b\rangle}\langle y\rangle) \end{array} \tag{6.4.5}$$

在 (6.4.5) 的第一个自变量中，每个复合都等于 $f : a\ b$，且属于 $\mathbb{D}_{\circ\!\rightarrow}$

(6.4.5) 中的第二个自变量构成了 Zb 中下图的边界。

$$
\begin{array}{ccc}
f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle & \xrightarrow{f_*(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}} & f_*\psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \\
\| & & \| \\
\phi_{\langle b\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle & \xrightarrow{(\Phi_{\langle b\rangle})_{\langle (f_j)_* x_j\rangle}} & \psi_{\langle b\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle \\
{\scriptstyle \phi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle} \\
\phi_{\langle b\rangle}\langle y\rangle & \xrightarrow{(\Phi_{\langle b\rangle})_{\langle y\rangle}} & \psi_{\langle b\rangle}\langle y\rangle
\end{array}
\tag{6.4.6}
$$

图表 (6.4.6) 的具体内容如下。

- $f_* = Zf$ ：$Za\ Zb \to$
- $(fj)_* = Xj\ fj$ ：$Xjaj\ Xjbj$。
- ● 顶部矩形根据 Φ (5.1.12) 的修正公理交换。
- 底部矩形根据分量自然变换 Φ_b 的自然性交换。

这证明了 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 是一个自然变换。 □

引理 6.4.7。 在定义 *6.4.1* 的语境下， $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 是一个 n-线性自然变换。

证明。引理 6.4.4 表明， $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 是一个自然变换。还需检验 n-线性公理 (6.1.18) 和 (6.1.19)。

单位性 (6.1.18)。$\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 的这一公理表明，如果

$$(a_i, x_i) = (0, X_i^0 *) \in \int_{\mathcal{D}} X_i \quad \text{for some} \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

then

$$(\int_{\mathcal{D}}\Phi)_{\langle (a_j, x_j)\rangle} = \left(1_a\,,\ (\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\right) = \left(1_0\,,\ 1_{Z^0 *}\right) \in \int_{\mathcal{D}} Z.$$

该公理由以下事实成立

- ● $0 \in \mathrm{D}$ 是严格乘法零元（2.2.3），这意味着

$$a = \bigotimes_{j=1}^{n} a_j = 0 \in \mathcal{D},$$

and

- the unity axiom (5.2.27) for the additive modification Φ.

约束相容性（6.1.19）。使用定义 6.3.3 中的记号，$\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 的约束相容性公理断言下列图表在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中交换。

$$
\begin{array}{ccc}
\left(a \oplus a'\,,\ \mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1}, 1)} & \left(a''\,,\ \phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) \\
{\scriptstyle \left(1_{a\oplus a'}\,,\ \mathsf{L}_*(\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle}\right)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \left(1_{a''}\,,\ (\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle}\right)} \\
\left(a \oplus a'\,,\ \mathsf{L}_*\psi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1}, 1)} & \left(a''\,,\ \psi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right)
\end{array}
\tag{6.4.8}
$$

图表（6.4.8）的具体内容如下。

- ● 上方和下方的 $(\mathsf{L}^{-1}, 1)$ 分别是 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 和 $\int_{\mathcal{D}}\psi$ 的第 i 个线性约束 (6.3.14)。

● 左侧垂直箭头来自以下计算。

$$\begin{cases} \big(1_a\,,\,(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\big)\,\square\,\big(1_{a'}\,,\,(\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\big) \\ = \big(1_a\oplus 1_{a'}\,,\,Z^2_{a,a'}\big((\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\,,\,(\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\big)\big) & \text{by (6.2.8)} \\ = \big(1_{a\oplus a'}\,,\,\mathsf{L}_*(\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle}\big) & \text{by (5.2.30)} \end{cases}$$

● 在 D 的第一个自变量中，每个复合都等于

$$\mathsf{L}^{-1}: a\oplus a' \longrightarrow a''.$$

● 在 Za'' 的第二个自变量中，每个复合都等于态射

$$\mathsf{L}_*^{-1}\mathsf{L}_*(\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle} = (\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle}.$$

这证明了 (6.4.8) 是交换的。 □

引理 6.4.9。 在定义 *6.3.3* 和 *6.4.1* 的背景下，对象赋值和态射赋值

$$\phi \longmapsto \textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi \quad \textit{and} \quad \Phi \longmapsto \textstyle\int_{\mathcal{D}}\Phi,$$

定义一个函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \textstyle\int_{\mathcal{D}} X\rangle\,;\,\int_{\mathcal{D}} Z\big) \tag{6.4.10}$$

对于 $\langle X\rangle = \langle X^j\rangle_{j=1}^n$ 以及 $\langle \int_{\mathcal{D}} X\rangle = \langle \int_{\mathcal{D}} X^j\rangle_{j=1}^n$。

证明。对象和态射赋值分别由引理 6.3.15 和 6.4.7 保证是良定义的。剩下需要验证的是，$\int_{\mathcal{D}}$ 保持恒等态射和复合。

恒等变换的保持。考虑恒等修正

$$1_\phi : \phi \longrightarrow \phi$$

作用于 DCat(X; Z) 中的一个加性自然变换 ϕ。 1_ϕ 的每个分量自然变换都是恒等变换。根据定义（6.2.2）和（6.4.3）， $\int_{\mathcal{D}} 1_\phi$ 的每个分量态射都是恒等态射。

复合的保持。设有如下 DCat(X; Z) 中的可纵向复合的加性修正 Φ 和 Ψ。

$$\big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\big\rangle_{j=1}^n \;\underset{\omega}{\overset{\phi}{\overset{\psi\quad\Phi}{\underset{\Psi}{\longrightarrow}}}}\; (Z, Z^2, Z^0)$$

使用 (6.3.5) 至 (6.3.7) 中的记号，假设给定一个由n个对象组成的组

$$\langle (a_j, x_j)\rangle \in \textstyle\prod_{j=1}^n \big(\int_{\mathcal{D}} X_j\big).$$

根据定义 (6.4.3)， $\int_{\mathcal{D}}(\Psi\Phi)$ 在 (aj,xj) 处的分量态射是 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的如下态射。

$$\big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \xrightarrow{\big(1_a\,,\,((\Psi\Phi)_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\big)} \big(a\,,\,\omega_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \tag{6.4.11}$$

根据垂直复合 $\Psi\Phi$ 和 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中复合的定义 (1.3.13) 和 (6.2.3)，态射 (6.4.11) 等于以下复合

$$(a, \phi_{\langle a\rangle\langle x\rangle}) \xrightarrow{(1_a, (\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle})} (a, \psi_{\langle a\rangle\langle x\rangle}) \xrightarrow{(1_a, (\Psi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle})} (a, \omega_{\langle a\rangle\langle x\rangle}). \tag{6.4.12}$$

根据定义 (6.4.3)，复合 (6.4.12) 等于垂直复合自然变换在 (*ai*,*xi*) 处的分量态射

$$\int_{\mathcal{D}}\phi \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}\Phi} \int_{\mathcal{D}}\psi \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}\Psi} \int_{\mathcal{D}}\omega.$$

因此，$\int_{\mathcal{D}}(\Psi\Phi)$ 等于 $(\int_{\mathcal{D}}\Psi)(\int_{\mathcal{D}}\Phi)$。 □

6.5. 格罗滕迪克构造保持单位与复合

与第 6.3 节和第 6.4 节一样，我们继续假设 D 是一个小的紧双置换范畴，并且

- additive structure $\mathcal{D}^{\oplus} = (\mathcal{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$ and
- multiplicative structure $\mathcal{D}^{\otimes} = (\mathcal{D}, \otimes, 1, \beta^{\otimes})$ (Definition 2.2.12).

本节将证明格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$保留带颜色的单位和多范畴复合。回顾前几节中的以下构造。

- 对象赋值 $X \int_{\mathcal{D}} X$ 由引理 6.~~2.1~~0 给出。
- ● 元数为 0 时的多态射函子见定义 6.3.1。
- ● 正元数时的多态射函子的对象赋值和态射赋值分别见定义 6.3.3 和定义 6.4.1。
- ● 多态射函子的函子性由引理 6.4.9 证明。

另请回顾 Cat-多范畴 DCat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$，分别见定理 5.3.11 和 6.1.31。

引理 6.5.1。 格罗滕迪克构造

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

按照 (3.2.3) 的意义保持带色单位。

证明。设给定一个加性对称幺半函子

$$(Z, Z^2, Z^0) : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}.$$

考虑定义 6.3.3 中的恒等自然变换 $\phi = 1_Z : Z \; Z$。 $\longrightarrow$

- ● 根据对象和态射赋值的定义 (6.3.7) 和 (6.3.10)，分别有

$$\int_{\mathcal{D}} 1_Z : \int_{\mathcal{D}} Z \longrightarrow \int_{\mathcal{D}} Z$$

是恒等函子。

- ● $\int_{\mathcal{D}} 1_Z$ 的唯一线性约束 (6.3.14) 是恒等自然变换，因为唯一的 Laplazacoherence 同构

$$a_1 \oplus a_1' \xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}} a_1 \oplus a_1' \quad \text{for} \quad a_1, a_1' \in \mathcal{D}$$

根据定理 2.4.18 中的唯一性，它是恒等态射。

因此，$\int_{\mathcal{D}} 1_Z$ 是 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 的恒等 1-线性函子。 □

引理 6.5.2。 格罗滕迪克构造

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

按照 (3.2.4) 的意义保持复合。

证明。设给定加性对称幺半函子

$$(Z, Z^2, Z^0), \big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \big\rangle_{j=1}^{n}, \big\langle \big\langle (W_{ji}, W_{ji}^2, W_{ji}^0) \big\rangle_{i=1}^{\ell_j} \big\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat} \tag{6.5.3}$$

其中 $n > 0$，并采用以下记号。

$$\begin{cases} \langle X \rangle = \langle X_j \rangle_{j=1}^{n} & \langle \int_{\mathcal{D}} X \rangle = \langle \int_{\mathcal{D}} X_j \rangle_{j=1}^{n} \\ \langle W_j \rangle = \langle W_{ji} \rangle_{i=1}^{\ell_j} & \langle \int_{\mathcal{D}} W_j \rangle = \langle \int_{\mathcal{D}} W_{ji} \rangle_{i=1}^{\ell_j} \\ \langle W \rangle = \langle \langle W_j \rangle \rangle_{j=1}^{n} & \langle \int_{\mathcal{D}} W \rangle = \langle \langle \int_{\mathcal{D}} W_j \rangle \rangle_{j=1}^{n} \end{cases} \tag{6.5.4}$$

我们必须证明以下函子图表交换，其中左侧和右侧的 γ 分别如说明 5.1.21 和 (6.1.28) 所示。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X \rangle ; Z\big) \times \prod_{j=1}^{n} \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle W_j \rangle ; X_j\big) & \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}} \times \prod_j \int_{\mathcal{D}}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \int_{\mathcal{D}} X \rangle ; \int_{\mathcal{D}} Z\big) \times \prod_{j=1}^{n} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \int_{\mathcal{D}} W_j \rangle ; \int_{\mathcal{D}} X_j\big) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle W \rangle ; Z\big) & \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \int_{\mathcal{D}} W \rangle ; \int_{\mathcal{D}} Z\big) \end{array} \tag{6.5.5}$$

加性自然变换与对象。为了证明 (6.5.5) 交换，设给定加性自然变换

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\phi} Z \quad \text{and} \quad \otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \xrightarrow{\phi_j} X_j \tag{6.5.6}$$

对于 $j \in \{1, \dots, n\}$ 及对象

$$\langle (a_{ji}, w_{ji}) \rangle \in \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_j} (\int_{\mathcal{D}} W_{ji}) \tag{6.5.7}$$

以及以下记号。

$$\begin{cases} a_j = \otimes_{i=1}^{\ell_j} a_{ji} \in \mathcal{D} & a = \otimes_{j=1}^{n} a_j \in \mathcal{D} \\ \langle a_j \rangle = \langle a_{ji} \rangle_{i=1}^{\ell_j} \in \mathcal{D}^{\ell_j} & \langle a \rangle = \langle a_j \rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{D}^n \\ \langle w_j \rangle = \langle w_{ji} \rangle_{i=1}^{\ell_j} \in \prod_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} a_{ji} & \langle w \rangle = \langle \langle w_j \rangle \rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} a_{ji} \end{cases} \tag{6.5.8}$$

接下来的计算表明，将图表 (6.5.5) 中的两个复合应用于 (6.5.6) 和对象 (6.5.7) 时，二者相等。

$$\begin{cases} \big(\int_{\mathcal{D}} \gamma(\phi ; \langle \phi_j \rangle) \big) \langle (a_{ji}, w_{ji}) \rangle & \\ = \big(a \,,\, \gamma(\phi ; \langle \phi_j \rangle)_{\langle \langle a_{ji} \rangle_i \rangle_j} \langle w \rangle \big) & \text{由 (6.3.7)} \\ = \big(a \,,\, \phi_{\langle a \rangle} \big\langle (\phi_j)_{\langle a_j \rangle} \langle w_j \rangle \big\rangle_{j=1}^{n} \big) & \text{由 (5.1.25)} \\ = \big(\int_{\mathcal{D}} \phi \big) \big\langle \big(a_j \,,\, (\phi_j)_{\langle a_j \rangle} \langle w_j \rangle \big) \big\rangle_{j=1}^{n} & \text{由 (6.3.7)} \\ = \big(\int_{\mathcal{D}} \phi \big) \big\langle \big(\int_{\mathcal{D}} \phi_j \big) \langle (a_{ji}, w_{ji}) \rangle_{i=1}^{\ell_j} \big\rangle_{j=1}^{n} & \text{由 (6.3.7)} \\ = \gamma\big(\int_{\mathcal{D}} \phi ; \int_{\mathcal{D}} \phi_j \big)(a^{ji}, w^{ji}) & \text{由 (6.1.29)} \end{cases} \tag{6.5.9}$$

加性自然变换与态射。假设给定态射

$$\langle (f_{ji}, p_{ji}) \rangle \in \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_j} (\int_{\mathcal{D}} W_{ji}). \tag{6.5.10}$$

计算（6.5.9），其中

- 以 (f_{ji}, p_{ji}) 代替 (a_{ji}, w_{ji})，并且
- 以（6.3.10）代替（6.3.7），

表明图表（6.5.5）中的两个复合在作用于（6.5.6）和态射（6.5.10）时相等。至此，我们已证明图表（6.5.5）中的两个复合作用于（6.5.6）时，作为函子相等。下文将证明它们的线性约束也相同。

加性修正。设给定加性修正

$$\big(\Phi, \langle \Phi_j \rangle\big) \in \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X \rangle ; Z\big) \times \prod_{j=1}^{n} \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle W_j \rangle ; X_j\big).$$

计算式 (6.5.9)，其中

- 用 (Φ, Φ_j) 替换 (ϕ, ϕ_j)，
- 用 (6.4.3) 替换 (6.3.7)，并且
- 用 (5.1.27) 替换 (5.1.25)，

表明图表 (6.5.5) 中的两个复合在加性修改下相等。

线性约束。为证明图表 (6.5.5) 可交换，尚需证明这些函子

$$\int_{\mathcal{D}} \gamma(\phi ; \langle \phi_j \rangle) \quad \text{and} \quad \gamma\big(\int_{\mathcal{D}} \phi ; \langle \int_{\mathcal{D}} \phi_j \rangle\big) : \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_j} (\int_{\mathcal{D}} W_{ji}) \longrightarrow \int_{\mathcal{D}} Z$$

具有相同的线性约束。除 (6.5.7) 中的对象外，再假设给定一个对象

$$(a'_{ji}, w'_{ji}) \in \int_{\mathcal{D}} W_{ji}$$

其中 $j \in \{1, \ldots, n\}$，且 $i \in \{1, \ldots, \ell_j\}$，以及 (6.5.8) 和下文中的记号。

$$\begin{cases} a''_{ji} = a_{ji} \oplus a'_{ji} & k = \ell_1 + \cdots + \ell_{j-1} + i \\ a'_j = a_{j1} \otimes \cdots \otimes a'_{ji} \otimes \cdots \otimes a_{j\ell_j} & a' = a_1 \otimes \cdots \otimes a'_j \otimes \cdots \otimes a_n \\ a''_j = a_{j1} \otimes \cdots \otimes a''_{ji} \otimes \cdots \otimes a_{j\ell_j} & a'' = a_1 \otimes \cdots \otimes a''_j \otimes \cdots \otimes a_n \end{cases}$$

根据定义 (6.3.14)，利用这些对象和记号，$\int_{\mathcal{D}} \gamma(\phi ; \phi_j)$ 的第 k 个线性约束具有如下形式

$$(\mathsf{L}^{-1}, 1) \in \int_{\mathcal{D}} Z.$$

这里，L 是 D 中唯一的 Laplaza 相干同构（定理 2.4.18）

$$a'' \xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}} a \oplus a' \tag{6.5.11}$$

它在$a^{ji} \overset{\oplus}{} a'_{ji}$中对和$a''$具有分配性。

另一方面，根据定义 (6.1.30)，($\int_{\mathcal{D}}\phi;\int_{\mathcal{D}}\phi_j$) 的第$k$个线性约束是在 $\int_{\mathcal{D}}Z$ 中的如下复合。

$$\begin{cases} \big((\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle 1\circ_j(\int_{\mathcal{D}}\phi_j)_i^2\rangle\big)\circ(\int_{\mathcal{D}}\phi)_j^2 & \\ =\big((\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle 1\circ_j(\mathsf{L}_j^{-1},1)\rangle\big)\circ(\mathsf{L}_0^{-1},1) & \text{by (6.3.14)}\\ =\big(1\otimes\cdots\otimes\mathsf{L}_j^{-1}\otimes\cdots\otimes 1,\phi\langle 1\rangle\big)\circ(\mathsf{L}_0^{-1},1) & \text{by (6.3.10)}\\ =\big(1\otimes\cdots\otimes\mathsf{L}_j^{-1}\otimes\cdots\otimes 1,1\big)\circ(\mathsf{L}_0^{-1},1) & \text{by functoriality}\\ =\big((1\otimes\cdots\otimes\mathsf{L}_j^{-1}\otimes\cdots\otimes 1)\mathsf{L}_0^{-1},1\big) & \text{by (6.2.3)}\\ =(\mathsf{L}^{-1},1) & \text{by Theorem 2.4.18} \end{cases} \tag{6.5.12}$$

(6.5.12) 的细节如下。

- 第一、第二和第四个等式分别由定义 - (6.3.14) 、(6.3.10) 和 (6.2.3) 得出。
- L0 是 D 中唯一的 Laplazacoherence 同构

$$a_1\otimes\cdots\otimes(a_j\oplus a_j')\otimes\cdots\otimes a_n\xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}_0}a\oplus a'$$

它在定义域中对和 $a^j\overset{\oplus}{}a_j'$ 具有分配性。

- L_j 是 D 中唯一的 Laplazacoherence 同构

$$a_j''\xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}_j}a_j\oplus a_j'$$

它在 a_j'' 中对和 $a^{ji}\overset{\oplus}{}a_{ji}'$ 具有分配性。为节省空间而省略 $\otimes$ 符号后，D 中的复合

$$a''\xrightarrow{1\cdots\mathsf{L}_j\cdots 1}a_1\cdots(a_j\oplus a_j')\cdots a_n\xrightarrow{\mathsf{L}_0}a\oplus a'$$

根据定理 2.4.18 中的唯一性，它等于 (6.5.11) 中的 L。这给出了 (6.5.12) 中的最后一个等式。

- 在第二个等式之后，1 是一个由恒等态射组成的n元组。根据 ϕ,ϕ 的每个分量函子的函子性，1 也是一个恒等态射。这给出了 (6.5.12) 中的第三个等式。

这证明了

$$\int_{\mathcal{D}}\gamma(\phi;\langle\phi_j\rangle)\quad\text{and}\quad\gamma\big(\int_{\mathcal{D}}\phi;\langle\int_{\mathcal{D}}\phi_j\rangle\big)$$

具有相同的线性约束。 □

6.6. 格罗滕迪克构造的伪对称同构

本节针对每个小紧双置换范畴 D，定义格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$的伪对称同构，并证明它们是定义良好的自然同构。伪对称 Cat-多函子的四条相干公理（4.1.3）至（4.1.6）将在引理 6.7.1 中证明。本节内容概述如下。

- $\int_{\mathcal{D}}$ 的伪对称同构见定义 6.6.1。
- 引理 6.6.8 和 6.6.11 表明，每个伪对称同构的每个分量都是 n-线性自然同构。
- 引理 6.6.16 证明了伪对称性同构的自然性。

首先，我们定义自然同构，并将证明它们是格罗滕迪克构造上的伪对称 Cat-多函子结构的一部分。

定义6.6.1. 设给定加性对称幺半函子Z 和 X，如 (6.5.3) 和 (6.5.4) 中所述，并给定一个置换 $\sigma \in \Sigma_n$。定义自然同构的数据如下

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle ; Z\big) & \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \int_{\mathcal{D}} X\rangle ; \int_{\mathcal{D}} Z\big) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & (\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\langle X\rangle,Z} \Longrightarrow & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\sigma ; Z\big) & \xrightarrow[\int_{\mathcal{D}}]{} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \int_{\mathcal{D}} X\rangle\sigma ; \int_{\mathcal{D}} Z\big) \end{array} \tag{6.6.2}$$

称为伪对称同构，定义如下。设给定一个加性自然变换 (5.2.13)

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\phi} Z$$

with

- 在 σ-作用 (5.1.15) 下的像

$$\otimes_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)} \xrightarrow{\phi^{\sigma}} Z$$

and

- 关联的n元线性函子 (6.3.4)

$$\prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}\phi} \int_{\mathcal{D}} Z.$$

设给定一个n元对象组

$$\langle (a_j, x_j)\rangle \in \prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_{\sigma(j)}) \tag{6.6.3}$$

其中每个$aj \in \mathbf{D}$以及$xj \in X\sigma(j)aj$。为定义 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\langle X\rangle,Z}$ 在 ϕ 和 (aj, xj) 处的分量，首先注意到其在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的定义域对象和陪域对象如下。

$$\begin{cases} (\int_{\mathcal{D}}\phi^{\sigma})\langle (a_j, x_j)\rangle & \\ \quad = \big(a\,,\, \phi^{\sigma}_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) & \text{by (6.3.7)} \\ \quad = \big(a\,,\, \sigma_*^{-1}\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) & \text{by (5.1.15)} \\ (\int_{\mathcal{D}}\phi)^{\sigma}\langle (a_j, x_j)\rangle & \\ \quad = (\int_{\mathcal{D}}\phi)\big\langle \big(a_{\sigma^{-1}(j)}\,,\, x_{\sigma^{-1}(j)}\big)\big\rangle & \text{by (6.1.25)} \\ \quad = \big(a_{\sigma^{-1}}\,,\, \phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) & \text{by (5.1.16) and (6.3.7)} \end{cases} \tag{6.6.4}$$

利用 (6.6.4)，我们将 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\langle X\rangle,Z}$ 在 ϕ 和 (aj,xj) 处的分量定义为 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的同构态射

$$\big(a\,,\, \sigma_*^{-1}\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) \xrightarrow[\cong]{(\sigma,1)} \big(a_{\sigma^{-1}}\,,\, \phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big). \tag{6.6.5}$$

至此，$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\langle X\rangle,Z}$ 的定义完成。

与第 4.1 节一样，我们通常将 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\langle X\rangle,Z}$ 简记为 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma}$。它在 ϕ 和 $(\phi,(a^j,x^j))$ 处的分量记为

$$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi} \quad \text{and} \quad (\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi,\langle(a_j,x_j)\rangle},$$

分别。

说明 6.6.6. 同构中的两个自变量

$$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi,\langle(a_j,x_j)\rangle} = (\sigma,1)$$

在 (6.6.5) 中如下所示。

- σ 是 $\mathrm{D}^{\otimes} = (\mathrm{D},\otimes,1,\beta^{\otimes})$ 中唯一的相干同构

(6.6.7)
$$a = \otimes_{j=1}^{n} a_j \xrightarrow[\cong]{\sigma} \otimes_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)} = a_{\sigma^{-1}}$$

它根据 $\sigma \in \Sigma_n$ 对 n 个因子进行置换。这是 (5.1.17) 中相干同构的逆。

- 第二个自变量1是恒等态射

$$\sigma_* \sigma_*^{-1} \phi_{\sigma\langle a\rangle} \sigma\langle x\rangle \xrightarrow{=} \phi_{\sigma\langle a\rangle} \sigma\langle x\rangle$$

在 $Za_{\sigma^{-1}}$ 中。

逐分量多重线性。回顾一下，Cat- 多范畴 $\mathbf{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的 n 元 2-胞是 n 线性函子之间的 n 线性自然变换（定义 6.1.16）。n 线性自然变换是满足单位公理 (6.1.18) 和约束相容公理 (6.1.19) 的自然变换。接下来，我们证明伪对称同构 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma}$ 的每个分量都是 n 线性自然同构，首先从其自然性开始。

引理 6.6.8。在定义 *6.6.1* 的背景下，$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma}$ 在 ϕ 处的分量

(6.6.9)
$$\prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_{\sigma(j)}) \underset{(\int_{\mathcal{D}})^{\sigma}}{\overset{\int_{\mathcal{D}}\phi^{\sigma}}{\overset{(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}}{\rightrightarrows}}} \int_{\mathcal{D}} Z$$

是一个自然同构。

证明。根据定义 (6.6.5)，$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 的每个分量都是 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的同构。

为证明 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 是自然变换，设给定一组 n 元态射

$$\big\langle (f_j,p_j) : (a_j,x_j) \longrightarrow (b_j,y_j) \big\rangle \in \prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_{\sigma(j)})$$

with

- each $f_j : a_j \longrightarrow b_j$ a morphism in $\mathcal{D}$ and
- each $p_j : (f_j)_* x_j \longrightarrow y_j$ a morphism in $X_{\sigma(j)} b_j$, where

$$(f_j)_* = X_{\sigma(j)} f_j : X_{\sigma(j)} a_j \longrightarrow X_{\sigma(j)} b_j.$$

按照 (6.3.9) 中的记号，将 (a_j, x_j) 调整为 (b_j, y_j) 和 (f_j, p_j)，我们必须证明下列关于 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 的自然性图表在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中交换。

$$\begin{array}{ccc} \big(a\,,\,\sigma_*^{-1}\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) & \xrightarrow{(\sigma,1)} & \big(a_{\sigma^{-1}}\,,\,\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) \\ \big(f\,,\,\sigma_*^{-1}\phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle p\rangle\big)\big\downarrow & & \big\downarrow\big(f_{\sigma^{-1}}\,,\,\phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle p\rangle\big) \\ \big(b\,,\,\sigma_*^{-1}\phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle y\rangle\big) & \xrightarrow{(\sigma,1)} & \big(b_{\sigma^{-1}}\,,\,\phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle y\rangle\big) \end{array} \tag{6.6.10}$$

图表 (6.6.10) 中的箭头如下。

- 顶部和底部水平箭头 $(\sigma, 1)$ 分别是 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 在 (6.6.5) 中于 (a_j, x_j) 和 (b_j, y_j) 处的分量。
- 左侧和右侧垂直箭头分别为，

$$(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi^{\sigma})\langle(f_j, p_j)\rangle \quad \text{and} \quad (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)^{\sigma}\langle(f_j, p_j)\rangle.$$

图表 (6.6.10) 中的第一个自变量是 $\mathrm{D}^{\otimes} = (\mathrm{D}, \otimes, \beta^{\otimes})$ 中的下图。由乘法辫子 $\beta^{\otimes}$ 的自然性可知该图表交换。

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\sigma} & a_{\sigma^{-1}} \\ f\big\downarrow & & \big\downarrow f_{\sigma^{-1}} \\ b & \xrightarrow{\sigma} & b_{\sigma^{-1}} \end{array}$$

图表 (6.6.10) 中的第二个自变量在 $Zb_{\sigma^{-1}}$ 中给出两个复合。根据以下计算，它们相等。

$$\begin{aligned} 1 \circ \sigma_*\sigma_*^{-1}\phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle p\rangle &= \phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle p\rangle \\ &= \phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle p\rangle \circ 1 \\ &= \phi_{\sigma\langle b\rangle}\sigma\langle p\rangle \circ (f_{\sigma^{-1}})_* 1 \end{aligned}$$

这表明图表 (6.6.10) 是交换的。 □

接下来我们检查 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 的多重线性。

引理 6.6.11. 在定义 *6.6.1* 的背景下，分量 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 是一个 n-线性自然同构。

证明。引理 6.6.8 表明 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 是一个自然同构。还需检查定义 6.1.16 中的两个公理。

单位性 (6.1.18)。$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 的单位公理指出，若对于某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(a_i, x_i) = \big(0\,,\, X^0_{\sigma(i)} *\big) \in \textstyle\int_{\mathcal{D}} X_{\sigma(i)}$$

是 $\int_{\mathcal{D}} X^{\sigma(i)}$ 中的幺半单位 (6.2.6)，则分量 (6.6.5)

$$(\textstyle\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi,\langle(a_j,x_j)\rangle} = (\sigma, 1)$$

是恒等态射。该公理成立是因为，如果 $a_i = 0$ 是 D 中的乘法零元，那么定理 2.4.18 中的唯一性意味着，D 中的相容性同构 (6.6.7)

$$a = 0 \xrightarrow{\sigma} 0 = a_{\sigma^{-1}}$$

是恒等态射 1_{0}。因此，

$$(\sigma,1)=(1_{0},1):(0,Z^{0}*)\longrightarrow(0,Z^{0}*)$$

根据 ϕ 的单位公理 (5.2.16)，它是 $\int_{\mathcal{D}}Z$ 中幺半单位的恒等态射。

约束相容性 (6.1.19)。除 (6.6.3) 中的对象 (*aj*,*xj*) 外，假设还给定一个对象

$$(a'_{i},x'_{i})\in\textstyle\int_{\mathcal{D}}X_{\sigma(i)}$$

对于某个 $i\in\{1,\dots,n\}$，以及对象 $a'_{i}\in\mathrm{D}$ 和 $x'_{i}\in X^{\sigma(i)}a'_{i}$。我们使用

- (5.3.6) for $a'_{\sigma^{-1}}$ and $a''_{\sigma^{-1}}$ and
- (6.3.6) and (6.3.11) for a, a', a'', $\langle a\rangle$, $\langle a'\rangle$, $\langle a''\rangle$, $\langle x\rangle$, $\langle x'\rangle$, and $\langle x''\rangle$ with $X_{\sigma(j)}$ in place of X_{j} for each $j\in\{1,\dots,n\}$.

采用这些对象和记号，$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 的约束相容公理指出，$\int_{\mathcal{D}}Z$ 中的下图是交换的。

$$\begin{array}{ccc}
\left(a\,,\,\sigma_{*}^{-1}\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\right)\square\left(a'\,,\,\sigma_{*}^{-1}\phi_{\sigma\langle a'\rangle}\sigma\langle x'\rangle\right) & \xrightarrow{(\int_{\mathcal{D}}\phi^{\sigma})_{i}^{2}} & \left(a''\,,\,\sigma_{*}^{-1}\phi_{\sigma\langle a''\rangle}\sigma\langle x''\rangle\right)\\
{\scriptstyle(\sigma,1)\square(\sigma,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\sigma,1)}\\
\left(a_{\sigma^{-1}}\,,\,\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\right)\square\left(a'_{\sigma^{-1}}\,,\,\phi_{\sigma\langle a'\rangle}\sigma\langle x'\rangle\right) & \xrightarrow{((\int_{\mathcal{D}}\phi)^{\sigma})_{i}^{2}} & \left(a''_{\sigma^{-1}}\,,\,\phi_{\sigma\langle a''\rangle}\sigma\langle x''\rangle\right)
\end{array}\tag{6.6.12}$$

图表 (6.6.12) 的具体内容如下。

- By
  - the definitions (6.2.7) and (6.2.8) of the monoidal product $\square$ in $\int_{\mathcal{D}}Z$ and
  - the functoriality of each component functor of the monoidal constraint Z^{2} (5.2.7),

  (6.6.12) 中左侧的垂直态射 $(\sigma,1)\square(\sigma,1)$ 是下面这个态射。

$$\begin{array}{c}
\left(a\oplus a'\,,\,Z^{2}_{a,a'}\left(\sigma_{*}^{-1}\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\,,\,\sigma_{*}^{-1}\phi_{\sigma\langle a'\rangle}\sigma\langle x'\rangle\right)\right)\\
{\scriptstyle(\sigma\oplus\sigma,1)}\downarrow\\
\left(a_{\sigma^{-1}}\oplus a'_{\sigma^{-1}}\,,\,Z^{2}_{a_{\sigma^{-1}},a'_{\sigma^{-1}}}\left(\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\,,\,\phi_{\sigma\langle a'\rangle}\sigma\langle x'\rangle\right)\right)
\end{array}\tag{6.6.13}$$

● 根据定义 (6.3.14)，(6.6.12) 中顶部的水平态射为

$$(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi^{\sigma})_{i}^{2}=(\mathsf{L}^{-1},1).\tag{6.6.14}$$

这里，L 是 D 中唯一的 Laplaza 相干同构

$$a''\xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}}a\oplus a'$$

它在 $a_{i}\oplus a'_{i}$ 这个和上分配于 a'' 的第 i 个张量因子中。

● 根据 (6.1.26) 和 (6.3.14)，(6.6.12) 中底部的水平态射为

$$\left((\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)^{\sigma}\right)_{i}^{2}=\left(\mathsf{L}_{\sigma^{-1}}^{-1}\,,\,1\right).\tag{6.6.15}$$

这里，$\mathsf{L}_{\sigma^{-1}}$ 是 D 中唯一的 Laplaza 相干同构

$$a''_{\sigma^{-1}}\xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}_{\sigma^{-1}}}a_{\sigma^{-1}}\oplus a'_{\sigma^{-1}}$$

它将和分配到$a_i \oplus a'_i$中第 $\sigma(i)$ 个张量因子上$a''_{\sigma^{-1}\circ}$

利用 (6.6.13) 至 (6.6.15)，图表 (6.6.12) 中的第一个自变量是 D 中的以下图表。

$$\begin{array}{ccc} a \oplus a' & \xrightarrow{\mathsf{L}^{-1}} & a'' \\ {\scriptstyle \sigma\oplus\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ a_{\sigma^{-1}} \oplus a'_{\sigma^{-1}} & \xrightarrow{\mathsf{L}^{-1}_{\sigma^{-1}}} & a''_{\sigma^{-1}} \end{array}$$

根据定理 2.4.18 中的唯一性，该图表交换。

接下来，图表 (6.6.12) 中的两个复合各自的第二个自变量都是 $\phi_{\sigma\langle a''\rangle}\sigma x''$ 的恒等态射。这是因为，在图表 (6.6.12) 的四个态射中，第二个自变量都是恒等态射。这表明 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}$ 满足约束相容公理。□

伪对称同构的自然性。 接下来，我们证明格罗滕迪克构造的伪对称同构相对于多态射范畴 DCat(X; Z) 中的态射是自然的。

引理 6.6.16。 在定义 *6.6.1* 的上下文中，伪对称同构

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle; Z\big) \underset{(\int_{\mathcal{D}})^{\sigma}}{\overset{\int_{\mathcal{D}}(-)^{\sigma}}{\rightleftarrows}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \textstyle\int_{\mathcal{D}} X\rangle\sigma; \int_{\mathcal{D}} Z\big)$$

是一个自然同构。

证明。引理 6.6.11 表明，$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma}$ 的每个分量都是一个n-线性自然同构。为证明其自然性，设给定一个加性修正Φ，如 (5.2.26) 所示

$$\big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\big\rangle_{j=1}^{n} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} (Z, Z^2, Z^0).$$

相对于 Φ 的自然性意味着以下图表中的 n-线性自然变换在 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}(\int_{\mathcal{D}} X\sigma; \int_{\mathcal{D}} Z)$ 中交换。

$$\begin{array}{ccc} \int_{\mathcal{D}}\phi^{\sigma} & \xrightarrow{(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}} & (\int_{\mathcal{D}}\phi)^{\sigma} \\ {\scriptstyle \int_{\mathcal{D}}\Phi^{\sigma}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\int_{\mathcal{D}}\Phi)^{\sigma}} \\ \int_{\mathcal{D}}\psi^{\sigma} & \xrightarrow{(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\psi}} & (\int_{\mathcal{D}}\psi)^{\sigma} \end{array} \tag{6.6.17}$$

只需检查 (6.6.17) 在如 (6.6.3) 中的一般n元对象组上的取值是否交换

$$\langle (a_j, x_j)\rangle \in \textstyle\prod_{j=1}^{n} (\int_{\mathcal{D}} X_{\sigma(j)}).$$

根据定义 (5.1.18)、(6.1.25)、(6.4.3) 和 (6.6.5)，图表 (6.6.17) 在 (a^j, x^j) 处的取值是 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的下图表。

$$\begin{array}{ccc} \big(a\,,\,\sigma_*^{-1}\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) & \xrightarrow{(\sigma,1)} & \big(a_{\sigma^{-1}}\,,\,\phi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \big(1_a\,,\,\sigma_*^{-1}(\Phi_{\sigma\langle a\rangle})_{\sigma\langle x\rangle}\big)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \big(1_{a_{\sigma^{-1}}}\,,\,(\Phi_{\sigma\langle a\rangle})_{\sigma\langle x\rangle}\big)} \\ \big(a\,,\,\sigma_*^{-1}\psi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) & \xrightarrow{(\sigma,1)} & \big(a_{\sigma^{-1}}\,,\,\psi_{\sigma\langle a\rangle}\sigma\langle x\rangle\big) \end{array} \tag{6.6.18}$$

图表 (6.6.18) 的细节如下。

● 两个复合中每个复合的第一个自变量是相干同构

$$a \xrightarrow[\cong]{\sigma} a_{\sigma^{-1}} \quad \text{in} \quad \mathcal{D}^{\otimes}.$$

● 图表 (6.6.18) 中的第二个自变量给出了$Za_{\sigma^{-1}}$中的两个复合。根据以下计算，它们相等。

$$\begin{aligned} 1 \circ \sigma_*\sigma_*^{-1}(\Phi_{\sigma\langle a\rangle})_{\sigma\langle x\rangle} &= (\Phi_{\sigma\langle a\rangle})_{\sigma\langle x\rangle} \\ &= (\Phi_{\sigma\langle a\rangle})_{\sigma\langle x\rangle} \circ 1 \\ &= (\Phi_{\sigma\langle a\rangle})_{\sigma\langle x\rangle} \circ (1_{a_{\sigma^{-1}}})_* 1 \end{aligned}$$

这表明图表 (6.6.18) 是交换的。 □

6.7. 伪对称 Cat-多函子性

与第 6.3 节至第 6.6 节一样，我们继续假设 D 是一个小紧双置换范畴，且

- additive structure $\mathcal{D}^{\oplus} = (\mathcal{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$ and
- multiplicative structure $\mathcal{D}^{\otimes} = (\mathcal{D}, \otimes, 1, \beta^{\otimes})$ (Definition 2.2.12).

在引理 6.5.1 和 6.5.2 中，我们证明了格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 严格保持带色单位和多范畴复合。在第 6.6 节中，我们构造了格罗滕迪克构造的伪对称同构，并证明它们是自然同构。为证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个伪对称 Cat-多函子，接下来我们检验其伪对称同构是否满足定义 4.1.1 中的四条公理。

引理 6.7.1。 伪对称同构 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma}$ 在 (6.6.2) 中满足(4.1.3) 至(4.1.6)中的公理。

证明。设给定加性对称幺半函子

$$Z\,,\,\langle X_j\rangle_{j=1}^{n}\,,\,\Big\langle\langle W_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j}\Big\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

如 (6.5.3) 和 (6.5.4) 中所示。

单位置换公理(4.1.3)。

假设 $\mathrm{id}_n \in \Sigma_n$ 是恒等置换。根据定义 (6.6.5)，在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中存在一个态射等式

$$(\textstyle\int_{\mathcal{D}})_{\mathrm{id}_n,\phi,\langle(a_j,x_j)\rangle} = (1_a, 1) : \big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \longrightarrow \big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big)$$

for

● 如（5.2.13）所示的每个加性自然变换 $\phi \in \mathrm{DCat}(X;\ Z)$，以及

● 如（6.6.3）所示的每个由n个对象组成的组

$$\langle (a_j, x_j) \rangle \in \prod_{j=1}^{n} (\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j).$$

由于 $(1_a, 1)$ 是一个恒等态射 (6.2.2)，这表明 $(\textstyle\int_{\mathcal{D}})\mathrm{id}_n$ 是 $\textstyle\int_{\mathcal{D}}$ 的恒等自然变换。

乘积置换公理(4.1.4)。
设给定

● 置换 $\sigma, \tau \in \Sigma_n$,
● 一个加性自然变换 $\phi \in \mathbf{DCat}(X; Z)$，以及
● 一个n元对象组

$$\langle (a_j, x_j) \rangle \in \prod_{j=1}^{n} (\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_{\sigma\tau(j)})$$

其中每个 $a_j \in \mathbf{D}$，且 $x_j \in X_{\sigma\tau(j)a_j}$。

根据定义 (6.1.25) 和 (6.6.5)，对于上述数据，乘积置换公理 (4.1.4) 中左侧的粘贴图是 $\textstyle\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的复合

$$(\sigma, 1) \circ (\tau, 1) = (\sigma\tau, 1).$$

上面的右侧是 $(\textstyle\int_{\mathcal{D}})_{\sigma\tau}$ 在 ϕ 以及 (a_j, x_j) 处的分量。这证明了乘积置换公理。

顶部等变公理 (4.1.5).
假设给定

● 一个置换 $\sigma \in \Sigma_n$,
● 加性自然变换

$$\text{(6.7.2)} \qquad \otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\ \phi\ } Z \quad \text{and} \quad \otimes_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \xrightarrow{\ \phi_j\ } X_j$$

对于 $j \in \{1, \dots, n\}$ 和 $i \in \{1, \dots, \ell_j\}$，以及

● 一个由对象组成的 $(\ell_{\sigma(1)} + \cdots + \ell_{\sigma(n)})$-元组

$$\langle a, w \rangle = \langle \langle (a_{ji}, w_{ji}) \rangle_i \rangle_j \in \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}} (\textstyle\int_{\mathcal{D}} W_{\sigma(j),i})$$

其中每个 $a_{ji} \in \mathbf{D}$ 和 $w_{ji} \in W_{\sigma(j),i a_{ji}}$。

我们使用以下记号，其中 $\overline{\sigma}$ 是由 σ 诱导的块置换，它置换了 n 个长度为 $\{\ell_{\sigma(j)}\}_{j=1}^{n}$ 的块。

$$\text{(6.7.3)} \qquad \begin{cases} \langle \phi_j \rangle = (\phi_1, \dots, \phi_n) & g = \gamma(\phi; \langle \phi_j \rangle) \qquad \phi^{\sigma(j)} = \textstyle\int_{\mathcal{D}} \phi_{\sigma(j)} \\ \quad \ell = \ell_{\sigma(1)} + \cdots + \ell_{\sigma(n)} & \overline{\sigma} = \sigma \langle \ell_{\sigma(1)}, \dots, \ell_{\sigma(n)} \rangle \in \Sigma_\ell \\ \langle a_j \rangle = \langle a_{ji} \rangle_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}} \in \mathcal{D}^{\ell_{\sigma(j)}} & \langle w_j \rangle = \langle w_{ji} \rangle_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}} \in \prod_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}} W_{\sigma(j),i\, a_{ji}} \\ \langle a \rangle = \langle \langle a_j \rangle \rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{D}^{\ell} & \langle w \rangle = \langle \langle w_j \rangle \rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}} W_{\sigma(j),i\, a_{ji}} \\ a_j = \otimes_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}} a_{ji} \in \mathcal{D} & a = \otimes_{j=1}^{n} a_j \in \mathcal{D} \qquad a_{\overline{\sigma}^{-1}} = \otimes_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)} \in \mathcal{D} \end{cases}$$

根据定义 (6.6.5)，对于上述数据，(4.1.5) 中左侧的粘贴图给出 $\textstyle\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下态射。

$$\text{(6.7.4)} \qquad \big(a\,,\, \overline{\sigma}_*^{-1} g_{\overline{\sigma}\langle a \rangle} \overline{\sigma} \langle w \rangle\big) \xrightarrow[=\,(\overline{\sigma}, 1)]{(\textstyle\int_{\mathcal{D}})_{\overline{\sigma}, g, \langle a, w \rangle}} \big(a_{\overline{\sigma}^{-1}}\,,\, g_{\overline{\sigma}\langle a \rangle} \overline{\sigma} \langle w \rangle\big)$$

(4.1.5) 中右侧的粘贴图给出 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下态射，其定义域和陪域分别与 (6.7.4) 相同。

$$\begin{cases} \gamma\big((\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi}\,;\,\langle 1_{\phi^{\sigma(j)}}\rangle_{j=1}^{n}\big)_{\langle a,w\rangle} & \\ = (\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi,\left\langle \phi^{\sigma(j)}\langle (a_{ji},w_{ji})\rangle_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}}\right\rangle_{j=1}^{n}} & \text{by (6.1.29)} \\ = (\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi,\left\langle (a_j,(\phi_{\sigma(j)})_{\langle a_j\rangle}\langle w_j\rangle)\right\rangle_{j=1}^{n}} & \text{by (6.3.7)} \\ = (\sigma,1) & \text{by (6.6.5)} \end{cases} \tag{6.7.5}$$

分别属于（6.7.4）和（6.7.5）的态射 $(\overline{\sigma},1)$ 和 $(\sigma,1)$ 相等，因为根据块置换 $\overline{\sigma}$ 的定义，下面的 D 中图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_{\sigma(j)}} a_{ji} & \xrightarrow{\overline{\sigma}} & \otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_j} a_{\sigma^{-1}(j),i} \\ \| & & \| \\ \otimes_{j=1}^{n} a_j & \xrightarrow{\sigma} & \otimes_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)} \end{array}$$

这证明了顶部等变公理。

底部等变公理 （4.1.6）。
假设给定

- 置换 $\tau_j \in \Sigma_{\ell_j}$，其中 $j \in \{1,\dots,n\}$，
- 加性自然变换 ϕ 和 ϕ_j，如 (6.7.2) 所示，以及
- 一个 $(\ell_1+\cdots+\ell_n)$ 元对象组

$$\langle a,w\rangle = \langle\langle (a_{ji},w_{ji})\rangle_i\rangle_j \in \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{\ell_j}(\textstyle\int_{\mathcal{D}} W_{j,\tau_j(i)})$$

其中每个 $a^{ji} \in \mathrm{D}$ 和 $w^{ji} \in W_{j,\tau_j(i)}a_{ji}$。

我们使用以下记号，以及 (6.7.3) 中的 ϕ_j 和 g。

$$\begin{cases} \overline{\phi} = \int_{\mathcal{D}}\phi & \ell = \ell_1+\cdots+\ell_n \\ \tau^{\times} = \tau_1\times\cdots\times\tau_n \in \Sigma_\ell & \tau^{-\times} = (\tau^{\times})^{-1} \\ \langle a_j\rangle = \langle a_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j} \in \mathcal{D}^{\ell_j} & \langle w_j\rangle = \langle w_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j} \in \prod_{i=1}^{\ell_j} W_{j,\tau_j(i)}\,a_{ji} \\ \langle a\rangle = \langle\langle a_j\rangle\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{D}^{\ell} & \langle w\rangle = \langle\langle w_j\rangle\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{\ell_j} W_{j,\tau_j(i)}\,a_{ji} \\ a_j = \otimes_{i=1}^{\ell_j} a_{ji} \in \mathcal{D} & a = \otimes_{j=1}^{n} a_j \in \mathcal{D} \\ (a_j)_{\tau_j^{-1}} = \otimes_{i=1}^{\ell_j} a_{j,\tau_j^{-1}(i)} & a_{\tau^{-\times}} = \otimes_{j=1}^{n}(a_j)_{\tau_j^{-1}} \end{cases}$$

根据定义 (6.6.5)，对于上述数据，(4.1.6) 中左侧的粘贴图给出了 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下态射。

$$\big(a\,,\,\tau_*^{-\times} g_{\tau^{\times}\langle a\rangle}\tau^{\times}\langle w\rangle\big) \xrightarrow[=(\tau^{\times},1)]{(\int_{\mathcal{D}})_{\tau^{\times},g,\langle a,w\rangle}} \big(a_{\tau^{-\times}}\,,\,g_{\tau^{\times}\langle a\rangle}\tau^{\times}\langle w\rangle\big) \tag{6.7.6}$$

(4.1.6) 中右侧的粘贴图给出了 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下态射，其定义域与 (6.7.6) 相同，陪域也与 (6.7.6) 相同。

$$\begin{cases} \gamma\big(1_{\overline{\phi}};\ \langle((\int_{\mathcal{D}})_{\tau_j,\phi_j}\rangle_{j=1}^{n}\big)_{\langle a,w\rangle} & \\ = \overline{\phi}\big((\int_{\mathcal{D}})_{\tau_j,\phi_j,\langle(a_{ji},w_{ji})\rangle_{i=1}^{\ell_j}}\big\rangle_{j=1}^{n} & \text{by (6.1.29)} \\ = \overline{\phi}\big((\tau_j,1)\big\rangle_{j=1}^{n} & \text{by (6.6.5)} \\ = \big(\otimes_{j=1}^{n}\tau_j\,,\,\phi\langle 1\rangle\big) & \text{by (6.3.10)} \\ = \big(\otimes_{j=1}^{n}\tau_j\,,\,1\big) & \text{by functoriality} \end{cases} \tag{6.7.7}$$

在 (6.7.7) 的中间一行中，$(\tau_j, 1)$ 是 $\int_{\mathcal{D}} X^j$ 中的如下态射。

$$\big(a_j\,,\,(\tau_j^{-1})_*(\phi_j)_{\tau_j\langle a_j\rangle}\tau_j\langle w_j\rangle\big) \xrightarrow{(\tau_j,1)} \big((a_j)_{\tau_j^{-1}}\,,\,(\phi_j)_{\tau_j\langle a_j\rangle}\tau_j\langle w_j\rangle\big)$$

在 (6.7.7) 的第四行中，$\phi 1$ 是 $Za_{\tau^{-\times}}$ 中的态射

$$\phi\langle 1\rangle = \phi_{\langle(a_j)_{\tau_j^{-1}}\rangle_{j=1}^{n}}(\overbrace{1,\dots,1}^{n}).$$

根据 ϕ 的每个分量函子的函子性，这是恒等态射。由此得到 (6.7.7) 中最后一个等式。

(6.7.6) 和 (6.7.7) 中的态射 $(\tau^{\times}, 1)$ 和 $(\otimes_{j=1}^{n}\tau_j, 1)$ 分别相等，因为根据置换 $\tau^{\times}$ 的定义，D 中的下图是交换图。

$$\begin{array}{ccc} \otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_j} a_{ji} & \xrightarrow{\tau^{\times}} & \otimes_{j=1}^{n}\otimes_{i=1}^{\ell_j} a_{j,\tau_j^{-1}(i)} \\ \| & & \| \\ \otimes_{j=1}^{n} a_j & \xrightarrow{\otimes_j \tau_j} & \otimes_{j=1}^{n}(a_j)_{\tau_j^{-1}} \end{array}$$

这证明了底部等变公理。 □

接下来是本章的主要结果。它通过格罗滕迪克构造，分别联系了定理 5.3.11 和 6.1.31 中的 Cat-多范畴 DCat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ in。

定理 6.7.8。 设$\mathcal{D}$ 是一个小紧双置换范畴。

(i) 格罗滕迪克构造

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \tag{6.7.9}$$

是一个伪对称Cat-多函子。

(ii) 若$\mathcal{D}$ 中的乘法编织是恒等自然变换，则$\int_{\mathcal{D}}$是一个Cat-多函子。

(iii) 若 $\int_{\mathcal{D}}$是一个Cat-多函子，则

$$x \otimes y = y \otimes x \tag{6.7.10}$$

对于所有对象 x，$y \in \mathcal{D}$。

证明。对于格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$我们建立了以下结论。

- 对象赋值 $X \int_{\mathcal{D}} X$ 见引理 6.~~2.1~~0。

● 多态射函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle;\, Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \textstyle\int_{\mathcal{D}} X\rangle;\, \int_{\mathcal{D}} Z\big)$$

分别见定义 6.3.1 和引理 6.4.9，适用于零元数和正元数。

● 根据引理 6.5.1，它保持带色单位。
● 根据引理 6.5.2，它保持复合。
● 其伪对称同构 $(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma}$ 见定义 6.6.1。
● 根据引理 6.6.8、6.6.11 和 6.6.16，这些伪对称同构是定义良好的自然同构。

● 引理 6.7.1 证明了定义 4.1.1 中关于伪对称同构的四条公理。

这表明 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个伪对称 Cat-多函子，从而证明了断言 (i)。

对于 (ii)，假设 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等。由于 $\int_{\mathcal{D}}$ 保持带色单位和复合（引理 6.5.1 和 6.5.2），我们必须证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 保持对称群作用。换言之，我们要证明图表 (6.6.2) 的边界是交换的。由于 $\beta^{\otimes} = 1$，(6.6.4) 中的两个对象相等。因此

$$\textstyle\int_{\mathcal{D}} \phi^{\sigma} = (\int_{\mathcal{D}} \phi)^{\sigma}$$

对于每个 DCat(*X*; *Z*) 中的加性自然变换 ϕ。这意味着边界图表 (6.6.2) 在对象上交换。

为证明边界图表 (6.6.2) 在态射上的交换性，设 $\Phi : \phi \Rightarrow \psi$ 是 DCat(*X* ; *Z*) 中的一个加性修正，并且 (*aj*, *xj*) 是如 (6.6.3) 中所示的一个 *n*-对象组。那么有如下等式。

$$\begin{cases} (\int_{\mathcal{D}}\Phi)^{\sigma}_{\langle (a_j,x_j)\rangle} & \\ = (\int_{\mathcal{D}}\Phi)_{\langle a_{\sigma^{-1}(j)},x_{\sigma^{-1}(j)}\rangle} & \text{by (6.1.25)} \\ = \left(1_{a_{\sigma^{-1}}}, \left(\Phi_{\sigma\langle a\rangle}\right)_{\sigma\langle x\rangle}\right) & \text{by (6.4.3)} \\ = \left(1_{a}, Z(\mathrm{id}_n)\left(\Phi_{\sigma\langle a\rangle}\right)_{\sigma\langle x\rangle}\right) & \text{by } \beta^{\otimes}=1 \text{ and functoriality of } Z \\ = \left(1_{a}, Z(\sigma^{-1})\left(\Phi_{\sigma\langle a\rangle}\right)_{\sigma\langle x\rangle}\right) & \text{by } \beta^{\otimes}=1 \\ = \left(1_{a}, \left(\Phi^{\sigma}_{\langle a\rangle}\right)_{\langle x\rangle}\right) & \text{by (5.1.18)} \\ = \left(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\Phi^{\sigma}\right)_{\langle (a_j,x_j)\rangle} & \text{by (6.4.3)} \end{cases} \tag{6.7.11}$$

这表明边界图表 (6.6.2) 在态射上交换。因此，$\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子，从而证明了断言 (ii)。

对于 (iii)，设 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子。因此，$\int_{\mathcal{D}}$ 保持对称群作用，这意味着图表 (6.6.2) 的边界是交换的。计算 (6.6.4) 的第一个分量（其中使用了 (5.1.17) 中的记号）表明

$$\textstyle\otimes_{j=1}^{n} a_j = a = a_{\sigma^{-1}} = \otimes_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)}.$$

这意味着条件 (6.7.10)。 □

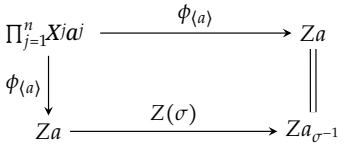
例6.7.12 （Cat-多函子性的障碍）。 对于例2.3.17中的小紧双置换范畴 A，条件（6.7.10）并未被

$\otimes$ 在 A 中的定义（2.3.22）满足。由定理 6.7.8 的 (i) 和 (iii)，格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{A}}$ 是一个伪对称 Cat-多函子，但并非Cat-多函子。

说明 6.7.13 (Cat-多函子性的进一步判据)。 在定理 6.7.8 (iii) 的假设下——即 $\int_{\mathcal{D}}$ 是 Cat-多函子——除了条件 (6.7.10) 之外，还有更多结论成立。因为

$$\int_{\mathcal{D}} \phi^{\sigma} = (\int_{\mathcal{D}} \phi)^{\sigma},$$

计算 (6.6.4) 的第二个分量表明，图表



对于任意对象，在对象集上交换

- 置换 $\sigma \in \Sigma_n$,
- 对象 $a = a_{jn}{}_{j=1} \in \mathrm{D}_n$,
- 加性对称幺半函子 Z 和 $X = X_{jn}{}_{j=1}$ （属于 DCat），以及
- 加性自然变换 $\phi \in \mathrm{DCat}(X; Z)$。

此外，对于任意加性修正 $\Phi : \phi \Rightarrow \psi$ 属于 $\mathcal{D}\mathrm{Cat}(\langle X\rangle; Z)$，计算式 (6.7.11) 的第二个分量给出态射等式

$$\big(\Phi_{\langle a\rangle}\big)_{\langle x\rangle} = Z(\sigma)\big(\Phi_{\langle a\rangle}\big)_{\langle x\rangle}$$

在Za 中，对每个对象 $x \in \prod_{j=1}^{n} X_{ja_j}$。

在定理 6.7.8 (iii) 的结论中，我们只列出条件 (6.7.10)，因为它容易表述，且足以满足我们的主要应用，即例6.7.12中的情形 A。

第 7 章

由双置换指标范畴得到的置换余纤维化

背景。 假设 $(\mathbb{D}, \oplus, \otimes)$ 是一个小紧双置换范畴（定义 2.2.12）。我们在定理 6.7.8 中证明，存在一个伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1）

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \tag{7.0.1}$$

其对象赋值由格罗滕迪克构造给出

$$(X, X^2, X^0) \longmapsto \left(\textstyle\int_{\mathcal{D}} X, \square, (0, X^0 *), \beta^{\square}\right).$$

此外，如果 $\mathbb{D}$ 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，则 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子。较弱的逆命题指出，若 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子，则对于所有对象 x、$y \in \mathbb{D}$，都有 $x \otimes y = y \otimes x$。

格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} X$ 具有一个典范的第一因子投影函子

$$\textstyle\int_{\mathcal{D}} X \xrightarrow{U_X} \mathcal{D}.$$

该函子 U_X 具有一些良好的提升性质，使其成为 $\mathbb{D}$ 上的置换余纤维化。作为格罗滕迪克构造的自然陪域，我们希望考虑的不仅是小置换范畴，还包括 $\mathbb{D}$ 上的小置换余纤维化。

目的。 本章的主要目的是将格罗滕迪克构造 (7.0.1) 提升为一个非对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}. \tag{7.0.2}$$

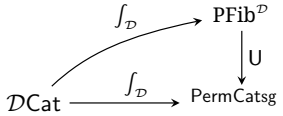
- 陪域 $\mathsf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴，其对象是 $\mathbb{D}$ 上的小置换余纤维化。

- $\mathsf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 中的多态射范畴的对象称为余笛卡尔强 n-线性函子。这些是具有额外性质的强n-线性函子，这些性质推广了格罗滕迪克纤维化之间的笛卡尔函子。
- $\mathsf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 中的多态射范畴的态射称为余笛卡尔 n-线性变换。这些是具有额外性质的n-线性自然变换，这些性质推广了笛卡尔函子之间的垂直自然变换。

- $\mathsf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 上的非对称 Cat-多范畴结构继承自 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$。

$D^{\oplus}$上的置换余纤维化仅使用加法结构来定义。另一方面，余笛卡尔n-线性函子需要加法结构 $D^{\oplus}$、乘法结构 $D^{\otimes}$以及 Laplaza 相干定理 2.4.18。

格罗滕迪克构造 (7.0.1) 和 (7.0.2) 组合成如下非对称 Cat-多函子的交换图表。



非对称 Cat-多函子 U 将每个定义在 D 上的小置换余纤维化映射为其定义域小置换范畴。对于多态射范畴，U 由子范畴包含给出。此外，若 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，则以下两条陈述成立：

● $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的对称群作用限制到 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 上，使其成为 Cat-多范畴。

● U 和 $\int_{\mathcal{D}}\colon \mathrm{DCat}\ \mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 都是 Cat-多函子。

一个较弱的逆命题也成立：若 PFib$^{\mathcal{D}}$ 从 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$继承了一个定义良好的对称群作用，则 $\otimes = \otimes^{\mathrm{op}}$ 属于 D。条件$\otimes = \otimes^{\mathrm{op}}$ 限制性极强，在大多数有意义的双置换范畴中都不成立，包括第2.3节中的 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$, Σ、F 和 A。因此，在这些情况下，PFib$^{\mathcal{D}}$ 确实是一个非对称 Cat-多范畴，而*not* 不是 Cat-多范畴。

在第8章中，我们证明 (7.0.2) 中的非对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{D}}$ 实际上是一个非对称 Cat-多重等价。这意味着 $\int_{\mathcal{D}}$ 是

● 底层一元范畴之间本质满对象，并且

● 多态射范畴之间的一个同构。

此外，当 D 中的 $\beta^{\otimes}$ 是恒等时，$\int_{\mathcal{D}}$ 是 Cat-多重等价。

总结。扩展第5章和第6章引言中的表格，下面的表总结了 DCat、PFib$^{\mathcal{D}}$ 和 $\int_{\mathcal{D}}$。我们分别用对称幺半、多态射范畴、自然变换和余笛卡尔 的缩写*sm*、*mc*、*nt*和*op*。

	$\mathcal{D}$Cat (5.3.11)	PFib$^{\mathcal{D}}$ (7.3.16, 7.3.17)	$\int_{\mathcal{D}}$ (7.4.9)
对象	加性 SM 函子 (5.2.4)	小置换余纤维化 (7.1.4)	7.4.1
MC 对象	加性 NT (5.2.12)	OP 强多线性函子 (7.2.2)	7.4.6, 7.4.7
MC 态射 加性修改 (5.2.25)	OP 多线性变换	(7.2.18)	7.4.6, 7.4.7
带色单位	恒等自然变换 (5.1.13)	恒等对偶1-线性函子 (7.2.14)	6.5.1, 7.2.25
复合	5.1.19, 5.1.21	7.3.2, 7.3.7	6.5.2、7.4.6、7.4.7
对称性	5.1.14	7.3.9, 7.3.13	6.7.8, 7.4.7
sm	no (5.3.4)	no (7.3.9 (2))	no

组织结构。 在第 7.1 节中，我们首先回顾分裂余纤维化的定义。函子 $P : \mathrm{E}\ \mathrm{B}$ 是余纤维化，当且仅当其对偶函子 P^{op}是一个 Grothendieck纤维化。分裂余纤维化是带有劈裂的余纤维化

满足幺性和乘法性条件。对于一个置换的范畴 E，一个 置换的余纤维化 $P : \mathsf{E} \to \mathcal{D}^{\oplus}$ 是满足以下三个条件的分裂余纤维化：

- P 是严格对称幺半函子。
- 选定的余笛卡尔提升在 E 中关于幺半积封闭。
- E 中编织的每个分量都是 D 中相应编织分量的选定余笛卡尔提升。

D 上的小置换余纤维化是 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对象。

在第 7.2 节中，我们定义余笛卡尔强 n-线性函子和余笛卡尔n-线性变换。它们分别是 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的 n元 1-胞和 n元 2-胞。根据定义，余笛卡尔n-线性函子是具有额外性质但没有 额外结构的n-线性函子；同样的说明也适用于余笛卡尔n-线性变换。$\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的每个多态射范畴都定义为 $\mathbf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中相应多态射范畴的子范畴。

在第 7.3 节中，我们将 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 上的（非对称）Cat-多范畴结构定义为从 $\mathbf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$继承而来的结构；参见定理 7.3.16 和推论 7.3.17。首先，我们验证 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的复合是良定义的。然后，我们验证，若 $\beta^{\otimes} = 1$ 属于 D，则 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用是良定义的。较弱的逆命题是：若 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用是良定义的，则 $\otimes = \otimes^{\mathsf{op}}$ 属于 D。

在第 7.4 节中，我们构造（7.0.2）中的提升格罗滕迪克构造；参见定理 7.4.9。我们已经知道

- （7.0.1）中的 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个伪对称 Cat-多函子，并且
- $\mathbf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 中的每个多态射范畴都是 $\mathbf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中相应多态射范畴的子范畴。

因此，将 $\int_{\mathcal{D}}$ 提升到 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的大部分工作，是证明 $\int_{\mathcal{D}}$落在多 - $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$中的态射范畴内。

我们提醒读者注意针对迭代幺半积的左规范化括号约定 1.1.24。

7.1. 置换余纤维化

为定义置换余纤维化，我们先定义余纤维化。关于余纤维化的一般参考文献是 **[JY21**，第 9]，章，其中讨论了纤维化。通过考虑对偶范畴之间的对偶函子，其中的结果同样适用。置换余纤维化见定义 7.1.4。小置换余纤维化是非对称 Cat-多范畴 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对象，我们将在后续章节讨论该范畴。

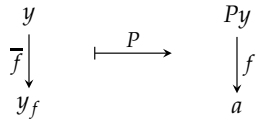
定义 7.1.1. 设 $P : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ 是范畴之间的一个函子。定义如下。

(i) 前提升是一个有序对 $y; f$，由以下部分组成：

- E 中的一个对象 y，以及
- 某个对象 a 的态射 $f : Py \to a$，其中该态射属于 B。(ii) 前提升 $y; f$ 的提升 是 E 中的态射 $\overline{f} : y \to y_f$，使得 hat

$$Py_f = a \quad \text{and} \quad P\overline{f} = f \quad \text{in} \quad B,$$

我们将其描绘如下。



如果从上下文中可以清楚看出y，那么我们也称f为$\overline{f}$的提升。

(iii) 前提升 是一个三元组 $g, h; f$，由以下部分组成

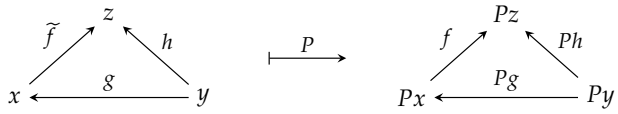
- E 中具有相同定义域的两个态射 $g : y \to x$ 和 $h : y \to z$，以及
- 一个态射 $f : Px \to Pz$ 属于 B，使得

$$f(Pg) = Ph.$$

(iv) 前提升 $g, h; f$ 的一个提升 是一个态射 $\tilde{f} : x \to z$ 属于 E，使得

$$\tilde{f}g = h \in \mathsf{E} \quad \text{and} \quad P\tilde{f} = f \in \mathsf{B},$$

我们将其描绘如下。



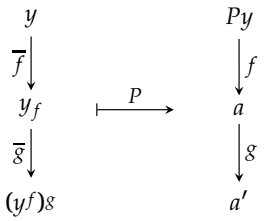
(v) E 中的一个态射 $g : y \to x$ 称为余笛卡尔态射，如果形如 $g, h; f$ 的每个前提升都有一个唯一的 提升。

(vi) 前提升 $y; f$ 的一个提升称为余笛卡尔提升，如果它同时也是余笛卡尔态射。

(vii) $P : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ 称为 B 上的余纤维化，如果每个前提升都存在一个余笛卡尔提升。在这种情况下，P、E 和 B 分别称为投影函子、总体范畴和基范畴。劈裂 是为每个前提升 $y; f$ 选取一个余笛卡尔提升 f；此时，f 称为 $y; f$ 的所选余笛卡尔提升 。配备了劈裂的余纤维化称为劈裂余纤维化。

(viii) 分裂余纤维化是一个带劈裂的余纤维化 $P : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$，满足以下两条公理。**幺性：** 对于每个对象 $y \in \mathsf{E}$，恒等态射 1_y 是 $y; 1_{Py}$ 的选定余笛卡尔提升。**乘法性：** 设给定

- E 中的一个对象 y，以及
- 可复合态射 $f : Py \to a$ 和 $g : a \to a'$，它们属于 B。设
- $\overline{f} : y \to f$ 是 $y; f$ 的选定余笛卡尔提升，并且
- $\overline{g} : yf \to (yf)g$ 是 $yf; g$ 的选定的余笛卡尔提升，如下图所示。



那么，复合

$$y \xrightarrow{\overline{g}\overline{f}} (y_f)_g \quad \text{in} \quad \mathsf{E}$$

是前提升 $y; gf$ 的选定余笛卡尔提升。

(ix) 若函子 $P : \mathsf{E}\ \mathsf{B}$ 是余纤维化，且 E 和 B 都是小范畴，则称其为小的。至此，定义完毕。

说明 7.1.2. 考虑定义 7.1.1。

(1) 函子 $P : \mathsf{E}\ \mathsf{B}$ 是余纤维化，当且仅当其反向函子 $P^{\mathrm{op}} : \mathsf{E}^{\mathrm{op}}\ \mathsf{B}^{\mathrm{op}}$ 是 [**JY21**, 9.1.1] 意义下的纤维化。文献中有时将余纤维化称为余纤维化范畴。(2) 文献中通常不会为分别对应前提升和前提升的资料 $y; f$ 与 $g, h; f$ 命名。在 [**JY21**, Ch. 9]，的纤维化语境中，相应概念分别称为预提升 和预抬升。文献中有时将提升称为传输态射。(3) 带劈裂的余纤维化总可以安排为满足幺性公理。然而，乘法性公理并非自动成立。根据格罗滕迪克纤维化定理 [**JY21**, 9.5.6]，，对于每个小范畴 B，Cat/B 上都存在一个显式构造的 2-单子，其伪代数与严格代数分别与 B 上的带劈裂余纤维化和分裂余纤维化构成典范双射。(4) 余纤维化是具有额外性质的函子，即每个前提升都存在余笛卡尔提升，但不附带额外结构。另一方面，分裂的 余纤维化是带有额外结构的余纤维化，也就是每个前提升都配有选定的 余笛卡尔提升。因此，基于分裂余纤维化构造的概念通常会有关于选定余笛卡尔提升的相应公理。例如，定义 7.1.4 和 7.2.2。

例 7.1.3. 考虑定义 7.1.1。

(1) 对于函子 $P : \mathsf{E}\ \mathsf{B}$，E 中的每个同构都是余笛卡尔态射。特别地，E 中的每个恒等态射都是余笛卡尔态射。(2) 每个恒等函子 $1_{\mathsf{B}} : \mathsf{B}\ \mathsf{B}$ 都是分裂余纤维化。对于每个前提升 $y; f$，选定的余笛卡尔提升是 f。

接下来我们考虑这样的情形：P、E 和 B 中的每一个都配备了置换结构（定义 1.1.11 和 1.1.17）。最终我们将假设基范畴 B 是一个小紧双置换范畴，但对于下面的定义而言，它只需具备置换结构。

定义 7.1.4。 设 $(\mathsf{E}, \oplus, e, \beta^{\oplus})$ 和 $(\mathsf{D}, \oplus, e, \beta^{\oplus})$ 是置换范畴。D 上的一个置换余纤维化

$$\mathsf{E} \xrightarrow{P} \mathcal{D}$$

是一个分裂余纤维化（定义 7.1.1 (viii)），满足以下三个公理。

(i) P 是一个严格对称幺半函子。这称为严格对称性公理。(ii) 假设给定前提升

- $x; f$，其选定的余笛卡尔提升为f，并且
- $y; g$，其选定的余笛卡尔提升为 $\overline{g}$。那么，$f \oplus g$ 就是前提升 $x \oplus y; f \oplus g$ 的选定余笛卡尔提升。这称为幺半积公理。

(iii) 对任意两个对象 x、$y \in \mathsf{E}$，编织

$$x \oplus y \xrightarrow{\beta^{\oplus}_{x,y}} y \oplus x \quad \text{in} \quad \mathsf{E}$$

是前提升的选定余笛卡尔提升

$$\langle x \oplus y; \beta^{\oplus}_{Px,Py} : Px \oplus Py \longrightarrow Py \oplus Px \rangle.$$

这称为编织公理。

至此，置换余纤维化的定义完成。此外，如上所述的置换余纤维化在 E 和 D 都是小范畴时称为小。

说明 7.1.5. 考虑定义 7.1.4。

(1) 置换余纤维化是具有附加性质的分裂余纤维化，即公理 (i) 至 (iii)，但没有额外结构。(2) 严格对称性公理 (i) 意味着单位约束 P^0 和幺半约束 P^2 都是恒等变换（定义 1.1.17）。它们对所有对象 x、$y \in \in \mathsf{E}$ 以及态射 p、$q \in \in \mathsf{E}$ 给出以下等式。

$$\begin{cases} Pe = e \\ P(x \oplus y) = Px \oplus Py \\ P(p \oplus q) = Pp \oplus Pq \\ P\beta^{\oplus}_{x,y} = \beta^{\oplus}_{Px,Py} \end{cases} \tag{7.1.6}$$

(7.1.6) 中最后三个等式确保公理 (ii) 和 (iii) 是良定义的。反之，如果函子 P 满足 (7.1.6) 中的等式，那么我们可以将单位约束 P^0 和幺半约束 P^2 定义为恒等变换，并且 $(P, 1, 1)$ 是一个严格对称幺半函子。

(3) 编织公理 (iii) 包含了分裂余纤维化的幺性条件。事实上，设 x 是 E 中的幺半单位 e。那么

$$\beta^{\oplus}_{e,y} = 1_y \in \mathsf{E} \quad \text{and}$$
$$\beta^{\oplus}_{Pe,Py} = \beta^{\oplus}_{e,Py} = 1_{Py} \in \mathcal{D}$$

根据 (7.1.6) 中的第一个等式以及 E 和 D 中的右单位图表 (1.1.10)。因此，在这种情况下，编织公理指出 1_y 是 $y; 1_{Py}$ 的选定的 opcarte- sian 提升，这就是幺性条件。

关于置换 opfibration 的一种可能的 2-单子描述（类似于说明 7.1.2(3) 中提到的格罗滕迪克纤维化定理），请参见问题 A.0.3。

例 7.1.7(恒等置换上纤维化)。对于每个置换范畴$\mathcal{D}$，恒等函子 $1_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}\ \mathcal{D}$ 是一个置换余纤维化。事实上，恒等函子是一个分裂余纤维化（例 7.1.3 (2)），并满足定义 7.1.4 中的三个公理。

7.2. 余笛卡尔多线性函子与变换

在本章余下部分，我们假设

$$\big(\mathcal{D}, (\oplus, 0, \beta^{\oplus}), (\otimes, 1, \beta^{\otimes}), (\partial^{l}, \partial^{r})\big) \tag{7.2.1}$$

是一个小紧双置换范畴（定义 2.2.12），具有

- 加法结构 $\mathrm{D}^{\oplus} = (\mathrm{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus})$，以及
- 乘法结构 $\mathrm{D}^{\otimes} = (\mathrm{D}, \otimes, 1, \beta^{\otimes})$。

我们将 D 用作基范畴。作为构造非对称 Cat-多范畴 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的下一步，该范畴以 D 上的小置换余纤维化（定义 7.1.4）为对象；本节将定义其多态射范畴。

- n 元 1-胞（定义 7.2.2）是余笛卡尔强 n-线性函子。它们是强n-线性函子，并且还与给定的置换余纤维化相容。
- n 元 2-胞（定义 7.2.18）是上笛卡尔 n-线性变换。它们是n-线性自然变换，并且还与给定的置换余纤维化相容。
- $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 的多态射范畴见定义 7.2.25。它们是 Cat-多范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中相应多态射范畴的子范畴（定理 6.1.31）。我们在引理 7.2.26 中验证 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 的多态射范畴是良定义的。

$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的其余非对称 Cat-多范畴结构将在第 7.3 节讨论。

余笛卡儿多重线性函子。对于纤维化

$$P : \mathsf{E} \longrightarrow \mathsf{B} \quad \text{and} \quad P' : \mathsf{E}' \longrightarrow \mathsf{B},$$

一个 笛卡尔函子 $F : P\ P'$ [JY21, 9.1.14(1)] 是一个函子 $F : \mathrm{E}\ \mathrm{E}'$，它

- 满足 $P = P' F$ 并且
- 将 E 中的笛卡尔态射映射为 E′中的笛卡尔态射。

回顾一下，n-线性函子是一个函子F，它配备了n 个线性约束$F^{2n}_{j\,j=1}$，并满足五条公理（定义 6.1.4）。对于基范畴为 D 的置换余纤维化，笛卡尔函子的多线性类比是与分裂余纤维化结构相容的多线性函子，具体如下一定义所述。回顾记号$\bigcirc_i$，见 (6.1.2)。除非另有说明，在置换范畴中，我们分别用 $\oplus$、e和 $\beta^{\oplus}$表示其幺半积、幺半单位和编织。

定义 7.2.2. 假设给定置换余纤维化（定义 7.1.4）

$$\mathsf{C}_k \xrightarrow{P_k} \mathcal{D} \quad \text{for} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

其 $\langle P\rangle = \langle P^j\rangle_{j=1}^n$ 和 $n \geq 0$。一个 余笛卡尔 n-线性函子

$$\langle P\rangle \xrightarrow{\left(F, \langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\right)} P_0 \tag{7.2.3}$$

是一个n元线性函子（6.1.5）

$$\prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j \xrightarrow{\left(F, \langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\right)} \mathsf{C}_0$$

满足下述公理 (i) 至 (iv)。

(i) 如果 $f^j \in \prod_{j=1}^n \mathsf{C}^j$ 是一个由余笛卡尔态射组成的n元组，那么 $Ff^j \in \mathsf{C}_0$ 是一个余笛卡尔态射。(ii) 下列函子图表是交换的，其中 $\otimes$ 表示 $\otimes : \mathsf{D}^2 \mathsf{D}$ 的任意一个相等的迭代。D 中的空张量积解释为乘法单位元 $1 \in \mathsf{D}$。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j & \xrightarrow{F} & \mathsf{C}_0 \\ {\scriptstyle \Pi_j P_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_0} \\ \mathcal{D}^n & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{D} \end{array} \tag{7.2.4}$$

我们称 (7.2.4) 为投影公理。

(iii) 假设$f^j \in \mathsf{C}^j$ 是前提升 $\overline{x^j; f^j}$ 对$j \in \{1, \ldots, n\}$的选定余笛卡尔提升。那么 $Ff_j \in \mathsf{C}_0$ 是前提升

$$\overline{\left\langle F\langle x_j\rangle ; \otimes_{j=1}^n f_j\right\rangle}.$$

(iv) 假设给定对象 $x^j \in \prod_{j=1}^n \mathsf{C}^j$ 和$x_i' \in \mathsf{C}_i$，其中某个$i \in \{1, \ldots, n\}$，并采用以下记号。

$$\begin{cases} a = P_1x_1 \otimes \cdots \otimes P_ix_i \otimes \cdots \otimes P_nx_n \\ a' = P_1x_1 \otimes \cdots \otimes P_ix_i' \otimes \cdots \otimes P_nx_n \\ a'' = P_1x_1 \otimes \cdots \otimes (P_ix_i \oplus P_ix_i') \otimes \cdots \otimes P_nx_n \end{cases} \tag{7.2.5}$$

记

$$a'' \xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}} a \oplus a' \quad \text{in} \quad \mathcal{D} \tag{7.2.6}$$

为唯一的 Laplaza 相干同构（定理 2.4.18），它在a''中的第i个张量因子上对和$P_ix_i \oplus P_ix_i'$ 进行分配。那么，第i个线性约束的分量

$$F\langle x_j\rangle \oplus F\langle x_j \circ_i x_i'\rangle \xrightarrow{F_i^2} F\langle x_j \circ_i (x_i \oplus x_i')\rangle \tag{7.2.7}$$

是前提升的选定余笛卡尔提升

$$\left\langle F\langle x_j\rangle \oplus F\langle x_j \circ_i x_i'\rangle ; \mathsf{L}^{-1}\right\rangle \quad \text{in} \quad \mathsf{C}_0. \tag{7.2.8}$$

我们称之为约束提升公理。

至此，余笛卡尔n元线性函子的定义完成。

此外，我们定义如下概念。

● 上笛卡尔强 n-线性函子 是一个上笛卡尔n-线性函子（F, F^2_j），其中每个线性约束 F^2_j 都是自然同构。
● 余笛卡尔（强）多线性函子是某个 n-线性余笛卡尔（强）函子，其中 $n \geq 0$。

•若投影函子 $\langle P_k \rangle_{nk=0}$ 可由上下文明确确定，则有时将余笛卡尔 n-线性函子 $\langle P \rangle$ $P0$ 记作 C C0，其中 C $=C_{jnj=1}$。

说明 7.2.9. 考虑定义 7.2.2。

(1) 余笛卡尔n-线性函子是满足额外性质 (i) 至 (iv) 的n-线性函子，但不带有任何额外结构。(2) 根据定义，0-线性函子是由对象$F* \in C_0$确定的函子$F : \mathbf{1} C_0$, 。在这种情况下，公理 (i)、(iii) 和 (iv) 是空泛成立的，而投影公理 (ii) 就是等式

$$P_0(F*) = 1 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}. \tag{7.2.10}$$

换句话说，余笛卡尔 0-线性函子就是在 $1 \in D$ 的P_0-原像中选取一个对象。

(3) 公理 (i) 和 (ii) 是笛卡尔函子的两个公理的n变量推广；我们在定义 7.2.2 之前回顾过这两个公理。实际上，公理 (i) 可由公理 (iii) 推出；见引理 7.2.12。

(4) 公理 (iii) 表明函子 F 保留选定的余笛卡尔提升。这是良定义的，因为

$$P_0 F\langle \overline{f}_j \rangle = \otimes^n_{j=1} P_j \overline{f}_j = \otimes^n_{j=1} f_j.$$

第一个等式由投影公理 (7.2.4) 得出。第二个等式由假设得出：fj 是 xj; fj 的选定余笛卡尔提升。

(5) 约束提升公理 (iv) 的一部分是态射等式

$$P_0 F^2_i = \mathsf{L}^{-1} : a \oplus a' \longrightarrow a'' \quad \text{in} \quad \mathcal{D} \tag{7.2.11}$$

其中，L 如 (7.2.6) 所示，F^2_i 如 (7.2.7) 所示。对于 (7.2.11) 中的定义域和陪域，我们分别使用以下等式。

$$\begin{cases} P_0\big(F\langle x_j \rangle \oplus F\langle x_j \circ_i x'_i \rangle\big) & \\ \quad = P_0 F\langle x_j \rangle \oplus P_0 F\langle x_j \circ_i x'_i \rangle & \text{by (7.1.6)} \\ \quad = a \oplus a' & \text{by (7.2.4)} \\ P_0 F\langle x_j \circ_i (x_i \oplus x'_i) \rangle & \\ \quad = P_1 x_1 \otimes \cdots \otimes P_i(x_i \oplus x'_i) \otimes \cdots \otimes P_n x_n & \text{by (7.2.4)} \\ \quad = P_1 x_1 \otimes \cdots \otimes (P_i x_i \oplus P_i x'_i) \otimes \cdots \otimes P_n x_n & \text{by (7.1.6)} \\ \quad = a'' & \end{cases}$$

(7.2.6) 中的 Laplaza 相干同构 L 此前已多次出现，即

● 在 (5.2.19) 中，出现在加性自然变换的可加性公理里，
● 加性修改的可加性公理中的 (5.2.28)，以及

● 加性自然变换 ϕ 的 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 的线性约束中的 (6.3.12) 和 (6.3.14)。

虽然定义 7.2.2 (i) 是关于笛卡尔函子保持笛卡尔态射这一性质的自然的n元变体，但下面的观察表明，它实际上是多余的。

引理 7.2.12。 *在定义 7.2.2 的背景下，公理 (i) 可由公理 (iii) 推出。*

证明。设 $f_j : x_j\, y_j$ 属于 C_j 对每个 $j \in \{1,\dots,n\}$ 都是余笛卡尔态射。我们要证明 $F\langle f_j\rangle$ 是余笛卡尔态射，这是由公理 (iii) 得出的结论。我们使用以下关于函子 [**JY21**，9.1.4 (1)、(4) 和 (5)] 的事实，其中 $P : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$：

● E 中的每个同构都是余笛卡尔态射。
● 余笛卡尔态射在复合下封闭。
● 如果 $f : y\, z$ 和 $f' : y\, z'$ 都是前提升 y；f 的余笛卡尔提升，那么存在唯一的同构 $g : z \xrightarrow{\cong} z'$ 属于 E，使得

$$g\overline{f} = \overline{f}' \quad \text{and} \quad Pg = 1_{Pz}.$$

考虑相对于 $P_j : \mathsf{C}_j \to \mathsf{D}$ 的前提升 $x_j ; Pj\, f_j$。

● 由于 f_j 是余笛卡尔态射，它是 $x_j ; P_j f_j$ 的余笛卡尔提升。
● 由于 P_j 是分裂余纤维化，$x_j ; P_j f_j$ 有一个选定的余笛卡尔提升 $f_j : x_j \to w_j$。

因此，存在唯一的同构 $g_j : w_j \xrightarrow{\cong} y_j$，使得它属于 C_j，

$$g_j \overline{f}_j = f_j \quad \text{and} \quad P_j g_j = 1_{P_j y_j}.$$

F 的函子性蕴含

$$F\langle f_j\rangle = F\langle g_j \overline{f}_j\rangle = F\langle g_j\rangle \circ F\langle \overline{f}_j\rangle \quad \text{in} \quad \mathsf{C}_0. \tag{7.2.13}$$

现在我们观察如下事实。

● 根据公理 (iii)，$\overline{F}\, f_j$ 是 $Fx_j ; \otimes_j P_j f_j$ 的选定的余笛卡尔提升。
● 由于每个 g_j 都是同构，根据 F 的函子性，Fg_j 也是同构。因此，Fg_j 是余笛卡尔态射。

分解 (7.2.13) 表明，Ff_j 是两个余笛卡尔态射的复合，因此它也属于余笛卡尔态射。□

根据引理 7.2.12，要验证一个n-线性函子是否为余笛卡尔函子，无需检查公理 (i)。定义 7.2.2 中包含公理 (i)，只是为了与笛卡尔函子的定义保持对称。

例 7.2.14 （恒等余笛卡尔 1-线性函子）。 设 $P : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是一个置换余纤维化（定义 7.1.4）。那么例 6.1.12 中的恒等 1-线性函子

$$\mathsf{C} \xrightarrow{1_{\mathsf{C}}} \mathsf{C}$$

是一个余笛卡尔 1-线性函子。事实上，定义 7.2.2 中的公理 (i) 至 (iii) 都由 1_{C} 是 C 上的恒等函子这一事实推出。

对于约束提升公理（iv），Laplaza 相干同构 (7.2.6)

$$Px \oplus Px' \xrightarrow[\cong]{\mathsf{L}} Px \oplus Px' \quad \text{for} \quad x, x' \in \mathsf{C}$$

根据唯一性，它是恒等态射。因此，L^{-1} 也是恒等态射。根据定义，1c 的唯一线性约束是恒等自然变换。前提升 (7.2.8) 的选定余笛卡尔提升

$$\left\langle x \oplus x'; 1_{Px \oplus Px'} \right\rangle = \left\langle x \oplus x'; 1_{P(x \oplus x')} \right\rangle$$

根据分裂余纤维化的幺性条件（定义 7.1.1(viii)），$1_{x \oplus x'}$ 是恒等态射，其中包括P。

例 7.2.15 （余笛卡尔 1-线性函子）。 将例 7.2.14 推广到置换余纤维化，

$$\mathsf{C}_1 \xrightarrow{P_1} \mathcal{D} \quad \text{and} \quad \mathsf{C}_0 \xrightarrow{P_0} \mathcal{D},$$

一个余笛卡尔 1-线性函子

$$P_1 \xrightarrow{F} P_0$$

恰好是一个严格对称幺半函子

$$\mathsf{C}_1 \xrightarrow{F} \mathsf{C}_0$$

that

- 满足 $P_1 = P0F$并且
- 保持选定的余笛卡尔提升。

事实上，前两项中的条件就是定义 7.2.2 中的公理（ii）和（iii）。由引理 7.2.12 可知，公理（i）成立。一个 1-线性函子（定义 6.1.4）

$$\mathsf{C}_1 \xrightarrow{(F,F^2)} \mathsf{C}_0$$

恰好是一个严格保单位的对称幺半函子。此外，由于 $n = 1$，式（7.2.6）中的 Laplaza 相干同构 L 是恒等态射。那么

- 定义 7 中的公理（iv） .2.2 和
- 分裂余纤维化 $P0$ 的酉性条件（定义 7.1.1(viii)）

这意味着唯一的线性约束 F^2 是恒等。因此，F 实际上是一个严格对称幺半函子。

例 7.2.16 （双置换范畴）。 由于 $(\mathsf{D}, \oplus, \otimes)$ 是一个小的紧双置换范畴（定义 2.2.12），恒等函子

$$\mathcal{D}^{\oplus} \xrightarrow{1_{\mathcal{D}^{\oplus}}} \mathcal{D}^{\oplus}$$

是一个置换余纤维化（例 7.1.7）。对于每个 $n \geq 0$，都有一个余笛卡尔强n-线性函子

$$\langle 1_{\mathcal{D}^{\oplus}} \rangle_{j=1}^{n} \xrightarrow{\left(\otimes, \langle \mathsf{L}_j^{-1} \rangle_{j=1}^{n}\right)} 1_{\mathcal{D}^{\oplus}}. \tag{7.2.17}$$

事实上，由例 6.1.14 可知，存在一个强n元线性函子

$$\prod_{j=1}^{n} \mathcal{D}^{\oplus} \xrightarrow{\left(\otimes, \langle \mathsf{L}_j^{-1} \rangle_{j=1}^{n}\right)} \mathcal{D}^{\oplus}.$$

其第j个线性约束为 (6.1.15)

$$\otimes_j^2 = \mathsf{L}_j^{-1}$$

其中，Li 是唯一的 Laplaza 相干同构（例 2.4.19），它将和分配到第 j 个张量因子中。

● 定义 7.2.2 中的公理（i）至（iii）成立，因为每个 $1_{\mathcal{D}^{\oplus}}$ 都是恒等函子。

● 约束提升公理（iv）成立，因为 $\otimes^2{}_i \ = \mathrm{L}^{-1}{}_i$。

余笛卡尔多线性变换。对于

• 余纤维化 P :E B和$P\prime$:E′ B，以及⟶

● 笛卡尔函子 $F,G : P\, P\prime,$ ⟶

一个竖直自然变换 $\theta : F\ G$ **[JY21**, 9.1.~~14~~ (2)] 是满足以下条件的自然变换

$$1_{P\prime} * \theta = 1_P.$$

回顾一下，n-线性自然变换 是满足单位公理和约束相容公理（定义 6.1.16）的自然变换。竖直自然变换的多线性类比与函子 $P_{k\,k=0}^{n}$ 相容，具体如下。

定义 7.2.18。 假设给定置换余纤维化（定义 7.1.4）

$$\mathsf{C}_k \xrightarrow{P_k} \mathcal{D} \quad \text{for} \quad k \in \{0,1,\ldots,n\}$$

满足 $P \ = Pj_{j=1}^{n}$ 且 $n \ \geq 0$。假设给定两个余笛卡尔n-线性函子（定义 7.2.2）

$$\langle P\rangle \underset{\left(G,\langle G_j^2\rangle_{j=1}^n\right)}{\overset{\left(F,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\right)}{\rightrightarrows}} P_0.$$

一个余笛卡尔 n-线性变换

$$\left(F,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\right) \xrightarrow{\theta} \left(G,\langle G_j^2\rangle_{j=1}^n\right) \tag{7.2.19}$$

是一个n-线性自然变换（6.1.17）

$$\prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j \underset{\left(G,\langle G_j^2\rangle\right)}{\overset{\left(F,\langle F_j^2\rangle\right)}{\Rightarrow}} \mathsf{C}_0 \qquad (\theta)$$

使得以下两个复合自然变换相等。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j & \underset{G}{\overset{F}{\Rightarrow}} & \mathsf{C}_0 \\ {\scriptstyle \Pi_j P_j}\downarrow & (\theta) & \downarrow{\scriptstyle P_0} \\ \mathcal{D}^n & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{D} \end{array} \tag{7.2.20}$$

我们称 (7.2.20) 为变换投影公理。余笛卡尔多线性变换是某个n-余笛卡尔线性变换，其中$n \ \geq 0$。

解释 7.2.21。 请参见定义 7.2.18。

(1) 余笛卡尔n-线性变换是满足附加性质 (7.2.20) 的n-线性自然变换，但不附带额外结构。

(2) 根据定义，0-线性自然变换 $\theta : F\, G$ 是一个态射 $\longrightarrow$

$$F* \xrightarrow{\theta_*} G* \quad \text{in} \quad \mathsf{C}_0. \tag{7.2.22}$$

利用 (7.2.10)，在此情形下，变换投影公理 (7.2.20) 就是态射等式

$$P_0\theta_* = 1_1 : 1 \longrightarrow 1 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}. \tag{7.2.23}$$

换言之，*0-*线性自然变换 是 (7.2.22) 中的一个态射，且属于P_0-原像 $1 \in \mathsf{D}$。

(3) 对于$n \geq 1$，变换投影公理 (7.2.20) 中的三个复合函子，根据F 和G的投影公理 (7.2.4) 相等。公理 (7.2.20) 的含义是，对于每个由n个对象组成的组 $x^j \in \prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}j$，都有一个态射等式

$$P_0\theta_{\langle x_j\rangle} = 1_{\otimes_{j=1}^{n} P_j x_j} : P_0F\langle x_j\rangle \longrightarrow P_0G\langle x_j\rangle \tag{7.2.24}$$

在 D 中。

多态射范畴。 对于小置换范畴 C_0 和 $\mathsf{C} = \mathsf{C}j_{j=1}^{n}$，回顾 (6.1.22) 和 (6.1.23) 中的范畴

$$\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \mathsf{C}\rangle\,;\, \mathsf{C}_0\big) = \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\mathsf{C}_1, \ldots, \mathsf{C}_n\,;\, \mathsf{C}_0\big)$$

with

- 以强n线性函子 $\prod_{nj=1}\mathsf{C}_j$ C0 为对象，
- 以n线性自然变换为态射，
- 以恒等自然变换作为恒等态射，且
- 自然变换的垂直复合作为复合。

在元数为 0 的情形下，$\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}(\,;\mathsf{C}_0)$ 是范畴 C_0。

定义 7.2.25. 假设给定小置换余纤维化（定义 7.1.4）

$$\mathsf{C}_k \xrightarrow{P_k} \mathcal{D} \quad \text{for} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

其中 $\mathsf{C} = \mathsf{C}j_{j=1}^{n}$，$P = Pj_{j=1}^{n}$，且 $n \geq 0$。定义

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle P\rangle\,;\, P_0\big) = \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(P_1, \ldots, P_n\,;\, P_0\big)$$

作为 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}(\mathsf{C}\,;\mathsf{C}_0)$ 的子范畴，其中

- 以余笛卡尔强 n-线性函子（定义 7.2.2）为对象，并且
- 余笛卡尔n线性变换（定义 7.2.18）作为态射。

由此完成了 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(P\,;P_0)$ 的定义。

此外，如果上下文能够明确确定投影函子 $P_{k\,k=0}^{n}$，那么我们也将 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(P;P_0)$ 记作 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(\mathsf{C};\mathsf{C}_0)$。

First we check that the category $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle P\rangle\,;\, P_0\big)$ is well defined.

引理 7.2.26。 在定义 *7.2.25* 的上下文中，

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle P\rangle\,;\, P_0\big)$$

是 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}\big(\langle \mathsf{C}\rangle;\ \mathsf{C}_0\big)$ 的一个定义良好的子范畴。

证明。在元数为 0 的情形下，该断言是指 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(;\ P_0)$ 是 C_0 的一个子范畴。这是因为 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(;\ P_0)$ 是 $1 \in \mathsf{D}$ 在 P_0 下的原像，

- 对对象的说明 7.2.9(2) 以及
- 对态射的说明 7.2.21(2)。

设$n > 0$。每个余笛卡尔n-线性函子F 的恒等自然变换 1_F 都是余笛卡尔n-线性变换。事实上，在这种情况下，变换投影公理 (7.2.20) 化简为F的投影公理 (7.2.4)。

接下来只需验证余笛卡尔n线性变换在垂直复合下封闭。假设

$$\big(F\,,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\big) \xrightarrow{\ \theta\ } \big(G\,,\langle G_j^2\rangle_{j=1}^n\big) \xrightarrow{\ \psi\ } \big(H\,,\langle H_j^2\rangle_{j=1}^n\big)$$

是 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(P\,;P_0)$ 中的余笛卡尔n线性变换。垂直复合n线性自然变换

$$\big(F\,,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\big) \xrightarrow{\ \psi\theta\ } \big(H\,,\langle H_j^2\rangle_{j=1}^n\big)$$

对每个n元对象组 $xj \in \prod_{j=1}^n \mathsf{C}j$，由下列计算可知，它满足变换投影公理 (7.2.24)。

$$\begin{aligned}
P_0(\psi\theta)_{\langle x_j\rangle} &= P_0\big(\psi_{\langle x_j\rangle}\theta_{\langle x_j\rangle}\big)\\
&= \big(P_0\psi_{\langle x_j\rangle}\big)\big(P_0\theta_{\langle x_j\rangle}\big) && \text{by functoriality of } P_0\\
&= \big(1_{\otimes_{j=1}^n P_j x_j}\big)\big(1_{\otimes_{j=1}^n P_j x_j}\big) && \text{by (7.2.24) for } \theta \text{ and } \psi\\
&= 1_{\otimes_{j=1}^n P_j x_j}
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

7.3. 置换余纤维化的多范畴

与 (7.2.1) 中一样，我们继续假设 $(\mathsf{D},\oplus,\otimes)$ 是一个小紧双置换范畴。在定义 7.2.25 中，我们构造了 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的多态射范畴。回忆定义 3.1.2，非对称 V-多范畴是指没有对称群作用及相应公理的 V-多范畴。除对象和多态射范畴外，非对称 V-多范畴由其带色单位和复合决定，并满足

- 结合律公理 (3.1.7) 以及
- 单位元公理 (3.1.8) 和 (3.1.9)。

本节将构造 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 上非对称 Cat-多范畴结构的其余部分。在一种罕见情形下，若 D 中的乘法编织为恒等，则 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多范畴。这个（非对称）Cat-多范畴还配有一个（非对称）Cat-多函子

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\ \mathsf{U}\ } \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

它将每个 D 上的小置换余纤维化映射到其总体范畴。以下是本节的概要。

● 定义 7.3.1 通过限制 Cat-多范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ （定理 6.1.31）中的带色单位、复合和对称群作用，来规定 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 中的带色单位、复合和对称群作用。

● 引理 7.3.2 和 7.3.7 表明，$\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的复合限制于 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$。

● 引理 7.3.9 和 7.3.13 表明，当 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 为恒等时，$\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的对称群作用限制于 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$*if* 。最后一个假设用于图表 (7.3.12) 和 (7.3.15) 中。逆命题的较弱形式成立：如果 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$中的对称群作用限制于 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$，那么 $\otimes = \otimes^{\mathrm{op}}$ 在 D 中。
● 主定理 7.3.16 证明了非对称 Cat-多范畴 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$的存在性；此外，当 $\beta^{\otimes} = 1$在 D 中时，它还是一个 Cat-多范畴。

● 推论 7.3.17 表明，存在一个从 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 到 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 的非对称 Cat-多函子 U，它将每个在 D 上的小置换余纤维化映射到总体范畴。此外，当 $\beta^{\otimes} = 1$在 D 中时，U 是一个 Cat-多函子。

定义 7.3.1. 对于 (7.2.1) 中的小紧双置换范畴 D，按如下方式定义 Cat-多范畴 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的数据。
对象集： $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对象是 D 上的小置换余纤维化（定义 7.1.4）。**多态射：** $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的多态射范畴如定义 7.2.25 所述：

● 对象是余笛卡尔强多重线性函子（定义 7.2.2）。

● 态射是余笛卡尔多线性变换（定义 7.2.18）。

● 恒等态射是恒等自然变换。
● 复合是自然变换的垂直复合。
单位： 对于每个小置换余纤维化 $P : \mathbb{C}\,\mathbb{D}$，$P$带色单位是恒等余笛卡尔 1-线性函子 $1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}\,\mathbb{C}$（例 7.2.14）。**复合：** 它是通过引理 7.2.26 中的子范畴包含，将 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ （6.1.28）中的复合限制而得的。**对称群作用：** 它是通过引理 7.2.26 中的子范畴包含，将 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ （6.1.24）中的对称群作用限制而得的。

$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$的定义至此完成。

复合。 为了说明 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的复合是良定义的，我们从n元 1-胞开始。

引理 7.3.2。 在定义 *7.3.1* 的语境中，$\mathit{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的复合在余笛卡尔强多线性函子上是良定义的。

证明。设给定

● D 上的小置换余纤维化（定义 7.1.4）$-P_k : \mathbb{C}_k\,\mathbb{D}$，其中 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$；以及$-Q_{ji} : \mathbb{B}_{ji}\,\mathbb{D}$，其中 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 且 $i \in \{1, \ldots, \ell_j\}$，

● 一个余笛卡尔n-线性函子（定义 7.2.2）

$$\langle P\rangle \xrightarrow{\left(F,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\right)} P_0 \tag{7.3.3}$$

配有 $P = P j_{j=1}^n$，以及

● 对每个 $j \in \{1,\dots,n\}$，一个余笛卡尔 ℓ_j-线性函子

$$\langle Q_j\rangle \xrightarrow{\left(G_j,\left\langle (G_j)_i^2\right\rangle_{i=1}^{\ell_j}\right)} P_j \tag{7.3.4}$$

with $\langle Q_j\rangle = \langle Q_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j}$.

对于 $\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_n$，复合的 ℓ-线性函子

$$\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^{\ell_j} \mathsf{B}_{ji} \xrightarrow{\prod_j G_j} \prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j \xrightarrow{F} \mathsf{C}_0 \tag{7.3.5}$$

具有 (6.1.30) 中的线性约束。若F 和每个G_j 都是强的，则它是强函子。我们必须证明 (7.3.5) 中的复合 ℓ-线性函子满足定义 7.2.2 中的公理 (i) 至 (iv)。

若某个 $\ell_j = 0$，则下面的论证需要稍作调整，并用到

● 说明 7.2.9 (2)，它将余笛卡尔 0-线性函子与 $1 \in \mathsf{D}$ 的原像中的对象对应起来；

● 1 是 D 中的严格乘法单位元这一事实；以及

● 分裂余纤维化的酉性条件（定义 7.1.1(viii)）。

鉴于此，在本证明余下部分中，我们假设每个 $\ell_j > 0$。

公理（i）。这是因为F 和每个G_j 都保余笛卡尔态射。

公理 *(ii)*。(7.3.5) 中复合$F \bigcirc (\prod_j G_j)$ 的图表 (7.2.4) 是以下图表的边界。

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^{\ell_j} \mathsf{B}_{ji} & \xrightarrow{\prod_j G_j} & \prod_{j=1}^n \mathsf{C}_j & \xrightarrow{F} & \mathsf{C}_0 \\
{\scriptstyle \prod_{j,i} Q_{ji}}\downarrow & & {\scriptstyle \prod_j P_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_0} \\
\mathcal{D}^{\ell_1+\cdots+\ell_n} & \xrightarrow{\prod_j \otimes} & \mathcal{D}^n & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{D}
\end{array}$$

左侧和右侧方形分别由 $G j_{j=1}^n$ 和F的投影公理 (7.2.4) 交换。

公理 *(iii)*。这是因为F 和每个G_j 都保选定的余笛卡尔提升。公理（iv）。根据定义 (6.1.30)，对于每个$q \in \{1,\dots,n\}$和$p \in \{1,\dots,\ell_q\}$，

$$r = \ell_1 + \cdots + \ell_{q-1} + p,$$

(7.3.5) 中 $(F \bigcirc \prod_j G_j)$ 的第r个线性约束是如下复合

$$(F \circ \textstyle\prod_j G_j)_r^2 = F\left(1 \circ_q (G_q)_p^2\right) \circ F_q^2. \tag{7.3.6}$$

Here

● $F^2{}_q$ 是F的第q个线性约束，并且

● $(G_q)^2{}_p$ 是G_q的第p个线性约束。

公理（iv）要求 $(F \bigcirc \prod_j G^j)^2_r$ 的每个分量都是 L_r^{-1} 的选定余笛卡尔提升，其中 L_r 是 D 中唯一的 Laplazacoherence 同构，它在其定义域的第r个张量因子上将和分配开来。该公理基于以下理由成立。

（1）根据 F 的公理（iv），F^2_q 的每个分量都是选定的余笛卡尔提升 L_q^{-1}，其中 L^q 是 D 中唯一的 Laplaza 相干同构，它在其定义域中的第 q 个张量因子上分配到和。

（2）根据 G^q的公理（iv），$(G^q)^2_p$ 的每个分量都是 L_p^{-1}的选定的余笛卡尔提升，其中 L^p 是 D 中唯一的 Laplaza 相干同构，它在其定义域中的第 p 个张量因子上分配到和。

（3）根据分裂余纤维化的幺性公理（定义 7.1.1（viii）），n元组中每个条目的每个分量

$$\left\langle 1 \circ_q (G_q)^2_p \right\rangle = \left\langle 1, \ldots, (G_q)^2_p, \ldots, 1 \right\rangle$$

是一个选定的余笛卡尔提升。由

- 上面的 (2),
- 每个 P_j 的函子性，以及
- F 的公理 (iii),

each 分量 o f

$$F\left\langle 1 \circ_q (G_q)^2_p \right\rangle$$

是.....的选定余笛卡尔提升

$$1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{L}_p^{-1} \otimes \cdots \otimes 1.$$

(4) 根据定理 2.4.18 中的唯一性，在 D 中有一个态射等式

$$\mathsf{L}_q \circ \left(1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{L}_p \otimes \cdots \otimes 1\right) = \mathsf{L}_r.$$

(5) 根据分裂余纤维化的乘法性公理（定义 7.1.1(viii)）以及上文的 (1)、(3) 和 (4)，(7.3.6) 右侧的每个分量都是下列对象的选定的余笛卡尔提升

$$\left(1 \otimes \cdots \otimes \mathsf{L}_p^{-1} \otimes \cdots \otimes 1\right) \circ \mathsf{L}_q^{-1} = \mathsf{L}_r^{-1}.$$

证明至此完成。 □

接下来我们考虑n元 2-胞的复合。

引理 7.3.7。 在定义 *7.3.1* 的语境下，$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的复合在余笛卡尔多线性变换上良定义。

证明。重复使用 (7.3.3) 至 (7.3.5) 中的记号，设给定

- 一个余笛卡尔n元线性变换

$$F \xrightarrow{\theta} F'$$

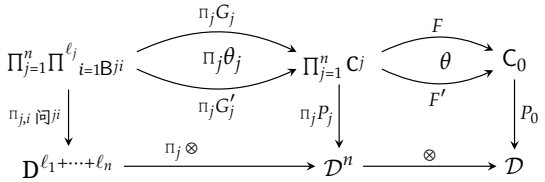
在 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(P\,;P_0)$ 中，以及

- 对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，一个余笛卡尔 ℓ_j-线性变换

$$G_j \xrightarrow{\theta_j} G'_j$$

在 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(Qj\,;Pj)$ 中。

根据复合的定义 (6.1.29)，复合 ℓ-线性自然变换 $\gamma(\theta;\theta_j)$ 的变换投影公理 (7.2.20) 表明，下图中的两个边界加缠绕自然变换相等。



上述两个边界加缠绕自然变换根据 θ_j 和 θ 的变换投影公理 (7.2.20) 相等。□

对称性。接下来我们证明，当 D 中的乘法编织是恒等变换时，$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用（它是 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中对称群作用的限制）是良定义的，并给出一个较弱的逆命题。对于幺半范畴 $(\mathsf{C},\otimes)$，将复合函子 $\otimes^{\mathsf{op}}$ 称为反向幺半群积：

(7.3.8)
$$\mathsf{C}^2 \xrightarrow{\xi} \mathsf{C}^2 \xrightarrow{\otimes} \mathsf{C}, \qquad \mathsf{C}^2 \xrightarrow{\otimes^{\mathsf{op}}} \mathsf{C}$$

其中 ξ 交换两个自变量。

引理 7.3.9。在定义 *7.3.1* 的背景下，以下陈述成立。

(1) 若 $\mathcal{D}$ 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，则$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡尔强多重线性函子上是良定义的。*(2)* 若$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡尔强多重线性函子上是良定义的，则 $\mathcal{D}$ 中的 $\otimes = \otimes^{\mathsf{op}}$。

证明。首先设 $\beta^{\otimes} = 1 \in \mathsf{D}$。我们要证明，$\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中的对称群作用限制到 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$。设给定了 D 上的小置换余纤维（定义 7.1.4）

$$\mathsf{C}_k \xrightarrow{P_k} \mathcal{D} \quad \text{for} \quad k \in \{0,1,\dots,n\}$$

，其中 $\mathsf{C} = \mathsf{C}\downarrow_{j=1}^{n}$ 以及 $P = P\downarrow_{j=1}^{n}$。对于一个置换 $\sigma \in \Sigma_n$，为了证明对称群作用在对象上良定义

(7.3.10)
$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle P\rangle ; P_0\big) \xrightarrow{\sigma} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle P\rangle\sigma ; P_0\big)$$

，设给定一个余笛卡尔n-线性函子（定义 7.2.2）

$$\langle P\rangle \xrightarrow{\left(F,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^{n}\right)} P_0.$$

我们必须证明这个n-线性函子

(7.3.11)
$$\prod_{j=1}^{n}\mathsf{C}_{\sigma(j)} \xrightarrow{\sigma} \prod_{j=1}^{n}\mathsf{C}_j \xrightarrow{F} \mathsf{C}_0$$

带有 (6.1.26) 中线性约束的函子满足定义 7.2.2 中的公理 (i) 至 (iv)。

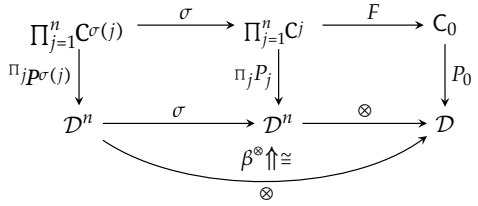
公理 *(i)*。由于

- 置换 σ 将一个由余笛卡尔态射组成的n元组映为一个由余笛卡尔态射组成的n元组，并且
- F 根据公理 (i) 保持余笛卡尔态射。

注意，即使没有假设 $\beta^{\otimes} = 1$，公理 (i) 仍然成立。

公理 *(ii)*。式 (7.3.11) 中 F 的图表 (7.2.4) 是下图的边界。

(7.3.12)



图表 (7.3.12) 的细节如下。

- 左侧方块由 (Cat, ×) 中编织的自然性保证交换。
- 右侧方块由 F 的公理 (ii) 保证交换。

底部区域中的自然同构

$$\otimes \xrightarrow[\cong]{\beta^{\otimes}} \otimes \circ \sigma$$

是在 D 中对乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 的迭代。在当前假设 $\beta^{\otimes} = 1$ 下，（7.3.12）中的底部区域严格交换，从而证明了F^{σ}满足公理 (ii)。

公理（*iii*）。对于F^{σ}，此公理可由以下内容推出：

- F^{σ} 满足公理 (ii)，以及
- F满足公理 (iii)。

公理（*iv*）。对于F^{σ}，此公理可由以下内容推出：

- 第i个线性约束（F^{σ}）$^2{}_i = F^2_{\sigma(i)}$ 的定义（6.1.26），
- $\beta^{\otimes} = 1$ 属于 D 的假设，
- F^{σ} 的公理 (ii)，以及
- F 的公理（iv）。

这就完成了断言（1）的证明。

对于断言（2），假设 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡尔强多线性函子上良定义。对于余笛卡尔强 2-线性函子（7.2.17）

$$\langle 1_{\mathcal{D}^{\oplus}} \rangle_{j=1}^{2} \xrightarrow{\left(\otimes, \langle \mathsf{L}_j^{-1} \rangle_{j=1}^{2}\right)} 1_{\mathcal{D}^{\oplus}}$$

以及 $\sigma = (1, 2) \in \Sigma_2$，交换图（7.3.12）的边界给出等式

$$\otimes = \otimes \circ \xi = \otimes^{\mathsf{op}}.$$

这证明了断言（2）。 □

接下来我们考虑上笛卡尔多重线性变换。

引理 7.3.13。 在定义 *7.3.1* 的背景下，以下陈述成立。

(1) 若乘法编织 $\beta^{\otimes}$ *in* $\mathcal{D}$ 是恒等自然变换，则$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡尔多重线性变换上良定义。*(2)* 若$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡尔多重线性变换上良定义，则 $\otimes = \otimes^{\mathsf{op}}$ *in* $\mathcal{D}$。

证明。首先假设 $\beta^{\otimes} = 1$in D。沿用引理 7.3.9 证明中的记号，设给定如下一个余笛卡尔n-线性变换 θ in $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(P; P_0)$。

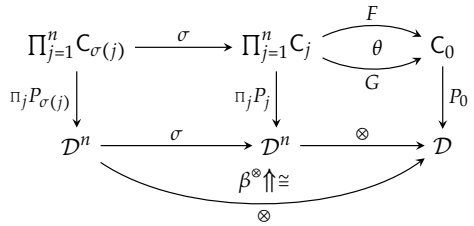
$$\prod_{j=1}^{n} \mathsf{C}_j \underset{(G,\langle G_j^2\rangle)}{\overset{(F,\langle F_j^2\rangle)}{\Downarrow \theta}} \mathsf{C}_0$$

根据定义 (6.1.25)， $\theta^{\sigma} = \theta * 1_{\sigma}$ 的公理 (7.2.20) 即为等式

$$1_{P_0} * \theta * 1_{\sigma} = 1_{\otimes \circ (\sqcap_j P_{\sigma(j)})} \tag{7.3.14}$$

如以下图表边界所示。

(7.3.15)



图表 (7.3.15) 的详细内容如下。

- 左侧方块由 (Cat, ×) 中编织的自然性可交换。
- 在它的右侧，等式

$$1_{P_0} * \theta = 1_{\otimes \circ (\sqcap_j P_j)}$$

  由关于 θ 的公理 (7.2.20) 成立。
- 在当前假设 $\beta^{\otimes} = 1$ 属于 D 的条件下，底部区域严格可交换。

这就证明了等式（7.3.14）。

对于断言（2），假设 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在上笛卡尔多重线性变换上是良定义的。与引理 7.3.9 (2) 的证明类似，在$n = 2$ 的情形下考虑图表(7.3.15)，即可得到所需的等式 $\otimes = \otimes^{\mathsf{op}}$ in D，其中

- $\sigma \in \Sigma_2$ 非恒等置换,
- $F = G$ 上笛卡尔强 2-线性函子 (7.2.17)

$$\langle 1_{\mathcal{D}^{\oplus}} \rangle_{j=1}^{2} \xrightarrow{\left(\otimes, \langle \mathsf{L}_j^{-1} \rangle_{j=1}^{2}\right)} 1_{\mathcal{D}^{\oplus}},$$

  and
- $\theta = 1_F$ F 的恒等上笛卡尔 2-线性变换。

证明至此完成。 □

多范畴结构。 接下来是本节的主要结果。回顾 Cat-多范畴$\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$（定理 6.1.31）。

定理 7.3.16. 设$\mathcal{D}$ 是一个小紧双置换范畴。

(i) 定义 *7.3.1* 中的$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称Cat-多范畴。*(ii)* 若$\mathcal{D}$ 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，则$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个Cat-多范畴。*(iii)* 若非对称Cat-多范畴$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个Cat-多范畴，则 $\otimes = \otimes^{\mathsf{op}}$ 在$\mathcal{D}$中。

证明。由引理 7.2.26，每个多态射范畴 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}(P; P_0)$ 都是相应多态射范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}(\mathsf{C}; \mathsf{C}_0)$ 的子范畴。

● 在 $\mathsf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$中，带色单位由恒等 1-线性函子给出。

● $\mathsf{PFib}_{\mathcal{D}}$中的复合是 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$中复合的限制，由引理 7.3.2 和 7.3.7 可知其良定义。

因此，结合律和单位元公理 (3.1.7) 至 (3.1.9) 在 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中成立，正如它们在 Cat-多范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中成立一样。这就证明了断言 (i)。

对于断言 (ii)，在假设 $\beta^{\otimes} = 1$ 属于 D 的条件下，由引理 7.3.9 (1) 和引理 7.3.13 (1)，$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用是良定义的。对称群作用公理 (3.1.6) 以及等变公理 (3.1.10) 和 (3.1.12) 在 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中成立，正如它们在 Cat-多范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中成立一样。

断言 (iii) 由引理 7.3.9 (2) 和引理 7.3.13 (2) 得出。 □

回忆定义 3.2.1，非对称 V-多函子是指不满足对称群作用公理 (3.2.2) 要求的 V-多函子。换言之，非对称 V-多函子只需保持带色单位 (3.2.3) 和复合 (3.2.4)。下述观察由定理 7.3.16 得出。

推论 7.3.17。 设$\mathcal{D}$ 是一个小紧双置换范畴。

(i) 存在一个非对称Cat-多函子

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\mathsf{U}} \mathrm{PermCat}^{\mathrm{sg}} \tag{7.3.18}$$

定义如下

- 对象赋值

$$\mathsf{U}(P : \mathsf{C} \longrightarrow \mathcal{D}) = \mathsf{C}$$

对于每个位于$\mathcal{D}$ 上的小置换余纤维化 P，以及

- 引理 *7.2.26* 中多态射范畴的子范畴包含。*(ii)* 若$\mathcal{D}$ 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，则U 是一个Cat-多函子。

说明 7.3.19. 尽管 (7.3.18) 中的 U 由多态射范畴之间的子范畴包含构成，但一般来说，$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 并非 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$的子 Cat-多范畴。原因是 U 一般不是对象上的单射，因为一个小置换范畴 C 可能具有多种不同的置换上纤维化 C D。

$\longrightarrow$

例 7.3.20. 考虑小型紧双置换范畴

$$\mathsf{Fin}^{\mathsf{sk}},\quad \Sigma,\quad \mathcal{F},\quad \text{and}\quad \mathcal{A}$$

分别见例 2.3.2、2.3.11、2.3.12 和 2.3.17。令 D 表示其中任意一个，

- 根据定理 7.3.16(i)，$\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴，并且
- 存在一个非对称 Cat-多函子 U，如 (7.3.18) 所示。

由于 $\otimes \neq \otimes^{\mathsf{op}}$ 属于 D，根据引理 7.3.9 (2)，$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 没有 良定义的对称群作用。因此，$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 不是 Cat-多范畴。

7.4. 通过格罗滕迪克构造得到的置换余纤维化

与 (7.2.1) 中一样，我们继续假设 $(\mathbf{D}, \oplus, \otimes)$ 是一个小紧双置换范畴。对于一个加性对称幺半函子（定义 5.2.4）

$$(X, X^2, X^0) : \mathcal{D}^{\oplus} = (\mathcal{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus}) \longrightarrow \mathsf{Cat},$$

其格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} X$ （定义 6.2.1）是一个小置换范畴（定义 6.2.5 和引理 6.2.10）

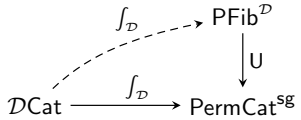
$$\left(\int_{\mathcal{D}} X, \square, (0, X^0 *), \beta^{\square}\right).$$

根据定理 6.7.8 $X \int_{\mathcal{D}} X$ ~~是~~一个伪对称 Cat- 多函子的对象赋值（定义 4.1.1）

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}.$$

此外，如果 D 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，那么它就是一个 Cat-多函子。

本节将说明，$\int_{\mathcal{D}}$ 可提升为针对 (7.3.18) 中的非对称 Cat-多函子 U 的非对称 Cat-多函子，如下所示。



此外，如果 $\beta^{\otimes} = 1$ 属于 D，那么这个提升是一个 Cat-多函子。换言之，它严格保持对称群作用。

对象赋值的扩张。 首先，我们将格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}} X$ 扩展为 D 上的置换余纤维化 U_X （定义 7.1.4）。

引理 7.4.1。 对于每个加性对称幺半函子

$$(X, X^2, X^0) : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat},$$

第一因子投影

$$\int_{\mathcal{D}} X \xrightarrow{U_X} \mathcal{D} \tag{7.4.2}$$

定义为

- 对每个对象 $(a,\ x) = a$，其中 $(a,\ x)$ 属于 $\int_{\mathcal{D}} X$，并且
- $UX(f, p) =$ 对于每个态射 (f, p)，都属于 $\int_{\mathcal{D}} X$

是 $\mathcal{D}$ 上的小置换余纤维化。

证明。给定

- an object $(a, x) \in \int_{\mathcal{D}} X$ and
- a morphism $f : a \longrightarrow b \in \mathcal{D}$,

前提升 (a, x) ; f 的选定的余笛卡尔提升（定义 7.1.1 (vii)）定义为 $\int_{\mathcal{D}} X$ 中的态射

$$(a, x) \xrightarrow{(f, 1_{f_* x})} (b, f_* x) \tag{7.4.3}$$

with

$$f_* = Xf : Xa \longrightarrow Xb.$$

根据 **JY21**, 10.1.11], 此定义使 U_X 成为 D 上的分裂余纤维化。定义 7.1.4 中的公理 (i) 至 (iii) 由以下内容推出

● (6.2.6) 至 (6.2.9) 中置换结构 (□,(0, X^0∗), $\beta^{\square}$) 的定义，以及

● 幺半约束的每个分量函子的函子性X^2 (5.2.7)。

至此，证明完成。 □

赋值 X U_X，其中 $U_X \mapsto \int_{\mathcal{D}} X$ $\mathcal{D}$ 属于 (7.4.2)，是提升后的格罗滕迪克构造的对象赋值。

提升多态射函子。 接下来我们注意到，$\int_{\mathcal{D}}$的每个多态射函子都取值于 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$。回忆一下，$\int_{\mathcal{D}}$的多态射函子属于

● 对于零元数输入，定义 6.3.1

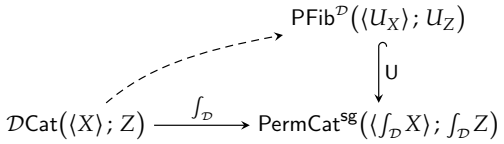
● 对于正元数输入，定义 6.3.3 和 6.4.1 以及引理 6.4.9。

对于接下来的几个结果，假设给定加性对称幺半函子

$$(Z, Z^2, Z^0) \quad \text{and} \quad \left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat} \tag{7.4.4}$$

其满足 $n \geq 0$。我们考虑实线箭头函子

(7.4.5)



with

- $\langle X \rangle = \langle X_j \rangle_{j=1}^{n}$, $\langle \int_{\mathcal{D}} X \rangle = \langle \int_{\mathcal{D}} X_j \rangle_{j=1}^{n}$, and $\langle U_X \rangle = \langle U_{X_j} \rangle_{j=1}^{n}$,
- each

$$\int_{\mathcal{D}} X_j \xrightarrow{U_{X_j}} \mathcal{D} \quad \text{and} \quad \int_{\mathcal{D}} Z \xrightarrow{U_Z} \mathcal{D}$$

  as in (7.4.2),
- $\int_{\mathcal{D}}$ the functor in (6.3.2) if $n = 0$ and (6.4.10) if $n > 0$, and
- U the subcategory inclusion in Lemma 7.2.26.

引理 7.4.6 和 7.4.7 表明， $\int_{\mathcal{D}}$ 可以如虚线箭头所示相对于 U 提升。首先，我们考虑元数为 0 的情形。

引理 7.4.6。 在 $n = 0$ 的情形下，(7.4.5) 的上下文中，函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle\rangle\,;\,\textstyle\int_{\mathcal{D}} Z\big)$$

经由子范畴 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle\rangle\,;\;U_Z\big)$ 分解，并给出一个同构

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow[\cong]{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle\rangle\,;\,U_Z\big).$$

证明。子范畴

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle\rangle\,;\,U_Z\big) \subset \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z$$

是 $1 \in \mathrm{D}$ 在U_Z 下的原像，其定义为

- 对对象应用说明 7.2.9(2)，以及
- 对态射应用解释 7.2.21(2)。

换言之，在 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}(\,;U_Z)$ 中

- 每个对象都具有形式 $(1,x)$，其中 $x \in Z1$ 是一个对象，并且
- 每个态射都具有形式

$$(1,x) \xrightarrow{(1_1,p)} (1,y)$$

对于某个态射 $p : x\, y$，它属于 $Z1$。

因此，(6.3.2) 中的多态射函子通过子范畴分解

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle\rangle\,;\,U_Z\big) \subset \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z = \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle\rangle\,;\,\textstyle\int_{\mathcal{D}} Z\big)$$

并给出一个同构

$$Z1 = \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow[\cong]{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle\rangle\,;\,U_Z\big)$$

的范畴。 □

接下来考虑正元数情形。在下面的一些图表中，符号∃ 和 ! 分别表示存在 和 唯一。

引理 7.4.7. 在(7.4.5) 所述情形中，若 $n > 0$，则函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle\textstyle\int_{\mathcal{D}} X\rangle\,;\,\textstyle\int_{\mathcal{D}} Z\big)$$

的像落在陪域的子范畴 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle U_X\rangle; U_Z\big)$ 中。

证明。首先考虑对象，即加性自然变换；接着考虑态射，即加性修正。

对象。给定一个加性自然变换 (5.2.13)

$$\big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\big\rangle_{j=1}^{n} \xrightarrow{\phi} (Z, Z^2, Z^0) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big),$$

我们必须证明这个强 n-线性函子（引理 6.3.15）

$$\prod_{j=1}^{n}\big(\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j\big) \xrightarrow{\left(\int_{\mathcal{D}}\phi\,,\,\langle(\int_{\mathcal{D}}\phi)_i^2\rangle_{i=1}^{n}\right)} \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z \tag{7.4.8}$$

是余笛卡尔的。根据引理 7.2.12，我们需要验证定义 7.2.2 中的公理 (ii) 至 (iv)。我们采用定义 6.3.3 中的记号。

公理 *(ii)*。$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 对应的图表 (7.2.4) 如下。

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j) & \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}\phi} & \int_{\mathcal{D}} Z \\ {\scriptstyle \Pi_j U_{X_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U_Z} \\ \mathcal{D}^n & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{D} \end{array}$$

该图表交换，这是因为

- U? 作为第一因子投影的定义 (7.4.2)，以及
- 分别关于对象和态射的定义 (6.3.7) 和 (6.3.10) $\int_{\mathcal{D}}\phi$ on。

这证明了公理 (ii)。

公理（*iii*）。对于每个$j \in \{1,\dots,n\}$，假设给定一个关于$U_{X_j} : \int_{\mathcal{D}} X j$ D的前提升 $(aj, xj)\,; fj$。其选定的余笛卡尔提升是态射 (7.4.3)

$$(a_j, x_j) \xrightarrow{\left(f_j\,,\,1_{(f_j)_* x_j}\right)} \left(b_j\,,\,(f_j)_* x_j\right) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} X_j.$$

By

- the definition (6.3.10) of $\int_{\mathcal{D}}\phi$ on morphisms and
- the functoriality of $\phi_{\langle b\rangle}$,

在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中，有如下态射等式。

$$\begin{aligned} &(\int_{\mathcal{D}}\phi)\left\langle (f_j\,,\,1_{(f_j)_* x_j})\right\rangle_{j=1}^{n} : (\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle (a_j, x_j)\rangle \longrightarrow (\int_{\mathcal{D}}\phi)\left\langle b_j, (f_j)_* x_j\right\rangle \\ &= \left(f\,,\,\phi_{\langle b\rangle}\left\langle 1_{(f_j)_* x_j}\right\rangle_{j=1}^{n}\right) : \left(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\right) \longrightarrow \left(b\,,\,\phi_{\langle b\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle\right) \\ &= \left(f\,,\,1_{f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle}\right) : \left(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\right) \longrightarrow \left(b\,,\,f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\right) \end{aligned}$$

根据定义 (7.4.3)，最后一个态射是该前提升的选定的余笛卡尔提升

$$\left\langle (\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle (a_j, x_j)\rangle\,; \otimes_{j=1}^{n} f_j\right\rangle = \left\langle \left(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\right); f\right\rangle$$

关于$U_Z : \int_{\mathcal{D}} Z$ D。因此，$\int_{\mathcal{D}}\phi$ 保留选定的余笛卡尔提升，从而证明了公理 (iii)。

公理（*iv*）。该公理由下式推出

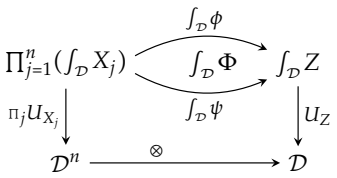
- 每个线性约束 $(\int_{\mathcal{D}}\phi)^2 i$ 的定义 (6.3.14)，以及
- 关于 $U_Z : \int_{\mathcal{D}} Z$ D 的每个前提升的选定余笛卡尔提升的定义 (7.4.3)。

我们已证明 (7.4.8) 中的 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 是余笛卡尔的，因此它是子范畴 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(U_X\,; U_Z)$ 中的一个对象。

态射。给定一个加性修正 (5.2.26)

$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\right\rangle_{j=1}^{n} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\Phi}} (Z, Z^2, Z^0) \quad \text{in} \quad \mathcal{D}\mathrm{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\, Z\big),$$

我们必须证明 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 的公理 (7.2.20)（引理 6.4.7），该公理断言以下两个复合自然变换相等。



这两个自然变换相等，这是因为

- 分量的定义 (6.4.3)

$$\left(\int_{\mathcal{D}}\Phi\right)_{\langle(a_j,x_j)\rangle} = \left(1_a\,,\,(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\right)$$

and

- 将 $U?$ 定义为第一因子投影的定义 (7.4.2)。

这表明 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 是子范畴 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(U_X;\ U_Z)$ 中的一个态射。 □

现在我们可以给出本章的主要结果了。

定理 7.4.9. 假设 $\mathcal{D}$ 是一个小紧双置换范畴。

(i) 存在一个非对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}} \tag{7.4.10}$$

定义如下

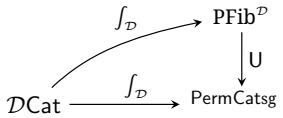
- 对象赋值

$$X \longmapsto \left(U_X : \textstyle\int_{\mathcal{D}} X \longrightarrow \mathcal{D}\right)$$

在 (7.4.2)和

- 引理 *7.4.6* 和 *7.4.7* 中的多态射函子。

(ii) 非对称 Cat-多函子的图表



是交换的，其中底部的 $\int_{\mathcal{D}}$ 和 U 分别来自 (6.7.9)和 (7.3.18)。 *(iii)* 若 $\mathcal{D}$ 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，则 *(7.4.10)* 中的 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子。

证明。根据定理 7.3.16，$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴，其带色单位和复合（定义 7.3.1）都通过引理 7.2.26 中的子范畴包含继承自 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ （定理 6.1.31）。后者是（7.3.18）中 U 的多态射函子。如果 $\beta^{\otimes} = 1$ 属于 D，则 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多范畴，其对称群作用继承自 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$。

断言 (i) 和 (ii) 由定理 6.7.8 (i)、定理 7.3.16 (i) 以及引理 7.4.1、7.4.6 和 7.4.7 得出。

断言 (iii) 可由定理 6.7.8 (ii) 和定理 7.3.16 (ii) 得出。 □

例 7.4.11. 设 D 是任意一个小型紧双置换范畴

$$\mathsf{Fin}^{\mathsf{sk}},\quad \Sigma,\quad \mathcal{F},\quad \text{and}\quad \mathcal{A}$$

分别见例 2.3.2、2.3.11、2.3.12 和 2.3.17。于是有以下结论。

- $\mathbf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴，而不是一个 Cat-多范畴，见例 7.3.20。

- 定理 7.4.9(i) 和 (ii) 适用于 D。
- $\int_{\mathcal{D}}$ （7.4.10）中并非一个Cat-多函子，因为 $\mathbf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 并不是一个 Cat-多范畴。

第8章

格罗滕迪克构造是一个Cat-多重等价

背景。 本章中，我们始终假设

$$\big(\mathcal{D},(\oplus,0,\beta^{\oplus}),(\otimes,1,\beta^{\otimes}),(\partial^{l},\partial^{r})\big)$$

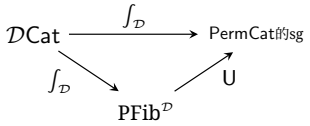
是一个小紧双置换范畴（定义 2.2.12），具有

- 加法结构 $D^{\oplus}=(D,\oplus,0,\beta^{\oplus})$ 和
- 乘法结构 $D^{\otimes}=(D,\otimes,1,\beta^{\otimes})$。

在定理 7.4.9 (ii) 中，我们注意到伪对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}}\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

在定理 6.7.8 中分解为经过非对称 Cat-多范畴 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$（定理 7.3.16）的两个非对称 Cat- 多函子，$\int_{\mathcal{D}}$（7.4.10）和 U（7.3.18）。



目的。回顾定义 3.3.1，Cat-多重等价是小 Cat-多范畴的 2-范畴 Cat-Multicat 中的一个等价。非对称变体的定义类似。根据定理 3.4.21a，Cat-多函子是 Cat-多重等价，当且仅当它本质满对象，并且在每个多态射范畴上都是同构。

本章的主要目的是通过证明非对称 Cat-多函子来加强上述分解

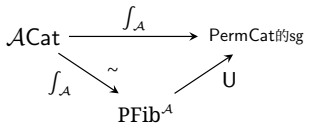
$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}}\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\tag{8.0.1}$$

是一个非对称 Cat-多重等价。此外，如果 D 中的乘法编织是恒等自然变换，那么这个 $\int_{\mathcal{D}}$是一个 Cat-多重等价。参见定理 8.4.17。这些断言是利用定理 3.4.21 证明的。

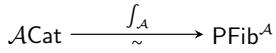
下表概述了两个 $\int_{\mathcal{D}}$和 U 的主要性质。我们分别将伪对称 和 非对称 简称为*ps* 和 *ns*。

Cat-多函子/多重等价		如果 $\beta^{\otimes}=1$在 D 中
$\int_{\mathcal{D}}:\mathsf{DCat}\longrightarrow\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$ (6.7.8)	ps Cat-多函子	Cat-多函子
$U:\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\longrightarrow\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$ (7.3.17)	ns Cat-多函子	Cat-多函子
$\int_{\mathcal{D}}:\mathsf{DCat}\xrightarrow{\sim}\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ (8.4.17)	ns Cat-多重等价	Cat-多重等价

逆 K理论的推论。 逆K理论函子（第 9 章和第 10 章）是两个函子的复合 $\int_{\mathcal{A}}\bigcirc A$，其中 A 是例 2.3.17 中的小紧双置换范畴。将定理 8.4.17 应用于 A，可知逆 K理论中的伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{A}}$可经由 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{A}}$分解，如下所示。



其第一个因子是非对称 Cat-多重等价



由格罗滕迪克构造给出。

组织结构。 如上所述，我们利用定理 3.4.21 证明 (8.0.1) 中的 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多重等价。换言之，我们必须证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 在对象上本质满，并且在每个多态射范畴上都是同构。在第 8.1 节中，我们首先证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 在对象上本质满。这意味着，任何从 D 出发的小置换余纤维化，在余笛卡尔 1-线性同构意义下，都是某个加性对称幺半函子的格罗滕迪克构造。

在第8.2节中，我们证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 的每个多态射函子在对象和态射集上都是单射。对象上的单射性意味着，每个加性自然变换都由其作为强多线性函子的格罗滕迪克构造唯一确定（引理 8.2.3）。态射集上的单射性意味着，每个加性修正都由其作为多线性自然变换的格罗滕迪克构造唯一确定（引理 8.2.11）。

在第8.3节中，我们证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 的每个多态射函子在对象上都是满射的。这意味着，$\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的每个余笛卡尔强 n-线性函子，都等于 DCat 中某个加性自然变换的格罗滕迪克构造。

在第8.4节中，我们证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 的每个多态射函子在态射集上都是满射的，从而完成定理 8.4.17 的证明。这意味着，每个余笛卡尔 n-线性变换，都等于某个加性修正的格罗滕迪克构造。此外，当 $\beta^{\otimes}=1$ 属于 D 时，证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 是 Cat-多重等价也不费额外功夫，因为本章的引理不依赖于 $\beta^{\otimes}$ 的任何特殊性质。因此，当 $\beta^{\otimes}=1$ 属于 D 时，定理 3.4.21 的对称情形适用。

我们提醒读者注意，迭代幺半积采用左规范化括号约定 1.1.24。

8.1. 对象上的本质满射性

本节包含了迈向证明定理 7.4.9 (i) 中的格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 是非对称 Cat-多重等价的第一项主要步骤。我们证明，在底层的一元 Cat-范畴之间，$\int_{\mathcal{D}}$ 在对象上本质满。为使论述更清晰，我们将本质满性的证明分为以下两部分：

(1) 引理 8.1.1 证明，任何分裂余纤维化 $P : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ 都可以通过格罗滕迪克构造实现为 $U_X : \int_{\mathsf{B}} X \to \mathsf{B}$，且存在同构 $\varphi : \int_{\mathsf{B}} X \xrightarrow{\cong} \mathsf{E}$，此同构同时保持余笛卡尔态射和选定的余笛卡尔提升。这一步只涉及分裂余纤维化，不涉及任何置换结构。

(2) $\int_{\mathcal{D}}$ 的本质满射性将在引理 8.1.8 中得到证明。对于小置换余纤维化 $P : \mathsf{E} \to \mathsf{D}$，我们首先在引理 8.1.1 中赋予 $X : \mathsf{D} \to \mathbf{Cat}$ 加性对称幺半函子 $\mathsf{D}^{\oplus} \to \mathbf{Cat}$ 的结构。然后我们证明 φ 是 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的余笛卡尔 1-线性同构。

正如第 7.1 节第一段所述，[**JY21**第 9 章和 10] 中关于纤维化与格罗滕迪克构造的结果，通过考虑对偶范畴之间的对偶函子，同样适用于我们当前的余纤维化语境。

引理 8.1.1。设 $P : \mathsf{E} \to \mathsf{B}$ 是一个分裂余纤维化。则存在

- 一个函子 $X : \mathsf{B} \to \mathbf{Cat}$ 以及
- 一个范畴同构

$$\int_{\mathsf{B}} X \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathsf{E} \tag{8.1.2}$$

that

(i) 使图表

$$\begin{array}{ccc} \int_{\mathsf{B}} X & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \mathsf{E} \\ & {\scriptstyle U_X} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle P} & \\ & \mathsf{B} & \end{array}$$

交换，并且

(ii) 保持余笛卡尔态射和选定的余笛卡尔提升。

证明。首先，我们构造函子 $X : \mathsf{B} \to \mathbf{Cat}$。

对象集。给定一个对象 $a \in \mathsf{B}$，定义子范畴

$$Xa = P^{-1}(a) \subset \mathsf{E}. \tag{8.1.3}$$

换言之，

- 一个对象 $x \in Xa$ 是 E 中满足 $Px = a$ 的对象，并且
- 一个态射 $p : x \to y$ 在 Xa 中是 E 中满足 $Pp = 1_a$ 在 B 中的态射。

态射。给定 B 中一个态射 $f : a \to b$，函子

$$P^{-1}(a) = Xa \xrightarrow{Xf} Xb = P^{-1}(b)$$

定义如下。

- 每个对象 $y \in P^{-1}(a)$ 被映射到陪域

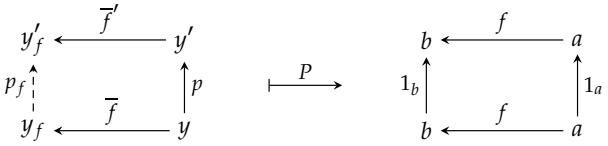
$$(Xf)y = y_f \in P^{-1}(b) \tag{8.1.4}$$

关于选定的余笛卡尔提升 $f : \bar{y} \to y$ 前提升 $y; f$，相对于 P（定义 7.1.1(vii)）。

- 每个态射 $p : y\ y_{f}$ 在 $P^{-1}(a)$ 中都被映射为唯一的 提升

$$(Xf)p = p_f : y_f \longrightarrow y'_f \quad \text{in} \quad P^{-1}(b) \tag{8.1.5}$$

前提升 $f, f_{f}p$; 1_b（定义 7.1.1 (iv)），如下图所示。



这里，$\overline{f}$和f_{f}分别是 $y; f$ 和 $y'; f$ 的选定的余笛卡尔提升。p_f的唯一存在性源于f是一个余笛卡尔态射。

函子性。X :B Cat 的函子性由以下内容推出：

- [**JY21**，10.4.7],其中表明X 是一个严格幺伪函子；以及
- 假设P 是一个劈裂的 余纤维化，这迫使X 的松函子性约束为恒等。

此外，根据 [**JY21**，10.1.11]第一因子投影函子 (7.4.2)

$$\int_{\mathsf{B}} X \xrightarrow{U_X} \mathsf{B}$$

是一个分裂余纤维化。

函子 $\varphi : \int_{\mathsf{B}} X \mathsf{E}$。对于每个对象 $(a, x) \in \int_{\mathsf{B}} X$，其中 $a \in \mathsf{B}$ 且 $x \in P^{-1}(a)$，定义对象

$$\varphi(a, x) = x \in \mathsf{E}. \tag{8.1.6}$$

设给定一个态射

$$(a, x) \xrightarrow{(f,p)} (b, y) \quad \text{in} \quad \int_{\mathsf{B}} X$$

with

- $f : a \longrightarrow b$ in B,
- $p : (Xf)x = x_f \longrightarrow y$ in $P^{-1}(b)$, and
- $\overline{f} : x \longrightarrow x_f$ the chosen opcartesian lift of $\langle x ; f \rangle$ with respect to P.

将 $\varphi(f, p)$ 定义为 E 中如下的复合。

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(a,x) & & \xrightarrow{\varphi(f,p)} & & \varphi(b,y) \\ \| & & & & \| \\ x & \xrightarrow{\overline{f}} & x_f & \xrightarrow{p} & y \end{array} \tag{8.1.7}$$

关于 φ 的性质。赋值 (8.1.6) 和 (8.1.7) 具有以下性质。

- 根据 [**JY21**，10.4.12] $\varphi : \int_{\mathsf{B}} X \to \mathsf{E}$ 是一个函子，满足

$$U_X = P\varphi : \int_{\mathsf{B}} X \longrightarrow \mathsf{B}.$$

- 根据 [**JY21**，10.4.23] φ 是同构，并保留余笛卡尔态射。

要证明 φ 保留选定的余笛卡尔提升，考虑相对于 U_X 的一个前提升 (a, x)；f。其选定的余笛卡尔提升为 (7.4.3)

$$(a,x) \xrightarrow{(f,1_{x_f})} (b, f_*x = x_f) \quad \text{in} \quad \textstyle\int_{\mathsf{B}} X.$$

根据 (8.1.7)，其在 φ 下的像为

$$\varphi(f, 1_{x_f}) = 1_{x_f} \circ \overline{f} = \overline{f} \quad \text{in} \quad \mathsf{E}.$$

这是关于 P 的 $\varphi(a,\ x) = x$；f 的选定余笛卡尔提升。 □

限制到一元多态射范畴，每个非对称 Cat-多范畴都有一个底层 2-范畴（例 3.1.18 和命题 1.3.4）。通过同样的限制，非对称 Cat-多函子也有一个底层 2-函子。接下来我们观察到，格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 的底层 2-函子在对象上是本质满的。

引理 8.1.8。 设 $\mathcal{D}$ 是一个小型紧双置换范畴。那么，(7.4.10) 中的非对称Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$$

在对象上是本质满的。

证明。设给定 $\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的一个对象，即一个小置换的余笛卡尔纤维化（定义 7.1.4）

$$(\mathsf{E}, \oplus, e, \beta) \xrightarrow{P} \mathcal{D}^{\oplus} = (\mathcal{D}, \oplus, 0, \beta^{\oplus}).$$

我们必须证明存在

- DCat 中的一个对象，即一个加性对称幺半函子（定义 5.2.4）

$$(X, X^2, X^0) : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

and

- $\mathsf{PFib}_{\mathcal{D}}$ 中的一个可逆余笛卡尔 1-线性函子（定义 7.2.2）

$$\left(\textstyle\int_{\mathcal{D}} X \xrightarrow{U_X} \mathcal{D}\right) \xrightarrow[\cong]{\varphi} \left(\mathsf{E} \xrightarrow{P} \mathcal{D}\right).$$

根据例 7.2.15 φ，这恰好是一个严格对称幺半同构（7.1.6）

$$\textstyle\int_{\mathcal{D}} X \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathsf{E}$$

that

- 满足$U_X = P\varphi$ 并且
- 保持选定的余笛卡尔提升。

我们使用引理 7.4.1 以及引理 8.1.1 中的函子，其中 $\mathsf{B} = \mathsf{D}$，即

$$\mathcal{D} \xrightarrow{X} \mathsf{Cat} \quad \text{and} \quad \textstyle\int_{\mathcal{D}} X \xrightarrow[\cong]{\varphi} \mathsf{E}.$$

接下来只需

- 为函子 X（定义见 (8.1.3) 至 (8.1.5)）赋予结构 $(X2, X^0)$，使其成为对称幺半函子，并

● 证明函子 φ（定义见 (8.1.6) 和 (8.1.7)）是严格对称幺半的。

为使表述更清晰，我们将这部分证明分成几个步骤，首先构造X^0 和X^2。

步骤 1：X的单位约束

定义单位约束

$$\mathbf{1} \xrightarrow{X^0} X0 = P^{-1}(0) \subset \mathsf{E}$$

由单位对象（5.2.6）

$$X^0{}_* = e \in \mathsf{E}. \tag{8.1.9}$$

这是良定义的，因为P 是严格对称幺半的（7.1.6），其中包含以下性质

$$Pe = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}.$$

步骤 2：X的幺半约束

对于对象a、$b \in \mathsf{D}$，幺半约束X^2(5.2.7)的a、b-分量函子

$$P^{-1}(a) \times P^{-1}(b) = Xa \times Xb \xrightarrow{X^2_{a,b}} X(a \oplus b) = P^{-1}(a \oplus b), \tag{8.1.10}$$

定义为

$$X^2_{a,b}(x, y) = x \oplus y \in \mathsf{E} \tag{8.1.11}$$

对于对象和态射（x，y）$\in P^{-1}(a) \times P^{-1}(b)$。

● 赋值$X^2{}_{a,b}$ 是良定义的，因为P 严格保持幺半积（7.1.6）。

● $X^2{}_{a,b}$ 的函子性源于 E 中 $\oplus$ 的函子性。

步骤 3：幺半约束的自然性

对于态射

$$a \xrightarrow{f} b \quad \text{and} \quad a' \xrightarrow{f'} b' \quad \text{in} \quad \mathcal{D},$$

X^2 的自然性图表 (8.1.10) 如下，其中 $(-)_* = X(-)$。

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(a) \times P^{-1}(a') & \xrightarrow{\oplus} & P^{-1}(a \oplus a') \\ {\scriptstyle f_* \times f'_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f \oplus f')_*} \\ P^{-1}(b) \times P^{-1}(b') & \xrightarrow{\oplus} & P^{-1}(b \oplus b') \end{array} \tag{8.1.12}$$

对象。E 中的以下等式表明，对于任意一对对象 $(x,x') \in P^{-1}(a) \times P^{-1}(a')$，图表 (8.1.12) 交换。

$$\begin{aligned} (f \oplus f')_*(x \oplus x') &= (x \oplus x')_{f \oplus f'} && \text{by (8.1.4)} \\ &= x_f \oplus x'_{f'} && \text{by Definition 7.1.4 (ii)} \\ &= f_* x \oplus f'_* x' && \text{by (8.1.4)} \end{aligned}$$

在上述计算中，我们提醒读者注意我们的记号：

- $\overline{f}:x\,x_f$是相对于P选定的$x;f$的余笛卡尔提升。
- $\overline{f}_\prime:x_\prime,x_{f_\prime}$是$x_\prime;f_\prime$的选定的余笛卡尔提升。
- $\overline{f\oplus f_\prime}=\overline{f}\oplus\overline{f}_\prime:x\oplus x_\prime,(x\oplus x_\prime)_{f\oplus f_\prime}$是$x\oplus x_\prime;f\oplus f_\prime$的选定的余笛卡尔提升，其中的等式由定义 7.1.4 中的公理 (ii) 得出。

态射。要检查 (8.1.12) 在态射上的交换性，假设给定一对态射

$$x\xrightarrow{p}y\in P^{-1}(a)\quad\text{and}\quad x'\xrightarrow{p'}y'\in P^{-1}(a'). \tag{8.1.13}$$

根据定义 7.1.4 (ii) 和 (8.1.5)，$P^{-1}(b\oplus b')$ 中的态射

$$(f\oplus f')_*(p\oplus p')=(p\oplus p')_{f\oplus f'}:(x\oplus x')_{f\oplus f'}\longrightarrow(y\oplus y')_{f\oplus f'}$$

是前提升的唯一的提升

$$\left\langle\overline{f}\oplus\overline{f}',(\overline{f}\oplus\overline{f}')(p\oplus p');1_{b\oplus b'}\right\rangle \tag{8.1.14}$$

如图所示。

$$\begin{array}{ccc}
(y\oplus y')_{f\oplus f'}=y_f\oplus y'_{f'} & \xleftarrow{\overline{f}\oplus\overline{f}'} & y\oplus y' \\
(p\oplus p')_{f\oplus f'}\uparrow & & \uparrow p\oplus p' \\
(x\oplus x')_{f\oplus f'}=x_f\oplus x'_{f'} & \xleftarrow{\overline{f}\oplus\overline{f}'} & x\oplus x'
\end{array}
\quad\overset{P}{\longmapsto}\quad
\begin{array}{ccc}
b\oplus b' & \xleftarrow{f\oplus f'} & a\oplus a' \\
1_{b\oplus b'}\uparrow & & \uparrow 1_{a\oplus a'} \\
b\oplus b' & \xleftarrow{f\oplus f'} & a\oplus a'
\end{array}$$

根据 (8.1.5)，对于 p_f和 $p'_{f'}$，其和

$$p_f\oplus p'_{f'}=f_*p\oplus f'_*p'$$

也是前提升 (8.1.14) 的一个提升。因此，由唯一性可得

$$f_*p\oplus f'_*p'=(f\oplus f')_*(p\oplus p').$$

这证明图表 (8.1.12) 是交换的。

步骤 4：对称幺半函子公理

接下来，我们验证 (X,X^2,X^0) 是一个对称幺半函子。

单位性。由于 $\mathrm{D}^\oplus$ 是一个置换范畴，根据定义 (8.1.9) 和 (8.1.11)，单位图表 (1.1.18) 如下。

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1}\times P^{-1}(b) & \xrightarrow{\cong} & P^{-1}(b) \\
{\scriptstyle e\times 1}\downarrow & & \| \\
P^{-1}(0)\times P^{-1}(b) & \xrightarrow{\oplus} & P^{-1}(0\oplus b)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
P^{-1}(a)\times\mathbf{1} & \xrightarrow{\cong} & P^{-1}(a) \\
{\scriptstyle 1\times e}\downarrow & & \| \\
P^{-1}(a)\times P^{-1}(0) & \xrightarrow{\oplus} & P^{-1}(a\oplus 0)
\end{array}$$

这两个图表可交换，因为 e 是置换范畴 E 中的幺半单位。

结合律。对于对象 a、b、$c \in \mathrm{D}$，(X,X^2) 的结合图表 (1.1.19) 如下。

$$\begin{array}{ccc}
(P^{-1}(a)\times P^{-1}(b))\times P^{-1}(c) & \xrightarrow{\cong} & P^{-1}(a)\times(P^{-1}(b)\times P^{-1}(c)) \\
{\scriptstyle \oplus\times 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\times\oplus} \\
P^{-1}(a\oplus b)\times P^{-1}(c) & & P^{-1}(a)\oplus P^{-1}(b\oplus c) \\
{\scriptstyle \oplus}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \oplus} \\
P^{-1}(a\oplus b\oplus c) & = & P^{-1}(a\oplus b\oplus c)
\end{array}$$

该图表交换，因为 $\oplus$ 在 E 中是严格结合的。

编织。记作

- $\beta^{\oplus} : a \oplus a' \to a' \oplus a$ 在 D 中的编织，
- $\beta^{\oplus}_* = X\beta^{\oplus} : P^{-1}(a \oplus a') \to P^{-1}(a' \oplus a)$ 如 (8.1.3) 至 (8.1.5) 中所示，并且
- ξ (Cat, $\times$)中的编织，

(X,X^2)的相容性图表 (1.1.20) 与编织如下。

$$\begin{array}{ccc}
P^{-1}(a)\times P^{-1}(a') & \xrightarrow{\oplus} & P^{-1}(a\oplus a') \\
{\scriptstyle \xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta^{\oplus}_*} \\
P^{-1}(a')\times P^{-1}(a) & \xrightarrow{\oplus} & P^{-1}(a'\oplus a)
\end{array} \tag{8.1.15}$$

E中的以下等式表明，对于任意一对对象 $(x, x') \in P^{-1}(a)\times P^{-1}(a')$，图表 (8.1.15) 是交换的。

$$\begin{aligned}
\beta^{\oplus}_*(x\oplus x') &= (x\oplus x')_{\beta^{\oplus}} && \text{by (8.1.4)} \\
&= x'\oplus x && \text{by Definition 7.1.4 (iii)} \\
&= (\oplus\circ\xi)(x,x')
\end{aligned}$$

为了检验 (8.1.15) 在态射上的交换性，设给定一对态射 $(p, p') \in P^{-1}(a)\times P^{-1}(a')$，如 (8.1.13) 所示。根据定义 7.1.4 (iii) 和 (8.1.5)，$P^{-1}(a'\oplus a)$中的态射

$$\beta^{\oplus}_*(p\oplus p') = (p\oplus p')_{\beta^{\oplus}} : (x\oplus x')_{\beta^{\oplus}} \longrightarrow (y\oplus y')_{\beta^{\oplus}}$$

是前提升的唯一 提升

$$\langle \beta_{x,x'}, \beta_{y,y'}(p\oplus p'); 1_{a'\oplus a}\rangle \tag{8.1.16}$$

如下图所示。

$$\begin{array}{ccc}
(y\oplus y')_{\beta^{\oplus}} = y'\oplus y & \xleftarrow{\beta_{y,y'}} & y\oplus y' \\
(p\oplus p')_{\beta^{\oplus}} \uparrow & & \uparrow p\oplus p' \\
(x\oplus x')_{\beta^{\oplus}} = x'\oplus x & \xleftarrow{\beta_{x,x'}} & x\oplus x'
\end{array}
\quad\overset{P}{\longmapsto}\quad
\begin{array}{ccc}
a'\oplus a & \xleftarrow{\beta^{\oplus}_{a,a'}} & a\oplus a' \\
1_{a'\oplus a}\uparrow & & \uparrow 1_{a\oplus a'} \\
a'\oplus a & \xleftarrow{\beta^{\oplus}_{a,a'}} & a\oplus a'
\end{array}$$

由 β 的自然性，和 $p'\oplus p$ 也是前提升（8.1.16）的提升。因此，根据唯一性，

$$\beta^{\oplus}_*(p\oplus p') = (p\oplus p')_{\beta^{\oplus}} = p'\oplus p.$$

这证明了图表 (8.1.15) 是交换的。我们已经证明 (X,X^2,X^0) 是一个对称幺半函子。

步骤5： φ 的严格对称幺半性

接下来，我们检验这个范畴同构

$$\big(\textstyle\int_{\mathcal{D}} X, \square, (0,e), \beta^{\square}\big) \xrightarrow[\cong]{\varphi} (\mathsf{E}, \oplus, e, \beta),$$

由 (8.1.6) 和 (8.1.7) 定义的范畴同构，是一个如 (7.1.6) 中所述的严格对称幺半函子。

幺半单位。函子 φ 保持幺半单位，因为根据定义 (8.1.6)，

$$\varphi(0,e) = e \in \mathsf{E}.$$

对象。对于对象 (a,x) 和 (b,y)，函子 φ 通过以下在 E 中的等式保持对象上的幺半积：$\in \int_{\mathcal{D}} X$。

$$\begin{aligned}
\varphi\big((a,x)\square(b,y)\big) &= \varphi(a\oplus b, x\oplus y) && \text{by (6.2.7) and (8.1.11)}\\
&= x\oplus y && \text{by (8.1.6)}\\
&= \varphi(a,x)\oplus\varphi(b,y) && \text{by (8.1.6)}
\end{aligned}$$

态射。为了证明 φ 保持态射上的幺半积，设 $\int_{\mathcal{D}} X$ 中给定两个态射，

$$(a,x) \xrightarrow{(f,p)} (a',x') \quad \text{and} \quad (b,y) \xrightarrow{(g,q)} (b',y'),$$

with

- $f : a \longrightarrow a'$ and $g : b \longrightarrow b'$ in $\mathcal{D}$,
- $p : f_* x = x_f \longrightarrow x'$ in $Xa' = P^{-1}(a')$ by (8.1.3) and (8.1.4), and
- $q : g_* y = y_g \longrightarrow y'$ in $Xb' = P^{-1}(b')$.

Here

$$x \xrightarrow{\overline{f}} x_f \quad \text{and} \quad y \xrightarrow{\overline{g}} y_g \quad \text{in} \quad \mathsf{E}$$

分别是关于 P 的前提升 $x; f$ 和 $y; g$ 的选定的余笛卡尔提升。函子 φ 通过 E 中的以下态射等式保持态射上的幺半积。

$$\begin{aligned}
\varphi\big((f,p)\square(g,q)\big) &= \varphi(f\oplus g, p\oplus q) && \text{by (6.2.8) and (8.1.11)}\\
&= (p\oplus q)\overline{(f\oplus g)} && \text{by (8.1.7)}\\
&= (p\oplus q)(\overline{f}\oplus\overline{g}) && \text{by Definition 7.1.4 (ii)}\\
&= p\overline{f}\oplus q\overline{g} && \text{by functoriality of } \oplus\\
&= \varphi(f,p)\oplus\varphi(g,q) && \text{by (8.1.7)}
\end{aligned}$$

编织。函子 φ 通过 E 中的以下态射等式保持编织。

$$\begin{aligned}
\varphi\beta^{\square}_{(a,x),(b,y)} &= \varphi(\beta^{\oplus}_{a,b}, 1_{y\oplus x}) && \text{by (6.2.9) and (8.1.11)}\\
&= 1_{y\oplus x}\overline{\beta^{\oplus}_{a,b}} && \text{by (8.1.7)}\\
&= \beta_{x,y} && \text{by Definition 7.1.4 (iii)}\\
&= \beta_{\varphi(a,x),\varphi(b,y)} && \text{by (8.1.6)}
\end{aligned}$$

因此，我们可以将 φ 的单位约束 φ^0 和幺半约束 φ^2 定义为恒等变换，而 $(\varphi, \varphi^2, \varphi^0)$ 是一个严格对称幺半函子。□

8.2. 多态射范畴上的忠实性

在本章余下部分，假设

$$(Z, Z^2, Z^0) \quad \text{and} \quad \big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \big\rangle_{j=1}^n : \mathcal{D}^{\oplus} \longrightarrow \mathsf{Cat} \tag{8.2.1}$$

是加性对称幺半函子（定义 5.2.4），其中 $n \geq 0$。我们使用 (7.4.5) 中的记号，因此

$$\langle X \rangle = \langle X_j \rangle_{j=1}^n, \quad \langle \textstyle\int_{\mathcal{D}} X \rangle = \langle \textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j \rangle_{j=1}^n, \quad \text{and} \quad \langle U_X \rangle = \langle U_{X_j} \rangle_{j=1}^n \tag{8.2.2}$$

其中每个 $U_{X_j} : \int_{\mathcal{D}} Xj$ D 都是引理 7.4.1 中的小置换余纤维化。

根据引理 7.4.6，零元数多态射函子是一个同构

$$Z1 = \mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle\,;\, Z\big) \xrightarrow[\cong]{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle\rangle\,;\, U_Z\big) = U_Z^{-1}(1)$$

其中 $U_Z : \int_{\mathcal{D}} Z$ D（引理 7.4.1）。我们的下一个目标是证明 $\int_{\mathcal{D}}$ 的多态射函子对于正元数输入也都是同构。在本节中，我们证明它们在对象和态射上都是单射；见引理 8.2.3 和 8.2.11。根据定义 5.2.31，DCat(X ; Z) 中的对象和态射分别是加性自然变换（5.2.13）和加性修正（5.2.26）。

引理 8.2.3. 对于 $n > 0$，引理 *7.4.7* 中的函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\, Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle U_X\rangle\,;\, U_Z\big)$$

是对象上的单射。

证明。设给定加性自然变换 (5.2.13)

$$\big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \big\rangle_{j=1}^n \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} (Z, Z^2, Z^0) \tag{8.2.4}$$

使得以下两个强 n-线性函子（引理 6.3.15）相等。

$$\textstyle\prod_{j=1}^n (\int_{\mathcal{D}} X_j) \underset{(\int_{\mathcal{D}}\psi\,,\,\langle(\int_{\mathcal{D}}\psi)_i^2\rangle_{i=1}^n)}{\overset{(\int_{\mathcal{D}}\phi\,,\,\langle(\int_{\mathcal{D}}\phi)_i^2\rangle_{i=1}^n)}{\rightrightarrows}} \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z \tag{8.2.5}$$

我们必须证明 $\phi = \psi$。这些加性自然变换由以下 ponent函子组成 - ponent函子 (5.1.7)

$$\textstyle\prod_{j=1}^n X_j a_j \underset{\psi_{\langle a\rangle}}{\overset{\phi_{\langle a\rangle}}{\rightrightarrows}} Za \tag{8.2.6}$$

对于每个由n个对象组成的对象组

$$\langle a \rangle = \langle a_j \rangle_{j=1}^n \in \mathcal{D}^n \quad \text{with} \quad a = \textstyle\bigotimes_{j=1}^n a_j \in \mathcal{D}. \tag{8.2.7}$$

我们必须证明 $\phi_{\langle a\rangle} = \psi_{\langle a\rangle}$ 是函子。

对象。对于每个由n个对象组成的对象组

$$\langle x \rangle = \langle x_j \rangle_{j=1}^n \in \textstyle\prod_{j=1}^n X_j a_j \tag{8.2.8}$$

所需的等式，

$$\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle = \psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \quad \text{in} \quad Za,$$

可由 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下等式推出。

$$\begin{aligned}\big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) &= (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle(a_j,x_j)\rangle && \text{by (6.3.7)}\\ &= (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\psi)\langle(a_j,x_j)\rangle && \text{by (8.2.5)}\\ &= \big(a\,,\,\psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) && \text{by (6.3.7)}\end{aligned}$$

态射。对于每个由态射组成的n元组

$$\langle p\rangle = \big\langle p_j : x_j \longrightarrow y_j\big\rangle_{j=1}^{n} \in \textstyle\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \tag{8.2.9}$$

考虑由态射组成的n元组

$$\big\langle (1_{a_j}, p_j) : (a_j, x_j) \longrightarrow (a_j, y_j)\big\rangle_{j=1}^{n} \in \textstyle\prod_{j=1}^{n} (\int_{\mathcal{D}} X_j).$$

所需的等式,

$$\phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle = \psi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle \quad \text{in} \quad Za,$$

可由 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下态射等式推出。

$$\begin{aligned}\big(1_a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle\big) &= (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle(1_{a_j},p_j)\rangle && \text{by (6.3.10)}\\ &= (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\psi)\langle(1_{a_j},p_j)\rangle && \text{by (8.2.5)}\\ &= \big(1_a\,,\,\psi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle\big) && \text{by (6.3.10)}\end{aligned}$$

这证明 $\phi_{\langle a\rangle} = \psi_{\langle a\rangle}$ 属于 (8.2.6)。 □

注记 8.2.10. 引理 8.2.3 的证明仅使用了 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ and $\int_{\mathcal{D}}\psi$ 在对象上的赋值，以及在形如 $(1_{a_j}, p_j)$ 的态射上的赋值。其线性约束 $(\int_{\mathcal{D}}\phi)_{ii=1}^{2n}$ and $(\int_{\mathcal{D}}\psi)_{ii=1}^{2n}$ 在证明中并未使用。

引理 8.2.11. 对于 $n > 0$，引理 *7.4.7* 中的函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle U_X\rangle\,;\,U_Z\big)$$

在态射集上是单射。

证明。设给定加性自然变换 ϕ and ψ，如 (8.2.4) 中所示，以及加性修改 (5.2.26)

$$\big\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\big\rangle_{j=1}^{n} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\Phi \quad \Theta}} (Z, Z^2, Z^0) \tag{8.2.12}$$

使得以下两个n-线性自然变换 (6.4.2) 相等。

$$\textstyle\prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j) \underset{\int_{\mathcal{D}}\psi}{\overset{\int_{\mathcal{D}}\phi}{\int_{\mathcal{D}}\Phi \quad \int_{\mathcal{D}}\Theta}} \int_{\mathcal{D}} Z \tag{8.2.13}$$

我们必须证明 $\Phi = \Theta$。

采用 (8.2.6) 和 (8.2.7) 中的记号， Φ 和 Θ 由以下分量自然变换 (5.1.11) 构成。

$$\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \underset{\Phi_{\langle a\rangle}}{\overset{\phi_{\langle a\rangle}}{\rightrightarrows}} \underset{\Theta_{\langle a\rangle}}{\overset{\psi_{\langle a\rangle}}{\rightrightarrows}} Za \tag{8.2.14}$$

对于 (8.2.8) 中的每个n元对象组 $x \in \prod_{j=1}^{n} X_j a_j$ ，所需的等式，

$$(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle} = (\Theta_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle} : \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \longrightarrow \psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \quad \text{in} \quad Za,$$

由 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中以下的态射等式得出。

$$\begin{aligned} \big(1_a\,,\,(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\big) &= (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\Phi)_{\langle (a_j,x_j)\rangle} && \text{by (6.4.3)} \\ &= (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\Theta)_{\langle (a_j,x_j)\rangle} && \text{by (8.2.13)} \\ &= \big(1_a\,,\,(\Theta_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\big) && \text{by (6.4.3)} \end{aligned}$$

这证明了 $\Phi_{\langle a\rangle} = \Theta_{\langle a\rangle}$ 中的 (8.2.14)。 □

8.3. 多态射范畴上的对象满性

我们继续使用 (8.2.1)、(8.2.2) 以及 (8.2.7) 至 (8.2.9) 中的记号，其中 $n > 0$。在引理 8.2.3 和 8.2.11 中，我们注意到分量函子（引理 7.4.7）

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow{\ \int_{\mathcal{D}}\ } \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle U_X\rangle\,;\,U_Z\big)$$

在对象和态射集上都是单射。本节将证明这些分量函子在对象上是满射的。回顾定义 7.2.25，

$$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle U_X\rangle\,;\,U_Z\big) \subset \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \textstyle\int_{\mathcal{D}} X\rangle\,;\,\int_{\mathcal{D}} Z\big)$$

是具有以下对象的子范畴：

- 余笛卡尔强 n-线性函子（定义 7.2.2），以及
- 余笛卡尔 n-线性变换（定义 7.2.18），作为态射。

以下是本节的概要。

- 在定义 8.3.1 中，我们将一个加性自然变换 ϕ （属于 DCat(X; Z)）的数据与 PFib$_{\mathcal{D}}$(U_X; U_Z) 中的每个余笛卡尔强n-线性函子F 相关联。正如我们在说明 8.3.10 中讨论的，投影公理 (7.2.4) 在此定义中起着关键作用。
- 引理 8.3.12 和引理 8.3.13 表明， ϕ 是一个自然变换 (5.1.5)。
- 引理 8.3.20 和引理 8.3.22 表明， ϕ 是一个加性自然变换（定义 5.2.12）。
- 引理 8.3.26 表明， $\int_{\mathcal{D}}\phi = F$ 是强n-线性函子。这足以证明 $\int_{\mathcal{D}}$的分量函子具有对象满射性，因为余笛卡尔n-线性函子是具有额外性质、但没有额外结构的n-线性函子（说明 7.2.9 (1)）。

定义 8.3.1. 设给定一个余笛卡尔强n线性函子

$$\langle U_X\rangle \xrightarrow{\ (F\,,\,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^{n})\ } U_Z. \tag{8.3.2}$$

这意味着一个强n线性函子（定义 6.1.4）

$$\prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j) \xrightarrow{\left(F,\langle F_j^2\rangle_{j=1}^{n}\right)} \int_{\mathcal{D}} Z \tag{8.3.3}$$

满足定义 7.2.2 中的公理 (i) 至 (iv)。定义加性自然变换 (5.2.13) 的数据

$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\right\rangle_{j=1}^{n} \xrightarrow{\phi} (Z, Z^2, Z^0) \tag{8.3.4}$$

其分量函子为

$$\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \xrightarrow{\phi_{\langle a\rangle}} Za \tag{8.3.5}$$

如下，其中我们使用 (8.2.7) 至 (8.2.9) 中的记号。

对象集： 对于每个对象的 n 元组 $x \in \prod_{j=1}^{n} Xiaj$，定义对象

$$\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle = F_2\langle x\rangle \quad \text{in} \quad Za \tag{8.3.6}$$

其中 F_2x 是对象中的第二个条目

$$F\langle (a_j, x_j)\rangle = \left(a, F_2\langle x\rangle\right) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} Z. \tag{8.3.7}$$

态射： 对于每个由态射组成的n元组$p\in \prod_{j=1}^{n} Xiaj$，定义态射

$$\phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle = F_2\langle p\rangle : F_2\langle x\rangle \longrightarrow F_2\langle y\rangle \quad \text{in} \quad Za \tag{8.3.8}$$

其中F_2p是该态射中的第二项

$$F\langle (1_{a_j}, p_j)\rangle = \left(1_a, F_2\langle p\rangle\right) \quad \text{in} \quad \int_{\mathcal{D}} Z. \tag{8.3.9}$$

这就完成了 (8.3.4) 中 ϕ 的定义。

说明 8.3.10。 (8.3.3) 中F 的投影公理 (7.2.4) 如下所示，为函子的交换图。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j) & \xrightarrow{F} & \int_{\mathcal{D}} Z \\ {\scriptstyle \sqcap_j U_{X_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U_Z} \\ \mathcal{D}^n & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{D} \end{array} \tag{8.3.11}$$

由于每个$U_?$ (7.4.2) 都是第一因子投影，在对象上计算交换图 (8.3.11)

$$\langle (a_j, x_j)\rangle \in \prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j)$$

得到等式

$$U_Z F\langle (a_j, x_j)\rangle = \otimes_{j=1}^{n} U_{X_j}(a_j, x_j) = \otimes_{j=1}^{n} a_j = a.$$

因此，该对象的第一项

$$F\langle (a_j, x_j)\rangle \in \int_{\mathcal{D}} Z$$

是 一个 $\in$ D。这就是 (8.3.7) 的含义。

同样，在态射处对交换图（8.3.11）求值

$$\left\langle (1_{a_j}, p_j) : (a_j, x_j) \longrightarrow (a_j, y_j)\right\rangle \in \prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j)$$

得到态射等式

$$U_Z F\langle(1_{a_j}, p_j)\rangle = \otimes_{j=1}^n U_{X_j}(1_{a_j}, p_j) = \otimes_{j=1}^n 1_{a_j} = 1_a.$$

因此，态射的第一项

$$F\langle(1_{a_j}, p_j)\rangle \in \int_{\mathcal{D}} Z$$

是 1_a。这就是 (8.3.9) 的含义。

在本节余下部分，我们将证明 (8.3.4) 中的 ϕ 是一个加性自然变换（定义 5.2.12），使得

$$\left(\int_{\mathcal{D}}\phi, \langle(\int_{\mathcal{D}}\phi)_j^2\rangle_{j=1}^n\right) = \left(F, \langle F_j^2\rangle_{j=1}^n\right)$$

作为强n-线性函子，其中左侧来自引理 6.3.15。

自然性。 我们先证明 ϕ 的每个分量都是良定义的。

引理 8.3.12。 *(8.3.5)* 中的每个分量 $\phi_{\langle a\rangle}$ 都是一个函子。

证明。$\int_{\mathcal{D}} Z$ 中有如下态射等式。

$$\begin{aligned}
\left(1_a, F_2\langle 1_{x_j}\rangle\right) &= F\langle(1_{a_j}, 1_{x_j})\rangle && \text{by (8.3.9)}\\
&= F\langle 1_{(a_j, x_j)}\rangle && \text{by (6.2.2)}\\
&= 1_{F\langle(a_j, x_j)\rangle} && \text{by functoriality of } F\\
&= 1_{(a, F_2\langle x\rangle)} && \text{by (8.3.7)}\\
&= \left(1_a, 1_{F_2\langle x\rangle}\right) && \text{by (6.2.2)}
\end{aligned}$$

因此，根据定义 (8.3.6) 和 (8.3.8)， $\phi_{\langle a\rangle}$ 保持恒等态射。

对于态射

$$x_j \xrightarrow{p_j} y_j \xrightarrow{q_j} z_j \quad \text{in} \quad X_j a_j$$

$\int_{\mathcal{D}} Z$ 中有如下态射等式。

$$\begin{aligned}
\left(1_a, F_2\langle q_j p_j\rangle\right) &= F\langle(1_{a_j}, q_j p_j)\rangle && \text{by (8.3.9)}\\
&= F\left\langle(1_{a_j}, q_j)\circ(1_{a_j}, p_j)\right\rangle && \text{by (6.2.3)}\\
&= F\langle(1_{a_j}, q_j)\rangle \circ F\langle(1_{a_j}, p_j)\rangle && \text{by functoriality of } F\\
&= \left(1_a, F_2\langle q\rangle\right)\circ\left(1_a, F_2\langle p\rangle\right) && \text{by (8.3.9)}\\
&= \left(1_a, F_2\langle q\rangle \circ F_2\langle p\rangle\right) && \text{by (6.2.3)}
\end{aligned}$$

因此，根据定义 (8.3.8)， $\phi_{\langle a\rangle}$ 保持态射复合。 □

接下来我们证明

$$\otimes_{j=1}^n X_j \xrightarrow{\phi} Z$$

是一个自然变换（5.1.5）。下文将Zf记作f_*，并将$Xjfi$记作（fi）$_*$。

引理8.3.13。 采用（5.1.8）和（5.1.9）中的记号，以及（8.3.5）中的分量函子 $\phi_{\langle a\rangle}$，则下列自然性图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j=1}^n X_j a_j & \xrightarrow{\phi_{\langle a\rangle}} & Za \\ {\scriptstyle \prod_{j=1}^n (f_j)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \prod_{j=1}^n X_j a'_j & \xrightarrow{\phi_{\langle a'\rangle}} & Za' \end{array} \tag{8.3.14}$$

证明。我们先在对象上，再在态射上检验 (8.3.14) 的交换性。

对象。设给定一个对象的 n 元组 $x \in \prod_{j=1}^n X_j a_j$。考虑关于 $U_Z : \int_{\mathcal{D}} Z \to \mathrm{D}$ 的前提升

$$\left\langle F\langle (a_j, x_j)\rangle ; \otimes_{j=1}^n f_j \right\rangle = \left\langle (a, \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle) ; f \right\rangle \tag{8.3.15}$$

并满足 (8.3.6) 和 (8.3.7) 中的等式。如下有两种方式可以得到其选定的余笛卡尔提升。

● 根据定义 (7.4.3)，(8.3.15) 的选定余笛卡尔提升是态射

$$\big(a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \xrightarrow{\big(f\,,\, 1_{f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle}\big)} \big(a'\,,\, f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \quad \text{in} \quad \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z. \tag{8.3.16}$$

● 另一方面，对于每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，关于 $U_{X_j} : \int_{\mathcal{D}} X_j \to \mathrm{D}$ 的前提升 (a_j, x_j)；f_j 的选定余笛卡尔提升，依定义 (7.4.3)，是态射

$$(a_j, x_j) \xrightarrow{\big(f_j\,,\, 1_{(f_j)_* x_j}\big)} \big(a'_j\,,\, (f_j)_* x_j\big) \quad \text{in} \quad \textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j. \tag{8.3.17}$$

由于 F 保留选定的余笛卡尔提升（定义 7.2.2 (iii)），(8.3.15) 的选定余笛卡尔提升也由下式给出

$$\begin{array}{ccc} F\langle (a_j, x_j)\rangle & \xrightarrow{F\langle (f_j, 1)\rangle} & F\big\langle \big(a'_j\,,\, (f_j)_* x_j\big)\big\rangle \\ \| & & \| \\ \big(a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) & & \big(a'\,,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle\big) \end{array} \tag{8.3.18}$$

其中每个等式均来自 (8.3.6) 和 (8.3.7)。

(8.3.16) 和 (8.3.18) 的余域给出对象等式

$$f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle = \phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle \quad \text{in} \quad Za'.$$

这证明了 (8.3.14) 在对象上的交换性。

态射。假设给定一个由 (8.2.9) 中的态射组成的 n 元组 $p \in \prod_{j=1}^n X_j a_j$。对于每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，$\int_{\mathcal{D}} X_j$ 中的下图由 (6.2.3) 可交换。

$$\begin{array}{ccc} (a_j, x_j) & \xrightarrow{\big(f_j\,,\, 1_{(f_j)_* x_j}\big)} & \big(a'_j\,,\, (f_j)_* x_j\big) \\ {\scriptstyle (1_{a_j}, p_j)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1_{a'_j}\,,\, (f_j)_* p_j)} \\ (a_j, y_j) & \xrightarrow{\big(f_j\,,\, 1_{(f_j)_* y_j}\big)} & \big(a'_j\,,\, (f_j)_* y_j\big) \end{array} \tag{8.3.19}$$

事实上，在 (8.3.19) 的两个复合中，

- the first component is $f_j : a_j \longrightarrow a'_j$ in $\mathcal{D}$, and

● 第二个分量是

$$(f_j)_* x_j \xrightarrow{(f_j)_* p_j} (f_j)_* y_j \quad \text{in} \quad X_j a'_j.$$

在交换图（8.3.19）中，与（8.3.17）一样，

● 顶部（f_j，$1_{(f_j)_* x_j}$）是关于（a_j，x_j）；f_j 的选定的余笛卡尔提升，并且

● 底部（f_j，$1_{(f_j)_* y_j}$）是关于（a_j，y_j）；f_j 的选定的余笛卡尔提升

相对于 $U_{X_j} : \int_{\mathcal{D}} Xj$ D。 $\longrightarrow$

将F 作用于$j \in \{1, \ldots, n\}$对应的交换图表 (8.3.19)，并使用 (8.3.8)、(8.3.9)、(8.3.16) 和 (8.3.18)，得到$\int_{\mathcal{D}} Z$中的以下交换图表。

$$\begin{array}{ccc} (a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle) & \xrightarrow{(f\,,\, 1_{f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle})} & (a'\,,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (1_a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (1_{a'}\,,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* p_j\rangle)} \\ (a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle y\rangle) & \xrightarrow{(f\,,\, 1_{f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle y\rangle})} & (a'\,,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* y_j\rangle) \end{array}$$

这两个相等复合的第二分量给出了态射等式

$$f_* \phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle = \phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* p_j\rangle \quad \text{in} \quad Za'.$$

这证明了 (8.3.14) 在态射上的交换性。 □

单位元与可加性。 引理 8.3.12 和 8.3.13 表明

$$\otimes_{j=1}^n X_j \xrightarrow{\phi} Z,$$

其分量函子为 (8.3.5) 中的 $\phi_{\langle a\rangle}$，是 (5.1.5) 中的自然变换。为了证明 ϕ 是加性自然变换，接下来我们检查定义 5.2.12 中的两个公理，首先从单位公理开始。

引理 8.3.20。 自然变换 (8.3.5)

$$\otimes_{j=1}^n X_j \xrightarrow{\phi} Z$$

满足单位公理(5.2.16)。

证明。取 (6.1.2) 中的 $\bigcirc_i$，单位公理断言$Z0$ 中的等式

$$\begin{cases} \phi_{\langle a\rangle \circ_i 0}\big(\langle x\rangle \circ_i (X_i^0 *)\big) = Z^0 * \\ \phi_{\langle a\rangle \circ_i 0}\big(\langle p\rangle \circ_i 1_{X_i^0 *}\big) = 1_{Z^0 *} \end{cases}$$

对于 $\prod_{j=1}^n Xjaj$ 中的对象 x 和态射 p。对象的单位公理由 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下等式证明。

$$\begin{cases} \quad (0, Z^0 *) & \\ = F\big\langle (a_j, x_j) \circ_i (0, X_i^0 *)\big\rangle & \text{by (6.1.7) and (6.2.6)} \\ = \big(a_1 \otimes \cdots \otimes 0 \otimes \cdots \otimes a_n\,,\, \phi_{\langle a\rangle \circ_i 0}(\langle x\rangle \circ_i X_i^0 *)\big) & \text{by (8.3.6) and (8.3.7)} \\ = \big(0\,,\, \phi_{\langle a\rangle \circ_i 0}(\langle x\rangle \circ_i X_i^0 *)\big) & \text{by (2.2.3)} \end{cases} \tag{8.3.21}$$

态射的单位公理由计算 (8.3.21) 证明，方法是

● 分别将 $(0,Z^0{}_*)$、(a_j,x_j) 和 $(0,X^0{}_i{}_*)$ 替换为

$$\left(1_0\,,\,1_{Z^0{}_*}\right),\quad \langle(1_{a_j},p_j)\rangle,\quad \text{and}\quad \left(1_0\,,\,1_{X^0_i{}_*}\right)$$

and

● 使用 (6.2.2)

$$\left(1_0\,,\,1_{Z^0{}_*}\right)=1_{(0,Z^0{}_*)}\quad \text{in}\quad \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z$$

并且利用 F 保恒等态射这一事实。

这就完成了对 ϕ 的单位公理的证明。 □

引理 8.3.22. 自然变换 (8.3.5)

$$\otimes_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\ \phi\ } Z$$

满足可加性公理 (5.2.24)。

证明。我们先证明对象上的可加性公理，然后证明态射上的可加性公理。

对象。使用 (5.2.17)、(5.2.19)、(5.2.22) 和 (5.2.23) 中关于对象的记号，我们计算 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中第 i 个线性约束 F_i^2 的（余）定义域对象如下。

$$\begin{cases} F\langle(a_j,x_j)\rangle \square F\left\langle(a_j,x_j)\circ_i(a_i',x_i')\right\rangle & \\ \quad=\left(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\right)\square\left(a'\,,\,\phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right) & \text{by (8.3.6) and (8.3.7)} \\ \quad=\left(a\oplus a'\,,\,Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\,,\,\phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right)\right) & \text{by (6.2.7)} \\ F\left\langle(a_j,x_j)\circ_i\left((a_i,x_i)\square(a_i',x_i')\right)\right\rangle & \\ \quad=F\left\langle(a_j,x_j)\circ_i\left(a_i''\,,\,x_i''\right)\right\rangle & \text{by (6.2.7)} \\ \quad=\left(a''\,,\,\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) & \text{by (8.3.6) and (8.3.7)} \end{cases} \tag{8.3.23}$$

根据定义 7.2.2 中的约束提升公理（iv），F_i^2 的这一分量是前提升的选定余笛卡尔提升

$$\left\langle F\langle(a_j,x_j)\rangle\square F\left\langle(a_j,x_j)\circ_i(a_i',x_i')\right\rangle;\mathsf{L}^{-1}\right\rangle$$

相对于 $U_Z:\int_{\mathcal{D}} Z\,\mathrm{D}$。根据 (7.4.3) 和 (8.3.23)，这个选定的余笛卡尔提升，即 F_i^2，也可表示为 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的如下态射。

$$\left(a\oplus a'\,,\,Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\,,\,\phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right)\right)\xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1},1)}\left(a''\,,\,\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) \tag{8.3.24}$$

它的第二个条目是 Za'' 中的恒等态射

$$\mathsf{L}_*^{-1}Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\,,\,\phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right)\xrightarrow{\ 1\ }\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle.$$

应用 L_* 得到 $Z(a\oplus a')$ 中的等式

$$\mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle=Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\,,\,\phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right). \tag{8.3.25}$$

这证明了对象的可加性公理 (5.2.24)。

态射。对于态射的可加性公理 (5.2.24)，设给定态射

$$\langle p\rangle = \left\langle p_j : x_j \longrightarrow y_j\right\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} X_j a_j \quad \text{and}$$
$$p'_i : x'_i \longrightarrow y'_i \in X_i a'_i.$$

我们将 (5.2.23) 和 (5.2.24) 中的记号推广到态射，只需将每个 x 替换为 p。由 (8.3.23) 和 (8.3.24)，F_i^2关于这些态射的自然性图表是 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下交换图表。

$$\begin{array}{ccc}
\left(a\oplus a',\, Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right)\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1},1)} & \left(a'',\, \phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (1,\, Z^2_{a,a'}(\phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle p'\rangle))} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (1,\, \phi_{\langle a''\rangle}\langle p''\rangle)} \\
\left(a\oplus a',\, Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle y\rangle,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle y'\rangle\right)\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1},1)} & \left(a'',\, \phi_{\langle a''\rangle}\langle y''\rangle\right)
\end{array}$$

该交换图表的第二个分量是Za''中的态射等式

$$\mathsf{L}_*^{-1} Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle p'\rangle\right) = \phi_{\langle a''\rangle}\langle p''\rangle.$$

应用 L_* 可得$Z(a\ \oplus a')$中的态射等式

$$\mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle p''\rangle = Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle p'\rangle\right).$$

这证明了态射的可加性公理 (5.2.24)。 □

原像 F。 根据引理 8.3.12、8.3.13、8.3.20 和 8.3.22,

$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0)\right\rangle_{j=1}^{n} \xrightarrow{\ \phi\ } (Z, Z^2, Z^0)$$

(8.3.4) 中的是一个加性自然变换（定义 5.2.12）。接下来，我们将证明，按照引理 6.3.15 的意义，其格罗滕迪克构造等于 F。

引理 8.3.26。 在定义 *8.3.1* 的背景下，有等式

$$\left(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi,\, \langle(\int_{\mathcal{D}}\phi)_j^2\rangle_{j=1}^{n}\right) = \left(F,\, \langle F_j^2\rangle_{j=1}^{n}\right)$$

强 n-线性函子之间的。

证明。我们必须证明以下两个陈述。

（1）存在函子之间的等式

$$\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi = F : \prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j) \longrightarrow \int_{\mathcal{D}} Z.$$

（2）在（8.3.23）至（8.3.25）的语境下，$\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下两个态射相等。

$$\left(a\oplus a',\, \mathsf{L}_*\phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) \underset{(\int_{\mathcal{D}}\phi)_i^2}{\overset{F_i^2 = (\mathsf{L}^{-1},1)}{\rightrightarrows}} \left(a'',\, \phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right)$$

一旦证明了（1），（2）便由（{v1）$_i^2$的定义（6.3.14）推出。我们先在对象上证明（1），然后再在态射上证明。

对象。对于每个由n个对象组成的对象组

$$\langle (a_j, x_j)\rangle \in \textstyle\prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j),$$

以下 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的等式证明了对象上的 (1)。

$$\begin{aligned}(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle(a_j,x_j)\rangle &= \big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) && \text{by (6.3.7)}\\ &= F\langle(a_j,x_j)\rangle && \text{by (8.3.6) and (8.3.7)}\end{aligned}$$

态射。假设给定一个态射的n元组

$$\big\langle (f_j,p_j):(a_j,x_j)\longrightarrow(b_j,y_j)\big\rangle \in \textstyle\prod_{j=1}^{n}(\int_{\mathcal{D}} X_j).$$

我们必须证明它在 $\int_{\mathcal{D}}\phi$ 和 F 下的像相等。根据定义 (6.2.3)，$\int_{\mathcal{D}} X^j$ 中的每个态射 (f^j, p^j) 都可分解如下。

(8.3.27)
$$\begin{array}{ccc}(a_j,x_j) & \xrightarrow{\quad(f_j,p_j)\quad} & (b_j,y_j)\\ {\scriptstyle(f_j,\,1_{(f_j)_*x_j})}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle(1_{b_j},\,p_j)}\\ & \big(b_j\,,\,(f_j)_*x_j\big) & \end{array}$$

现在我们来考察 (8.3.27) 中的第一个态射 $(f^j, 1_{(f_j)_*x^j})$。

- 根据定义 (7.4.3)，$(f_j, 1)$ 是相对于 $U_{X_j}\colon \int_{\mathcal{D}} X_j \to \mathbf{D}$，对前提升 (a_j, x_j)；f_j 选定的余笛卡尔提升。
- 由于 F 保留选定的余笛卡尔提升（定义 7.2.2(iii)），其像

$$F\langle(a_j,x_j)\rangle \xrightarrow{F\langle(f_j,1)\rangle} F\big\langle\big(b_j\,,\,(f_j)_*x_j\big)\big\rangle \quad \text{in} \quad \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z$$

是前提升的选定的余笛卡尔提升

$$\big\langle F\langle(a_j,x_j)\rangle\,;\otimes_{j=1}^{n} f_j\big\rangle = \big\langle\big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big)\,;f\big\rangle$$

关于 $U_Z : \int_{\mathcal{D}} Z \to \mathbf{D}$。根据定义 (7.4.3)，这个选定的余笛卡尔提升，即 $F(f_j, 1)$，也可表示为

(8.3.28)
$$\big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \xrightarrow{\big(f\,,\,1_{f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle}\big)} \big(b\,,\,f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big).$$

$\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下态射等式证明了态射上的 (1)。

$$\begin{aligned}&(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle(f_j,p_j)\rangle\\ &= \big(f\,,\,\phi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle\big) && \text{by (6.3.10)}\\ &= \big(1_b\,,\,\phi_{\langle b\rangle}\langle p\rangle\big)\circ\big(f\,,\,1_{f_*\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle}\big) && \text{by (6.2.3)}\\ &= F\langle(1_{b_j},p_j)\rangle\circ F\big\langle\big(f_j\,,\,1_{(f_j)_*x_j}\big)\big\rangle && \text{by (8.3.8), (8.3.9), and (8.3.28)}\\ &= F\langle(f_j,p_j)\rangle && \text{by (8.3.27)}\end{aligned}$$

这就完成了 (1) 的证明。 □

8.4. 态射满性与主定理

我们继续使用 (8.2.1)、(8.2.2) 以及 (8.2.7) 至 (8.2.9) 中的记号，其中 $n > 0$。在引理 8.2.3、8.2.11 和 8.3.26 中，我们注意到分量函子（引理 7.4.7）

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;Z\big) \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}\big(\langle U_X\rangle\,;U_Z\big)$$

满足 (i) 对对象和态射集是单射的，以及 (ii) 对对象是满射的。本节将证明这些分量函子对态射集也是满射的。

回顾如下内容。

● DCat(X; Z) 的对象是加性自然变换，态射是加性修正（定义 5.2.12 和 5.2.25）。
● PFib$_{\mathcal{D}}(U_X; U_Z)$ 的对象是余笛卡尔强n-线性函子，态射是余笛卡尔n-线性变换（定义 7.2.2 和 7.2.18）。

本节内容概述如下。

• 在定义 8.4.1 中，我们将一项加性修正 的数据与两个加性自然变换的格罗滕迪克构造之间的每个余笛卡尔 n-线性变换 $\omega : \int_{\mathcal{D}}\phi \nrightarrow \int_{\mathcal{D}}\psi$ 关联起来。

—

● 引理 8.4.9 和 8.4.11 表明， Φ 是一个修正。
● 引理 8.4.14 和 8.4.15 表明， Φ 是一个加性修正。
● 引理 8.4.16 表明，$\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 和 ω 作为余笛卡尔 n-线性变换是相等的。这证明了 $\int_{\mathcal{D}}$ 的多态射函子在态射集上是满射的。

● 运用多重等价定理 3.4.21 以及本章中的引理，定理 8.4.17 证明了

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$$

是一个非对称 Cat-多重等价。此外，若 $\beta^{\otimes} = 1$ 属于 D，则 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多重等价。

定义 8.4.1。 设有加性自然变换

$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} (Z, Z^2, Z^0)$$

以及一个余笛卡尔的n-线性变换

$$\left(\int_{\mathcal{D}}\phi, \langle(\int_{\mathcal{D}}\phi)_j^2\rangle_{j=1}^n\right) \xrightarrow{\omega} \left(\int_{\mathcal{D}}\psi, \langle(\int_{\mathcal{D}}\psi)_j^2\rangle_{j=1}^n\right) \tag{8.4.2}$$

其（余）定义域由引理 6.3.15 给出。结构 ω 由一个n-线性自然变换给出（定义 6.1.16）

$$\prod_{j=1}^n(\int_{\mathcal{D}}X_j) \underset{\left(\int_{\mathcal{D}}\psi, \langle(\int_{\mathcal{D}}\psi)_j^2\rangle_{j=1}^n\right)}{\overset{\left(\int_{\mathcal{D}}\phi, \langle(\int_{\mathcal{D}}\phi)_j^2\rangle_{j=1}^n\right)}{\overset{\omega}{\rightrightarrows}}} \int_{\mathcal{D}}Z \tag{8.4.3}$$

满足变换投影公理 (7.2.20) 的。定义一个加性修正的数据

$$\left\langle (X_j, X_j^2, X_j^0) \right\rangle_{j=1}^{n} \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} (Z, Z^2, Z^0) \tag{8.4.4}$$

带有 a-分量自然变换 (5.1.11)

$$\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \underset{\psi_{\langle a\rangle}}{\overset{\phi_{\langle a\rangle}}{\overset{\Phi_{\langle a\rangle}}{\rightrightarrows}}} Za \tag{8.4.5}$$

如下。对于每个 n元对象组 $x\in \prod_{j=1}^{n} X_j a_j$，定义态射

$$(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle} = \omega_{\langle x\rangle} : \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \longrightarrow \psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \quad \text{in} \quad Za \tag{8.4.6}$$

其中，$\omega_{\langle x\rangle}$ 是 (a_j,x_j)-分量态射中的第二个条目

$$\omega_{\langle (a_j,x_j)\rangle} = \big(1_a\,,\,\omega_{\langle x\rangle}\big) : (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle (a_j,x_j)\rangle \longrightarrow (\textstyle\int_{\mathcal{D}}\psi)\langle (a_j,x_j)\rangle \tag{8.4.7}$$

在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中。这就完成了 (8.4.4) 中 Φ 的定义。

说明 8.4.8。 在 (8.4.7) 中，（余）定义域对象为

$$(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\phi)\langle (a_j,x_j)\rangle = \big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \quad \text{and}$$
$$(\textstyle\int_{\mathcal{D}}\psi)\langle (a_j,x_j)\rangle = \big(a\,,\,\psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big)$$

根据定义 (6.3.7)，在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中。对于 (8.4.2) 中的 ω，变换投影公理 (7.2.20) 意味着

$$U_Z \omega_{\langle (a_j,x_j)\rangle} = 1_{\otimes_{j=1}^{n} U_{X_j}(a_j,x_j)} = 1_a \quad \text{in} \quad \mathcal{D}.$$

因此，态射的第一项

$$\big(a\,,\,\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \xrightarrow{\omega_{\langle (a_j,x_j)\rangle}} \big(a\,,\,\psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \quad \text{in} \quad \textstyle\int_{\mathcal{D}} Z$$

是恒等态射 $1_a \in \mathcal{D}$。这就是 (8.4.7) 的含义。

在本节余下部分，我们证明 $\Phi : \phi \to \psi$ (8.4.4)中的修正是加性修正，使得

$$\textstyle\int_{\mathcal{D}} \Phi = \omega$$

作为n-线性自然变换，其中 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 由引理 6.4.7 给出。

自然性与修正公理。为了证明 Φ 是加性修正，我们首先检查其分量是自然变换。

引理 8.4.9。在(8.4.5) 中，每个分量

$$\phi_{\langle a\rangle} \xrightarrow{\Phi_{\langle a\rangle}} \psi_{\langle a\rangle}$$

是函子之间的自然变换 $\prod_{j=1}^{n} X_j a_j \to Za$。

证明。对于每个n元组的态射

$$\langle p\rangle = \big\langle p_j : x_j \longrightarrow y_j\big\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} X_j a_j$$

$\Phi_{\langle a\rangle}$ 所需的自然性图表是 Za 中的下图。

$$\begin{array}{ccc} \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle & \xrightarrow{(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}} & \psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \\ {\scriptstyle \phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle} \\ \phi_{\langle a\rangle}\langle y\rangle & \xrightarrow{(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle y\rangle}} & \psi_{\langle a\rangle}\langle y\rangle \end{array} \tag{8.4.10}$$

为了证明 (8.4.10) 是交换的，考虑由以下态射组成的 n 元组

$$\left\langle (1_{a_j}, p_j) : (a_j, x_j) \longrightarrow (a_j, y_j) \right\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} (\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j).$$

$\omega : \int_{\mathcal{D}} \phi \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \psi$ 在 (8.4.3) 中的自然性给出了 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} (\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (a_j, x_j)\rangle & \xrightarrow{\omega_{\langle (a_j, x_j)\rangle}} & (\int_{\mathcal{D}} \psi)\langle (a_j, x_j)\rangle \\ {\scriptstyle (\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (1_{a_j}, p_j)\rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\int_{\mathcal{D}} \psi)\langle (1_{a_j}, p_j)\rangle} \\ (\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (a_j, y_j)\rangle & \xrightarrow[\omega_{\langle (a_j, y_j)\rangle}]{} & (\int_{\mathcal{D}} \psi)\langle (a_j, y_j)\rangle \end{array}$$

根据定义

- (6.3.7) and (6.3.10) of $\int_{\mathcal{D}} \phi$ on, respectively, objects and morphisms and
- (8.4.6) and (8.4.7) of $\Phi_{\langle a\rangle}$,

前一个交换图等于以下图表。

$$\begin{array}{ccc} \big(a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) & \xrightarrow{(1_a\,,\, (\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle})} & \big(a\,,\, \psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) \\ {\scriptstyle (1_a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1_a\,,\, \psi_{\langle a\rangle}\langle p\rangle)} \\ \big(a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle y\rangle\big) & \xrightarrow[(1_a\,,\, (\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle y\rangle})]{} & \big(a\,,\, \psi_{\langle a\rangle}\langle y\rangle\big) \end{array}$$

这个交换图的第二个分量给出了所需的图表 (8.4.10)。□

接下来我们证明 Φ 是一个修正。

引理 8.4.11。在 (8.4.4) 中，$\Phi \div \phi \Rightarrow \psi$ 是一个修正。

证明。所需的修正公理（5.1.12）指出，对于每个 n 元对象组$x \in \prod_{j=1}^{n} Xiaj$，以下态射等式在 Za' 中成立。

$$f_*(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle} = (\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle (f_j)_* x_j\rangle} : f_* \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle \longrightarrow \psi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle \tag{8.4.12}$$

为证明（8.4.12）中的等式，考虑以下 n 元态射组

$$\left\langle \big(f_j\,,\, 1_{(f_j)_* x_j}\big) : (a_j, x_j) \longrightarrow \big(a'_j\,,\, (f_j)_* x_j\big) \right\rangle \in \prod_{j=1}^{n} (\textstyle\int_{\mathcal{D}} X_j).$$

$\omega : \int_{\mathcal{D}} \phi \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} \psi$ 在（8.4.3）中的自然性给出了 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下交换图。

$$\begin{array}{ccc} (\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (a_j, x_j)\rangle & \xrightarrow{(\int_{\mathcal{D}} \phi)\langle (f_j, 1)\rangle} & (\int_{\mathcal{D}} \phi)\big\langle \big(a'_j\,,\, (f_j)_* x_j\big)\big\rangle \\ {\scriptstyle \omega_{\langle (a_j, x_j)\rangle}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega_{(a'_j\,,\, (f_j)_* x_j)}} \\ (\int_{\mathcal{D}} \psi)\langle (a_j, x_j)\rangle & \xrightarrow[(\int_{\mathcal{D}} \psi)\langle (f_j, 1)\rangle]{} & (\int_{\mathcal{D}} \psi)\big\langle \big(a'_j\,,\, (f_j)_* x_j\big)\big\rangle \end{array}$$

由 (6.3.7)、(6.3.10)、(8.4.6) 和 (8.4.7)，前一个交换图等于下图。

$$\begin{array}{ccc} \big(a\,,\, \phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) & \xrightarrow{(f\,,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle 1\rangle)} & \big(a'\,,\, \phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle\big) \\ {\scriptstyle (1_a\,,\, (\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1_{a'}\,,\, (\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle (f_j)_* x_j\rangle})} \\ \big(a\,,\, \psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle\big) & \xrightarrow[(f\,,\, \psi_{\langle a'\rangle}\langle 1\rangle)]{} & \big(a'\,,\, \psi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle\big) \end{array} \tag{8.4.13}$$

由 $\phi_{\langle a'\rangle}$ 和 $\psi_{\langle a'\rangle}$的函子性，可得恒等态射

$$\phi_{\langle a'\rangle}\langle 1\rangle = 1_{\phi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle} \quad \text{and}$$
$$\psi_{\langle a'\rangle}\langle 1\rangle = 1_{\psi_{\langle a'\rangle}\langle (f_j)_* x_j\rangle}$$

在 Za' 中。因此，交换图 (8.4.13) 的第二个分量给出了所需的等式 (8.4.12)。□

单位元与可加性。 接下来我们证明， Φ 是一个加性修正（定义 5.2.25）。

引理 8.4.14。 $\Phi : \phi \nrightarrow \psi$ 在 (8.4.4) 满足单位公理 (5.2.27)。

证明。设 $\bigcirc_i$ 如 (6.1.2) 所示，则在 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中有如下态射等式。

$$\begin{aligned}
&\left(1_0, (\Phi_{\langle a\rangle\circ_i 0})_{\langle x\rangle\circ_i(X_i^0 *)}\right) \\
&= \omega_{\langle (a_j, x_j)\rangle\circ_i(0, X_i^0 *)} && \text{by (2.2.3), (8.4.6), and (8.4.7)} \\
&= 1_{(0, Z^0 *)} && \text{by (6.1.18) and (6.2.6)} \\
&= \left(1_0, 1_{Z^0 *}\right) && \text{by (6.2.2)}
\end{aligned}$$

该态射等式

$$(\Phi_{\langle a\rangle\circ_i 0})_{\langle x\rangle\circ_i(X_i^0 *)} = 1_{Z^0 *} \quad \text{in} \quad Z0$$

是 Φ 的单位公理。 □

引理 8.4.15. $\Phi : \phi \nrightarrow \psi$ 在 (8.4.4) 中满足可加性公理 (5.2.30)。

证明。在 (6.3.11) 至 (6.3.14)、(8.4.6) 和 (8.4.7) 的背景下，(8.4.3) 中 $\omega : \int_{\mathcal{D}}\phi \nrightarrow \int_{\mathcal{D}}\psi$ 的约束相容性公理 (6.1.19) 可表示为 $\int_{\mathcal{D}} Z$ 中的以下交换图表。

$$\begin{array}{ccc}
\left(a\oplus a', Z^2_{a,a'}\left(\phi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle, \phi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right)\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1},1)} & \left(a'', \phi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \left(1_{a\oplus a'}, Z^2_{a,a'}((\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, (\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle})\right)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (1_{a''}, (\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle})} \\
\left(a\oplus a', Z^2_{a,a'}\left(\psi_{\langle a\rangle}\langle x\rangle, \psi_{\langle a'\rangle}\langle x'\rangle\right)\right) & \xrightarrow{(\mathsf{L}^{-1},1)} & \left(a'', \psi_{\langle a''\rangle}\langle x''\rangle\right)
\end{array}$$

此交换图表的第二项给出态射等式

$$(\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle} = \mathsf{L}_*^{-1} Z^2_{a,a'}\left((\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, (\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\right) \quad \text{in} \quad Za''.$$

应用 L_* 得到等式

$$\mathsf{L}_*(\Phi_{\langle a''\rangle})_{\langle x''\rangle} = Z^2_{a,a'}\left((\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}, (\Phi_{\langle a'\rangle})_{\langle x'\rangle}\right) \quad \text{in} \quad Z(a\oplus a').$$

这证明了 Φ 的可加性公理。 □

原像 ω。 引理 8.4.11、8.4.14 和 8.4.15 表明，(8.4.4) 中的 $\Phi : \phi \nrightarrow \psi$ 是一个加性修正（定义 5.2.25）。根据引理 6.4.7 和 7.4.7，其格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 是一个余笛卡尔 n-线性变换。

引理 8.4.16。 在定义 *8.4.1* 的背景下，有如下等式

$$\int_{\mathcal{D}}\Phi = \omega : \int_{\mathcal{D}}\phi \longrightarrow \int_{\mathcal{D}}\psi$$

余笛卡尔 n-线性变换。

证明。余笛卡尔 n-线性变换是具有额外性质（7.2.20），但没有额外结构（解释 7.2.21(1)）的n-线性自然变换。因此，只需证明 $\int_{\mathcal{D}}\Phi$ 和 ω 作为自然变换相等。对于每个n-元对象组

$$\langle (a_j, x_j)\rangle \in \prod_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathcal{D}} X_j\right)$$

有如下等式：$\int_{\mathcal{D}}Z$。

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathcal{D}}\Phi\right)_{\langle (a_j,x_j)\rangle} &= \left(1_a\,,\,(\Phi_{\langle a\rangle})_{\langle x\rangle}\right) && \text{by (6.4.3)}\\ &= \omega_{\langle (a_j,x_j)\rangle} && \text{by (8.4.6) and (8.4.7)}\end{aligned}$$

这证明了$\int_{\mathcal{D}}\Phi = \omega$ 是自然变换。 □

多重等价。 现在我们可以陈述本章的主要结果了。

定理 8.4.17。 设 $\mathcal{D}$ 是一个小紧双置换范畴。

(i) (7.4.10)中的非对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$$

是一个非对称Cat-多重等价。

(ii) 如果$\mathcal{D}$ 中的乘法编织 $\beta^{\otimes}$ 是恒等自然变换，那么 $\int_{\mathcal{D}}$是一个Cat-多重等价。

证明。关于 $\int_{\mathcal{D}}$，我们已经证明了以下内容。

- 它在对象集上本质满（引理 8.1.8）。
- 它在零元多态射范畴上是一个同构（引理 7.4.6）。
- 在正元多态射范畴之间，$\int_{\mathcal{D}}$是– 对象上的单射（引理 8.2.3），– 态射集上的单射（引理 8.2.11），– 对象上的满射（引理 8.3.26），以及– 态射集上的满射（引理 8.4.16）。

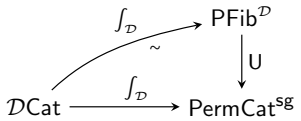
断言 (i) 现在由多重等价定理 3.4.21 得出。

此外，在假设 $\beta^{\otimes} = 1$, $\int_{\mathcal{D}}$ 是 Cat-多范畴之间的 Cat-多函子的条件下，由定理 7.4.9 (iii) 可知。因此，断言 (ii) 也由定理 3.4.21 以及上一段所述的引理得出。□

例 8.4.18。 设 D 是任意一个小型紧双置换范畴

$$\mathsf{Fin}^{\mathsf{sk}},\quad \Sigma,\quad \mathcal{F},\quad \text{and}\quad \mathcal{A}$$

分别见例 2.3.2、2.3.11、2.3.12 和 2.3.17。于是，$\mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴，而不是一个 Cat-多范畴，见例 7.3.20。非对称 Cat-多函子的交换图



定理 7.4.9 (ii) 中的结果表明，伪对称 Cat-多函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

在 (6.7.9) 中，视为非对称 Cat-多函子时，可分解为

● 定理 8.4.17 中的非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{D}}$

● 后接式 (7.3.18) 中的非对称 Cat-多函子 U。情形 D = A 用于逆K理论背景下的定理 10.2.1(iii)。

第3部分

伪对称富化多函子逆 K 理论

第9章

Cat-多函子A

第3部分的主题是伪对称 Cat-多函子性的逆K-理论

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{A} \mathcal{A}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{A}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}, \qquad \Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}.$$

格罗滕迪克构造

$$\mathcal{A}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{A}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

是 (6.7.9) 中具有以下数据的伪对称 Cat-多函子：

- A 是例 2.3.17 中的小紧双置换范畴。
- ACat 是定理 5.3.11 中的 Cat-多范畴。
- $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 是定理 6.1.31 中的 Cat-多范畴。

在本章中，我们构造 Cat-多函子（定理 9.5.9）

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{A} \mathcal{A}\mathsf{Cat}.$$

我们强调，与伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{A}}$不同，后者不是Cat-多函子；A 是对称意义下的 Cat-多函子（定义 3.2.1）。换言之，A 严格保持 Γ-Cat 和 ACat 中的对称群作用、带色单位和复合。

摘要。 在例 2.3.17 中，针对 D = A 重用了第 7 章引言中的部分表格。下表总结了 Γ-Cat、ACat 和 A。我们分别将对称幺半、多态射范畴和自然变换 简称为 *sm*、*mc*和*nt*。

	Γ-Cat	(9.1.23)	$\mathcal{A}$Cat	(5.3.11)	A (9.5.9)
对象	Γ-范畴	(9.1.11)	加性 SM 函子	(5.2.4)	9.3.1, 9.3.7
MC 对象	带基点 nt	(9.1.28, 9.2.3, 9.2.15)	加性 NT	(5.2.12)	9.4.3, 9.4.14
MC 态射	带基点修改 (9.1.28, 9.2.3, 9.2.19) 加性修改 (5.2.25)				9.4.4, 9.4.24
带色单位	恒等自然变换	(9.2.21)	恒等自然变换	(5.1.13)	9.5.9
复合	9.2.29		5.1.19, 5.1.21		9.5.5
对称性	9.2.22		5.1.14		9.5.1
sm	yes	(9.1.23)	no	(5.3.4)	no

组织结构。 为讨论A 和逆K-理论做准备，我们在第 9.1 节回顾 Γ-范畴范畴上的对称幺半闭结构。虽然 Γ-范畴的定义相对简单，但 Γ-Cat 上的对称幺半闭结构的主要微妙之处在于，它使用带基点的 Day 卷积（9.1.18），以及幺半单位（9.1.19）和带基点的同态图表（9.1.20）的带基点版本。此对称幺半闭结构在 Γ-Cat 上诱导出 Cat-多范畴结构，详见第 9.2 节。

为了更容易理解对A 的 Cat-多函子性讨论，我们在第 9.3 节首先构造A的底层函子。特别是，本节包含A的对象赋值，它将一个 Γ-范畴映射到 ACat 中的一个对象。Cat-多函子A 分两个阶段构造。

- 在第 9.4 节中，我们构造A 的多态射函子，并注意到以下结果。– A 在零元数情形下是范畴同构（引理 9.4.5）。– 在正元数情形下，A 对对象和态射集都是单射（引理 9.4.30）。

- 在第 9.5 节中，我们证明第 9.3 节的对象赋值和第 9.4 节的多态射函子定义了一个从Γ-Cat 到 ACat 的 Cat-多函子A 。

我们提醒读者注意关于迭代幺半积的左规范化括号约定 1.1.24。

9.1. Γ-范畴的对称幺半范畴

本节旨在讨论 Γ-范畴的对称幺半闭范畴。在第 9.2 节中，我们将讨论其诱导的 Cat-多范畴结构。以下是本节内容的概要。

- 我们首先讨论带基点的范畴，以及小带基点范畴的范畴 Cat_* 上的对称幺半闭结构（定理 9.1.7）。

- 然后我们定义 Γ-范畴（定义 9.1.11），并讨论其对称幺半闭结构（定理 9.1.23）。

- 我们分别在说明 9.1.24、9.1.26 和 9.1.28 中，明确描述 Γ-范畴的幺半单位、带基点的 Day 卷积和带基点的映射对象。

我们特别强调， Γ-Cat 上的对称幺半结构使用了（9.1.18）中的 带基点的Day 卷积，这不同于（1.4.2）中的无基点版本。因此，相应的幺半单位（9.1.19）和内 Hom（9.1.20）也不同于（1.4.5）和（1.4.6）中的无基点版本。关于带基点范畴和带基点的 Day 卷积的更详细、更一般的讨论，见 **[JY∞a**，第 4] 章。

基点范畴。

定义 9.1.1 (带基点图表)。 带基点范畴 是一个有序对 $(\mathsf{C}, *)$ 由一个范畴C 和一个指定对象 $* \in \mathsf{C}$组成，后者称为基点。基点也记作函子 $\iota_{\mathsf{C}} : \mathbf{1} \longrightarrow \mathsf{C}$ with $\iota_{\mathsf{C}}(*) = *$。

● 对于带基点范畴 $(\mathsf{C},*)$ 和 $(\mathsf{D},*)$，一个带基点函子

$$(\mathsf{C},*) \xrightarrow{F} (\mathsf{D},*)$$

是一个函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，使得 $F(*) = *$。

• 对于带基点函子 F、$G : (\mathsf{C},*) \to (\mathsf{D},*)$，一个带基点自然变换

$$F \xrightarrow{\theta} G$$

是一个自然变换 $\theta : F \to G$，使得

$$\theta_* = 1_*.$$

记 Cat_* 为由……构成的范畴

● 以小带基点范畴作为对象，并

● 以带基点函子作为态射。

至此，定义完成。

关于 Cat 中（余）极限的初等讨论，请参阅[**Yau20** 第 1.4] 节。对于范畴 C 和 D，若 C 是小范畴，回忆一下，图表范畴 $[\mathsf{C},\mathsf{D}]$ 以函子 $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 为对象，以自然变换为态射（定义 1.1.15）。

定义 9.1.2。 设 $(\mathsf{C},\iota_{\mathsf{C}})$ 和 $(\mathsf{D},\iota_{\mathsf{D}})$ 是小带基点范畴。定义以下小带基点范畴。

● 楔积单位 定义为 Cat 中的余积

$$E = \mathbf{1} \coprod \mathbf{1} \tag{9.1.3}$$

基点由 1 的第一个副本给出。

● 楔和 $\mathsf{C} \vee \mathsf{D}$ 定义为 Cat 中以下跨度的推出

$$\mathsf{C} \xleftarrow{\iota^{\mathsf{C}}} \mathbf{1} \xrightarrow{\iota^{\mathsf{D}}} \mathsf{D} \tag{9.1.4}$$

基点由复合给出

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{C} \vee \mathsf{D}.$$

● 楔积 $\mathsf{C} \wedge \mathsf{D}$ 定义为 Cat 中的以下推出。

$$\begin{array}{ccc} (\mathsf{C}\times\mathbf{1}) \coprod (\mathbf{1}\times\mathsf{D}) & \xrightarrow{(1_{\mathsf{C}}\times\iota^{\mathsf{D}}) \coprod (\iota^{\mathsf{C}}\times 1_{\mathsf{D}})} & \mathsf{C}\times\mathsf{D} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\ \mathbf{1} & \xrightarrow{\iota^{\mathsf{C}\wedge\mathsf{D}}} & \mathsf{C}\wedge\mathsf{D} \end{array} \tag{9.1.5}$$

函子 $\iota_{\mathsf{C}\wedge\mathsf{D}}$ 使 $\mathsf{C} \wedge \mathsf{D}$ 成为一个带基点范畴。

● 带基点图表范畴 $[\mathsf{C},\mathsf{D}]_*$ 定义为 Cat 中如下的拉回。

$$\begin{array}{ccc} [\mathsf{C},\mathsf{D}]_* & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota^{\mathsf{D}}} \\ [\mathsf{C},\mathsf{D}] & \xrightarrow{[\iota^{\mathsf{C}},\mathsf{D}]} & [\mathbf{1},\mathsf{D}] \end{array} \tag{9.1.6}$$

复合函子

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\cong} [\mathsf{C}, \mathbf{1}] \xrightarrow{[\mathsf{C}, \iota^{\mathsf{D}}]} [\mathsf{C}, \mathsf{D}]$$

诱导出一个典范函子

$$\mathbf{1} \longrightarrow [\mathsf{C}, \mathsf{D}]_*$$

使 $[\mathsf{C}, \mathsf{D}]_*$ 成为一个带基点范畴。

至此，定义完成。

下面的结果是 **[JY∞a**，4.2.3] 的一个特例。

定理 9.1.7。 在定义 *9.1.2* 的背景下，

$$\left(\mathsf{Cat}_*, \wedge, E, [,]_*\right)$$

是一个完备且余完备的对称幺半闭范畴。

说明 9.1.8（带基点图表范畴）。 剖析拉回（9.1.6），带基点图表范畴 $[\mathsf{C},\mathsf{D}]_*$ 是这样一个范畴：

- 以带基点函子 $(\mathsf{C}, *)$ $(\mathsf{D}, *)$ 为对象，
- 以带基点自然变换为态射，
- 以恒等自然变换为恒等态射，并且
- 以自然变换的垂直复合为复合。

$[\mathsf{C}, \mathsf{D}]_*$ 中的基点由常值函子 C D 在 D 的基点处给出。利用这一明确描述，只要 C 是小范畴，带基点图表范畴 $[\mathsf{C}, \mathsf{D}]_*$ 就是良定义的。

Γ-范畴。要定义 Γ-范畴，首先回顾例 2.3.12 中的小紧双置换范畴

$$\left(\mathcal{F}, (\vee, \underline{0}, \xi^{\vee}), (\wedge, \underline{1}, \xi^{\wedge}), \partial^l = (\delta^r)^{-1}, \partial^r = 1\right).$$

它具有

- 以 $n = \{0, \ldots, n\}$ 为对象的带基点有限集，其中 $n \geq 0$，以及
- 以带基点函数作为态射。

n 的基点是 0。

- 加性结构 $\vee$ 由带基点有限集的楔和给出。
- 乘法结构 $\wedge$ 由带基点有限集的楔积给出。

由定理 2.2.16，以下两个陈述成立。

- 右分解 $\partial_r = (\delta l)^{-1}$ 是恒等，这是因为根据 (2.3.15)，$\delta l = 1$。
- 左分解 $\partial_l = (\delta r)^{-1}$，其中 δr 取自 (2.3.16)，是一个带基点的双射；对于非零元素，它由俄罗斯方块置换 (2.3.9) 的逆给出。

定义 9.1.9。 对于对象 m、$n \in \underline{\mathrm{F}}$，零态射 $m\,n$ 是以下复合 $\longrightarrow$

$$\underline{m} \longrightarrow \underline{0} \longrightarrow \underline{n}.$$

F 中的一个 非零态射 是指不经由 0 分解的态射。F 中非零态射的子集 $\underline{m}\,\underline{n}$ 记作

$$_ \longrightarrow _$$

(9.1.10) $$\mathcal{F}^{\flat}\left(\underline{m}; \underline{n}\right).$$

注意，如果 m 或 n 中任一个为 0，则 $\mathrm{F}^{\flat}(\underline{m}; n)$ 为空。

定义 9.1.11 (Γ-范畴)。 对于带基点的范畴 (Cat, **1**) 和 (F, 0)，定义带基点图表范畴（说明 9.1.8）

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} = [\mathcal{F}, \mathsf{Cat}]_*.$$

- Γ-Cat 中的对象是一个带基点函子

$$(\mathcal{F}, \underline{0}) \longrightarrow (\mathsf{Cat}, \mathbf{1})$$

，称为 Γ-范畴。

- Γ-Cat 中的态射是一个带基点自然变换，称为 aΓ-范畴态射。

说明 9.1.12 （典范基点）。 设 $X : (\mathrm{F}, 0) \to (\mathsf{Cat}, \mathbf{1})$ 是 a Γ-范畴。

- 对每个 $n \geq 0$，唯一的带基点函数 $\iota_n : \underline{0} \to \underline{n}$ 给出一个函子

$$\mathbf{1} = X\underline{0} \xrightarrow{X\iota_n} X\underline{n}.$$

对象 $* \in \mathbf{1}$ 在 Xn 中的像在 $X\iota_n$ 下也记作 $*$。每个 $Xn \in \mathsf{Cat}$ 都视为以 $*$ 为基点的带基点范畴。

- 对于 F 中的每个态射 $f : \underline{m} \to \underline{n}$，函子

$$X\underline{m} \xrightarrow{Xf} X\underline{n}$$

是一个带基点函子，因为 $f\,\iota_m = \iota_n$ 属于 F。

因此，X 自然地给出一个带基点函子

$$(\mathcal{F}, \underline{0}) \xrightarrow{X} (\mathsf{Cat}_*, \mathbf{1}) \tag{9.1.13}$$

其中 Cat_* 是小带基点范畴与带基点函子所成的范畴（定义 9.1.1）。

此外，设 $F : X \to Y$ 是 Γ-范畴之间的态射，也就是说，是一个带基点自然变换。它由一个分量函子组成

$$X\underline{n} \xrightarrow{F_{\underline{n}}} Y\underline{n} \quad \text{for each} \quad \underline{n} \in \mathcal{F}$$

它关于 n 是自然的。由自然性可知，每个 $F_{\underline{n}}$ 都是带基点函子。因此，当 X 和 Y 被视为以 $(\mathsf{Cat}_*, \mathbf{1})$ 为陪域的带基点函子（如 (9.1.13) 中所示）时，$F : X \to Y$ 是一个带基点自然变换。这一讨论表明，存在范畴的典范同构

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \cong [\mathcal{F}, \mathsf{Cat}_*]_*.$$

换言之，在定义 9.1.11 中，我们可以等价地使用 $(\mathsf{Cat}_*, \mathbf{1})$ 代替 (Cat,**1**) 来定义 Γ-范畴所成的范畴。

Cat 上的对称闭幺半结构 Γ-Cat。 在定理 9.1.7 中，对于 $(\mathsf{Cat}_*, \wedge, E, [,]_*)$，我们采用 V-范畴的概念（定义 1.2.1）。在下文的 (9.1.15)、(9.1.18) 和 (9.1.19) 中，空楔和定义为选定的终端范畴 **1**。

定义 9.1.14。 将 $\widehat{\ }\mathrm{F}$ 定义为 Cat_*-范畴，其对象与 F 相同（例 2.3.12），且同态对象为

$$\widehat{\mathcal{F}}(\underline{m}; \underline{n}) = \bigvee_{\mathcal{F}^\flat(\underline{m}; \underline{n})} E \tag{9.1.15}$$

Cat_* 中 m、$n \in \mathbf{\Gamma}$ 的同态对象。

说明 9.1.16。 (9.1.15) 中的楔和定义于 (9.1.4) 中，其中

● $E = \mathbf{1} \coprod \mathbf{1}$ 楔积单位 (9.1.3) 以及

• $\mathcal{F}_\flat(\underline{m}; \underline{n})$ (9.1.10) 中由非零态射组成的集合 $m \to n$。

由于 $\mathbf{\Gamma}_\flat(\underline{0}; \underline{n})$ 和 $\mathbf{\Gamma}_\flat(\underline{m}; \underline{0})$ 是空集，因此存在基点范畴

$$\widehat{\mathcal{F}}(\underline{0}; \underline{n}) = \mathbf{1} = \widehat{\mathcal{F}}(\underline{m}; \underline{0})$$

对于 $\underline{m}$、$\underline{n} \in \mathbf{\Gamma}$。

定义 9.1.17. 设 X 和 Y 是 Γ-范畴。定义以下 Γ-范畴。

● X 与 Y 的带基点的 *Day* 卷积是由 Cat-余端给出的 Γ-范畴

$$X \wedge Y = \int^{(\underline{m},\underline{n}) \in \widehat{\mathcal{F}} \wedge \widehat{\mathcal{F}}} \bigvee_{\mathcal{F}_\flat(\underline{m} \wedge \underline{n}; -)} \left(X\underline{m} \wedge Y\underline{n} \right). \tag{9.1.18}$$

In (9.1.18):

- $\widehat{\mathcal{F}} \wedge \widehat{\mathcal{F}}$ is the tensor product (Definition 1.2.7) of two copies of the Cat_*-category $\widehat{\mathcal{F}}$ in Definition 9.1.14.
- The smash product $X\underline{m} \wedge Y\underline{n}$ is defined in (9.1.5), with each of X and Y regarded as a pointed functor $(\mathcal{F}, \underline{0}) \longrightarrow (\mathsf{Cat}_*, \mathbf{1})$ as in (9.1.13).
- $\mathcal{F}_\flat(-; -)$ is the set of nonzero morphisms (9.1.10).

● 幺半单位图表是由楔和给出的 Γ-范畴

$$J = \widehat{\mathcal{F}}(\underline{1}; -) = \bigvee_{\mathcal{F}_\flat(\underline{1}; -)} E. \tag{9.1.19}$$

● X 与 Y 的带基点的同态图表是由 Cat-端给出的 Γ-范畴

$$\mathsf{Hom}_*(X, Y) = \int_{\underline{n} \in \widehat{\mathcal{F}}} \left[X\underline{n}, Y(- \wedge \underline{n}) \right]_* \tag{9.1.20}$$

其中 $[,]_*$ 是 (9.1.6) 中的带基点图表范畴。

$\wedge$ 和 Hom_* 都按分量扩展为 Γ-范畴态射。

此外，定义如下。

● 带基点 Day 卷积的编织

$$X \wedge Y \xrightarrow{\xi^{\mathsf{Day}}} Y \wedge X \tag{9.1.21}$$

是由 Cat_* 中楔积的编织诱导的带基点自然变换

$$X\underline{m} \wedge Y\underline{n} \xrightarrow{\xi} Y\underline{n} \wedge X\underline{m},$$

$\mathbf{\Gamma}$ 中的乘法编织 $\xi^\wedge$ （2.3.14），以及余端的泛性质。

● 在对象 $\underline{1} \in \mathbf{\Gamma}$ 处的求值定义了一个对称幺半函子 ev1，它具有一个强对称幺半左伴随 $L1$：

$$\mathsf{Cat}_* \underset{\mathsf{ev}_{\underline{1}}}{\overset{L_{\underline{1}}}{\rightleftarrows}} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}.$$

● 带基点的映射对象 是带基点范畴

$$\begin{aligned}\mathsf{Map}_*(X,Y) &= \big(\mathsf{Hom}_*(X,Y)\big)(\underline{1}) \\ &= \int_{\underline{n}\in\mathcal{F}} [X\underline{n}, Y\underline{n}]_*\end{aligned} \tag{9.1.22}$$

由在 (9.1.20) 中令 $\underline{1}\in\mathbf{F}$ 对 $\mathsf{Hom}_*(X,Y)$ 求值得出。

至此，定义完成。

回顾定义 1.4.15 和 3.1.2 中分别给出的（余）张量化和 V-多范畴 的概念。下面的结果是 [**JY∞a** 的 4.3.37 和 6.3.6] 在 Γ-Cat 中的特例。

定理 9.1.23。 在定义 *9.1.17* 的背景下，以下陈述成立。

(1) $\big(\Gamma\text{-Cat},\wedge,J,\mathsf{Hom}_*\big)$ 是一个完备且余完备的对称幺半闭范畴。*(2)* 伴随 $(L_{\underline{1}},\ \mathsf{ev}_{\underline{1}})$ 使 Γ-Cat 成为关于Cat_* 富集、张量化且余张量化的范畴，其同对象为 Map_*。*(3)* (1) 和(2) 中的结构在 Γ-Cat上诱导出一个 Cat_*-多范畴结构。

我们还通过遗忘每个带基点范畴中的基点，将 Γ-Cat视为关于 Cat 富集。这是可行的，因为遗忘基点函子

$$\mathsf{Cat}_* \longrightarrow \mathsf{Cat}$$

是对称幺半的。第 9.2 节详细描述了 Γ-Cat 上的 Cat- 多范畴结构。本节最后明确描述各个幺半单位图表 J、带基点的 Day 卷积 $\wedge$，以及带基点的映射对象 Map_*。

说明9.1.24 (幺半单位图表)。 从 1 到 n 的非零态射与含有n 个元素的无基点有限集中的元素一一对应

$$\{1,\dots,n\} = \overline{n}.$$

因此，对于 (9.1.19) 中的幺半单位图表 J，存在一个离散基点范畴

$$J\underline{n} = \widehat{\mathcal{F}}(\underline{1};\underline{n}) = \bigvee_{i\in\overline{n}} (\mathbf{1}\coprod\mathbf{1}) \cong \underline{n} \tag{9.1.25}$$

对每个 $n_\in\mathbf{F}$，其中 $\vee$ 表示 (9.1.4) 中的楔和。

说明 9.1.26 （带基点的 Day 卷积）。 带基点的 Day 卷积 (9.1.18) 由下述泛性质刻画。对于 Γ-范畴 X、Y 和 Z，一个 Γ-范畴态射

$$X\wedge Y \xrightarrow{\ \psi\ } Z$$

恰由一族带基点函子组成

$$X\underline{m}\wedge Y\underline{n} \xrightarrow{\ \psi_{\underline{m},\underline{n}}\ } Z\underline{mn} \quad \text{for} \quad \underline{m},\underline{n}\in\mathcal{F}$$

使得，对于每一对非零态射

$$\underline{m} \xrightarrow{\ f\ } \underline{p} \quad \text{and} \quad \underline{n} \xrightarrow{\ g\ } \underline{q}$$

在 F 中，图表

$$\begin{array}{ccc} X\underline{m}\wedge Y\underline{n} & \xrightarrow{\psi_{\underline{m},\underline{n}}} & Z\underline{mn} \\ {\scriptstyle Xf\wedge Yg}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z(f\wedge g)} \\ X\underline{p}\wedge Y\underline{q} & \xrightarrow{\psi_{\underline{p},\underline{q}}} & Z\underline{pq} \end{array} \tag{9.1.27}$$

可交换。楔积 $Xm\wedge Yn$ 是利用说明 9.1.12 中的典范基点构造的 (9.1.5) 中的推出。

说明 9.1.28 （带基点的映射对象）。剖析 (9.1.22) 中的 Cat-端，并利用说明 9.1.8 对每个带基点图表范畴 $[Xn、Yn]_*$ 作出解释后，带基点范畴 $\mathrm{Map}_*(X,Y)$ 可明确描述如下。

$\mathrm{Map}_*(X,Y)$ 中的一个对象 F 是一个 Γ-范畴态射 $F : X\ Y$，也就是说，一是一个带基点自然变换。更明确地说，它由以下带基点函子构成

$$X\underline{n} \xrightarrow{F_{\underline{n}}} Y\underline{n} \quad \text{for} \quad \underline{n}\in\mathcal{F}$$

使得对 F 中的每个非零态射 $f : m\ n$，以下函子图表可交换。

$$\begin{array}{ccc} X\underline{m} & \xrightarrow{F_{\underline{m}}} & Y\underline{m} \\ {\scriptstyle Xf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Yf} \\ X\underline{n} & \xrightarrow{F_{\underline{n}}} & Y\underline{n} \end{array} \tag{9.1.29}$$

$\mathrm{Map}_*(X,Y)$ 中的基点由常值函子 $Xn\ Yn$ 组成，它们取值为 Yn 的基点，其中 $n\in$ F。

对于对象 $F、\overline{G}\in\overline{\mathrm{Map}}_*(X,Y)$，一个态射 $\theta : F\,G$ 是带基点的修正。更明确地说，它由带基点自然变换组成

$$X\underline{n} \underset{G_{\underline{n}}}{\overset{F_{\underline{n}}}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{\theta_{\underline{n}}}}}} Y\underline{n} \quad \text{for} \quad \underline{n}\in\mathcal{F}$$

使得对于 F 中每个非零态射 $f : m\ n$，以下两个复合自然变换相等。

$$\begin{array}{ccc} X\underline{m} \underset{G_{\underline{m}}}{\overset{F_{\underline{m}}}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{\theta_{\underline{m}}}}}} Y\underline{m} \\ {\scriptstyle Xf}\downarrow \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle Yf} \\ X\underline{n} \underset{G_{\underline{n}}}{\overset{F_{\underline{n}}}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{\theta_{\underline{n}}}}}} Y\underline{n} \end{array} \tag{9.1.30}$$

此公理称为修正公理。

对象 F 的恒等态射 1_F 由恒等自然变换组成

$$(1_F)_{\underline{n}} = 1_{F_{\underline{n}}}.$$

态射的复合按分量由自然变换的垂直复合给出。

在 (9.1.20) 中，对 $\mathrm{Hom}_*(X,Y)$ 也有类似的描述。

9.2. Γ-范畴的 Cat-多范畴

根据定理 9.1.23 (3)， Γ-Cat 具有 Cat_*-多范畴的结构，因此通过遗忘每个带基点范畴中的基点，它也具有 Cat-多范畴的结构。本节将详细说明 Γ-Cat 上的 Cat-多范畴结构。这一讨论是逆 K-理论的讨论所必需的；逆 K-理论的定义域是 Γ-Cat，详见第10章。

下面关于 Γ-Cat 的讨论类似于关于 D-Cat 的解释 5.1.2 和 5.3.10。主要区别在于，一方面，D-Cat 完全处于非带基点的情形。特别是，D-Cat 中的 Day 卷积 (1.4.2)、同态图表 (1.4.5) 和单位图表 (1.4.6) 都不带基点。另一方面，在当前的 Γ-Cat 情形（定义 9.1.11）中，我们使用定义 9.1.17 中的带基点的 Day 卷积及其相关的幺半单位、带基点的同态图表和带基点的映射对象。

对象与多态射范畴。 Γ-Cat 中的一个对象是一个 Γ-范畴（定义 9.1.11），也就是说，是一个带基点函子

$$(\mathcal{F},\underline{0}) \xrightarrow{Z} (\mathsf{Cat},\mathbf{1}). \tag{9.2.1}$$

对于 Γ-范畴 Z 和 $X = X_{j=1}^{n}$，n 元多态射范畴为

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big) = \mathsf{Map}_*\big(X_1\wedge\cdots\wedge X_n\,,\,Z\big) \tag{9.2.2}$$

with

- $\wedge$ 带基点的 Day 卷积 (9.1.18)，以及
- Map_* 带基点的映射对象 (9.1.22)。

为了进一步展开 $\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}(X\,;Z)$，我们考虑以下几种情况。

元数 1 的多态射范畴。元数 1 的多态射范畴

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(X_1\,;\,Z\big) = \mathsf{Map}_*(X_1,Z)$$

如说明 9.1.28 所述。

零元多重态射范畴。零元多重态射范畴是

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle\,;\,Z\big) = \mathsf{Map}_*(J,Z) \tag{9.2.3}$$

其中J 是幺半单位图表（9.1.19）。根据说明 9.1.24 和 9.1.28，$\mathsf{Map}_*(J,Z)$中的一个对象 F 由带基点函子组成

$$J\underline{n} \cong \underline{n} \xrightarrow{F_{\underline{n}}} Z\underline{n} \quad \text{for} \quad \underline{n}\in\mathcal{F}$$

这些函子对Γ中的非零态射是自然的，如（9.1.29）所示。此外，由于$n = \{0,\dots,n\}$是一个离散的带基点范畴，$F_{\underline{n}}$由这些对象决定

$$F_{\underline{n}}(j)\in Z\underline{n} \qquad \text{for } j\in\underline{n} \text{ such that} \qquad F_{\underline{n}}(0) = *, \tag{9.2.4}$$

$Z\underline{n}$中的基点。

事实上，(9.2.4) 中的对象 $F_{\underline{n}}(j)$ 由对象 $F_{\underline{1}}(1)\in Z1$ 确定。更具体地，对于每个 $1\le j\le n$，考虑 Γ 中的态射

$$\underline{1} \xrightarrow{\nu_j} \underline{n} \quad \text{such that} \quad \nu_j(1) = j. \tag{9.2.5}$$

ν_j 的自然性图表 (9.1.29) 是如下交换图。

(9.2.6)
$$\begin{array}{ccc} J\underline{1} \cong \underline{1} & \xrightarrow{F_{\underline{1}}} & Z\underline{1} \\ {\scriptstyle \nu_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z\nu_j} \\ J\underline{n} \cong \underline{n} & \xrightarrow{F_{\underline{n}}} & Z\underline{n} \end{array}$$

在对象 $1 \in \underline{1}$ 处取值，得到对象等式

(9.2.7)
$$F_{\underline{n}}(j) = (Z\nu_j)\big(F_{\underline{1}}(1)\big) \quad \text{in} \quad Z\underline{n}.$$

因此，$\mathrm{Map}_*(J,Z)$ 中的对象 F 由对象 $F_{\underline{1}}(1) \in Z1$ 决定。此外，非零态射 $f \in \mathrm{F}$ 的自然性图表 (9.1.29) 由 ν_j 且 $1 \le j \le n$ 时的自然性图表 (9.2.6) 决定。这可由将 (9.2.14) 中的 θ 替换为 F 得到。

对于对象 $F,G \in \mathrm{Map}_*(J,Z)$，态射 *morphism* $\theta : F \to G$ 由 Zn 中的态射确定

(9.2.8)
$$F_{\underline{n}}(j) \xrightarrow{\theta_{\underline{n},j}} G_{\underline{n}}(j) \quad \text{for} \quad 0 \le j \le n$$

使得

- $\theta_{n,0} = 1_*$ 对于每个 $n \ge 0$且
- 满足修正公理(9.1.30)。

事实上，(9.2.8) 中的态射 $\theta_{\underline{n},j}$ 由单个态射决定

(9.2.9)
$$F_{\underline{1}}(1) \xrightarrow{\theta_{\underline{1},1}} G_{\underline{1}}(1) \quad \text{in} \quad Z\underline{1}$$

该态射满足$f = \nu_j$ 在 (9.2.5) 中关于 $1 \le j \le n$的修正公理 (9.1.30)。更详细地说，关于 ν_j 的修正公理指出，下面的两个缀饰自然变换相等。

(9.2.10)
$$\begin{array}{ccc} & \overset{F_{\underline{1}}}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}} & \\ J\underline{1} & \theta_{\underline{1}} \quad G_{\underline{1}} & Z\underline{1} \\ {\scriptstyle \nu_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z\nu_j} \\ & \overset{F_{\underline{n}}}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}} & \\ J\underline{n} & \theta_{\underline{n}} \quad G_{\underline{n}} & Z\underline{n} \end{array}$$

在对象 $1 \in \underline{1}$ 处求值，得到态射等式

(9.2.11)
$$\theta_{\underline{n},j} = (Z\nu_j)\theta_{\underline{1},1} \quad \text{in} \quad Z\underline{n}.$$

此外，对于 F 中任意非零态射 $f : m \to n$，修正公理 (9.1.30)——它断言下面两个缀饰自然变换相等——自动成立。

(9.2.12)
$$\begin{array}{ccc} & \overset{F_{\underline{m}}}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}} & \\ J\underline{m} & \theta_{\underline{m}} \quad G_{\underline{m}} & Z\underline{m} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Zf} \\ & \overset{F_{\underline{n}}}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}} & \\ J\underline{n} & \theta_{\underline{n}} \quad G_{\underline{n}} & Z\underline{n} \end{array}$$

事实上，对于每个 $1 \le i \le m$，F 中的下图是交换的。

(9.2.13)
$$\begin{array}{ccc} & \underline{1} & \\ {\scriptstyle \nu_i}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \nu_{f(i)}} \\ \underline{m} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \underline{n} \end{array}$$

因此，Zn 中有如下态射等式。

(9.2.14)
$$\begin{cases} (Zf)\theta_{\underline{m},i} = (Zf)\big((Z\nu_i)\theta_{\underline{1},1}\big) & \text{by (9.2.11)} \\ \qquad\quad = (Z\nu_{f(i)})\theta_{\underline{1},1} & \text{by (9.2.13)} \\ \qquad\quad = \theta_{\underline{n},f(i)} & \text{by (9.2.11)} \end{cases}$$

这证明了$f : m \to n$的修正公理 (9.2.12)。

高阶数下的多态射范畴。 对于元数$n \ge 2$，我们结合说明 9.1.26 和 9.1.28。(9.2.2) 中n元多态射范畴Γ-Cat(X; Z)里的一个对象 F 是一个 Γ-范畴态射，也就是一个带基点的自然变换

(9.2.15)
$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \xrightarrow{\quad F \quad} Z.$$

这样的 Γ-范畴态射F 由以下数据构成：对于 F 中每个n元对象组 $m^n_{j=1}$，给出一个分量基点函子

(9.2.16)
$$\wedge_{j=1}^n X_j\underline{m_j} \xrightarrow{\quad F_{\langle \underline{m_j}\rangle} \quad} Z\big(\wedge_{j=1}^n \underline{m_j}\big) = Z\big(\underline{m_1 \cdots m_n}\big)$$

使得对于每个n元非零态射组

(9.2.17)
$$\big\langle h_j : \underline{m_j} \longrightarrow \underline{p_j}\big\rangle_{j=1}^n \quad \text{in} \quad \mathcal{F},$$

以下自然性图表交换。

(9.2.18)
$$\begin{array}{ccc} \wedge_{j=1}^n X_j\underline{m_j} & \xrightarrow{F_{\langle \underline{m_j}\rangle}} & Z\big(\underline{m_1 \cdots m_n}\big) \\ {\scriptstyle \wedge_j X_j h_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z(\wedge_j h_j)} \\ \wedge_{j=1}^n X_j\underline{p_j} & \xrightarrow{F_{\langle \underline{p_j}\rangle}} & Z\big(\underline{p_1 \cdots p_n}\big) \end{array}$$

对于对象 F、$G \in$ Γ-Cat(X; Z)，一个态射 $\theta : F \to G$ 是带基点的修正。它由以下数据组成：对于 F 中每个由对象组成的n元组 $m^n_{j=1}$，给出一个带基点自然变换

(9.2.19)
$$\wedge_{j=1}^n X_j\underline{m_j} \;\underset{G_{\langle \underline{m_j}\rangle}}{\overset{F_{\langle \underline{m_j}\rangle}}{\overset{\theta_{\langle \underline{m_j}\rangle}}{\rightrightarrows}}}\; Z\big(\underline{m_1 \cdots m_n}\big)$$

使得对于每个如 (9.2.17) 中所示的非零态射n元组 h^j，下面两个缀饰自然变换相等。

(9.2.20)
$$\begin{array}{ccc} \wedge_{j=1}^{n} X^j m^j & \overset{F_{\langle m_j\rangle}}{\underset{G_{\langle m_j\rangle}}{\overset{\theta_{\langle m_j\rangle}}{\rightrightarrows}}} & Z(m_1 \cdots m_n) \\ {\scriptstyle \wedge_j X^j h^j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Z(\wedge_j h^j)} \\ \wedge_{j=1}^{n} X^j p^j & \overset{F_{\langle p_j\rangle}}{\underset{G_{\langle p_j\rangle}}{\overset{\theta_{\langle p_j\rangle}}{\rightrightarrows}}} & Z(p_1 \cdots p_n) \end{array}$$

这称为修正公理。

带色单位。 对于如 (9.2.1) 中的 Γ-范畴Z， Z-带色单位 (3.1.4)

(9.2.21)
$$\mathbf{1} \xrightarrow{1_Z} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}(Z\,;Z) = \mathsf{Map}_*(Z,Z)$$

是函子Z :F Cat 的恒等自然变换。 ⟶

对称群作用。 假设 $\sigma \in \Sigma_n$ 是一个置换。右作用函子 (3.1.3)

(9.2.22)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;Z\big) & \xrightarrow[\cong]{\sigma} & \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\sigma\,;Z\big) \\ \| & & \| \\ \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^{n} X_j\,,Z\big) & & \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)}\,,Z\big) \end{array}$$

将如 (9.2.15) 中的对象F 映射为以下垂直复合的基点自然变换。

(9.2.23)
$$\begin{array}{ccc} \wedge_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)} & \overset{F^\sigma}{\longrightarrow} & Z \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \\ \wedge_{j=1}^{n} X_j & \overset{F}{\nearrow} & \end{array}$$

箭头 σ 使用带基点的 Day 卷积的编织 (9.1.21) 置换因子 $X^{\sigma(j)}{}_{j=1}^{n}$ 。更明确地，对于 F 中每个由 n 个对象构成的对象组 $m^j{}_{j=1}^{n}$ ， F^σ 的分量基点函子是以下复合。

(9.2.24)
$$\begin{array}{ccc} \wedge_{j=1}^{n} X_{\sigma(j)} m_j & \xrightarrow{F^\sigma_{\langle m_j\rangle}} & Z\big(m_1 \cdots m_n\big) \\ {\scriptstyle \sigma}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\uparrow{\scriptstyle Z(\sigma^{-1})} \\ \wedge_{j=1}^{n} X_j m_{\sigma^{-1}(j)} & \xrightarrow{F_{\langle m_{\sigma^{-1}(j)}\rangle}} & Z\big(m_{\sigma^{-1}(1)} \cdots m_{\sigma^{-1}(n)}\big) \end{array}$$

(9.2.24) 的具体内容如下。

● 左侧垂直箭头 σ 根据 Cat 中楔积的编织 (9.1.5)，置换因子 $X^{\sigma(j)} m^j{}_{j=1}^{n}$ 。后者由 Cat 中笛卡尔积的编织诱导。

● 底部水平箭头是F 的分量基点函子，如式（9.2.16）中针对由$m^{\sigma^{-1}(j)}{}_{j=1}^{n}$ 组成的n元对象组所示。

● 右侧垂直箭头是同构在Z 下的像，该同构属于 F

$$\begin{array}{ccc} \wedge_{j=1}^{n}\, \underline{m_{\sigma^{-1}(j)}} & \xrightarrow[\cong]{\sigma^{-1}} & \wedge_{j=1}^{n}\, \underline{m_j} \\ \| & & \| \\ \underline{m_{\sigma^{-1}(1)} \cdots m_{\sigma^{-1}(n)}} & & \underline{m_1 \cdots m_n} \end{array} \tag{9.2.25}$$

按照 σ^{-1}，利用 F 中的多重乘法编织 $\xi^{\wedge}$ (2.3.14) 对因子 $m_{\sigma^{-1}(j)}{}_{j=1}^{n}$ 进行置换。

设 $\theta : F\, G$ 是 F-Cat$\big(\langle X\rangle; Z\big)$ 中的一个态射，其分量是带基点自然变换，如 (9.2.19) 所示。式 (9.2.22) 中的右作用函子 σ 将 θ映为水平复合的带基点修正

$$\theta^{\sigma} = \theta * 1_{\sigma} : F^{\sigma} \longrightarrow G^{\sigma}$$

如 (9.2.23) 所示，其中 F 替换为 θ。其分量带基点自然变换由以下水平复合给出

$$\theta^{\sigma}_{\underline{\langle m_j\rangle}} = 1_{Z(\sigma^{-1})} * \theta_{\underline{\langle m_{\sigma^{-1}(j)}\rangle}} * 1_{\sigma} \tag{9.2.26}$$

如 (9.2.24) 所示，其中 F 替换为 θ。

多范畴复合。 设对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，给定一个 ℓ_j-元组的 Γ-范畴 $W^j = W^{ji}{}_{i=1}^{\ell_j}$，以及

$$\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_n \quad \text{and} \quad \langle W\rangle = \langle\langle W_j\rangle\rangle_{j=1}^{n} \tag{9.2.27}$$

拼接后的 ℓ-元组。多范畴复合 (3.1.5)

$$(\Gamma\text{-Cat})\big(\langle X\rangle\,;\, Z\big) \times \textstyle\prod_{j=1}^{n} (\Gamma\text{-Cat})\big(\langle W_j\rangle\,;\, X_j\big) \xrightarrow{\ \gamma\ } (\Gamma\text{-Cat})\big(\langle W\rangle\,;\, Z\big) \tag{9.2.28}$$

是以下复合函子。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^{n} X_j\,,\, Z\big) \times \prod_{j=1}^{n} \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{i=1}^{\ell_j} W_{ji}\,,\, X_j\big) & & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\times\wedge} & \overset{\gamma}{\searrow} & \\ \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^{n} X_j\,,\, Z\big) \times \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^{n} \wedge_{i=1}^{\ell_j} W_{ji}\,,\, \wedge_{j=1}^{n} X_j\big) & \underset{m}{\nearrow} & \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^{n} \wedge_{i=1}^{\ell_j} W_{ji}\,,\, Z\big) \end{array} \tag{9.2.29}$$

(9.2.29) 的细节如下。

● 标记为m 的箭头是作为 Cat-范畴的 Γ-Cat 中的复合。它由– 对象上的带基点自然变换的– 态射上的带基点修正的水平复合的垂直复合构成。

● 在左侧垂直箭头中，$\wedge$ 是带基点的 Day 卷积 (9.1.18)，它逐分量扩展到带基点自然变换和带基点修正。

γ 关于分量函子和分量自然变换的显式公式与 (5.1.25) 和 (5.1.27) 中相同，只是将笛卡尔的积换成楔积。

如果某些 $\ell_j = 0$，那么需要按照 (5.1.20) 后面的讨论，利用 (9.2.3) 和幺半单位图表 J (9.1.19)，对 (9.2.29) 作稍微调整。

9.3. 函子 A

本节的目的是定义函子

$$\Gamma\text{-Cat} \xrightarrow{\ A\ } \mathcal{A}\text{Cat}$$

它是逆K-理论函子 P 的两个组成函子之一（第 10.1 节）。

- A 的对象赋值见定义 9.3.1。
- A 的态射赋值见定义 9.3.10。
- A 的函子性在引理 9.3.20 中得到证明。

对象赋值 A。 回顾例中定义的小紧双置换范畴

$$\big(\mathcal{A}, (\oplus, \langle\rangle, \beta^{\oplus}), (\otimes, (1), \beta^{\otimes}), \partial^l = (\delta^r)^{-1}, \partial^r = (\delta^l)^{-1} = 1\big)$$

例 2.3.17 中的

- additive structure $\mathcal{A}^{\oplus} = (\mathcal{A}, \oplus, \langle\rangle, \beta^{\oplus})$ and
- multiplicative structure $\mathcal{A}^{\otimes} = (\mathcal{A}, \otimes, (1), \beta^{\otimes})$.

逆 K-理论函子（定义 10.1.2）仅使用加性结构 $\mathrm{A}^{\oplus}$。考察A的 Cat-多函子性时，则会用到乘法结构 $\mathrm{A}^{\otimes}$ ；见 (9.4.11)。

对于每个整数 $n \geq 0$，回顾

- $\overline{n} = \{1, \dots, n\}$ 表示一个无基点有限集，其 $\overline{0} = \varnothing$，并且
- $\underline{n} = \{0, 1, \dots, n\}$ 表示以 0 为基点的基点有限集。

首先，我们定义 A 的对象赋值。

定义 9.3.1. 设 X 是一个 Γ-范畴（定义 9.1.11）。定义一个函子

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\ AX\ } \mathrm{Cat} \tag{9.3.2}$$

如下。

对象： 对于一个对象 $m = m_i^{\,p}{}_{i=1} \in \mathrm{A}$，其中每个 $m_i > 0$，定义范畴

$$(AX)(m) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{p} X\underline{m_i} & \text{if } p > 0 \text{ and} \\ X\underline{0} = \mathbf{1} & \text{if } p = 0. \end{cases} \tag{9.3.3}$$

态射： 对于一个态射

$$\langle m_i\rangle_{i=1}^{p} = m \xrightarrow{\ \phi\ } n = \langle n_j\rangle_{j=1}^{q} \quad \text{in} \quad \mathcal{A}$$

如 (2.3.18) 所示，函子

$$\prod_{i=1}^{p} X\underline{m_i} = (AX)(m) \xrightarrow{\ \phi_* = (AX)(\phi)\ } (AX)(n) = \prod_{j=1}^{q} X\underline{n_j} \tag{9.3.4}$$

定义如下，其中 $j \in \{1, \dots, q\}$。

(i) 若$q = 0$，则 ϕ_* 是到终端范畴**1**的唯一函子。

(ii) 若$p = 0$且$q > 0$，则 ϕ_* 与第j个坐标投影的复合定义为复合

$$\begin{array}{ccc} (AX)\langle\rangle & \xrightarrow{\phi_*} & (AX)(n) = \prod_{j=1}^{q} X\underline{n_j} \\ \| & & \downarrow \text{project} \\ X\underline{0} & \xrightarrow{X\iota_{n_j}} & X\underline{n_j} \end{array}$$

其中 $\iota_{n_j} : \underline{0} \to \underline{n}$是带基点有限集的唯一态射。

(iii) 对于此情形及接下来的情形，假设 p、$q > 0$。若 $\phi^{-1}(n) = \varnothing$，则 ϕ_* 与第 j 个坐标投影的复合定义为以下复合。

$$\begin{array}{ccc} (AX)(m) = \prod_{i=1}^{p} X\underline{m_i} & \xrightarrow{\phi_*} & (AX)(n) = \prod_{j=1}^{q} X\underline{n_j} \\ \downarrow & & \downarrow \text{project} \\ \mathbf{1} = X\underline{0} & \xrightarrow{X\iota_{n_j}} & X\underline{n_j} \end{array}$$

(iv) 若 $\phi^{-1}(\overline{n}) \neq \varnothing$，则存在唯一的指标 $i \in \{1, \dots, p\}$ 使得

$$\varnothing \neq \phi^{-1}\left(\overline{n_j}\right) \subset \overline{m_i}.$$

定义带基点有限集的态射

$$\underline{m_i} \xrightarrow{\phi_{i,j}} \underline{n_j} \quad \text{in} \quad \mathcal{F} \tag{9.3.5}$$

by

$$\phi_{i,j}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{if } x \in \phi^{-1}\left(\overline{n_j}\right) \subset \overline{m_i} \text{ and} \\ 0 & \text{if } x \in \underline{m_i} \smallsetminus \phi^{-1}\left(\overline{n_j}\right). \end{cases}$$

ϕ_* 与j번째坐标投影的复合定义为以下复合。

$$\begin{array}{ccc} (AX)(m) = \prod_{i=1}^{p} X\underline{m_i} & \xrightarrow{\phi_*} & (AX)(n) = \prod_{j=1}^{q} X\underline{n_j} \\ \text{project} \downarrow & & \downarrow \text{project} \\ X\underline{m_i} & \xrightarrow{(\phi_{i,j})_* = X\phi_{i,j}} & X\underline{n_j} \end{array} \tag{9.3.6}$$

AX的函子性源自$X : (\mathrm{F}, 0) \to (\mathrm{Cat}, \mathbf{1})$的函子性。至此，函子$AX$的定义完成。

回顾一下，加法结构 $\mathrm{A}^{\oplus} = (\mathrm{A}, \oplus, , \beta^{\oplus})$ 是通过对象上的序列串接给出的，其中空序列 是严格幺半单位（例 2.3.17）。

引理 9.3.7. 在定义 *9.3.1* 的背景下，三元组

$$\mathcal{A}^{\oplus} \xrightarrow{\left(AX, (AX)^2, (AX)^0\right)} \mathrm{Cat}$$

是一个严格幺元强对称幺半函子，其幺半约束 $(AX)^2$由笛卡尔积的结合律同构和单位同构给出。

证明。单位约束

$$\mathbf{1} \xrightarrow{(AX)^0} (AX)\langle\rangle = X\underline{0} = \mathbf{1} \tag{9.3.8}$$

根据定义是恒等函子。对于 A 中的对象 $m = m_i^p{}_{i=1}$ 和 $n = n^{j^p}{}_{j=1}$，幺半约束

$$\begin{array}{ccc} (AX)(m)\times(AX)(n) & \xrightarrow[\cong]{(AX)^2} & (AX)(m\oplus n) \\ \| & & \| \\ \left(\prod_{i=1}^p X\underline{m_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^q X\underline{n_j}\right) & & X\underline{m_1}\times\cdots\times X\underline{m_p}\times X\underline{n_1}\times\cdots\times X\underline{n_q} \end{array} \tag{9.3.9}$$

由以下给出：

- 当 $p,q > 0$ 时，笛卡尔积的结合同构，
- 当 $p = 0$ 时，笛卡尔积的左单位同构，以及
- 当 $q = 0$ 时，笛卡尔积的右单位同构。

$(AX)^2$ 的自然性，以及$(AX,(AX)^2,(AX)^0)$作为对称幺半函子的公理（定义 1.1.17），均由笛卡尔积的相应性质推出。□

对于一个 Γ-范畴X，我们始终将AX 视为引理 9.3.7 中的严格幺元强对称幺半函子。

A 的态射赋值A。接下来定义A 在态射上的赋值。

定义 9.3.10。对于一个 Γ-范畴态射$F : X$ （定义 9.1.11），定义一个自然变换

$$\mathcal{A} \underset{AY}{\overset{AX}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{AF}}}} \mathsf{Cat} \tag{9.3.11}$$

具体而言，对每个对象$m = m_i^p{}_{i=1} \in \mathsf{A}$，其分量函子为

$$(AF)_m = \begin{cases} \prod_{i=1}^p F_{\underline{m_i}} : (AX)(m) \longrightarrow (AY)(m) & \text{if } p > 0 \text{ and} \\ 1_{\mathbf{1}} : (AX)\langle\rangle \longrightarrow (AY)\langle\rangle & \text{if } p = 0. \end{cases} \tag{9.3.12}$$

$AF : AX\ AY$ 的自然性由F的基点自然性推出。

解释 9.3.13 （单射性）。定义 $F\ AF$ 中的赋值是单射的。换言之，若 F、$G : X\ Y$ 是两个 Γ-范畴态射，并且 $AF = AG$ 作为自然变换相等，那么 $F = G$。根据 (9.3.12) 的 $p = 1$ 情形，这一点成立。

回顾定义 1.1.21，幺半函子之间的<style id='1'>幺半自然变换 是满足单位约束和幺半约束兼容性的自然变换，其含义见 (1.1.22)。

引理 9.3.14。对于一个 Γ-范畴态射 $F : X\ Y$，定义 *9.3.10* 中的自然变换

$$AX \xrightarrow{AF} AY$$

是一个幺半自然变换；此外，当且仅当 F 是自然同构时，它也是自然同构。

证明。对于第一个断言，我们考虑 (1.1.22) 中的两个约束图表。

- 单位约束图表是交换的，因为 $(AF)_{\langle\rangle}$、$(AX)0$ 和 $(AY)^0$ 都是恒等函子 1_1。
- AF 的幺半约束图表的交换性，源于笛卡尔积的结合与单位同构的自然性。

关于自然同构的第二个断言，源自定义 (9.3.12)：$(AF)_m$ 是分量函子 $F_{\underline{m_i}}$的积。□

A的函子性。为了表述定义 9.3.1 和 9.3.10 中$A.$ 的函子性，并定义逆K-理论函子，我们使用以下概念。

定义 9.3.15。 对于一个（非对称的）Cat-多范畴 M（定义 3.1.2），其底层范畴 M_1 定义如下。

- 其对象是 M 中的对象。
- 其态射集为

$$\mathsf{M}_1(a,b) = \mathsf{Ob}\big(\mathsf{M}(a;b)\big)$$

  对于对象 a、$b \in \mathsf{M}$。
- 恒等态射是 M 中的带色单位。
- 态射复合是 M 中限制在一元多态射范畴的对象上的多范畴复合。

定义 1.3.1、命题 1.3.4 和例 3.1.18 表明 M_1 是一个定义良好的范畴。若上下文清楚，则省略下标，并用 M 表示 M_1，以简化记号。

例 9.3.16 （置换余纤维化）。 设 $(\mathsf{D},\oplus,\otimes)$ 是一个小紧双置换范畴（定义 2.2.12）。非对称 Cat-多范畴 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ （定理 7.3.16）的底层范畴具有

- 以 D 上的置换余纤维化（定义 7.1.4）为对象；
- 以上笛卡尔 1-线性函子（定义 7.2.2）为态射；以及
- 恒等变换和复合（定义 7.3.1）由对称幺半函子的恒等变换和复合给出。

D 上的置换余纤维化只使用加法结构 $\oplus$。因此，根据例 7.2.15 中对余笛卡尔 1-线性函子的描述，在 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的底层范畴中只使用加法结构 $\oplus$，而非乘法结构 $\otimes$。

例 9.3.17 (Γ-范畴)。 Cat-多范畴Γ-Cat 的底层范畴（定理 9.1.23 和第 9.2 节）是由 Γ- 范畴及其态射（定义 9.1.11 ）构成的范畴 $[\mathsf{F}, \mathbf{Cat}]_*$。在引理 9.3.20 和定义 10.1.2 中，我们考虑 Γ-Cat 的底层范畴，它也记作 Γ-Cat。

例 9.3.18 （双置换指标范畴）。 假设 $(\mathsf{D},\oplus,\otimes)$ 是一个小紧双置换范畴（定义 2.2.12）。Cat-多范畴 DCat 的底层范畴（定理5.3.11）具有

- 对称幺半函子 $\mathcal{D}^{\oplus}\,\mathbf{Cat}$ 作为对象；
- 将幺半自然变换（说明 5.2.21(4)）作为态射；

- 将恒等自然变换作为恒等变换；以及
- 将自然变换的垂直复合 (5.1.20) 作为复合。

注意，底层 DCat 范畴中仅使用加法结构 $\oplus$，而不使用乘法结构 $\otimes$。在引理 9.3.20 和定义 10.1.2 中，对于例 2.3.17 中的小紧双置换范畴 A，我们考虑 ACat 的底层范畴，该范畴也记作 ACat。

例 9.3.19 （置换范畴）。Cat- 多范畴 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ （定理 6.1.31）的底层范畴具有

- 以小置换范畴作为对象；
- 以严格幺元强对称幺半函子（例 6.1.13）作为态射；以及
- 恒等变换和复合由幺半函子给出。

在定义 10.1.2 中，我们考虑 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 的底层范畴，它也记作 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$。

接下来的结果分别使用示例 9.3.17 和 9.3.18 中 Γ-Cat 和 ACat 的底层范畴。

引理 9.3.20。对象和态射赋值

$$X \longmapsto AX \quad \textit{and} \quad F \longmapsto AF$$

分别在定义 *9.3.1* 和 *9.3.10* 中定义一个函子

$$\Gamma\text{-Cat} \xrightarrow{\ A\ } \mathcal{A}\text{Cat}. \tag{9.3.21}$$

证明。对象和态射赋值分别由引理 9.3.7 和 9.3.14 保证良定义。A 的函子性由每个分量函子的定义 (9.3.12)（AF）$_m$ 以及笛卡尔积的函子性得出。□

(9.3.21) 中的函子 A 在定理 9.5.9 中扩展为 Cat-多函子。

9.4. 范畴 A 的多态射函子

我们的下一个目标是扩展函子

$$\Gamma\text{-Cat} \xrightarrow{\ A\ } \mathcal{A}\text{Cat}$$

(9.3.21) 中的函子，使其成为 Cat-多函子；参见定理 9.5.9。本节将先构造它的多态射函子。为便于理解，回顾如下内容。

- Γ-Cat（定义 9.1.11）具有由对称幺半闭结构所诱导的 Cat-多范畴结构（定理 9.1.23）。幺半积由带基点的 Day 卷积 (9.1.18) 给出。
- 对每个小型紧双置换范畴 D，DCat 都是 Cat-多范畴（定理 5.3.11）。特别地，对于例 2.3.17 中的小型紧双置换范畴 A，ACat 是 Cat-多范畴。ACat 上的 Cat-多范畴结构并非由幺半结构诱导而来（说明 5.3.4）。

以下是本节的概要。

- A 的零元数多态射函子见定义 9.4.1。引理 9.4.5 验证了它们是同构。

● A 的正元数多态射函子构造如下：对象方面见– 定义 9.4.13 和引理 9.4.22，态射方面见– 定义 9.4.23 和引理 9.4.29。

● 引理 9.4.30 表明，这些赋值定义了一个函子。

A 在零元数下的多态射函子。函子 A，$X\ AX$ 在 Γ-范畴 X中的对象赋值见定义 9.3.1 和引理 9.3.7。要定义 A 的多态射函子，我们首先考虑输入的元数为零的情形。

定义 9.4.1。 设Z 是一个 Γ-范畴。定义一个函子

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}(\langle\rangle; Z) & \xrightarrow{\ A\ } & \mathcal{A}\mathsf{Cat}(\langle\rangle; AZ) \\ \| & & \| \\ \mathsf{Map}_*(J, Z) & & (AZ)(1) = Z\underline{1} \end{array} \tag{9.4.2}$$

如下。在 (9.4.2) 中，左侧的等式来自 (9.2.3)，右侧的等式来自 (5.3.2) 和 (9.3.3)。

对象： 根据 (9.2.7)，$\mathsf{Map}_*(J,Z)$ 中的对象 F 由$F_{\underline{1}}(1)$ in$Z1$ 中的对象决定。我们定义对象

$$AF = F_{\underline{1}}(1) \quad \text{in} \quad Z\underline{1}. \tag{9.4.3}$$

态射： 由 (9.2.11)，态射 $\theta : F\ G$ 属于 $\mathsf{Map}_*(J,Z)$ 由以下对象确定：态射 $\theta_{\underline{1}}1$（见 (9.2.9)）。我们定义态射

$$A\theta = \theta_{\underline{1}},1 : AF = F_{\underline{1}}(1) \longrightarrow AG = G_{\underline{1}}(1) \quad \text{in} \quad Z\underline{1}. \tag{9.4.4}$$

这就完成了 (9.4.2) 中 A 的定义。

引理 9.4.5。 在定义 *9.4.1* 的背景下，

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}(\langle\rangle; Z) \xrightarrow[\cong]{A} \mathcal{A}\mathsf{Cat}(\langle\rangle; AZ)$$

是一个范畴同构。

证明。A 在 (9.4.2) 中的函子性源于以下事实：$\mathsf{Map}_*(J,Z)$ 中的恒等态射和复合按分量由自然变换的恒等态射和复合给出（说明 9.1.28）。函子 A 是一个同构，理由如下。

● 根据 (9.2.7) 和 (9.2.11)，A 分别在对象集和态射上是单射。

● 给定一个对象 $z \in Z1$，我们利用 (9.2.4)、(9.2.5) 和 (9.2.7) 定义 $\mathsf{Map}_*(J,Z)$ 中的一个对象 F：

$$F_{\underline{n}}(j) = \begin{cases} * \in Z\underline{n} & \text{if } j = 0 \text{ and} \\ (Z\nu_j)(z) \in Z\underline{n} & \text{if } 1 \le j \le n. \end{cases} \tag{9.4.6}$$

对于 ν_j，自然性图表 (9.2.6) 成立，因为

$$\begin{cases} F_{\underline{1}}(1) = (Z\nu_1)(z) & \text{by (9.4.6)} \\ \qquad = z & \text{by functoriality of } Z. \end{cases} \tag{9.4.7}$$

由 (9.4.3) 和 (9.4.7)

$$AF = F_{\underline{1}}(1) = z,$$

因此 A 在对象集上是满射的。

● 利用 (9.2.9)、(9.2.11) 和 (9.4.4)，可以类似地证明 A 在态射集上的满射性。

因此，A 是范畴同构。 □

A 的正元数多态射函子：对象赋值。回顾如下内容。

● 在定义 5.2.12 中，令 $\mathsf{D} = \mathsf{A}$，则 ACat 中的n元 1-胞是加性自然变换。后者是满足单位公理 (5.2.16) 和可加性公理 (5.2.18) 的 (5.1.5) 中所述的自然变换。就对象和态射而言，可加性公理为 (5.2.24)。

• 根据引理 9.3.7，A 将每个 Γ-范畴映为严格保单位的强对称幺半函子$\mathcal{A}^{\oplus}$ Cat。

$$\longrightarrow$$

接下来，我们定义多态射函子的对象赋值

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow{\quad A\quad} \mathcal{A}\mathsf{Cat}\big(\langle AX\rangle\,;\,AZ\big)$$

其中输入 X 的元数为 $n > 0$。当输入具有正元数时，我们需要利用其乘法结构 $\otimes$，考虑 A 中的迭代积。为简化表述，我们定义如下。

记号 9.4.8。对于 $1 \le j \le n$，设给定一个对象

$$m^j = \big\langle m^j_{i_j}\big\rangle_{i_j=1}^{r_j} \in \mathcal{A} \tag{9.4.9}$$

其长度为 $r_j \ge 0$，且每个 $m^j{}_{i_j} > 0$。对于 $1 \le ij \le rj$，对每个 $1 \le j \le n$，定义正整数

$$m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n} = \prod_{j=1}^n m^j_{i_j} \tag{9.4.10}$$

以及对象

$$\begin{aligned} m^{1,\dots,n} &= \bigotimes_{j=1}^n m^j \in \mathcal{A} \\ &= \Big\langle \cdots \big\langle m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}\big\rangle_{i_1=1}^{r_1} \cdots \Big\rangle_{i_n=1}^{r_n} \end{aligned} \tag{9.4.11}$$

其长度为 $r_1 \cdots r_n$。这里 $\otimes$ 是 A 中的乘法结构 (2.3.22)。

解释 9.4.12. 正如我们在 (2.3.22) 之后提到的，幺半积

$$\langle m_i\rangle_{i=1}^p \otimes \langle n_j\rangle_{j=1}^q = \langle\langle m_i n_j\rangle_{i=1}^p\rangle_{j=1}^q \quad \text{in} \quad \mathcal{A}$$

可视化为$q \times p$矩阵，其 (j,i) 项为正整数$m_i n_j$，它也可视为无基点有限集$m_i n_j$。类似地，(9.4.11) 中的n 重幺半积$m^{1,\dots,n}$ 可视化为n维矩阵。典型项的形式为$m^{1,\dots,n}{}_{i_1,\dots,i_n}$（见 (9.4.10)），它也可视为无基点有限集

$$\overline{m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}} = \prod_{j=1}^n \overline{m^j_{i_j}}.$$

若有任意一个$r_j = 0$，则m^j 是空序列 $\in \mathsf{A}$，$m^{1,\dots,n}$也如此。

定义 9.4.13. 设给定

● Γ-范畴 Z、$X1$、. . .、X_n，其中 $n > 0$、$X = X_{jnj=1}$，以及 $AX = AX_{jnj=1}$，并且
● Γ-Cat(X; Z) 这个 n 元多态射范畴中的一个对象 F，即一个带基点自然变换 (9.2.15)

$$\bigwedge_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\ F\ } Z.$$

定义加性自然变换的数据（定义 5.2.12）

$$\langle AX\rangle \xrightarrow{\ AF\ } AZ \tag{9.4.14}$$

如下。对于每个对象的 n 元组

$$\langle m\rangle = \langle m^j\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{A}^n \tag{9.4.15}$$

其中每个 m^j 如 (9.4.9) 所示，分量函子 $(AF)\langle m\rangle$ 按照 (5.1.7) 的含义，由以下交换图表定义，其中 $1 \leq i_j \leq r_j$ 且 $1 \leq j \leq n$。

$$\begin{array}{ccccc}
\prod_{j=1}^{n}(AX_j)m^j & & \xrightarrow{\quad (AF)_{\langle m\rangle}\quad} & & (AZ)m^{1,\dots,n} \\
\| & & & & \| \\
\prod_{j=1}^{n}\prod_{i_j=1}^{r_j} X_j \underline{m^j_{i_j}} & & & & \prod_{i_n=1}^{r_n}\cdots\prod_{i_1=1}^{r_1} Z\underline{m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}} \\
{\scriptstyle \prod_j \mathsf{pr}_{i_j}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{pr}_{i_1,\dots,i_n}} \\
\prod_{j=1}^{n} X_j \underline{m^j_{i_j}} & \xrightarrow{\ \mathsf{pr}\ } & \bigwedge_{j=1}^{n} X_j \underline{m^j_{i_j}} & \xrightarrow{F_{\langle m^j_{i_j}\rangle_{j=1}^{n}}} & Z\underline{m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}}
\end{array} \tag{9.4.16}$$

至此，完成了 (9.4.14) 中 AF 的定义。

说明 9.4.17 （分量）。 图表 (9.4.16) 的详细内容如下。

● AX_j 和 AZ 中的每一个都是严格保单位的强对称幺半函子 $\mathrm{A}^{\oplus}$ Cat（引理 9.3.7）。范畴 $(AX_j)m_j$ 和 $(AZ)m^{1,\dots,n}$ 定义于 (9.3.3) 中。 ● 如果存在某个 $r_j = 0$，则 (9.4.11) 中的 $m^{1,\dots,n}$ 是空序列，而 $(AF)\langle m\rangle$ 是到终端范畴 $(AZ) = \mathbf{1}$ 的唯一函子。

● 每个箭头 pr? 都是 ?-坐标投影。
● 箭头 pr 是从笛卡尔积到楔积 (9.1.5) 的泛箭头。当 $n = 1$ 时，它定义为恒等函子。

● $F_{\langle m_j\, i_j\rangle_{n\ j=1}}$ 是给定带基点自然变换 $F : \bigwedge_{nj=1} X_j\ Z$ 的 $m_{j\ ijnj=1}$-分量函子，其含义见 (9.2.16)。

若 $n = 1$，则 $(AF)\langle m\rangle$ 与 (9.3.12) 中较早给出的定义一致。

说明 9.4.18 （单射性）。 定义 9.4.13 中的映射 $F\ AF$ 是单射。这是因为

● (9.4.16) 的特殊情形，其中每个 $r_j = 1$，这意味着每个 $m_j \in \mathrm{A}$ 的长度为 1；以及
● 楔积 (9.1.5) 的泛性质。

关于 $n = 1$ 的特例见解释 9.3.13。

说明 9.4.19 （公式）。 $(AF)\langle m\rangle$ 中的分量函子 (9.4.16) 可通过对象和态射赋值描述如下。设给定

$$x^j = \left\langle x^j_{i_j} \right\rangle_{i_j=1}^{r_j} \in \prod_{i_j=1}^{r_j} X_j \underline{m^j_{i_j}} = (AX_j)m^j \quad \text{for} \quad 1 \le j \le n \tag{9.4.20}$$

它们要么全是对象，要么全是态射。.....的像

$$\langle x^j \rangle_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n (AX_j)m^j$$

在分量函子 $(AF)\langle m\rangle$ 下为

$$\begin{aligned}(AF)_{\langle m\rangle}\langle x^j\rangle_{j=1}^n &= \left\langle \cdots \left\langle F_{\langle m^j_{i_j}\rangle_{j=1}^n} \langle x^j_{i_j}\rangle_{j=1}^n \right\rangle_{i_1=1}^{r_1} \cdots \right\rangle_{i_n=1}^{r_n} \\ &\in (AZ)m^{1,\cdots,n} = \prod_{i_n=1}^{r_n} \cdots \prod_{i_1=1}^{r_1} \left(Z\underline{m^{1,\cdots,n}_{i_1,\ldots,i_n}} \right).\end{aligned} \tag{9.4.21}$$

Here

$$\left\langle x^j_{i_j} \right\rangle_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n X_j \underline{m^j_{i_j}}$$

也表示它在 $\bigwedge_{j=1}^n X^j m^j{}_{i^j}$ 中经由泛箭头 pr 得到的像。

接下来我们证明，(9.4.14) 中的 AF 定义了一个加性自然变换（定义 5.2.12）。

引理 9.4.22。 在定义 *9.4.13* 的语境下，AF 是一个加性自然变换。

证明。对于 A 中每个 n 元态射组，AF 的自然性图表(5.1.9)由以下内容推出

- 笛卡尔的积的泛性质，
- (9.4.16) 中每个 pr? 和 pr 的自然性，以及
- 给定的带基点自然变换F的自然性图表(9.2.18)。

因此，AF 是(5.1.5)意义下的自然变换。剩下需要验证定义 5.2.12 中的两个公理。

单位性 (5.2.16)。$AZ : \mathcal{A}^{\oplus}$ Cat 的单位对象(5.2.6)属于终端范畴$(AZ)\langle\rangle = \mathbf{1}$。因此单位公理成立。

可加性(5.2.18)。该公理基于以下理由成立。

- (9.4.14) 中的每个分量函子 $(AF)\langle m\rangle$ 都由其坐标投影定义，是 F 的一个分量函子。
- 根据定义 (9.3.9)，幺半约束 $(AX_j)^2$ 和$(AZ)^2$ 由笛卡尔积的结合与单位同构给出。

因此，在当前语境下所需的图表 (5.2.18) 中，每个复合后接到 $(AZ)(?)$ 的某个因子上的坐标投影，都由 F 的同一个分量函子诱导。□

正元数情形下A 的多态射函子：态射赋值。接下来，我们定义多态射函子的态射赋值

$$\Gamma\text{-Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big) \xrightarrow{\quad A\quad} \mathcal{A}\text{Cat}\big(\langle AX\rangle\,;\,AZ\big)$$

其中输入 X 的元数为 $n\ >0$。回忆一下， Γ-Cat(X; Z) 中的态射是带基点修正，其分量为带基点自然变换，如 (9.2.19) 所示，并满足修正公理 (9.2.20)。

定义 9.4.23。 在定义 9.4.13 的语境下，假设给定一个态射

$$\wedge_{j=1}^{n} X_j \underset{G}{\overset{F}{\Downarrow\,\theta}} Z \quad \text{in} \quad \Gamma\text{-Cat}\big(\langle X\rangle\,;\,Z\big).$$

通过要求加性修正（定义 5.2.25）的数据

$$\langle AX\rangle \underset{AG}{\overset{AF}{\Downarrow\,A\theta}} AZ \tag{9.4.24}$$

使得对于每个如 (9.4.15) 中的 n 元对象组 $m\ \in \mathbf{A}^n$ ， 下图中的两个缀饰自然变换相等。

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{j=1}^{n}(AX_j)m^j & \overset{(AF)_{\langle m\rangle}}{\underset{(AG)_{\langle m\rangle}}{\Rightarrow\,(A\theta)_{\langle m\rangle}}} & (AZ)m^{1,\dots,n} \\
\| & & \| \\
\prod_{j=1}^{n}\prod_{i_j=1}^{r_j} X_j\underline{m^j_{i_j}} & & \prod_{i_n=1}^{r_n}\cdots\prod_{i_1=1}^{r_1} Z\underline{m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}} \\
{\scriptstyle \prod_j \mathsf{pr}_{i_j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{pr}_{i_1,\dots,i_n}} \\
\prod_{j=1}^{n} X_j\underline{m^j_{i_j}} & \xrightarrow{\ \mathsf{pr}\ } \wedge_{j=1}^{n} X_j\underline{m^j_{i_j}} & \overset{F}{\underset{G}{\Rightarrow\,\theta}}\ Z\underline{m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}}
\end{array} \tag{9.4.25}$$

在此图表中， $\theta : F \to G$ 表示 θ 的 $\big(m^j{}_{i_j}\big)_{j=1}^{n}$-分量带基点自然变换。

说明 9.4.26 （分量与单射性）。 请考虑定义 9.4.23。

（1）定义分量 $(A\theta)_{\langle m\rangle}$ 的图表（9.4.25）由定义分量函子 $(AF)_{\langle m\rangle}$的图表（9.4.16）得到，方法是将 F 替换为 θ。（2）赋值 $\theta \mapsto A\theta$ 是单射的。这是由于

- （9.4.25）的特例，其中每个$r_j = 1$ 以及
- 泛箭头 pr 从笛卡尔积到楔积（9.1.5）在对象集上是满射的这一事实。这扩展了说明 9.4.18 中赋值 $F \mapsto AF$ 的单射性。

说明 9.4.27 （公式）。 采用说明 9.4.19 中的记号，（9.4.25）中的分量自然变换 $(A\theta)_{\langle m\rangle}$ 由以下态射给出

$$\begin{aligned}
\big((A\theta)_{\langle m\rangle}\big)_{\langle x^j\rangle_{j=1}^{n}} &= \left\langle \cdots \left\langle \theta_{\langle x^j_{i_j}\rangle_{j=1}^{n}} \right\rangle_{i_1=1}^{r_1} \cdots \right\rangle_{i_n=1}^{r_n} \\
&\in (AZ)m^{1,\dots,n} = \prod_{i_n=1}^{r_n}\cdots\prod_{i_1=1}^{r_1}\left(Z\underline{m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}}\right)
\end{aligned} \tag{9.4.28}$$

对于 $\prod_{j=1}^{n}(AXi)\ m^j$ 中的每个对象 $x^{jn}_{j=1}$。

引理 9.4.29. 在定义 *9.4.23* 的语境中，$A\theta$ 是一个加性修正。

证明。每个分量 $(A\theta)\langle m\rangle$ 在 (9.4.25) 中的自然性可由以下事实推出：

- 笛卡尔积的泛性质，
- (9.4.25) 中每个 pr? 和 pr 的自然性，
- $(AF)\langle m\rangle$ 和 $(AG)\langle m\rangle$ 的坐标定义 (9.4.16)，以及
- 给定的带基点修正 θ的每个分量自然变换的自然性。

对于 $A\theta$，修正公理 (5.1.12) 出于同样的原因，由 θ的修正公理 (9.2.20) 得出。因此，$A\theta$ 是 (5.1.10) 意义下的一个修正。$A\theta$ 的单位公理 (5.2.27) 和可加性公理 (5.2.28) 的证明与引理 9.4.22 中相同，只需将 F 替换为 θ。□

引理 9.4.30。定义 *9.4.13* 和 *9.4.23* 中的对象赋值和态射赋值

$$F \longmapsto AF \quad and \quad \theta \longmapsto A\theta$$

分别在定义 *9.4.13* 和 *9.4.23* 中定义一个函子

$$\Gamma\text{-Cat}\big(\langle X\rangle; Z\big) \xrightarrow{\ A\ } \mathcal{A}\text{Cat}\big(\langle AX\rangle; AZ\big) \tag{9.4.31}$$

该函子在对象和态射集上是单射的。

证明。对象赋值和态射赋值分别由引理 9.4.22 和 9.4.29 良定义。根据 (5.1.4)、(9.2.2) 以及说明 9.1.28，在 A的定义域和陪域中，恒等态射和复合都按分量由自然变换的相应结构给出。因此，A 的函子性由 $A\theta$ 的定义 (9.4.25) 得出，其中 $A\theta$ 按分量由 θ的相应分量给出。A 在对象和态射集上的单射性详见解释 9.4.18 和 9.4.26。□

9.5. Cat-多函子性：A

本节旨在证明，A 连同

- 对象赋值 $X\ AX$（见引理 9.3.7）以及
- 引理 9.4.30 中的多态射函子

是定义 3.2.1 意义下的 Cat-多函子。下面概述本节内容。

- 引理 9.5.1 表明，A 保留 Cat-多范畴 Γ-Cat 和 ACat 的对称群作用。
- 引理 9.5.5 表明，A 保留了 Γ-Cat 和 ACat 中的复合。
- 关于 A 的 Cat-多函子性的主要结果是定理 9.5.9。

对称群作用的保留。回顾一下，对称群作用已在

- (9.2.24) 和 (9.2.26) 中针对 Cat-多范畴 Γ-Cat 进行了讨论，以及
- (5.1.15) 和 (5.1.18) 中针对 Cat-多范畴 ACat 进行了讨论。

引理 9.5.1. 式 (9.4.31) 中的函子 A 保持对称群作用。

证明。我们必须证明，对于每个置换 $\sigma \in \Sigma_n$，以下函子图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle; Z\big) & \xrightarrow{\quad A \quad} & \mathcal{A}\mathsf{Cat}\big(\langle AX\rangle; AZ\big) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle\sigma; Z\big) & \xrightarrow{\quad A \quad} & \mathcal{A}\mathsf{Cat}\big(\langle AX\rangle\sigma; AZ\big) \end{array} \tag{9.5.2}$$

设 F 是 $\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}(X; Z)$ 中的一个对象，即如 (9.2.15) 所示的一个带基点的自然变换 $F : \bigwedge_{j=1}^{n} X_j \, Z$。用 $(-)^{\sigma}$ 表示右 σ-作用，要证明这些加性自然变换

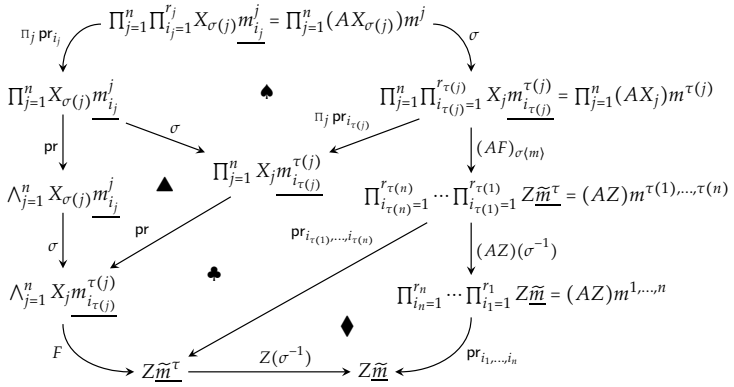
$$\langle AX\rangle\sigma \underset{(AF)^{\sigma}}{\overset{A(F^{\sigma})}{\rightrightarrows}} AZ$$

相等，只需证明它们对应的分量函子 (5.1.7) 相等（解释 5.2.21 (1)）。此外，根据 AZ 的定义 (9.3.3)，只需证明 $A(F^{\sigma})$ 和 $(AF)^{\sigma}$ 后接每个坐标投影所得的对应分量函子相等。因此，采用记号 9.4.8 及以下缩写

$$\tau = \sigma^{-1}, \qquad \widetilde{m} = m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}, \quad \text{and} \quad \widetilde{m}^{\tau} = m^{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(n)}_{i_{\sigma^{-1}(1)},\dots,i_{\sigma^{-1}(n)}} \tag{9.5.3}$$

只需证明下图可交换，图表将在下文进一步说明。

(9.5.4)



图表 (9.5.4) 的细节如下。

- 根据 (9.2.24) 和 (9.4.16)，左下边界复合是复合函子

$$\mathsf{pr}_{i_1,\dots,i_n} \circ A(F^{\sigma})_{\langle m\rangle}.$$

- 根据 (5.1.15)，右边界复合是复合函子

$$\mathsf{pr}_{i_1,\dots,i_n} \circ (AF)^{\sigma}_{\langle m\rangle}.$$

- 区域 ♠ 根据笛卡尔积编织的自然性是交换的。

- 区域 ▲ 根据定义楔积的推出 (9.1.5) 的泛性质交换。

● 区域 ♣ 根据 (9.4.16) 应用于n个对象组成的对象组而交换。

$$\sigma\langle m\rangle = \left\langle m^{\sigma^{-1}(j)}\right\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{A}^n.$$

● 根据 (2.3.24) 和 (9.3.6)，区域 ♦ 是交换的。

这证明图表 (9.5.2) 在对象上是交换的。

为证明图表(9.5.2)在态射上是交换的，我们重复上述关于对象的证明，分别将 (5.1.15) 、 (9.2.24) 和 (9.4.16) 替换为 (5.1.18) 、 (9.2.26) 和 (9.4.25)。□

复合的保持。 接下来我们证明，A 保持 Cat-多范畴 Γ-Cat 和 ACat 中的复合，它们分别定义于 (9.2.29) 和 (5.1.20)。

引理 9.5.5。 *(9.4.31)* 中的函子 A 保持多范畴复合。

证明。使用 (9.2.27) 中的记号，我们必须证明下列函子图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma\text{-Cat})\big(\langle X\rangle; Z\big) \times \prod_{j=1}^{n} (\Gamma\text{-Cat})\big(\langle W_j\rangle; X_j\big) & \xrightarrow{\gamma} & (\Gamma\text{-Cat})\big(\langle W\rangle; Z\big) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle A \times \Pi_j A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle A} \\ (\mathcal{A}\text{Cat})\big(\langle AX\rangle; AZ\big) \times \prod_{j=1}^{n} (\mathcal{A}\text{Cat})\big(\langle AW_j\rangle; AX_j\big) & \xrightarrow{\gamma} & (\mathcal{A}\text{Cat})\big(\langle AW\rangle; AZ\big) \end{array} \tag{9.5.6}$$

设给定 (9.5.6) 中左上方范畴的一个对象 $(F; F_j^n{}_{j=1})$，于是

$$\wedge_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{F} Z \quad \text{and} \quad \wedge_{i=1}^{\ell_j} W_{ji} \xrightarrow{F_j} X_j$$

它们是 (9.2.15) 中的带基点自然变换。我们必须证明下面的两个加性自然变换相等。

$$\langle AW\rangle \underset{\gamma(AF;\langle AF_j\rangle)}{\overset{A\gamma(F;\langle F_j\rangle)}{\rightrightarrows}} AZ \tag{9.5.7}$$

与引理 9.5.1 的证明一样，只需证明在 (9.5.7) 中，相应的分量函子 (5.1.7) 与每个坐标投影复合后相等。利用下列记号，可由图表 (9.5.8) 证明这一点。

设给定对象

$$p^{ji} = \left\langle p_{k_{ji}}^{ji}\right\rangle_{k_{ji}=1}^{r_{ji}} \in \mathcal{A} \qquad \text{for } 1 \le j \le n \text{ and } 1 \le i \le \ell_j$$

其中每个 $p^{ji}{}_{k_{ji}} > 0$ 和 $r_{ji} \ge 0$，以及以下记号。

$$\begin{cases} p^{j\bullet} = \langle p^{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j} \in \mathcal{A}^{\ell_j} & p^j = \otimes_{i=1}^{\ell_j} p^{ji} \in \mathcal{A} \qquad \langle p^j\rangle_j = \langle p^j\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{A}^n \\ p^{\bullet\bullet} = \left\langle p^{j\bullet}\right\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{A}^{\ell} & p = \otimes_{j=1}^{n} p^j \in \mathcal{A} \\ (k_j) = \big(k_{j\ell_j}, \dots, k_{j1}\big) & (k) = \big((k_n), \dots, (k_1)\big) \end{cases}$$

此外，在（楔积）积中，索引 j、i 和 k^{ji} 分别遍历，

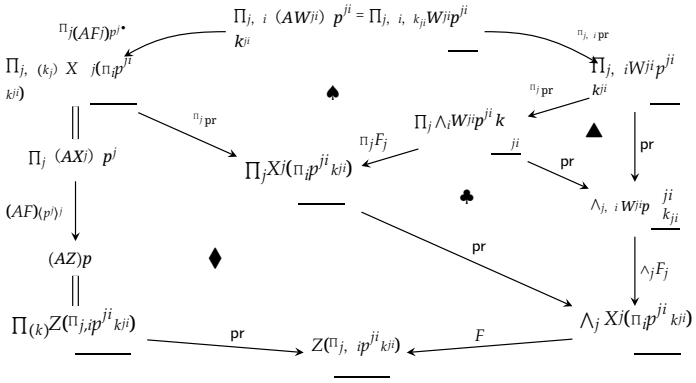
$$1 \le j \le n, \qquad 1 \le i \le \ell_j, \quad \text{and} \quad 1 \le k_{ji} \le r_{ji}.$$

以下是出现在（9.5.8）中的关键示例。

$$\begin{cases} \prod_{j,i} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{\ell_j} & \prod_j \wedge_i = \prod_{j=1}^{n}\wedge_{i=1}^{\ell_j} \\ \prod_{j,i,k_{ji}} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{\ell_j}\prod_{k_{ji}=1}^{r_{ji}} & \\ \prod_{j,(k_j)} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{k_{j\ell_j}=1}^{r_{j\ell_j}}\cdots\prod_{k_{j1}=1}^{r_{j1}} & \\ \prod_{(k)} = \prod_{k_{n\ell_n}=1}^{r_{n\ell_n}}\cdots\prod_{k_{n1}=1}^{r_{n1}}\cdots\prod_{k_{1\ell_1}=1}^{r_{1\ell_1}}\cdots\prod_{k_{11}=1}^{r_{11}} & \end{cases}$$

使用上述记号，我们考虑以下函子图表。

(9.5.8)



图表 (9.5.8) 的具体内容如下。

- 根据 (5.1.25)，左上—左下边界复合为

$$\mathsf{pr}_{\langle\langle k_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j}\rangle_{j=1}^{n}} \circ \gamma\big(AF\,;\langle AF_j\rangle\big)_{p\bullet\cdots}$$

- 根据 (9.2.29) 和 (9.4.16)，右上—右下边界复合为

$$\mathsf{pr}_{\langle\langle k_{ji}\rangle_{i=1}^{\ell_j}\rangle_{j=1}^{n}} \circ \big(A\gamma\big(F\,;\langle F_j\rangle\big)\big)_{p\bullet\cdots}$$

- 区域♠根据 (9.4.16) 对 $(AF_j)_{p_j\bullet}$ 是交换的。
- 区域 ▲ 根据定义楔积的推出 (9.1.5) 的泛性质是交换的。
- 该区域♣由推出 (9.1.5) 的自然性可知是交换的。
- 该区域 ♦ 由 (9.4.16) 可知是交换的。

这证明图表 (9.5.6) 在对象上是交换的。

为了证明图表 (9.5.6) 在态射上是交换的，我们沿用上面对对象的证明，分别将 (5.1.25) 和 (9.4.16) 替换为 (5.1.27) 和 (9.4.25)。□

接下来给出本章的主要结果。

定理 9.5.9。存在一个Cat-多函子

$$\Gamma\text{-Cat} \xrightarrow{\ A\ } \mathcal{A}\text{Cat} \tag{9.5.10}$$

with

- Γ-Cat 定理 *9.1.23* 中的Cat-多范畴；
- $\mathcal{A}$Cat 例 *2.3.17* 中的 $\mathcal{A}$ 在定理 *5.3.11* 中的 Cat 多范畴；

- 引理 *9.3.7* 中的对象赋值；
- 引理 *9.4.5* 中的零元多态射函子；以及
- 引理 *9.4.30* 中的正元多态射函子。

此外，Cat-多函子 A 扩展了(9.3.21)中的函子。

证明。考察定义 3.2.1 中 Cat-多函子的公理。

● A 保留带色单位，因为对于每个 Γ-范畴X，$A1_X$ 和 1_{AX} 都按分量是恒等函子，这是由定义 5.3.1、(9.3.3) 和 (9.4.16) 得出的。

● A 由引理 9.5.1 保持对称群作用。

● A 由引理 9.5.5 保持复合。

因此，A 是一个 Cat-多函子。第二个断言基于以下理由成立。

- 对象赋值 $X \, AX$ 在两种情况下都是引理 9.3.7 中的赋值。

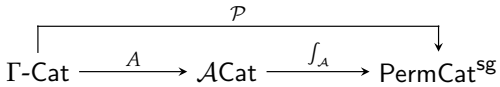
● (9.4.16) 的$n = 1$ 情形与 (9.3.12) 一致。

因此，A 扩展了 (9.3.21) 中的函子。 □

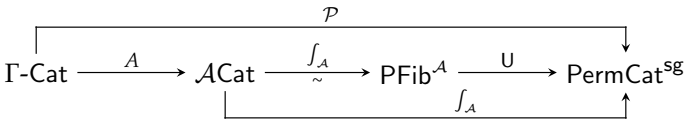
第10章

逆K-理论是一个伪对称Cat-多函子

本章旨在指出，逆K理论函子



扩展为一个伪对称 Cat-多函子；参见定理 10.2.1。事实上，A是一个 Cat-多函子，而 $\int_{\mathcal{A}}$是一个伪对称 Cat-多函子。此外，还有一个细化 (10.2.3)



它将 P 分解为一个非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{A}}$，并将格罗滕迪克构造的余纤维化结构纳入考量。下面是一张汇总表。

	(-) Cat-多函子	ref
$\int_{\mathcal{A}}$: ACat $\longrightarrow$ PermCatsg	伪对称	6.7.9
U : PFib$^{\mathcal{A}}$ $\longrightarrow$ PermCatsg	非对称	7.3.18
$\int_{\mathcal{A}}$: ACat $\xrightarrow{\sim}$ PFib$^{\mathcal{A}}$	非对称 Cat-多重等价	8.4.17
一个 : Γ-Cat $\longrightarrow$ $\mathcal{A}$Cat	对称	9.5.10
P : Γ-Cat $\longrightarrow$ PermCatsg	伪对称	10.2.1

代数结构的保留。作为一个伪对称 Cat-多函子，P 保留由以下对象参数化的代数结构

- 非对称 Cat-多函子（推论 10.2.4）以及
- 来自 Cat-多范畴的伪对称 Cat-多函子（推论 10.2.8）。

特别地，逆K理论 P 保持伪对称E_∞-代数（推论 10.5.2）。我们强调，逆K理论 P 并不是对称意义下的 Cat-多函子（定义 3.2.1），因为它并不严格保持对称群作用（说明 10.3.7）。一般而言，P 不保持由 Cat-多范畴参数化的代数结构，例如E_∞-代数（定义 10.4.1）。相反， Γ-Cat 中的E_∞-代数经 P 映射为 PermCat$_{\mathrm{sg}}$ 中的伪对称E_∞-代数（例 10.5.3）。

一些历史。 逆K理论 P 很重要，因为它是 Segal$K$理论 **[Seg74]** 的一个同伦逆；关于 Segal$K$理论的详细讨论，参见 **[JY∞a**，第 8] 章。P 的这一同伦逆性质是 Mandell **[Man10]** 的主要结果之一。这是对 Thomason **[Tho95]** 结果的加强；该结果指出，小置换范畴与 Γ-范畴的稳定同伦范畴之间存在等价。

尽管 Segal K-理论给出了稳定同伦范畴之间的等价，但它并非多函子，即使在非对称意义下也是如此。尤其是，Segal K-理论通常不保留诸如幺半群之类的代数结构。 **[EM06]** 指出了这一事实，这也是发展 Elmendorf-Mandell$K$-理论 K^{EM} 的主要原因之一；后者具有 Cat-多函子性。关于 K^{EM} 的详细讨论见 **[JY∞a**，第 10–13] 章。鉴于 Segal$K$-理论不具有多函子性，逆K-理论 P 的伪对称 Cat-多函子性（定理 10.2.1）多少有些出人意料。

组织结构。 为准备讨论作为伪对称 Cat-多函子的逆K-理论，我们将在第 10.1 节回顾逆K-理论函子 $\mathrm{P} = \int_A \bigcirc A$，它从 Γ-Cat 的底层范畴映射到 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 的底层范畴。

在第 10.2 节中，我们结合前面各章的一些结果，证明了关于逆K理论 P 的伪对称 Cat-多函子性的主定理 10.2.1。参数化幺半群的结合算子是一个非对称歌剧。因此，P 保持幺半群（例 10.2.6）。这意味着 P 将 Γ-Cat 中的每个幺半群映射到一个小紧环范畴。

在第 10.3 节中，我们通过描述 P 的多态射函子和伪对称同构，详细说明其伪对称 Cat-多函子结构。特别是，伪对称同构的公式 (10.3.9) 和 (10.3.10) 表明，P_{σ} 是恒等映射，当且仅当 σ 是恒等置换。在解释 10.3.12 和 10.3.13 中，我们讨论了文献 **[Elm∞, JY22b]** 中关于 P 的多函子性的相关工作。

为准备讨论保持伪对称E_∞-代数的 P，我们在第 10.4 节回顾范畴性的 Barratt-Eccles E_∞-歌剧$E\Sigma_*$ 及其相干性定理 10.4.5。小置换范畴和小（紧）双置换范畴是 Cat、PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的E_∞-代数（例 10.4.12）。在例 10.4.13 中，我们说明了Γ-Cat 中E_∞-代数的结构。

在第 10.5 节中，我们将伪对称E_∞-代数定义为从 Barratt-Eccles 歌剧$E\Sigma_*$出发的伪对称 Cat-多函子。作为主定理 10.2.1 的一个特例，逆K-理论 P 保持伪对称E_∞-代数。为更好地理解其中涉及的结构，我们在说明 10.5.4、10.5.18 和 10.5.30 中，详细展开伪对称E_∞-代数在一般 Cat-多范畴、 Γ-Cat、PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$中的数据与公理。

我们提醒读者注意，我们对迭代幺半积采用左规范化括号约定 1.1.24。

10.1. 逆 K-理论函子

本节回顾 Mandell**[Man10]**提出的逆K理论函子 P；另见 **[JY22b**，第 6] 节。该逆K理论函子是以下两个函子的复合

函子——A 和 $\int_{\mathcal{A}}$，其中 A 见例 2.3.17——从 Γ-范畴到小置换范畴。以下是本节的概述。

- 逆K理论函子 $\mathrm{P} = \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 见定义 10.1.2。
- 说明 10.1.5 是对函子 P 的详细描述。
- 例10.1.11 表明，当X 是终对象 Γ-范畴时，PX 会还原置换范畴 $\mathrm{A}^{\oplus}$。

逆 K理论。 对于小紧双置换范畴 $(\mathrm{D}, \oplus, \otimes)$（定义 2.2.12），格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$具有以下性质。

- 它将对称幺半函子 $X : \mathcal{D}^{\oplus} \to \mathsf{Cat}$ 映为小置换范畴 $\int_{\mathcal{D}} X$（引理 6.2.10）。

- 它将对称幺半函子之间的幺半自然变换（解释 5.2.21(4)）

$$\begin{array}{ccc} & \overset{X}{\curvearrowright} & \\ \mathcal{D}^{\oplus} & \phi & \mathsf{Cat} \\ & \underset{Z}{\curvearrowright} & \end{array}$$

  映射为严格对称幺半函子 $\int_{\mathcal{D}} \phi : \int_{\mathcal{D}} X \to \int_{\mathcal{D}} Z$（注 6.3.18）。

因此，格罗滕迪克构造（定理 6.7.8）限制为一个函子

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \tag{10.1.1}$$

例 9.3.18 和 9.3.19 中底层范畴之间。以下定义归功于 Mandell [**Man10**，4.3 和 4.5]。

定义 10.1.2。 逆 K-理论函子 P 定义为复合函子

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat} & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \\ & {\scriptstyle A}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \int_{\mathcal{A}}} & \\ & \mathcal{A}\mathsf{Cat} & \end{array} \tag{10.1.3}$$

连同以下数据。

- Γ-Cat、ACat 和 PermCat 是例 9.3.17 至 9.3.19 中相应 Cat-多范畴的底层范畴。
- A 是 (9.3.21) 中的函子。
- $\int_{\mathcal{A}}$是 (10.1.1) 中的函子，其中 D = A 见例 2.3.17。

至此，函子 P 的定义完成。

说明 10.1.4（P 的陪域）。 对于逆K-理论函子 (10.1.3)

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\mathcal{P} = \int_{\mathcal{A}} A(-)} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

我们可以将陪域限制为 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中由严格对称幺半函子组成的子范畴。原因在于，ACat 中的每个幺半自然变换经格罗滕迪克构造后

$$\mathcal{A}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\int_{\mathcal{A}}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

都会变为严格对称幺半函子（注 6.3.18）。然而，当我们在第 10.2 节考察 P 的伪对称 Cat-多函子性时，线性约束一般是自然同构，而非恒等变换（说明 10.3.4）。

说明 10.1.5 （ Γ-范畴的逆K理论）。 我们来展开逆K - 理论函子 P = $\int_{\mathcal{A}} A(-)$（见 (10.1.3)）。设X 是一个 Γ-范畴。

底层范畴： 逆 K理论

(10.1.6) $$\mathcal{P}X = \int_{\mathcal{A}} AX$$

是函子 $AX : \mathcal{A}$ Cat 在 (9.3.2) 中的格罗滕迪克构造。在此语境下解读定义 6.2.1，范畴 中的对象 $\mathcal{P}X$中的一个对象是一个二元组 (m,x) 满足

- $m = m_{ip}{}_{i=1}$ A 中的一个对象（例 2.3.17），以及
- $x = x_{ip}{}_{i=1}$ （AX）（m）中的一个对象 $= \prod_{p}{}_{i=1} X\underline{m_i}$ 见（9.3.3）。

A 态射

(10.1.7) $$(m,x) \xrightarrow{(\phi,f)} (n,y) \quad \text{in} \quad \mathcal{P}X$$

由以下部分组成：

- 一个态射

$$m = \langle m_i \rangle_{i=1}^{p} \xrightarrow{\phi} n = \langle n_j \rangle_{j=1}^{q} \quad \text{in} \quad \mathcal{A}$$

如（2.3.18）中所示，以及

- 一个态射

$$f = \langle f_j \rangle_{j=1}^{q} : \phi_*(x) \longrightarrow y \quad \text{in} \quad (AX)(n) = \prod_{j=1}^{q} X\underline{n_j}$$

with

$$\phi_* = (AX)(\phi) : (AX)(m) \longrightarrow (AX)(n)$$

如 (9.3.4) 中所示。

复合定义为

$$(\psi,g) \circ (\phi,f) = \big(\psi\phi, g \circ (\psi_* f)\big).$$

对象 (m, x) 的恒等态射 是由恒等态射组成的对 $(1_m, 1_x)$。

置换结构： 在此语境下解释定义 6.2.5，PX 是一个置换范畴，且是一个 - 其严格幺半单位 由该对给出

(10.1.8) $$\big(\langle\rangle, *\big) \in \mathcal{P}X$$

由以下部分组成

- A 中的空元组 ， 以及
- 唯一的对象 $* \in (AX) = X\underline{0} = \mathbf{1}$。

对象上的幺半积由下式给出

(10.1.9) $$(m,x) \square (n,y) = \begin{cases} \big((m,n),(x,y)\big) & \text{if } p,q > 0, \\ (m,x) & \text{if } q = 0, \text{ and} \\ (n,y) & \text{if } p = 0 \end{cases}$$

with

$$\begin{cases}(m,n)=m\oplus n=\left(\langle m_i\rangle_{i=1}^{p},\langle n_j\rangle_{j=1}^{q}\right)\in\mathcal{A} \quad \text{and}\\ (x,y)=\left(\langle x_i\rangle_{i=1}^{p},\langle y_j\rangle_{j=1}^{q}\right)\in(AX)(m,n).\end{cases}$$

态射上的幺半积类似地定义，利用 $\mathrm{A}^{\oplus}$ 是一个置换的范畴这一事实。

$\mathrm{P}X$ 中的编织按分量由同构给出

$$\begin{array}{ccc}(m,x)\square(n,y) & \xrightarrow{\beta^{\square}_{(m,x),(n,y)}} & (n,y)\square(m,x)\\ \| & & \|\\ \big((m,n),(x,y)\big) & \xrightarrow[\cong]{(\beta^{\oplus}_{m,n},\,1)} & \big((n,m),(y,x)\big)\end{array}$$

其中 $\beta^{\oplus}_{m,n}$ 是 A 中的加法编织（2.3.20）。这完成了对置换范畴 $\mathrm{P}X=\int_{\mathcal{A}}AX$（对于一个 Γ-范畴X）的描述。

态射：将定义 6.3.3 解释到当前情形，对于 Γ-范畴的一个态射$F:X\to Y$，严格对称幺半函子 $\longrightarrow$

$$\mathcal{P}X=\int_{\mathcal{A}}AX\xrightarrow{\mathcal{P}F=\int_{\mathcal{A}}AF}\mathcal{P}Y=\int_{\mathcal{A}}AY$$

在对象上的定义为

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}F)(m,x)&=\big(m,(AF)_m x\big)\\&=\Big(m,\big\langle F_{\underline{m_i}}(x_i)\big\rangle_{i=1}^{p}\Big)\end{aligned}\tag{10.1.10}$$

而在态射上的定义为

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}F)(\phi,f)&=\big(\phi,(AF)_n f\big)\\&=\Big(\phi,\big\langle F_{\underline{n_j}}(f_j)\big\rangle_{j=1}^{q}\Big).\end{aligned}$$

单位约束 是恒等态射

$$(\mathcal{P}F)^0=1_{(\langle\rangle,*)}\quad\text{in}\quad\mathcal{P}Y.$$

该幺半约束

$$(\mathcal{P}F)(m,x)\square(\mathcal{P}F)(n,y)\xrightarrow{(\mathcal{P}F)^2}(\mathcal{P}F)\big((m,x)\square(n,y)\big)$$

是对象在 $\mathrm{P}Y$ 中的恒等态射；若$p=0$ 或$q=0$，则使用 (10.1.9) 作相应调整。

$$\begin{aligned}&(\mathcal{P}F)\big((m,x)\square(n,y)\big)\\&=(\mathcal{P}F)\big((m,n),(x,y)\big) && \text{by (10.1.9)}\\&=\Big((m,n),\big(\big\langle F_{\underline{m_i}}(x_i)\big\rangle_{i=1}^{p},\big\langle F_{\underline{n_j}}(y_j)\big\rangle_{j=1}^{q}\big)\Big) && \text{by (10.1.10)}\\&=\Big(m,\big\langle F_{\underline{m_i}}(x_i)\big\rangle_{i=1}^{p}\Big)\square\Big(n,\big\langle F_{\underline{n_j}}(y_j)\big\rangle_{j=1}^{q}\Big) && \text{by (10.1.9)}\\&=(\mathcal{P}F)(m,x)\square(\mathcal{P}F)(n,y) && \text{by (10.1.10)}\end{aligned}$$

这就完成了对逆K-理论函子 $\mathrm{P}=\int_{\mathcal{A}}A(-)$ 的描述。

例10.1.11（终对象 Γ-范畴）。 假设X 是由以下内容定义的 Γ-范畴

$$X\underline{n} = \mathbf{1} \quad \text{for each} \quad \underline{n} \in \mathcal{F}.$$

根据定义 (9.3.3)，存在一个范畴同构

$$(AX)(m) \cong \mathbf{1} \quad \text{for each} \quad m \in \mathcal{A}.$$

根据说明 10.1.5，存在一个严格对称幺半同构

$$\begin{aligned} \mathcal{P}X &\xrightarrow{\cong} \mathcal{A}^{\oplus} \\ (m, *) &\longmapsto m \\ (\phi, 1_*) &\longmapsto \phi \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{A}^{\oplus} = (\mathrm{A}, \oplus, , \beta^{\oplus})$ 是例 2.3.17 中 A 的加法结构。

10.2. 伪对称 Cat-多函子逆 K-理论

本节旨在证明，(10.1.3) 中的逆 K-理论函子 P 可扩展为伪对称 Cat-多函子；参见定理 10.2.1。更具体地说，我们得到伪对称 Cat-多函子 P 的两种分解。

(1) 在 (10.2.2) 中，P 分解为

- 一个 Cat-多函子 A，随后是
- 一个伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{A}}$，它由小紧双置换范畴 A 上的格罗滕迪克构造给出。(2) 在细化 (10.2.3) 中，P 分解为以下对象的复合：

- 一个 Cat-多函子 A,
- 非对称 Cat-多重等价$\int_{\mathcal{A}}$，以及
- 一个非对称 Cat-多函子 U。

我们强调，P 并非Cat-多函子，因为它并不严格保持对称群作用。关于逆K-理论的多函子性，参见说明 10.3.12 和 10.3.13 中相关文献工作。

下面概述本节内容。

- 定理 10.2.1 证明了逆K-理论 P 的伪对称 Cat-多函子性。

- 在推论 10.2.4 中，我们指出，P 保持由非对称 Cat-多函子参数化的任意代数结构，包括结合歌剧（例 10.2.6）。

- 推论 10.2.8 中，我们注意到，P 保持由伪对称 Cat-多函子参数化的任意代数结构。第 10.4 节和第 10.5 节讨论了与 Barratt-Eccles E_∞-歌剧相关的例子。

主定理。 回顾定义 4.1.1，伪对称 Cat-多函子

- 严格保持带色单位 (3.2.3) 和复合 (3.2.4)，并且
- 配备了满足四条相干公理 (4.1.3) 至 (4.1.6) 的伪对称同构。

每个 Cat-多函子都是伪对称 Cat-多函子，其伪对称同构由恒等变换给出（例 4.1.7）。伪对称 Cat-多函子的复合是良定义的，且满足结合律和单位律（引理 4.1.16）。

回顾 Cat-多范畴

- 定理 9.1.23 中的 Γ-Cat,
- 定理 5.3.11 中的 ACat（其中 A 见例 2.3.17），以及
- 定理 6.1.31 中的 PermCat对称 。

定理 10.2.1。 逆 K-理论函子$\mathcal{P}$ 在(10.1.3)中满足以下陈述。

(i) $\mathcal{P}$ 扩展为一个伪对称 Cat-多函子

(10.2.2)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma\text{-Cat} & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \\ & {\scriptstyle A}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle \int_{\mathcal{A}}} & \\ & \mathcal{A}\mathsf{Cat} & \end{array}$$

with

- 式Cat-多函子 (9.5.10) 以及
- $\int_{\mathcal{A}}$式伪对称 Cat-多函子(6.7.9)。

(ii) Cat中的伪对称 $\mathcal{P}$ 多函子(10.2.2) 不是一个Cat-多函子。*(iii)* 作为一个非对称 Cat-多函子，$\mathcal{P}$ 在(10.2.2) 中分解为边界

(10.2.3)
$$\begin{array}{ccccc} \Gamma\text{-Cat} & & \xrightarrow{\mathcal{P}} & & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \\ {\scriptstyle A}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \int_{\mathcal{A}}} & & & \uparrow{\scriptstyle \mathsf{U}} \\ \mathcal{A}\mathsf{Cat} & & \xrightarrow[\sim]{\int_{\mathcal{A}}} & & \mathsf{PFib}^{\mathcal{A}} \end{array}$$

具有以下数据。

- $\mathsf{PFib}_{\mathcal{A}}$ 是例 *7.3.20* 中的非对称 Cat-多范畴。
- 底部的 $\int_{\mathcal{A}}$ 是定理 *8.4.17* 中的非对称 Cat-多重等价。
- U 是(7.3.18)中的非对称 Cat-多函子。

证明。在 (10.2.2) 中，A 是一个 Cat-多函子，而 $\int_{\mathcal{A}}$是一个伪对称 Cat-多函子。因此，根据例 4.1.7 和引理 4.1.16，复合 $\int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 是一个伪对称 Cat-多函子。此外，以下两个陈述成立。

- 根据定理 9.5.9，Cat-多函子 A 将逆K-理论函子中的函子 A 扩张。
- 根据定义 (10.1.1)，伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{A}}$将逆K-理论函子中的函子 $\int_{\mathcal{A}}$扩张。

因此，复合伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 扩张了 (10.1.3) 中的逆K-理论函子 P。这证明了断言 (i)。

为证明断言 (ii)，考虑 (9.2.15) 中的对象 $F \in \Gamma\text{-Cat}(X; Z)$。两个强$n$-线性函子

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathcal{A}} AX_{\sigma(j)}\right) \xrightarrow[(\mathcal{P}F)^{\sigma} = \left(\int_{\mathcal{A}} AF\right)^{\sigma}]{\mathcal{P}(F^{\sigma}) = \int_{\mathcal{A}}(AF)^{\sigma}} \int_{\mathcal{A}} AZ$$

一般来说并不相同。事实上，将 (6.6.4) 应用于 D = A 可知，$\mathrm{P}(F^{\sigma})$ 和 $(\mathrm{P}F)^{\sigma}$ 的对象赋值一般不同，因为 A 中的乘法编织（定义见 (2.3.22)）不是恒等。因此，P 并不严格保持对称群作用，所以它不是 Cat-多函子。

断言 (iii) 由 (10.2.2) 中的分解和例 8.4.18 得出。

□

非对称代数的保留。每个伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1）在忘记伪对称同构后，都是一个非对称 Cat-多函子（定义 3.2.1）（例 4.1.8）。因此，定理 10.2.1 (i) 得出以下结果，该结果最早记录于 [**JY22b** 的第 10] 节。

推论 10.2.4。设

- Q 是一个非对称 Cat-多范畴，且
- $F : \mathsf{Q} \to \Gamma\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}$ 是一个非对称Cat-多函子。

那么复合

$$\mathsf{Q} \xrightarrow{F} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \tag{10.2.5}$$

是一个非对称 Cat-多函子。

推论 10.2.4 意味着，由非对称 Cat-多函子参数化的 Γ-Cat 中的任意代数结构都在逆 *K*-理论 P 下保持不变。

例 10.2.6（从幺半群到环范畴）。考虑非对称结合歌剧 $\mathsf{As}^{\mathsf{ns}}$（定义 3.1.2），其中每个

$$\mathsf{As}^{\mathsf{ns}}_n = \{*\},$$

都是单元素集合。它被视为一个单对象的非对称 Cat-多范畴，且每个 $\mathsf{As}^{\mathsf{ns}}{}_n = \mathbf{1}$ 都是终端范畴。关于由 $\mathsf{As}^{\mathsf{ns}}$ 生成的自由歌剧的详细讨论，参见 [**Yau16** 第 14 节，以及 [**JY∞a** 第 11 节。

$$\mathsf{As} = \{\Sigma_n\}_{n\geq 0} \tag{10.2.7}$$

在 Γ-Cat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中，$\mathsf{As}^{\mathsf{ns}}$ 参数化以下代数结构。

- 根据 [**Yau16**，14.2.18]或 [**JY∞a**，11.1.15] Γ-Cat 中的一个幺半群由一个非对称 Cat-多函子唯一确定

$$\mathsf{As}^{\mathsf{ns}} \longrightarrow \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}.$$

- 根据 [**EM06**，3.4] 或 [**JY∞a**，11.2.16]一个小紧环范畴（定义 2.2.1）由一个非对称 Cat-多函子唯一确定

$$\mathsf{As}^{\mathsf{ns}} \longrightarrow \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}.$$

这些事实和推论 10.2.4 表明，逆*K*-理论 P 将 Γ-Cat 中的每个幺半群映为一个小紧环范畴。这一结论最早在 [**JY22b**，10.3] 中得到证明。

伪对称代数的保持。根据引理 4.1.16，伪对称 Cat-多函子在复合下封闭。因此，定理 10.2.1 (i) 得出以下结果。

推论 10.2.8。设

- Q 是一个Cat-多范畴，且
- $F : \mathsf{Q} \to \Gamma\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}$ 是一个伪对称Cat-多函子。

则复合

$$\mathsf{Q} \xrightarrow{F} \Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}} \tag{10.2.9}$$

是一个伪对称 Cat-多函子。

推论 10.2.8 表明，由伪对称 Cat-多函子参数化的 Γ-Cat 中的任何代数结构，都在逆 K-理论 P 下保持不变。Q 为 Barratt-Eccles E_∞-歌剧的情形将在第 10.4 节和第 10.5 节中讨论。

例 10.2.10（Cat-多函子）。 根据例 4.1.7，每个 Cat-多函子在赋予恒等伪对称同构后，就成为伪对称 Cat-多函子。在这种情况下，推论 10.2.8指出，若 $F : \mathsf{Q} \to \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}$是一个 Cat-多函子，则复合

$$\mathsf{Q} \xrightarrow{\mathcal{P}\circ F} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

在 (10.2.9) 中是一个伪对称 Cat-多函子。

10.3. 剖析伪对称Cat-多函子性逆K-理论

本节将详细说明定理 10.2.1 中的伪对称 Cat-多函子 P。

- P 的零元多态射函子见说明 10.3.2。
- P 的正元多态射函子见说明 10.3.4。
- P 的伪对称同构 P_σ 见说明 10.3.7。式 (10.3.9) 和 (10.3.10) 表明，P 并不严格保持对称群作用，因为 A 中的乘法编织不是恒等。
- 说明 10.3.12 和 10.3.13 讨论了文献中与 P 的多函子性相关的工作。

对于每个 Γ-范畴 X，逆 K-理论 $\mathrm{P}X = \int_{\mathcal{A}} AX$ 作为小置换范畴的情形，将在说明 10.1.5 中详细讨论。对于 Γ-范畴

$$Z, X_1, \dots, X_n : (\mathcal{F}, \underline{0}) \longrightarrow (\mathsf{Cat}, \mathbf{1})$$

对于 $X = X_{j=1}^{n}$ 和 $n \geq 0$，接下来我们描述

- 多态射函子

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle ; Z\big) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \mathcal{P}X\rangle ; \mathcal{P}Z\big) \tag{10.3.1}$$

见说明 10.3.2 和 10.3.4，以及

- 说明 10.3.7 中的伪对称同构

对于 (10.2.2) 中的伪对称 Cat-多函子 $\mathrm{P} = \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 。

说明10.3.2（元数 0 中的逆K-理论）。 如果$n = 0$，那么（10.3.1）中的多态射函子 P 由以下赋值给出

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} & & \\
\Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle ; Z\big) & \xrightarrow[\cong]{A} & \mathcal{A}\mathsf{Cat}\big(\langle\rangle ; AZ\big) & \xrightarrow{\int_{\mathcal{A}}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle\rangle ; \mathcal{P}Z\big) \\
\| & & \| & & \| \\
\mathsf{Map}_*(J, Z) & & (AZ)(1) = Z\underline{1} & & \mathcal{P}Z = \int_{\mathcal{A}} AZ \\
F & \longmapsto & AF = F_{\underline{1}}(1) & \longmapsto & \mathcal{P}F = \big((1)\,, F_{\underline{1}}(1)\big) \\
\theta & \longmapsto & A\theta = \theta_{\underline{1}1} & \longmapsto & \mathcal{P}\theta = \big(1_{(1)}\,, \theta_{\underline{1}1}\big)
\end{array} \tag{10.3.3}$$

对于F 中的对象和 θ 中的态射 Γ-Cat(; Z)。（10.3.3）的具体内容如下。

- Γ-Cat(; Z) 下的等式是 (9.2.3)。
- ACat(; AZ) 下的两个等式来自 (5.3.2) 和 (9.3.3)。
- $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}(\,;\mathsf{P}Z)$ 下的两个等式来自 (6.1.23) 和 (10.1.3)。

- 同构 A 来自引理 9.4.5。
- 函子 $\int_{\mathcal{A}}$来自定义 6.3.1。

式 (10.3.3) 中的函子 $\mathsf{P} = \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 在对象和态射集上都是单射。

下文的解释 10.3.4 和 10.3.7 使用了记号 9.4.8。

说明 10.3.4（正元数中的逆 K-理论）。 如果 $n > 0$，则式 (10.3.1) 中的多重态射函子 $\mathsf{P} = \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 是复合

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\mathcal{P}}{\longrightarrow} & & \\ \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}(\langle X\rangle ; Z) & \xrightarrow{A} & \mathcal{A}\mathsf{Cat}(\langle AX\rangle ; AZ) & \xrightarrow{\int_{\mathcal{A}}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}(\langle \mathcal{P}X\rangle ; \mathcal{P}Z) \\ \| & & & & \\ \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^n X_j , Z\big) & & & & \end{array} \tag{10.3.5}$$

with

- Γ-Cat(X; Z) = $\mathsf{Map}_*(\wedge_{nj=1} X_j, Z)$, 见式 (9.2.2),
- 引理 5.2.33 中的 ACat(AX; AZ)，对应例 2.3.17 中的 D = A,
- (6.1.22) 中的 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}(\mathsf{P}X ; \mathsf{P}Z)$,
- 定义 9.4.13 和 9.4.23 中的函子 A，以及
- 定义 6.3.3 和 6.4.1 中的函子 $\int_{\mathcal{A}}$。

我们先描述 P 的对象赋值，然后描述其态射赋值。

对象赋值。假设 $F \in \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}(X; Z)$ 是一个对象，也就是说，它是 (9.2.15) 中的带基点自然变换 $F : \wedge_{j=1}^n Xj\, Z$。根据定义 6.3.3 和 9.4.13 以及说明 9.4.19，强 n-线性函子（定义 6.1.4）

$$\prod_{j=1}^n \mathcal{P}X_j = \prod_{j=1}^n (\textstyle\int_{\mathcal{A}} AX_j) \xrightarrow{\mathcal{P}F} \mathcal{P}Z = \textstyle\int_{\mathcal{A}} AZ$$

如下给出。

对象： PF = $\int_{\mathcal{A}} AF$ s 将一个对象映射为

$$\Big\langle \big(m^j \in \mathcal{A},\, x^j \in (AX_j)m^j\big)\Big\rangle \in \prod_{j=1}^n (\textstyle\int_{\mathcal{A}} AX_j) \tag{10.3.6}$$

该对象

$$(\mathcal{P}F)\big\langle (m^j, x^j)\big\rangle = \Big(m^{1,\dots,n}, (AF)_{\langle m\rangle}\langle x^j\rangle_{j=1}^n\Big) \in \textstyle\int_{\mathcal{A}} AZ$$

由（9.4.11）中的对象构成

$$m^{1,\dots,n} = \otimes_{j=1}^n m^j \in \mathcal{A}$$

以及（9.4.21）中的对象

$$(AF)_{\langle m\rangle}\langle x^j\rangle_{j=1}^n \in (AZ)m^{1,\dots,n}.$$

态射： $\mathrm{P}F = \int_{\mathcal{A}} AF$ 将一个态射映射为

$$\big\langle (f_j, p_j) \big\rangle : \big\langle (m^j, x^j) \big\rangle \longrightarrow \big\langle (k^j, w^j) \big\rangle \quad \text{in} \quad \prod_{j=1}^{n} (\textstyle\int_{\mathcal{A}} AX_j)$$

到该态射

$$\begin{array}{c} (\mathcal{P}F)\big\langle (m^j, x^j) \big\rangle = \Big(m^{1,\dots,n} , (AF)_{\langle m \rangle} \langle x^j \rangle_{j=1}^{n} \Big) \\ (\mathcal{P}F)\big\langle (f_j , p_j) \big\rangle \Big\downarrow = \big(\otimes_{j=1}^{n} f_j , (AF)_{\langle k \rangle} \langle p_j \rangle_{j=1}^{n} \big) \\ (\mathcal{P}F)\big\langle (k^j, w^j) \big\rangle = \Big(k^{1,\dots,n} , (AF)_{\langle k \rangle} \langle w^j \rangle_{j=1}^{n} \Big) \end{array}$$

与 (9.4.21) 中的态射

$$(AF)_{\langle k \rangle} \langle p_j \rangle_{j=1}^{n} \in (AZ) k^{1,\dots,n}.$$

线性约束： 根据 (6.3.14)，对于每个 $j \in \{1,\dots,n\}$，j 阶线性约束 $(\mathrm{P}F)_j^2$of $\mathrm{P}F$ 逐分量是一个同构 $(\mathrm{L}^{-1}, 1)$，其中 L 是 (5.2.19) 中唯一的 Laplaza 相干同构。

态射赋值。设 $\theta : F\ G$ 是 Γ-Cat$(X; Z)$-中的一个态射，即一个带基点修正，其分量是如 (9.2.19) 中的带基点自然变换。根据定义 6.4.1，n-线性自然变换（定义 6.1.16）

$$\prod_{j=1}^{n} (\textstyle\int_{\mathcal{A}} AX_j) \;\underset{\mathcal{P}G = \int_{\mathcal{A}} AG}{\overset{\mathcal{P}F = \int_{\mathcal{A}} AF}{\overset{\mathcal{P}\theta = \int_{\mathcal{A}} A\theta}{\rightrightarrows}}}\; \textstyle\int_{\mathcal{A}} AZ$$

对于 (10.3.6) 中的每个对象 (m^j,x^j)，都有一个分量态射

$$\begin{array}{c} (\mathcal{P}F)\big\langle (m^j, x^j) \big\rangle = \Big(m^{1,\dots,n} , (AF)_{\langle m \rangle} \langle x^j \rangle_{j=1}^{n} \Big) \\ (\mathcal{P}\theta)_{\langle (m^j, x^j) \rangle} \Big\downarrow = \big(1_{m^{1,\dots,n}} , \big((A\theta)_{\langle m \rangle} \big)_{\langle x^j \rangle_{j=1}^{n}} \big) \\ (\mathcal{P}G)\big\langle (m^j, x^j) \big\rangle = \Big(m^{1,\dots,n} , (AG)_{\langle m \rangle} \langle x^j \rangle_{j=1}^{n} \Big) \end{array}$$

在 $\int_{\mathcal{A}} AZ$ 中。这里

$$\big((A\theta)_{\langle m \rangle} \big)_{\langle x^j \rangle_{j=1}^{n}} \in (AZ) m^{1,\dots,n}$$

是 (9.4.28) 中的态射。这就完成了我们对 (10.3.5) 中多态射函子 $\mathrm{P} = \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 的描述。

说明10.3.7（逆K理论的伪对称同构）。 这里我们描述（10.2.2）中的伪对称 Cat-多函子 $\mathrm{P} = \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 的伪对称同构（4.1.2）。根据定义（4.1.14），对于每个置换$\sigma \in \Sigma_n$，伪对称同构 P_σ 由以下自然同构的粘合给出。

(10.3.8)

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\mathcal{P}}{\Big\downarrow} & & \\ \Gamma\text{-Cat}\big(\langle X \rangle ; Z\big) & \xrightarrow{A} & \mathcal{A}\mathrm{Cat}\big(\langle AX \rangle ; AZ\big) & \xrightarrow{\int_{\mathcal{A}}} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \mathcal{P}X \rangle ; \mathcal{P}Z\big) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma} & = & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma} & \overset{(\int_{\mathcal{A}})\sigma}{\Longrightarrow}_{\cong} & \Big\downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \Gamma\text{-Cat}\big(\langle X \rangle \sigma ; Z\big) & \xrightarrow[A]{} & \mathcal{A}\mathrm{Cat}\big(\langle AX \rangle \sigma ; AZ\big) & \xrightarrow[\int_{\mathcal{A}}]{} & \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}\big(\langle \mathcal{P}X \rangle \sigma ; \mathcal{P}Z\big) \\ & & \underset{\mathcal{P}}{\Big\uparrow} & & \end{array}$$

（10.3.8）的详细内容如下。

● 根据定理 9.5.9，A 是一个 Cat-多函子，其对称群作用的保持性已在引理 9.5.1 中证明。与例 4.1.7 一样，A 被视为具有恒等伪对称同构的伪对称 Cat-多函子。因此，(10.3.8) 中左侧的方块是严格交换的。

● 伪对称同构 $(\int_{\mathcal{A}})_{\sigma}$ 来自例 2.3.17 中 $\mathbf{D}=\mathbf{A}$ 的定义 6.6.1。由 (6.6.5)，$(\int_{\mathcal{A}})_{\sigma}$ 的分量同构始终具有 $(\sigma, 1)$ 的形式。

我们进一步展开 (10.3.8)。设 $F \in \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(\langle X\rangle; Z\big)$ 是一个对象，即 (9.2.15) 中的带基点自然变换 $F : \bigwedge_{j=1}^{n} X^j Z$。伪对称同构 $(\int_{\mathcal{A}})_{\sigma}$ 在对象处的分量

$$AF \in \mathcal{A}\mathsf{Cat}\big(\langle AX\rangle; AZ\big)$$

如（9.4.14）中所示，是如下的n线性自然同构（定义 6.1.16）。

$$\prod_{j=1}^{n}(\textstyle\int_{\mathcal{A}} AX_{\sigma(j)}) \underset{(\mathcal{P}F)^{\sigma}=(\int_{\mathcal{A}}AF)^{\sigma}}{\overset{\mathcal{P}(F^{\sigma})=\int_{\mathcal{A}}(AF)^{\sigma}}{\rightrightarrows}} \textstyle\int_{\mathcal{A}} AZ \qquad (\textstyle\int_{\mathcal{A}})_{\sigma,AF}$$

为明确描述这个自然同构，考虑一个对象

$$\big\langle (m^j, x^j)\big\rangle \in \prod_{j=1}^{n}(\textstyle\int_{\mathcal{A}} AX_{\sigma(j)})$$

对于每个$j \in \{1, \dots, n\}$，具有如记号 9.4.8 中的对象$m^j \in \mathbf{A}$，以及

$$x^j = \big\langle x^j_{i_j}\big\rangle_{i_j=1}^{r_j} \in \prod_{i_j=1}^{r_j} X_{\sigma(j)} \underline{m^j_{i_j}} = (AX_{\sigma(j)})m^j.$$

由（6.6.4）和（6.6.5），$(\int_{\mathcal{A}})_{\sigma,AF}$ 在对象 (m^j,x^j) 处的分量是 $\int_{\mathcal{A}} AZ$ 中如下的同构。

$$\begin{array}{l} \mathcal{P}(F^{\sigma})\big\langle (m^j,x^j)\big\rangle = \Big(m^{1,\dots,n}, \sigma_*^{-1}(AF)_{\sigma\langle m\rangle}\big\langle x^{\sigma^{-1}(j)}\big\rangle_{j=1}^{n}\Big) \\ (\textstyle\int_{\mathcal{A}})_{\sigma,AF,\langle (m^j,x^j)\rangle} \Big\downarrow = (\sigma,1) \\ (\mathcal{P}F)^{\sigma}\big\langle (m^j,x^j)\big\rangle = \Big(m^{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(n)}, (AF)_{\sigma\langle m\rangle}\big\langle x^{\sigma^{-1}(j)}\big\rangle_{j=1}^{n}\Big) \end{array} \tag{10.3.9}$$

在（10.3.9）中，对象

$$(AF)_{\sigma\langle m\rangle}\big\langle x^{\sigma^{-1}(j)}\big\rangle_{j=1}^{n} = \Big\langle \cdots \Big\langle F_{\big\langle m^{\sigma^{-1}(j)}_{i_{\sigma^{-1}(j)}}\big\rangle_{j=1}^{n}} \big\langle x^{\sigma^{-1}(j)}_{i_{\sigma^{-1}(j)}}\big\rangle_{j=1}^{n}\Big\rangle_{i_{\sigma^{-1}(1)}=1}^{r_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots \Big\rangle_{i_{\sigma^{-1}(n)}=1}^{r_{\sigma^{-1}(n)}}$$

属于

$$(AZ)m^{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(n)} = \prod_{i_{\sigma^{-1}(n)}=1}^{r_{\sigma^{-1}(n)}} \cdots \prod_{i_{\sigma^{-1}(1)}=1}^{r_{\sigma^{-1}(1)}} \Big(Z\underline{m^{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(n)}_{i_{\sigma^{-1}(1)},\dots,i_{\sigma^{-1}(n)}}}\Big)$$

对于对象集，其形式如（9.4.21）所示

$$\begin{cases} \sigma\langle m\rangle = \big\langle m^{\sigma^{-1}(j)}\big\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{A}^n \quad \text{and} \\ \big\langle x^{\sigma^{-1}(j)}\big\rangle_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n}(AX_j)m^{\sigma^{-1}(j)}. \end{cases}$$

该同构

$$m^{1,\dots,n} = \otimes_{j=1}^{n} m^{j} \xrightarrow[\cong]{\sigma} \otimes_{j=1}^{n} m^{\sigma^{-1}(j)} = m^{\sigma^{-1}(1),\dots,\sigma^{-1}(n)} \tag{10.3.10}$$

在（10.3.9）中根据 $\sigma \in \Sigma_n$ 对 n 个因子 $m^{j_n}_{j=1}$ 进行置换，并使用 A 中（2.3.24）的乘法编织 $\beta^{\otimes}$。

（10.3.9）中的同构 $(\sigma,1)$ 是恒等态射，当且仅当（10.3.10）中的 $\sigma \in$ A 是恒等态射。因此，伪对称同构

$$\mathcal{P}_\sigma = (\textstyle\int_{\mathcal{A}})_{\sigma,A(-)} \tag{10.3.11}$$

对于逆 *K*-理论，P 是恒等自然变换，当且仅当 $\sigma \in \Sigma_n$是恒等置换。

相关文献。 接下来我们讨论定理 10.2.1 与 **[Elm∞, JY22b]** 关于逆 *K*-理论函子 P 的多函子性的关系。

说明 10.3.12 （Johnson-Yau 的相关工作）。 **[JY22b]**中的主要结果指出，逆 *K*-理论 P $= \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$ 是一个非对称 Cat-多函子。**[JY22b]** 和定理 10.2.1 都考虑了 Cat-富化。定理 10.2.1 从以下几个方面扩展并细化了 **[JY22b]**中的主要结果：

(i) 虽然 P 并不严格保持对称群作用，但定理 10.2.1 表明 P 是一个伪对称 Cat-多函子。特别地，P 通过伪对称同构 P_σ in (10.3.8) 保持对称群作用；这些同构满足定义 4.1.1 中的四条相干公理。(ii) **[JY22b]** 中的证明直接分析函子 P，并未分别考察函子 A 和 $\int_{\mathcal{A}}$。另一方面，定理 10.2.1 表明，P $= \int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$的两个组成函子各自都具有 Cat-多函子性：$A$ 在对称意义下具有 Cat-多函子性，而 $\int_{\mathcal{A}}$在伪对称意义下具有 Cat-多函子性。(iii) 定理 10.2.1 还包含分解 (10.2.3)：其中涉及非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{A}}$，并考虑了 A 上格罗滕迪克构造的置换余纤维化结构。

说明 10.3.13 （Elmendorf 的相关工作）。 **[Elm∞]** 中的主要论断是，逆*K*理论 P 是对称意义下三个多函子的复合，因此 P 也是对称意义下的多函子。这项工作与定理 10.2.1 和 **[JY22b]** 的不同之处如下：

(i) **[Elm∞]**未考虑 Cat-富化。(ii) **[Elm∞]** 中的构造涉及一个不同于 A 的指标范畴 $\mathbb{\Delta}$。(iii) **[Elm∞**中的三个多函子（定理 1–3]）并非 (10.2.2) 或 (10.2.3) 中的多函子。(iv) **[Elm∞**第 4], 节中记作B 的 Γ-Cat 的幺半单位描述有误。正确的幺半单位是 (9.1.19) 中的J 以及说明 9.1.24。

此外， **[Elm∞]** 中的两个主要断言并不正确，下面我们将对此进行讨论。

与 **[Elm∞** 中的说法相反，推论 5], P 并非对称意义下的多函子，因为它并未严格保留对称群作用。

这一点在 [**JY22b** 的注 8.1] 中有所指出，并在说明 10.3.7 中作了详细阐述。特别地，(10.3.9) 展示了 $\mathrm{P}(-)^{\sigma}$ 与 $(\mathrm{P}(-))^{\sigma}$ 在对象集上的差异。

与 [**Elm**∞ 中的说法相反，观察 4], , [**Elm**∞ 定理 1–3] 中三个构造的复合并不会得到 P。对于一般的 Γ-范畴X，该复合包含许多不属于 PX 的对象，原因如下。

- [**Elm**∞ 定理 2] 中的第二个构造是一个缀饰积，它会创建一个基点，对应于对象 $0 \in \mathbb{N}$ 和唯一对象 $* \in X\underline{0} = \mathbf{1}$。
- [**Elm**∞ 定理 3] 中的第三个构造会创建自己的基点，对应于空序列；如 (10.1.8) 所示，这应该对应于 PX 中的幺半单位。

然而，该复合构造还会产生有限序列 $*_{j=1}^{n}$，其中包含由缀饰积创建的n 个 $* \in X0$ 副本。序列 $*_{j=1}^{n}$ （≥ 1 个n ）不是 PX 中的对象，参见说明 10.1.5。同样，包含 $*$ 及其他对象的有限序列也不应属于 PX。例如，对于例10.1.11中的终对象 Γ-范畴X， [**Elm**∞ 定理 1–3] 中的复合构造在对象层面上已经不同于 PX。

10.4. Barratt-Eccles 歌剧与E_∞-代数

根据推论 10.2.8，逆K-理论 P 保持由 Cat-多范畴到伪对称 Cat-多函子所参数化的任意代数结构。特别地，这对来自E_∞-歌剧的伪对称 Cat-多函子也成立。为了详细说明 Γ-Cat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$中的这些伪对称$E_\infty$-代数，本节首先回顾范畴化的 Barratt-EcclesE_∞-歌剧。

- 定理 10.4.5 是E_∞-代数的相干定理。
- 小置换范畴和小（紧）双置换范畴分别是 Cat、PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的E_∞-代数（例 10.4.12）。
- 在例 10.4.13 中，我们详细说明 Γ-Cat 中的E_∞-代数。

在第 10.5 节中，我们使用从 Barratt-Eccles 运算子来的伪对称 Cat-多函子，定义伪对称变体的 E_∞-代数。

以下 Barratt-Eccles 运算子的定义取自 [**EM06**，第 178] 页。详细讨论请参见 [**JY**∞**a**，第 11.4–11.6], 节，其中使用记号EAs，而非 $E\Sigma_*$。

定义 10.4.1。 Barratt-Eccles 运算子

$$E\Sigma_* = \left\{E\Sigma_n\right\}_{n\geq 0}$$

是由以下数据定义的 Cat-算子系（定义 3.1.2）。

- 它有单对象 $*$。
- 范畴 $E\Sigma_n$ 的对象集为 Σ_n。对于每一对置换 $\sigma, \tau \in \Sigma_n$，态射集 $E\Sigma_n(\sigma, \tau)$ 是单元素集合 $\{*\}$。
- $*$-带颜色的单位 是对象 $\mathrm{id}_1 \in \Sigma_1$。
- 对象上的对称群作用就是群乘法

$$\Sigma_n \times \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_n.$$

● 对象上的复合由群乘法定义

$$\gamma\big(\sigma\,;\,\langle\sigma_j\rangle_{j=1}^{n}\big)=\widetilde{\sigma}\cdot\sigma^{\times}\in\Sigma_{k_1+\cdots+k_n} \tag{10.4.2}$$

对 $\sigma\in\Sigma_n$ 和 $\sigma_j\in\Sigma_{k_j}$，采用以下记号。块置换

$$\widetilde{\sigma}=\sigma\langle k_1,\ldots,k_n\rangle\in\Sigma_{k_1+\cdots+k_n} \tag{10.4.3}$$

根据 σ(3.1.11) 置换 n 个长度分别为 k_1,、...、k_n 的连续块。块和

$$\sigma^{\times}=\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n\in\Sigma_{k_1+\cdots+k_n} \tag{10.4.4}$$

与 (3.1.13) 中的相同。

● 在态射上，对称群作用和复合由以下性质唯一确定：每个$E\Sigma_n$ 中的态射集都是单元素集合。

至此完成了$E\Sigma_*$的定义。

此外，对于 Cat-多范畴 M，一个 Cat-多函子

$$E\Sigma_*\longrightarrow \mathsf{M}$$

称为 M 中的E_∞-代数 。

以下关于E_∞-代数的相干定理见 **[Fre17,** 6.3.3]。详细证明另见**[JY∞a,** 11.4.14]; 而涉及其他类型等变结构的扩张见 **[Yau22,** 19.2.1] 。将i 与j 互换的对换记作（i, j），因此 (1,2) 是 Σ_2中的非恒等置换。

定理 10.4.5 (E_∞-相干性)。 设(M， γ，1) 是一个Cat-多范畴。那么，M中的 E_∞-代数

$$E\Sigma_*\xrightarrow{\ F\ }\mathsf{M}$$

由以下内容唯一确定：

- 对象 $x=F(*)$ 在 M中；
- *0元1*-胞腔

$$1=F(\mathrm{id}_0)\in\mathsf{M}(;\ x);$$

- 二元 *1*-胞

$$\mu=F(\mathrm{id}_2)\in\mathsf{M}(x,x\,;\,x);\quad \textit{and}$$

- 二元 *2*-胞同构

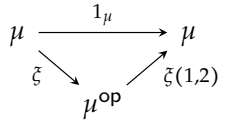
$$\mu\xrightarrow[\cong]{\xi=F(\tau)}\mu^{\mathsf{op}}=\mu(1,2)\qquad \textit{in}\quad \mathsf{M}\big(x,x\,;\,x\big)$$

其中 $\tau\in E\Sigma_2\big(\mathrm{id}_2,(1,2)\big)$ 是唯一的同构。

上述数据须满足以下条件：（10.4.6）至下文的（10.4.9）。**1-胞腔单位性与结合律：**以下对象等式成立。

$$\begin{cases}\gamma\big(\mu\,;\,1,1_x\big)=1_x=\gamma\big(\mu\,;\,1_x,1\big)\in\mathsf{M}(x\,;\,x)\\ \gamma\big(\mu\,;\,\mu,1_x\big)=\gamma\big(\mu\,;\,1_x,\mu\big)\in\mathsf{M}\big(x,x,x\,;\,x\big)\end{cases} \tag{10.4.6}$$

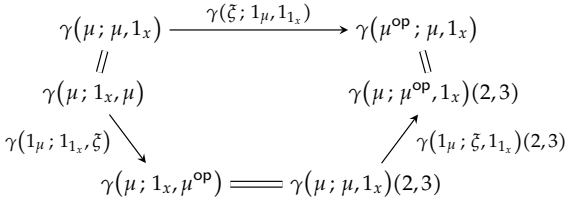
对称性： M（x，x；x）中的以下图表交换。

(10.4.7)


单位性： M(x；x) 中的下图是交换的。

(10.4.8)
$$1_x = \gamma(\mu; 1_x, 1) \underset{\gamma(\xi; 1_{1_x}, 1_1)}{\overset{1_{1_x}}{\rightrightarrows}} \gamma(\mu; 1, 1_x) = \gamma(\mu^{\mathsf{op}}; 1_x, 1) = 1_x$$

六边形： M(x，x，x；x) 中的下图是交换的。

(10.4.9)


说明 10.4.10 (E_∞-相干性)。定理 10.4.5 的证明有一个关键之处：除了严格保持单位和复合外，Cat-多函子 $F : E\Sigma_* \,\mathsf{M}$ 还严格保持对称群作用。如果F 仅仅是一个伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1），则无法具备最后这一性质。因此，说明 10.5.4 以下的定理 10.4.5 的伪对称变体包含更多数据和更多公理。

说明 10.4.11 （E_∞-代数的底层幺半群）。 在定理 10.4.5 中，三元组 (x, μ,1) 是 M 中的一个幺半群，因为它满足单位性和结合律公理 (10.4.6)。这是 Cat-多函子

$$\mathsf{As} \longrightarrow E\Sigma_*$$

从结合算子 (10.2.7) 到 Barratt-Eccles 运算子的映射所导致的结果：该映射对 Σ_n 上的 n 元 1- 胞取恒等函数。As 中的单位、对称群作用和复合如定义 10.4.1 所述。

例 10.4.12（（双）置换范畴作为 E_∞-代数）。 以下例子是将定理 10.4.5 应用于 Cat-多范畴 Cat（例 1.1.16）、PermCat 和 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ （定理 6.1.31）的结果。

(1) 根据 [**JY∞a**，11.4，Cat 中的一个 E_∞-代数恰好是一个小置换范畴（定义 1.1.11）。(2) 根据 [**EM06**，3，或 [**JY∞a**，11.5，PermCat 中的一个 E_∞-代数恰好是一个小双置换范畴（定义 2.2.12）。(3) 将 [**JY∞a**，11.5 的证明限制到 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$，可知 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中的一个 E_∞-代数恰好是一个小紧双置换范畴。

例 10.4.13（E_∞-代数在 Γ-Cat 中）。 回顾 Γ-Cat 上的 Cat-多范畴结构（第 9.2 节）。应用定理 10.4.5， Γ-Cat 中的一个 E_∞-代数是一个四元组

$$(X, 1, \mu, \xi)$$

由下文中的数据 (10.4.14) 至 (10.4.17) 构成。

底层对象： 它由一个 Γ-范畴（定义 9.1.11）构成

$$(\mathcal{F}, \underline{0}) \xrightarrow{X} (\mathsf{Cat}, \mathbf{1}). \tag{10.4.14}$$

单位： 它配备了一个单位对象

$$1 \in \mathsf{Map}_*(J, X).$$

这意味着一个带基点自然变换 $1 : J\,X$，其中 J 是单oid~~dal~~单位图表 (9.1.19)。正如在 (9.2.3) 到 (9.2.7) 中所讨论的，这样的对象 1 由对象唯一确定

$$1_{\underline{1}}(1) \in X\underline{1}. \tag{10.4.15}$$

乘法： 它配备了一个二元 1-胞

$$\mu \in \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(X, X\,;\, X\big) = \mathsf{Map}_*\big(X \wedge X\,,\, X\big).$$

这意味着一个带基点自然变换（说明 9.1.26）

$$X \wedge X \xrightarrow{\mu} X$$

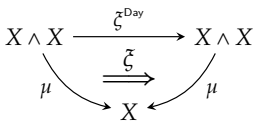
其中 $\wedge$ 是带基点的 Day 卷积 (9.1.18)。它具有分量带基点函子

$$X\underline{m} \wedge X\underline{n} \xrightarrow{\mu_{\underline{m},\underline{n}}} X\underline{mn} \tag{10.4.16}$$

它们关于m、$n \in \mathrm{F}$ 是自然的，这一意义由自然性图表 (9.1.27) 给出。**编织：** 它配备了一个二元 2-胞同构

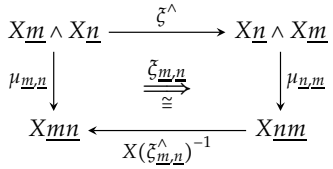
$$\mu \xrightarrow[\cong]{\xi} \mu \circ \xi^{\mathsf{Day}} \quad \text{in} \quad \Gamma\text{-}\mathsf{Cat}\big(X, X\,;\, X\big)$$

如下，其中 ξ^{Day} 是带基点的 Day 卷积 (9.1.21) 的编织。



如 (9.2.19) 中所述，这意味着 ξ 是一个带基点修正，其分量尖点自然同构关于m、$n \in \mathrm{F}$ 如下。

(10.4.17)



● (10.4.17) 中上方的 $\xi^\wedge$ 是楔积 (9.1.5) 的编织，它由笛卡尔积的编织诱导。

● 下方

$$\underline{mn} \xrightarrow[\cong]{\xi^\wedge_{\underline{m},\underline{n}}} \underline{nm}$$

在（10.4.17）中，是 F（2.3.14）里的乘法编织。

这些分量尖点自然同构满足修正公理 (9.2.20)，这意味着它们关于m、$n \in$F具有自然性。

就上述数据 (10.4.14) 至 (10.4.17) 而言，定理 10.4.5 中的条件 (10.4.6) 至 (10.4.9) 对m、n、$p \geq 0$如下。

1-胞腔单位性与结合律： (10.4.6) 中的 1-胞腔单位条件表示函子之间的等式

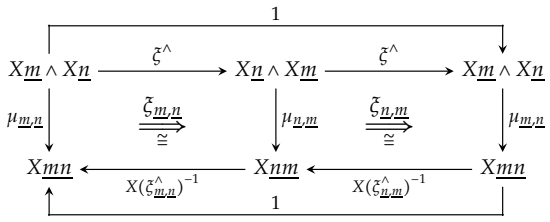
$$\mu_{\underline{1},\underline{n}}\big(1_{\underline{1}}(1)\,,\,-\big) = 1_{X\underline{n}} = \mu_{\underline{n},\underline{1}}\big(-\,,\,1_{\underline{1}}(1)\big).$$

(10.4.6) 中的 1-胞腔结合条件表示以下函子图表是交换的。

(10.4.18)

$$\begin{array}{ccc} X\underline{m}\wedge X\underline{n}\wedge X\underline{p} & \xrightarrow{1\wedge\mu_{\underline{n},\underline{p}}} & X\underline{m}\wedge X\underline{np} \\ {\scriptstyle \mu_{\underline{m},\underline{n}}\wedge 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\underline{m},\underline{np}}} \\ X\underline{mn}\wedge X\underline{p} & \xrightarrow{\mu_{\underline{mn},\underline{p}}} & X\underline{mnp} \end{array}$$

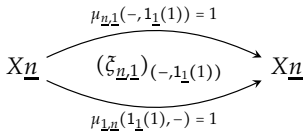
对称性： 条件 (10.4.7) 表示以下粘合等于 $\mu_{\underline{m}}$、$_{\underline{n}}$ 上的恒等自然变换。



上下两个区域分别在定理 9.1.7 中的对称幺半范畴以及

- 定理 9.1.7 中的 $(\mathrm{Cat}_*, \wedge, \xi^{\wedge})$ 和
- 例 2.3.12 中的 $(\mathbf{F}, \wedge, \xi^{\wedge})$。

单位性： 条件 (10.4.8) 表示自然变换



等于恒等函子 $1_{X\underline{n}}$ 上的恒等变换。

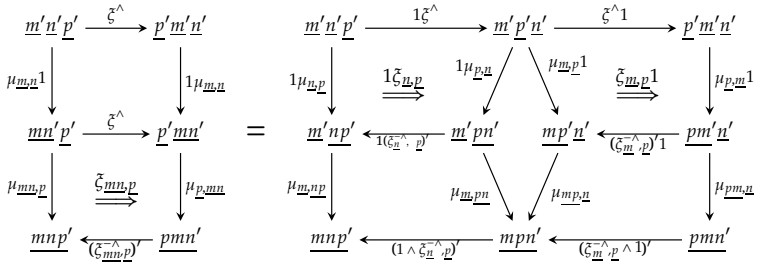
六边形： 在下面的图表中，我们使用记号

$$\xi^{-\wedge} = (\xi^{\wedge})^{-1} \quad \text{and} \qquad (-)' = X(-)$$

并将 $\wedge$ 简称为串接。例如，

$$\underline{mn}' = X\underline{mn}, \quad \underline{m}'\underline{n}'\underline{p}' = X\underline{m}\wedge X\underline{n}\wedge X\underline{p}, \quad \text{and} \quad (\xi^{-\wedge}_{\underline{mn},\underline{p}})' = X(\xi^{\wedge}_{\underline{mn},\underline{p}})^{-1}.$$

条件 (10.4.9) 表示以下粘贴图等式。



这个粘贴图等式的详细内容如下。

● 左侧的顶部方块由编织的自然性保证交换，$\xi^\wedge$ 此处编织用于楔积 (9.1.5)，而该楔积由笛卡尔积的编织诱导。

● 考察右侧。– 中心菱形由 1-胞腔结合条件 (10.4.18) 保证交换。– 两个未标记梯形由 $\mu : X\ \wedge X\ X$ (9.1.27) 的自然性保证交换。

$$\longrightarrow$$

● 两侧的左、右垂直边界分别由 1-胞腔结合条件 (10.4.18) 保证相等。

● 两侧的顶部、底部水平边界分别由六边形公理 (1.1.12) 保证相等；该公理分别应用于定理 9.1.7 中的对称幺半范畴–$(\mathrm{Cat}_*, \wedge, \xi^\wedge)$ 和例 2.3.12 中的–$(\mathrm{F}, \wedge, \xi^\wedge)$。

等价地，用对象来表述

$$a \in X\underline{m}, \quad b \in X\underline{n}, \quad \text{and} \quad c \in X\underline{p},$$

条件 (10.4.9) 意味着态射等式

$$\begin{aligned}&\left(\xi_{\underline{mn},\underline{p}}\right)_{(\mu_{\underline{m},\underline{n}}(a,b)\,,\,c)}\\ &= X\left(1_{\underline{m}} \wedge \xi^\wedge_{\underline{n},\underline{p}}\right)^{-1}\left(\mu_{\underline{mp},\underline{n}}\left((\xi_{\underline{m},\underline{p}})_{(a,c)}\,,\,1_b\right)\right) \circ \mu_{\underline{m},\underline{np}}\left(1_a\,,\,(\xi_{\underline{n},\underline{p}})_{(b,c)}\right)\\ &\text{in } X\underline{mnp}.\end{aligned}$$

至此，我们完成了对 Γ-Cat 中 E_∞-代数的描述。

10.5. 逆K-理论保持伪对称E_∞-代数

一般而言，逆K-理论 P 不保持E_∞-代数，因为E_∞-代数由从 Barratt-Eccles 运算子$E\Sigma_*$ 出发的 Cat-多函子参数化（定义 10.4.1）。将这类 Cat-多函子与伪对称 Cat-多函子 P (10.2.2) 复合，会得到伪对称 Cat-多函子（例 10.2.10），而一般不会得到 Cat-多函子。在本节中，我们

● 定义伪对称E_∞-代数（定义 10.5.1），并
● 注意到逆K-理论 P 保持它们不变（推论 10.5.2）。

接着，我们完整地展开一般 Cat-多范畴、 Γ-Cat、PermCat 和 $\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$ 中的伪对称E_∞-代数的结构（解释 10.5.4、10.5.18 和 10.5.30）。

定义 10.5.1。 设 M 是一个 Cat-多范畴。一个伪对称 Cat-多函子（定义 4.1.1），从 Barratt-Eccles 运算子（定义 10.4.1）

$$E\Sigma_* \xrightarrow{(F,\{F_\sigma\})} \mathsf{M}$$

称为 伪对称 E_∞-代数，在 M中。

应用于 Barratt-Eccles 运算子$E\Sigma_*$，推论 10.2.8 有以下特例。

推论 10.5.2。 式 *(10.2.2)* 中的逆 K-理论伪对称Cat-多函子

$$\Gamma\text{-}\mathsf{Cat} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

保持伪对称 E_∞-代数。

例 10.5.3 （E_∞-代数）。 根据例 4.1.7，每个E_∞-代数（定义 10.4.1）在赋予恒等伪对称同构后，都是伪对称E_∞-代数。根据推论 10.5.2，逆K-理论 P 将 Γ-Cat 中的每个E_∞-代数（例 10.4.13）映为 $\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$中的伪对称$E_\infty$-代数。

接下来，我们详细说明以下范畴中伪对称E_∞-代数的结构：

- 一般的 Cat-多范畴（解释 10.5.4），
- Γ-Cat（解释 10.5.18），以及
- PermCat 和 $\mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$（解释 10.5.30）。

下面的说明 10.5.4 应与 E_∞-代数的相容性定理 10.4.5 相比较。

说明 10.5.4 （伪对称 E_∞-代数）。 将定义 4.1.1 中的定义域取为 Barratt-Eccles 运算子 $E\Sigma_*$（定义 10.4.1），则 Cat-多范畴 $(\mathsf{M}, \gamma, 1)$ 中的伪对称 E_∞-代数

$$E\Sigma_* \xrightarrow{(F,\{F_\sigma\})} \mathsf{M}$$

由下文针对 $n \geq 0$ 以及 $\sigma, \tau \in \Sigma_n$ 给出的数据 (10.5.5) 至 (10.5.8) 组成。

对象： F 的对象赋值给出一个对象

$$x = F(*) \in \mathsf{M}. \tag{10.5.5}$$

元数为 n 的 1-胞： n 元 1-胞腔赋值 F 给出一个对象

$$\mu_\sigma = F(\sigma) \in \mathsf{M}\big(x^n\,;\, x\big) \tag{10.5.6}$$

其中 $x^n = x_{j=1}^n$ 表示由 n 个n-元组 x组成。

元数 n中的 2-胞：n元 2-胞腔赋值F 给出一个同构

$$\mu_\sigma \xrightarrow[\cong]{\mu_\sigma^\tau} \mu_\tau \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(x^n\,;\, x\big) \tag{10.5.7}$$

对应于 $E\Sigma_n(\sigma, \tau) = \{*\}$ 中唯一的同构。

伪对称同构： 伪对称同构 F_σ (4.1.2) 的 τ-分量是一个 n 元 2-胞同构

$$\mu_{\tau\sigma} \xrightarrow[\cong]{F_{\sigma;\tau}} \mu_\tau \cdot \sigma \quad \text{in} \quad \mathsf{M}\big(x^n; x\big) \tag{10.5.8}$$

带有 $\mu_\tau \cdot \sigma$ 在 μ_τ 上的右 σ-作用。
上述数据满足以下关于$n \geq 0$ 及 σ、τ、$\pi \in \Sigma_n$的条件 (10.5.9) 至 (10.5.17)。

分量函子性： 每个函子的函子性

$$E\Sigma_n \xrightarrow{F} \mathsf{M}\big(x^n; x\big)$$

表示 $\mathsf{M}(x^n; x)$ 中以下的态射等式。

$$\begin{cases} \mu_\sigma^\sigma = 1_{\mu_\sigma} \\ \mu_\tau^\pi \circ \mu_\sigma^\tau = \mu_\sigma^\pi \end{cases} \tag{10.5.9}$$

伪对称自然性： F_σ 在 (10.5.8) 中的自然性意味着 $\mathsf{M}(x^n; x)$ 中的以下图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\tau\sigma} & \xrightarrow{F_{\sigma;\tau}} & \mu_\tau \cdot \sigma \\ {\scriptstyle \mu_{\tau\sigma}^{\pi\sigma}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_\tau^\pi \cdot \sigma} \\ \mu_{\pi\sigma} & \xrightarrow{F_{\sigma;\pi}} & \mu_\pi \cdot \sigma \end{array} \tag{10.5.10}$$

单位： 单位公理 (3.2.3) 是对象等式

$$\mu_{\mathrm{id}_1} = 1_x \in \mathsf{M}(x; x). \tag{10.5.11}$$

复合： 使用 (10.4.2) 至 (10.4.4) 中的记号，对象上的复合公理 (3.2.4) 是 $\mathsf{M}(x^{k_1+\cdots+k^n}; x)$ 中的以下对象等式。

$$\mu_{\widetilde{\sigma}\cdot\sigma^\times} = \gamma\big(\mu_\sigma; \langle\mu_{\sigma_j}\rangle_{j=1}^n\big) \tag{10.5.12}$$

态射上的复合公理 (3.2.4) 是关于 $\sigma, \tau \in \Sigma_n$ 和 $\sigma_j, \tau_j \in \Sigma_{k_j}$ 的以下态射等式。

$$\mu_{\widetilde{\sigma}\cdot\sigma^\times}^{\widetilde{\tau}\cdot\tau^\times} = \gamma\big(\mu_\sigma^\tau; \langle\mu_{\sigma_j}^{\tau_j}\rangle_{j=1}^n\big) \tag{10.5.13}$$

定义 4.1.1 中的公理 (4.1.3) 至 (4.1.6) 如下。
单位置换： 公理 (4.1.3) 是 $\mathsf{M}(x^n; x)$ 中的以下态射等式。

$$F_{\mathrm{id}_n;\tau} = 1_{\mu_\tau} : \mu_\tau \longrightarrow \mu_\tau \tag{10.5.14}$$

积　**置换：** 公理 (4.1.4) 表明，$\mathsf{M}(x^n; x)$ 中的下图是交换的，其中的等式由 M 中的对称群作用公理 (3.1.6) 给出。

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\pi\sigma\tau} & \xrightarrow{F_{\sigma\tau;\pi}} & \mu_\pi \cdot \sigma\tau \\ {\scriptstyle F_{\tau;\pi\sigma}}\downarrow & & \| \\ \mu_{\pi\sigma} \cdot \tau & \xrightarrow{F_{\sigma;\pi}\cdot\tau} & (\mu_\pi \cdot \sigma) \cdot \tau \end{array} \tag{10.5.15}$$

顶层等变性： 公理 (4.1.5) 表明，对于 σ、$\tau \in \Sigma_n$ 和 $\tau_j \in \Sigma_{k_j}$，其中$j \in \{1, \dots, n\}$，$\mathrm{M}(x^{k_1+\cdots+k^n}; x)$ 中的下图是交换的。

(10.5.16)
$$\begin{array}{ccc}
\mu_{\widetilde{\tau}\cdot\tau^\times\cdot\overline{\sigma}} & \xrightarrow{\quad F_{\overline{\sigma};\widetilde{\tau}\cdot\tau^\times} \quad} & \mu_{\widetilde{\tau}\cdot\tau^\times\cdot}\,\overline{\sigma} \\
\spadesuit\big\| & & \big\|\spadesuit \\
\mu_{\widetilde{\tau}\widetilde{\sigma}\cdot(\sqcap_j\tau_{\sigma(j)})} & & \gamma\big(\mu_\tau; \langle\mu_{\tau_j}\rangle_{j=1}^n\big)\cdot\overline{\sigma} \\
\spadesuit\big\| & & \big\|\spadesuit \\
\gamma\big(\mu_{\tau\sigma}; \langle\mu_{\tau_{\sigma(j)}}\rangle_{j=1}^n\big) & \xrightarrow{\gamma\left(F_{\sigma;\tau}; \langle 1_{\mu_{\tau_{\sigma(j)}}}\rangle_{j=1}^n\right)} & \gamma\big(\mu_\tau\cdot\sigma; \langle\mu_{\tau_{\sigma(j)}}\rangle_{j=1}^n\big)
\end{array}$$

● 块置换

$$\overline{\sigma} = \sigma\langle k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)}\rangle \in \Sigma_{k_1+\cdots+k_n}$$

由 b 诱导 y^{σ} 如（3.1.11）所示。

● 标记为 ♠ 的两个等式分别在$E\Sigma_*$ 和 M 中使用了顶部等变公理（3.1.10）。

● 标记为 ♣ 的两个等式使用复合公理 (10.5.12)。

B底部等变性： 公理 (4.1.6) 意味着，对于 $\sigma \in \Sigma_n$ 和 $\sigma_j, \tau_j \in \Sigma_{k_j}$，下面的图表在 $\mathrm{M}(x^{k_1+\cdots+k^n}; x)$ 中交换，其中
$j \in \{1, \dots, n\}$.

(10.5.17)
$$\begin{array}{ccc}
\mu_{\widetilde{\sigma}\cdot\sigma^\times\cdot\tau^\times} & \xrightarrow{\quad F_{\tau^\times;\widetilde{\sigma}\cdot\sigma^\times} \quad} & \mu_{\widetilde{\sigma}\cdot\sigma^\times\,\cdot}\,\tau^\times \\
\heartsuit\big\| & & \big\|\diamondsuit \\
\mu_{\widetilde{\sigma}\cdot(\sqcap_j\sigma_j\tau_j)} & & \gamma\big(\mu_\sigma; \langle\mu_{\sigma_j}\rangle_{j=1}^n\big)\cdot\tau^\times \\
\diamondsuit\big\| & & \big\|\heartsuit \\
\gamma\big(\mu_\sigma; \langle\mu_{\sigma_j\tau_j}\rangle_{j=1}^n\big) & \xrightarrow{\gamma\left(1_{\mu_\sigma}; \langle F_{\tau_j;\sigma_j}\rangle_{j=1}^n\right)} & \gamma\big(\mu_\sigma; \langle\mu_{\sigma_j}\cdot\tau_j\rangle_{j=1}^n\big)
\end{array}$$

● 标记为 ♡ 的两个等式分别在 $E\Sigma_*$ 和 M 中使用底部等变公理 (3.1.12)。

● 标记为 ♢ 的两个等式使用复合公理 (10.5.12)。

这就完成了对 Cat- 多范畴 (M, γ,1) 中伪对称 E_∞-代数的显式描述。

下文的解释 10.5.18 应与 Γ-Cat 中 E_∞-代数的描述（例 10.4.13）进行比较。

解释 10.5.18 （Γ-Cat 中的伪对称 E_∞-代数）。将说明 10.5.4 应用于 Cat-多范畴 M = Γ-Cat（第 9.2 节），Γ-Cat 中的伪对称E_∞-代数

$$\big(X, \{\mu_\sigma\}, \{\mu_\sigma^\tau\}, \{F_\sigma\}\big) : E\Sigma_* \longrightarrow \Gamma\text{-Cat}$$

由下文针对$n \geq 0$ 以及 $\sigma, \tau \in \Sigma_n$给出的数据 (10.5.19)、(10.5.20)、(10.5.22)、(10.5.23) 和 (10.5.25) 组成。

底层 Γ-范畴： 它由一个 Γ-范畴（定义 9.1.11）组成

(10.5.19)
$$(\mathcal{F}, \underline{0}) \xrightarrow{\ X\ } (\mathsf{Cat}, \mathbf{1}).$$

元数为 n 的 1-胞： 它具有一个带基点自然变换 (9.2.15)

(10.5.20)
$$\wedge_{j=1}^n X \xrightarrow{\ \mu_\sigma\ } X \quad \text{in} \quad \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^n X, X\big).$$

对于 F 中每个由对象构成的n元组 $\underline{m} = m^j{}_{j=1}^n$，$\mu_\sigma$ 由一个分量带基点函子 (9.2.16) 构成

$$\wedge_{j=1}^n X\underline{m_j} \xrightarrow{\mu_{\sigma;\langle m\rangle}} X\big(\underline{m_1 \cdots m_n}\big) \tag{10.5.21}$$

它满足关于 $m^j{}_{j=1}^n$ 的自然性图表 (9.2.18)。

若 $n = 0$，则 $\wedge_{j=1}^n X$ 解释为 (9.1.19) 中的幺半单位图表$\overline{J}$。如包含 (9.2.7) 的段落所述，带基点自然变换

$$J \xrightarrow{\mu_{\mathrm{id}_0}} X \quad \text{in} \quad \mathsf{Map}_*\big(J, X\big)$$

由对象确定

$$(\mu_{\mathrm{id}_0})_{\underline{1}}(1) \in X\underline{1}. \tag{10.5.22}$$

元数中的 2-胞 n： 它具有一个可逆的带基点修正

$$\wedge_{j=1}^n X \underset{\mu_\tau}{\overset{\mu_\sigma}{\underset{\mu_\sigma^\tau}{\rightrightarrows}}} X \quad \text{in} \quad \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^n X, X\big). \tag{10.5.23}$$

对于每个由对象组成的n元组 $\underline{m} = m^j{}_{j=1}^n$ 在 F 中，μ_σ^τ 由一个分量带基点自然同构 (9.2.19) 构成

$$\wedge_{j=1}^n X\underline{m_j} \underset{\mu_{\tau;\langle m\rangle}}{\overset{\mu_{\sigma;\langle m\rangle}}{\underset{(\mu_\sigma^\tau)_{\langle m\rangle}}{\rightrightarrows}}} X\big(\underline{m_1 \cdots m_n}\big) \tag{10.5.24}$$

它满足修正公理 (9.2.20)。

如果$n = 0$，那么根据 (10.5.9)，$\mu^{\mathrm{id}_0}\mathrm{id}_0$ 由 (10.5.22) 中 μ_{id_0} 所确定对象上的恒等态射构成。

伪对称同构： 它具有一个可逆的带基点修正

$$\wedge_{j=1}^n X \underset{\mu_\tau \cdot \sigma}{\overset{\mu_{\tau\sigma}}{\underset{F_{\sigma;\tau}}{\rightrightarrows}}} X \quad \text{in} \quad \mathsf{Map}_*\big(\wedge_{j=1}^n X, X\big). \tag{10.5.25}$$

对于 F 中每个由n个对象构成的元组 $\underline{m} = m^j{}_{j=1}^n$，$F_{\sigma;\tau}$ 由一个带基点自然同构分量 (9.2.19) 构成

$$\wedge_{j=1}^n X\underline{m_j} \underset{(\mu_\tau \cdot \sigma)_{\langle m\rangle}}{\overset{\mu_{\tau\sigma;\langle m\rangle}}{\underset{F_{\sigma;\tau,\langle m\rangle}}{\rightrightarrows}}} X\big(\underline{m_1 \cdots m_n}\big) \tag{10.5.26}$$

它满足修正公理 (9.2.20)。根据 (9.2.24)，(10.5.26) 中的带基点函子 $(\mu_\tau \cdot \sigma)\langle m\rangle$ 是以下复合。

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge_{j=1}^n X\underline{m_j} & \xrightarrow{(\mu_\tau\cdot\sigma)_{\langle m\rangle}} & X\big(\underline{m_1\cdots m_n}\big) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow{\scriptstyle\cong} & & {\scriptstyle\cong}\uparrow{\scriptstyle X(\sigma^{-1})} \\ \bigwedge_{j=1}^n X\underline{m_{\sigma^{-1}(j)}} & \xrightarrow{\mu_{\tau;\sigma\langle m\rangle}} & X\big(\underline{m_{\sigma^{-1}(1)}\cdots m_{\sigma^{-1}(n)}}\big) \end{array} \tag{10.5.27}$$

若 $n = 0$，则由(10.5.14)可知 $F_{\mathrm{id}_0;\mathrm{id}_0}$ 是(10.5.22)中由 μ_{id_0} 确定的对象上的恒等态射。

至此，完成了对 Γ-Cat 中伪对称 E_∞-代数数据列表的描述。

条件 (10.5.9) 至 (10.5.17) 对于$n \geq 0$ 以及 σ、τ、$\pi \in \Sigma_n$，都根据数据 (10.5.21)、(10.5.24) 和 (10.5.26) 逐分量解释；对于零元输入，则使用 (10.5.22) 作适当调整。下面明确陈述该列表中最不平凡的三个条件。

复合： 考虑对象

$$\underline{m_{ji}} \in \mathcal{F} \qquad \text{for } 1 \leq j \leq n \text{ and } 1 \leq i \leq k_j$$

以及以下记号。

$$\begin{cases} \langle \underline{m_j} \rangle = \langle \underline{m_{ji}} \rangle_{i=1}^{k_j} \in \mathcal{F}^{k_j} & m_{j\bullet} = \prod_{i=1}^{k_j} m_{ji} \\ \langle m \rangle = \big\langle \langle \underline{m_j} \rangle \big\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{F}^{k_1+\cdots+k_n} \end{cases} \tag{10.5.28}$$

于是，对象上的复合公理 (10.5.12) 给出如下交换的函子图表。

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge_{j=1}^n \bigwedge_{i=1}^{k_j} X\underline{m_{ji}} & \xrightarrow{\mu_{\widetilde{\sigma}\cdot\sigma^\times;\langle m\rangle}} & X\big(\underline{\textstyle\prod_{j=1}^n m_{j\bullet}}\big) \\ & {\scriptstyle\wedge_j \mu_{\sigma_j;\underline{\langle m_j\rangle}}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\mu_{\sigma;\underline{\langle m_j\bullet\rangle}_{j=1}^n}} & \\ & \bigwedge_{j=1}^n X\underline{m_{j\bullet}} & \end{array} \tag{10.5.29}$$

态射上的复合公理 (10.5.13) 与 (10.5.29) 类似，只需将每个箭头替换为 (10.5.24) 中对应的 2-胞变体。

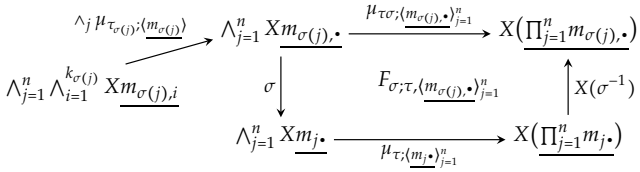
顶层等变性： 我们使用 (10.5.28) 中的记号，并结合

$$\langle m\rangle\overline{\sigma} = \big\langle \langle \underline{m_{\sigma(j)}} \rangle \big\rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{F}^{k_{\sigma(1)}+\cdots+k_{\sigma(n)}}.$$

顶部等变公理 (10.5.16) 意味着分量自然同构

$$\bigwedge_{j=1}^n \bigwedge_{i=1}^{k_{\sigma(j)}} X\underline{m_{\sigma(j),i}} \underset{(\mu_{\widetilde{\tau}\cdot\tau^\times}\cdot\overline{\sigma})_{\langle m\rangle\overline{\sigma}}}{\overset{\mu_{\widetilde{\tau}\cdot\tau^\times\cdot\overline{\sigma};\langle m\rangle\overline{\sigma}}}{\rightrightarrows}} X\big(\underline{\textstyle\prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),\bullet}}\big) \qquad F_{\overline{\sigma};\widetilde{\tau}\cdot\tau^\times,\langle m\rangle\overline{\sigma}}$$

等于以下粘合自然同构。

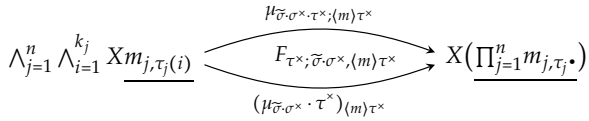


在前两个图表中，顶部边界复合与底部边界复合分别由（10.5.16）中的左侧垂直等式和右侧垂直等式，以及（10.5.27）得出相等。

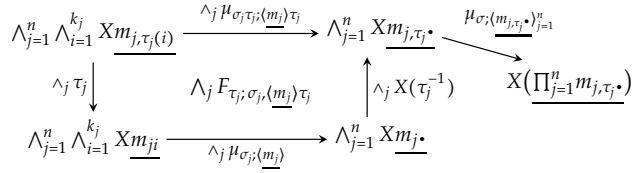
底部等变性：我们使用（10.5.28）以及以下记号。

$$\begin{cases} \langle \underline{m_j} \rangle \tau_j = \langle \underline{m_{j,\tau_j(i)}} \rangle_{i=1}^{k_j} \in \mathcal{F}^{k_j} & m_{j,\tau_j\bullet} = \prod_{i=1}^{k_j} m_{j,\tau_j(i)} \\ \langle m \rangle \tau^\times = \langle \langle \underline{m_j} \rangle \tau_j \rangle_{j=1}^{n} \in \mathcal{F}^{k_1+\cdots+k_n} \end{cases}$$

底部等变公理（10.5.17）意味着分量自然同构



等于以下粘合自然同构。



在前两个图表中，顶部和底部的边界复合分别由式（0.5. ）中的左侧和右侧垂直等式相等

(10.5.) 17一个 long with 1(0.5.27) 。

至此完成了对 Γ-Cat 中伪对称 E_∞-代数的描述。

回顾例 10.4.12，PermCat 和 $\mathrm{PermCat}_{sg}$ 中的 E_∞-代数分别是小双置换范畴及其紧变体（定义 2.2.12）。下文的说明 10.5.30 也适用于 $\mathrm{PermCat}_{sg}$ (6.1.22)，只需将范围限制为强 n-线性函子；这类函子的线性约束可逆（10.5.33）。

说明 10.5.30（PermCat 中的伪对称 E_∞-代数）。将说明 10.5.4 应用于 Cat-多范畴 $\mathbb{M}$ = PermCat（定理 6.1.31），PermCat 中的伪对称 E_∞-代数

$$\big(\mathsf{C}, \{\mu_\sigma\}, \{\mu_\sigma^\tau\}, \{F_\sigma\}\big) : E\Sigma_* \longrightarrow \mathrm{PermCat}$$

由下文针对 $n \geq 0$、σ 和 $\tau \in \Sigma_n$ 给出的数据 (10.5.31) 至 (10.5.35) 构成。

底层置换范畴：它由一个小置换范畴（定义 1.1.11）构成

(10.5.31)　$$(\mathsf{C}, \oplus, e, \beta).$$

元数 n-胞： 它具有一个n-线性函子（定义 6.1.4）

$$\prod_{j=1}^{n}\mathsf{C} = \mathsf{C}^n \xrightarrow{\left(\mu_\sigma\,,\langle\mu^2_{\sigma;j}\rangle_{j=1}^n\right)} \mathsf{C}. \tag{10.5.32}$$

自然变换

$$\mu_\sigma\langle X\circ_j X_j\rangle \oplus \mu_\sigma\langle X\circ_j X'_j\rangle \xrightarrow{\mu^2_{\sigma;j}} \mu_\sigma\langle X\circ_j (X_j\oplus X'_j)\rangle \tag{10.5.33}$$

对于对象 $X\in\mathsf{C}^n$ 和 $X'_j\in\mathsf{C}$，这是 μ_σ 的第 j 个线性约束（6.1.6）。如果 $\mathsf{M} = \mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$，那么 μ_σ 是一个强 n-线性函子。这意味着每个线性约束 $\mu^2_{\sigma;j}$ 都是自然同构。

元数为 n 的 2-胞： 它具有一个n-线性自然同构（定义 6.1.16）

$$\mathsf{C}^n \underset{\left(\mu_\tau,\langle\mu^2_{\tau;j}\rangle_{j=1}^n\right)}{\overset{\left(\mu_\sigma,\langle\mu^2_{\sigma;j}\rangle_{j=1}^n\right)}{\Downarrow\,\mu^\tau_\sigma}} \mathsf{C} \quad \text{in} \quad \mathsf{PermCat}\left(\langle\mathsf{C}\rangle_{j=1}^n;\,\mathsf{C}\right). \tag{10.5.34}$$

伪对称同构： 它具有一个n元自然同构

$$\mathsf{C}^n \underset{\left(\mu_\tau,\langle\mu^2_{\tau;j}\rangle_{j=1}^n\right)\cdot\sigma}{\overset{\left(\mu_{\tau\sigma},\langle\mu^2_{\tau\sigma;j}\rangle_{j=1}^n\right)}{\Downarrow\,F_{\sigma;\tau}}} \mathsf{C} \quad \text{in} \quad \mathsf{PermCat}\left(\langle\mathsf{C}\rangle_{j=1}^n;\,\mathsf{C}\right). \tag{10.5.35}$$

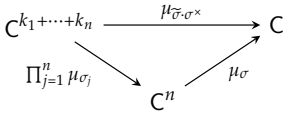
这里，$(\mu_\tau, \mu^{2\ n}_{\tau;jj=1})\cdot\sigma$ 是$(\mu_\tau, \mu^{2\ n}_{\tau;jj=1})$上的右 σ作用，定义见(6.1.25)和(6.1.26)。

至此，完成了对PermCat中伪对称E_∞-代数的数据列表的描述。

对于$n\ \geq 0$ 以及 σ、τ、$\pi\in\Sigma_n$，条件(10.5.9)至(10.5.17)需使用数据(10.5.31)至(10.5.35)来解释。下面明确陈述该列表中最不平凡的三个条件。

复合： 对象上的复合公理(10.5.12)意味着以下函子图表是交换的。

(10.5.36)



此外，它们对应的线性约束相同。线性

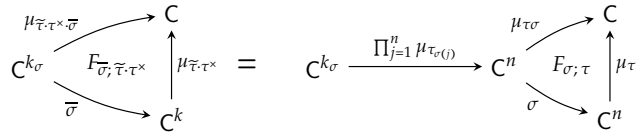
y 复合的约束 P合 $\mu_\sigma\circ(\prod_{j=1}^n\mu_{\sigma_j})$ 定义于 (6.1.30).

关于态射的复合公理 (10.5.13) 类似于 (10.5.36)，只是将其中的每个函子都替换为 (10.5.34) 中相应的 2-胞变体。

顶层等变性： 采用记号

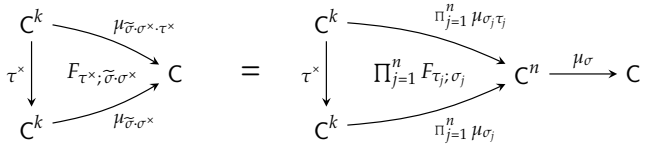
$$k = k_1+\cdots+k_n \quad \text{and} \quad k_\sigma = k_{\sigma(1)}+\cdots+k_{\sigma(n)},$$

顶部等变公理 (10.5.16) 是以下自然同构之间的等式。



在上述等式中，上方和下方的边界复合分别由（10.5.16）中的左侧和右侧垂直等式，以及（6.1.25）和（6.1.29）给出。

底部等变性：底部等变公理（10.5.17）是以下自然同构的等式。



在上述等式中，上方和下方的边界复合分别由（10.5.17）中的左侧和右侧垂直等式，以及（6.1.25）和（6.1.29）给出。

这完成了对 PermCat 中伪对称 E_∞-代数的描述。

参考文献和索引

附录 A

开放问题

> “比起那些似乎旨在卖弄学识的问题，我更喜欢看起来真诚的问题，即使它们承认或暴露了困惑。”
>
> – 比尔·瑟斯顿，*MathOverflow* 用户个人资料

本章讨论与本文主题相关的开放问题：富集多范畴、双置换范畴、格罗滕迪克构造以及逆K理论。

问题 A.0.1（多双范畴）。 每个 Cat-多范畴都有一个底层的一元 2-范畴（例 3.1.18）。一个双范畴 **[JY21**，2.1.3] 是 2-范畴的一个拟版本。

- Cat-多范畴的伪变体是什么？双范畴的定理是否有多范畴变体?

更具体地说，定义

- 将多双范畴 定义为 Cat-多范畴的双范畴变体，以及双范畴的多输入变体,
- 松 Cat-多函子 （定义在多双范畴之间），将定义 4.1.1 和说明 4.2.17 推广为 Cat-多函子的松变体，以及松函子的多输入变体 **[JY21**, 4.1.2],
- 松Cat-多自然变换 （定义在松 Cat-多函子之间），作为伪对称 Cat-多自然变换（定义 4.2.1）的松变体，以及松变换的多输入变体 **[JY21**, 4.2.1],, 等等。

然后利用这些定义证明多双范畴变体的

- 双范畴粘贴定理 **[JY21**，3.6.6],
- 双范畴奎伦定理 A **[JY21**，7.3.1],
- 双范畴的 Whitehead 定理 **[JY21**，7.4.1],推广定理 3.4.21 和 4.3.28,
- 双范畴 Yoneda 引理 **[JY21**，8.3.16],以及
- 双范畴相干定理 **[JY21**，8.4.1]。

其中一些问题可能可以通过 2-单子**[JY21**，6.5], 以概念性的方式处理。

- 是否存在一个 2-单子，使得– 具有给定对象集 X 的 Cat-多范畴是严格代数，而– 具有对象集 X 的多双范畴是伪代数?

如果答案是肯定的，那么 **[BKP89, Pow89]** 中的相干定理可能适用。 o 这个 2-单子。

问题 A.0.2（伪对称性）。 回忆定义 4.1.1 中伪对称 Cat- 多函子 $(F,\{F_\sigma\})$ 的概念。

> ● 由对象赋值和分量函子组成的F，是否可能具有多个不同的伪对称 Cat-多函子结构 $\{F_\sigma\}$?

在例 4.1.7 中，我们为 Cat-多函子F 赋予恒等自然变换$F_\sigma = \mathrm{Id}$，使 $(F,\{\mathrm{Id}\})$ 成为伪对称 Cat-多函子。下面是前一个问题的一个特例。

> ● Cat-多函子F 是否可能具有通常非恒等的伪对称同构 $\{F_\sigma\}$，使得 $(F,\{F_\sigma\})$ 成为一个不同于例 4.1.7 中所述的伪对称 Cat- 多函子?

问题 A.0.3（置换余纤维化）。 根据 Grothendieck 纤维化定理 [**JY21**，9.5.6]，Cat/B 上存在一个 2-单子，其伪代数与严格代数分别与 B 上带劈裂的余纤维化和劈裂余纤维化之间存在典范双射。

> ● 证明关于置换的余纤维化以及定义 7.1.4 中带劈裂变体的类似定理。

在置换余纤维化中，$P : \mathsf{E}\,\mathcal{D}$，函子~~$P$~~是置换范畴之间的严格对称幺半函子。因此，不应考虑 Cat/B，而应考虑小置换范畴及其上的严格对称幺半函子所构成的上范畴 $\mathcal{D}$。

问题 A.0.4（伪双置换索引范畴）。 对于小紧双置换范畴 D，Cat-多范畴 DCat（定理 5.3.11）的对象、n元 1-胞和n元 2-胞分别由加性对称幺半函子、加性自然变换和加性修正给出（定义 5.2.4、5.2.12 和 5.2.25）。

> ● 若将对象、n元 1-胞和n元 2-胞分别替换为相应的伪函子、强变换和修正版本（**JY21**，4.1.2、4.2.1 和 4.4.1]，），DCat 是否仍构成 Cat-多范畴或多双范畴（问题 A.0.1）？

只需将定义 5.2.4 中的加性对称幺半函子替换为伪函子即可。然而，定义 5.2.12 和 5.2.25 各自都包含一个单位公理和一个可加性公理。因此，它们的伪变体在表述上更为微妙。

问题 A.0.5（伪置换上纤维化）。 对于一个小紧双置换范畴 D，非对称 Cat-多范畴 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$（定理 7.3.16）的对象、$n$ 元 1-胞和n 元 2-胞分别为 D 上的小置换余纤维化、余笛卡尔强n-线性函子，以及余笛卡尔n-线性变换（定义 7.1.4、7.2.2 和 7.2.18）。与问题 A.0.4 类似，我们提出以下问题。

> ● 如果将对象、n元 1-胞和 n元 2-胞分别替换为带选取的上纤维化，以及 n元 1-胞和 n元 2-胞的某些伪版本，那么 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ 是否仍构成非对称 Cat-多范畴或非对称多重双范畴（问题 A.0.1）？

问题 A.0.6（伪格罗滕迪克 Cat-多重等价）。 对于每个小紧双置换范畴 D，都存在一个由格罗滕迪克构造给出的非对称 Cat-多重等价（定理 8.4.17）

$$\mathcal{D}\mathsf{Cat} \xrightarrow[\sim]{\int_{\mathcal{D}}} \mathsf{PFib}^{\mathcal{D}}.$$

如果问题 A.0.4 和 A.0.5 都能得到肯定回答，那么我们提出以下问题。

- 能否将非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{D}}$ 推广到伪设定?

事实上，可以把这个问题视为检验问题 A.0.4 和 A.0.5 中 DCat 与 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 的伪变体定义是否正确的试金石。

问题 A.0.7（全局格罗滕迪克 Cat-多重等价）。 在构造$\int_{\mathcal{D}}$中，小紧双置换范畴 D 是固定的。因此，一个自然的问题是，D 是否可以作为变量。

- 是否存在非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{D}}$ 的全局版本，其中 D 在紧双置换范畴中变化?

要回答这个问题，需要

- 双置换范畴之间的函子概念，该概念应类似于 **[Yau∞I** 第 5 节中的对称双幺半函子1];
- Cat-多范畴 DCat（定理 5.3.11）的全局版本，其中 D 遍历紧双置换范畴；以及
- 非对称 Cat-多范畴 $\mathrm{PFib}_{\mathcal{D}}$ （定理 7.3.16）的全局版本，其中 D 遍历紧双置换范畴。

此外，如果问题 A.0.6 得到肯定回答，那么还可以询问是否存在一个全局变体，其中 D 遍历。

问题 A.0.8（算子格罗滕迪克 Cat-多重等价）。 小型紧双置换范畴是 PermCat 中的 E_∞-代数（例 10.4.12(3)），其中所涉及的是 Barratt-Eccles 运算子 $E\Sigma_*$（定义 10.4.1）。

- 对于一个范畴歌剧 Q，是否存在非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{D}}$ 的推广，其中 D 是 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中固定的 Q-代数?

除 Barratt-Eccles E_∞-歌剧 $E\Sigma_*$ 外，其他值得关注的范畴歌剧还包括 **[JY∞a** 第 13.2 节中的 E_n-歌剧，以及 **[Yau22** 第 19.2 节中作用歌剧 G 对应的 G-幺半范畴歌剧。如果这个问题的答案是肯定的，那么我们就可以将问题 A.0.7 推广到这种情形。

- 是否存在非对称 Cat-多重等价 $\int_{\mathcal{D}}$ 的全局版本，其中 D 遍历 $\mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 中的 Q- 代数?

可以通过以下方式进一步扩展这个问题:

- 改变范畴歌剧 Q；以及
- 在问题 A.0.6 的背景下考察它。

问题 A.0.9（Cat-多函子性的逆K理论）。 逆K理论 P 是一个伪对称 Cat-多函子，但不是对称意义下的 Cat-多函子（定理 10.2.1）。

- 是否存在一个与 P 等价的变体，使其在对称意义上是 Cat-多函子?

更准确地说，这个问题是在询问以下对象是否存在：

- 一个 Cat-多函子

$$\Gamma\text{-Cat} \xrightarrow{\mathcal{P}'} \mathsf{PermCat}^{\mathsf{sg}}$$

  以及

- 一个自然变换 $\theta : \mathrm{P}\ \mathrm{P}\prime$ 或 $\mathrm{P}\prime\ \mathrm{P}$，其在每个分量上都是 $\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中的稳定等价。

$\mathsf{PermCat}_{\mathsf{sg}}$ 中的一个态射称为**稳定等价**，如果它在 Segal$K$-理论下的像**[Seg74]** 是稳定等价；关于稳定等价的更多讨论，参见 **[GJO17, JY22b, JY22c, BF78, Man10, Tho95]**。由于 P 是 Segal$K$-理论的一个同伦逆 **[Man10]**，θ 可知 P' 也是 Segal$K$-理论的一个同伦逆。此外，作为 Cat-多函子，P' 保留由 Cat-多函子参数化的任意代数结构——例如E_∞-代数和E_n-代数——从而强化了推论 10.2.4 和 10.2.8。

参考文献

[AGV72] M. Artin、A. Grothendieck 和 J. L. Verdier，《博伊斯-马里森林研讨班：1963–1964 年代数几何研讨会。拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》（SGA 4）。由 M. Artin、A. Grothendieck、J. L. Verdier 主持的研讨班。N. Bourbaki、P. Deligne、B. Saint-Donat 协助。第 1 卷：拓扑斯理论。讲义 I 至 IV。第 2 版，《数学讲义》，第 269，1972 10.1007/BFb0081551 卷，施普林格，查姆，（法文）。[BW19] J. Beardsley 和 L. Z. Wong，《富化格罗滕迪克构造》，《数学进展》344 (2019)，234–261 10.1016/j.aim.2018.12.009。[BKP89] R. Blackwell、G. M. Kelly 和 A. J. Power，《二维单子理论》，《纯粹与应用代数杂志》**59** (1989)，1，1–41 10.1016/0022-4049(89)90160-6。[BO20] A. M. Bohmann 和 A. M. Osorno，《Segal 与 Waldhausen K-理论的乘法比较》，《数学杂志》**295** (2020)，3–4，1205–1243 10.1007/s00209-019-02394-7。[BF78] A. K. Bousfield 和 E. M. Friedlander，《Γ-空间、谱和双单纯集的同伦论》，《同伦论的几何应用》（会议论文集，伊利诺伊州埃文斯顿，1977），II，《数学讲义》，第 658 卷，施普林格，柏林，1978，第 80–130 页。[Day70] B. Day，《函子闭范畴》，《中西部范畴研讨会报告》，IV，《数学讲义》，第 137 卷，施普林格，柏林，1970，第 1–38 页。doi:10.1007/BFb0060437。[Elm∞] A. D. Elmendorf，《Mandell 逆 K-理论中的乘法性》，已提交。arXiv:2110.07512。[EM06] A. D. Elmendorf 和 M. A. Mandell，《无穷循环空间理论中的环、模与代数》，《数学进展》**205** (2006)，1，163–228 10.1016/j.aim.2005.07.007。[EM09] ———，《置换范畴、多范畴与代数 K 理论》，《代数与几何拓扑》**9** (2009)，4，2391–2441 10.2140/agt.2009.9.2391。[Fre17] B. Fresse，《歌剧与 Grothendieck-Teichmüller 群的同伦。第1部分：代数理论及其拓扑背景》，《数学调查与专著》，第 217 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。[GJO17] N. Gurski、N. Johnson 和 A. M. Osorno，《2-范畴的 K-理论》，《数学进展》322 (2017)，378–472 10.1016/j.aim.2017.10.011。[Her04] C. Hermida，《抽象多范畴的纤维化》，《伽罗瓦理论、霍普夫代数与半阿贝尔范畴》，Fields Institute 通讯，第 43 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004，第 281–293 10.1090/fic/043 页。[JY∞a] N. Johnson 和 D. Yau，《双幺半范畴、E_n-幺半范畴与代数 K 理论。第 III 卷：从范畴到结构化环谱》，可见 https://nilesjohnson.net/。[JY∞b] ———，《多范畴刻画所有连通谱》，即将发表于《同调、同伦与应用》。arXiv: 2111.08653。[JY21] ———，*2-维范畴*，牛津大学出版社，纽约，2021。doi: 10.1093/oso/9780198871378.001.0001。[JY22a] ———，《多范畴与置换范畴中的同伦等价代数结构》，《范畴论及其应用》38 (2022)，论文编号 30，1156–1208。[JY22b] ———，《多函子逆 K-理论》，《K-理论年刊》7 (2022)，第 3 期，507–548。doi:10.2140/akt.2022.7.507。[JY22c] ———，《多函子 K 理论是同伦论的等价》，《同伦及相关结构杂志》**17** (2022)，4，569–592 10.1007/s40062-022-00317-8。[JS93] A. Joyal 和 R. Street，《辫张量范畴》，《数学进展》(1993)，第 1 期，20–78。doi:10.1006/aima.1993.1055

[Kel74] G. M. Kelly, 《松弛代数与分配律的相干定理》, 《范畴研讨会》（研讨会论文集，悉尼，1972/1973），《数学讲义》第 420 卷，1974 年，第 281–375 页。[Kel05] ———, 《富范畴论基本概念》, 《表示论与范畴应用》（2005），第 10 期，vi+137，重印 1982 年版（剑桥大学出版社，剑桥）。[Lam69] J. Lambek, 《演绎系统与范畴 II：标准构造与闭范畴》, 《范畴论、同调理论及其应用》I（巴特尔研究所会议，西雅图，华盛顿州，1968 年，第一卷），施普林格出版社，柏林，1969 年，第 76–122 页。[Lap72a] M. L. Laplaza, 《分配律的相干性》, 载于《范畴中的相干性》, 《数学讲义》第 281 卷，施普林格出版社，柏林-海德堡，1972 年，第 29–65 页。[Lap72b] ———, 《分配律相干性的新结果》, 载于《范畴中的相干性》, 《数学讲义》第 281 卷，施普林格出版社，柏林-海德堡，1972 年，第 214–235 页。[ML69] S. Mac Lane, 《作为范畴论基础的单一宇宙》, 《中西部范畴研讨会报告》III, 《数学讲义》第 106 卷，施普林格出版社，柏林，1969 年，第 192–200 页。[ML98] ———, 《工作数学家的范畴论》, 第二版, 《数学研究生教材》第 5 卷，施普林格出版社，纽约，1998 年。[Man10] M. A. Mandell, 《一个逆 K-理论函子》, 《数学文献》15（2010），765–791。[May78] J. P. May, 《与置换范畴相关的谱》, 《拓扑学》17（1978），第 3 期，225–228。doi:10.1016/0040-9383(78)90027-7[MV20] J. Moeller 和 C. Vasilakopoulou, 《幺半格罗滕迪克构造》, 《范畴论及其应用》35（2020），第 31 篇，1159–1207。[Pow89] A. J. Power, 《一般相干性结果》, 《纯粹与应用代数杂志》57（1989），第 2 期，165–173。doi:10.1016/0022-4049(89)90113-8[Qui73] D. G. Quillen, 《高阶代数 K 理论 I：高阶 K 理论》, 巴特尔纪念研究所会议论文集，西雅图，华盛顿州，（1972），《数学讲义》第 341 卷，1973 年，第 85–147 页。[Seg74] G. Segal, 《范畴与上同调理论》, 《拓扑学》13（1974），293–312。doi:10.1016/0040-9383(74)90022-6[Shu08] M. Shulman, 《框架双范畴与幺半纤维化》, 《范畴论及其应用》20（2008），第 18 期，650–738。[Tho95] R. W. Thomason, 《对称幺半范畴为所有连通谱建模》, 《范畴论及其应用》1（1995），第 5 期，78–118。[Wal85] F. Waldhausen, 《空间的代数 K 理论》, 《代数与几何拓扑学》（新不伦瑞克，新泽西州，1983），《数学讲义》第 1126 卷，施普林格出版社，柏林，1985 年，第 318–419 页。doi:10.1007/BFb0074449[Yau∞I] D. Yau, 《双幺半范畴、E_n-幺半范畴与代数 K 理论。第一卷：对称双幺半范畴与幺半双范畴》, 见 https://u.osu.edu/yau.22/main/。[Yau∞II] ———, 《双幺半范畴、E_n-幺半范畴与代数 K-理论。第二卷：带应用的辫编双幺半范畴》, 见 https://u.osu.edu/yau.22/main/。[Yau16] ———, 《带色歌剧》, 《数学研究生教材》第 170 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016 年。[Yau20] ———, 《对合范畴论》, 《数学讲义》第 2279 卷，施普林格出版社，查姆，2020 年。doi:10.1007/978-3-030-61203-0[Yau22] ———, 《无穷歌剧与具有群等变性的幺半范畴》, 新加坡：世界科学出版社，2022 年。doi:10.1142/12687

主要事实一览

第 1 章。富化范畴与二范畴预备知识 (1.1.5) 每个幺半范畴都满足 $\lambda_1 = \rho_1$。(1.1.6) 每个幺半范畴都满足左、右单位元公理。(1.1.10) 每个辫编织幺半范畴都满足 $\rho = \lambda\xi_{-,\,1}$ 且满足 $\lambda = \rho\xi_{1,\,-}$(1.1.13) 对称幺半范畴恰好是满足对称公理的辫编织幺半范畴。(1.1.16) Cat 是对称幺半闭范畴。(1.3.2) Cat 是一个 2-范畴。(1.3.3) V-Cat 是一个 2-范畴。(1.3.4) 局部小 2-范畴恰好是 Cat-范畴。(1.4.14) 图表范畴 D-V 是对称幺半闭的。(1.4.16) D-V 在 V 上富集、张量化且余张量化。

第2章。对称双幺半范畴与双置换范畴
(2.1.28) 在对称双幺半范畴中，24 条公理中的 12 条可由其余 12 条推出。(2.2.16) 紧双置换范畴与具有置换加法结构、置换乘法结构、$\lambda^{\bullet} = 1$ 和 $\rho^{\bullet} = 1$ 的紧对称双幺半范畴之间存在典范双射。(2.3.2) 存在一个小紧双置换范畴 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$，其对象为$n$ 个$n \geq 0$ 的无基点有限集，态射为函数。(2.3.11) 存在一个小紧双置换范畴 Σ，其对象与 $\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$ 相同，态射为置换。(2.3.12) 存在一个小紧双置换范畴 F，其对象为n个$n \geq 0$ 的带基点有限集，态射为带基点函数。(2.3.17) Mandell 的逆K-理论范畴 A 是一个小紧双置换范畴。(2.4.18) 在对称双幺半范畴 C 中，若每条 δ-素边的值都是单态射，则 Gr(X) 中任意两条具有正则定义域的平行路径在 C 中的值相同。(2.4.19) Laplaza 相干定理 2.4.18 适用于紧双置换范畴。

第 3 章. 富集多范畴与多重等价
(3.1.15) 终端多范畴 T 由一个对象以及每个 n 对应的一个 n 元运算组成。(3.1.16) V-多范畴中的每个对象都有一个自同态 V-歌剧。(3.1.17) 每个置换范畴都有一个自同态多范畴。(3.1.18) 每个 V-多范畴都有一个底层 V-范畴。

(3.2.10) 存在一个以小 V-多范畴为对象的 2-范畴。(3.2.11) V-Multicat 和 V-Multicat^{ns} 是完备且余完备的。(3.2.12) 初始 V-多范畴的对象集为空。终端 V-多范畴只有一个对象，且每个多态射对象都是 V 中的终对象。(3.2.15) Cat-多自然变换由满足两个 Cat-自然性条件的分量一元 1-胞组成，这两个条件分别针对对象和态射。(3.3.4) 每个 Cat-多重等价在对象上本质满，并且在每个多态射范畴上都是同构。(3.4.21) Cat-多函子是 Cat-多重等价，当且仅当它在对象上本质满，并且在每个多态射范畴上都是同构。(3.4.22) 两个 2-范畴之间的 2-函子是 2-等价，当且仅当它在对象上本质满，并且在每个同态范畴上都是同构。

第 4 章。伪对称性

(4.1.1) 伪对称 Cat-多函子严格保持带色单位和复合，并具有满足四个相容性公理的伪对称同构。(4.1.7) Cat-多函子与具有恒等伪对称同构的伪对称 Cat-多函子之间存在一个典范双射。(4.1.8) 伪对称 Cat-多函子产生一个非对称 Cat-多函子。(4.1.16) 伪对称 Cat-多函子在复合下闭合，而复合满足结合律并具有单位元。(4.2.1) 伪对称 Cat-多自然变换满足两个 Cat-自然性条件和伪对称性保持公理。(4.2.10) 对于伪对称 Cat-多自然变换，恒等变换和垂直复合是良定义的。(4.2.11) 伪对称 Cat-多自然变换在水平复合下闭合。(4.2.16) 存在一个 2-范畴 Cat-Multicat^{ps}，其对象为小 Cat-多范畴，1-胞为伪对称 Cat-多函子，2-胞为伪对称 Cat-多自然变换。(4.3.6) 每个伪对称 Cat-多重等价在对象上本质满，并且在每个多态射范畴上都是同构。(4.3.28) 伪对称 Cat-多函子是伪对称 Cat-多重等价，当且仅当它在对象上本质满，并且在每个多态射范畴上都是同构。

第5章。富化的指标范畴多重范畴

(5.1.1) D-V 是一个 V-多范畴。(5.2.12) 加性自然变换是满足单位公理和可加性公理的自然变换。(5.2.25) 加性修正是满足单位公理和可加性公理的修正。(5.2.33) DCat(X; Z) 是 D$^{\otimes}$-Cat(X; Z) 的子范畴。(5.3.4) DCat 不是对称幺半范畴。(5.3.11) DCat 是一个 Cat-多范畴。(5.3.12) 存在一个遗忘 Cat-多函子 DCat D$^{\otimes}$-Cat。

第6章。

格罗滕迪克构造是一个伪对称 Cat-多函子 (6.1.13) 1-线性函子恰好是严格幺对称幺半函子。(6.1.14) 紧双置换范畴中的乘法结构，相对于加法结构而言，是一个强n-线性函子。(6.1.31) PermCat 和 $\mathbf{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 是 Cat-多范畴。(6.2.4) 指标范畴的格罗滕迪克构造是一个范畴。(6.2.10) 到 Cat 的对称幺半函子的格罗滕迪克构造是一个置换范畴。(6.3.15) 加性自然变换的格罗滕迪克构造是一个强n-线性函子。(6.4.7) 加性修正的格罗滕迪克构造是一个n-线性自然变换。(6.4.9) 格罗滕迪克构造定义了一个从 $\mathbf{DCat}(X; Z)$ 到 $\mathbf{PermCat}_{\mathrm{sg}}(\int_{\mathcal{D}} X;\ \int_{\mathcal{D}} Z)$ 的函子。(6.5.1) 格罗滕迪克构造保持带色单位。(6.5.2) 格罗滕迪克构造保持复合。(6.6.16) 格罗滕迪克构造具有伪对称同构。(6.7.8) 格罗滕迪克构造 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个从 DCat 到 $\mathbf{PermCat}_{\mathrm{sg}}$ 的伪对称 Cat-多函子。如果 D 中的乘法编织是恒等，则它是一个 Cat-多函子。反过来，如果 $\int_{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多函子，那么对于 D 中所有对象 x、$y \in$，都有 $x \otimes y = y \otimes x$。

第 7 章 . 由双置换指标范畴导出的置换余纤维化

(7.1.5) 置换余纤维化是具有额外性质但没有额外结构的分裂余纤维化。(7.2.9 (1)) 余笛卡尔n-线性函子是具有额外性质但没有额外结构的n-线性函子。(7.2.9 (2)) 余笛卡尔 0-线性函子是P_0-原像中的一个对象 $1 \in \mathbf{D}$。(7.2.12) 在余笛卡尔n-线性函子的定义中，公理 (i) 可由公理 (iii) 推出。(7.2.15) 余笛卡尔 1-线性函子F 恰好是满足$P_1 = P_0F$ 并保留选定的余笛卡尔提升的严格对称幺半函子。(7.2.16) 小紧双置换范畴的乘法结构定义了一个余笛卡儿强n-线性函子。(7.2.21 (1)) 余笛卡尔n-线性变换是具有额外性质但没有额外结构的n-线性自然变换。(7.2.21 (2)) 余笛卡尔 0-线性变换是P_0-原像中的一个态射 $1 \in \mathbf{D}$。(7.2.26) $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}(P; P_0)$ 是 $\mathbf{PermCat}_{\mathrm{sg}}(\mathbf{C}; \mathbf{C}_0)$ 的一个子范畴。(7.3.2) $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的复合在余笛卡儿强多线性函子上良定义。(7.3.7) $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的复合在余笛卡尔多重线性变换上良定义。(7.3.9) 若 D 中的乘法编织是恒等，则 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡儿强多线性函子上良定义。反过来，若 $\mathbf{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡儿强多线性函子上良定义，则 D 中的 $\otimes = \otimes^{\mathrm{op}}$。

(7.3.13) 若 D 中的乘法编织是恒等，则 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡尔多重线性变换上良定义。反过来，若 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 中的对称群作用在余笛卡尔多重线性变换上良定义，则 D 中的 $\otimes = \otimes^{\mathrm{op}}$。

(7.3.16)$\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多范畴。如果 D 中的乘法编织是恒等的，那么 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多范畴。反过来，如果 $\mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个 Cat-多范畴，那么 $\otimes = \otimes^{\mathrm{op}}$ 在 D 中。

(7.3.17) 存在一个非对称 Cat-多函子 $\mathrm{U} : \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}} \mathrm{PermCat}_{\mathrm{sg}}$。如果 D 中的乘法编织是恒等的，那么 U 是一个 Cat-多函子。(7.4.1) 第一因子投影是 D 上的一个小置换余纤维化。(7.4.6) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}(\ ; Z)\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(\ ; U_Z)$ 是一个同构。(7.4.7) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}(X\ ; Z)\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(U_X\ ; U_Z)$ 是一个函子。(7.4.9) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多函子；此外，如果 D 中的乘法编织是恒等的，它还是一个 Cat-多函子。

第8章。格罗滕迪克构造是一个 Cat-多重等价

(8.1.8) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 在对象上本质满。(8.2.3) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}(X; Z)\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(U_X; U_Z)$ 在对象上是单射。(8.2.11) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}(X; Z)\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(U_X; U_Z)$ 在态射集上是单射。(8.3.26) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}(X; Z)\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(U_X; U_Z)$ 在对象上是满射。(8.4.16) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}(X; Z)\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}(U_X; U_Z)$ 在态射集上是满射。(8.4.17) $\int_{\mathcal{D}} : \mathrm{DCat}\ \mathrm{PFib}^{\mathcal{D}}$ 是一个非对称 Cat-多重等价。如果 D 中的乘法编织是恒等态射，它就是一个 Cat-多重等价。

第9章。Cat-多函子 A

(9.1.7) Cat_* 是一个完备且余完备的对称幺半闭范畴。(9.1.11) Γ-Cat 是带基点函子 (F, 0) (Cat, **1**) 以及带基点自然变换所成的范畴。(9.1.13) 每个 Γ-范畴都规范地对应于一个带基点函子 (F, 0) (Cat_*, **1**)。(9.1.23) Γ-Cat 是完备、余完备且对称幺半闭的。它是关于 Cat_* 丰富化的、张量化的并且余张量化的。它是一个 Cat_*-多范畴。(9.1.24) 幺半单位图表 J 满足 $Jn \cong n$。(9.2.2) Γ-Cat 的多态射范畴由 $\mathrm{Map}_*(\bigwedge_j Xj\ , Z)$ 给出。(9.2.7 和 9.2.9) Γ-Cat(; Z) 中的对象和态射由它们在 $1 \in \underline{1}$ 处的值决定。(9.2.23) Γ-Cat 中的对称群作用对应于置换定义域因子。(9.2.29) Γ-Cat 中的复合由带基点的 Day 卷积积以及 Map_* 中的复合给出。(9.3.7) 每个 Γ-范畴 X 都产生一个严格保单位的强对称幺半函子 AX :A Cat。(9.3.14) 每个 Γ-范畴态射 F 都产生一个幺半自然变换AF。(9.3.15) Cat-多范畴的底层范畴具有与态射相同的对象和一元 1-胞。(9.3.20) A : Γ-Cat ACat 是一个函子。(9.4.5) A : Γ-Cat(; Z) $\cong$ ACat(; AZ) 是一个同构。

(9.4.30) A ：Γ-Cat$(\langle X\rangle; Z)$ $\mathcal{A}$Cat$\big(\langle AX\rangle; AZ\big)$ 是一个在对象和态射集上均为单射的函子。(9.5.1) A 保留对称群作用。(9.5.5) A 保留多范畴复合。(9.5.9) A ：Γ-Cat $\mathcal{A}$Cat 是一个Cat-多函子。

$\longrightarrow$

第10章 逆 K-理论是伪对称 Cat-多函子 (10.1.3) 逆 K-理论函子 P 是复合 $\int_{\mathcal{A}}\bigcirc$ A。(10.2.1) P 可扩展为伪对称 Cat-多函子 $\int_{\mathcal{A}}\bigcirc$A，但它不是 Cat-多函子。作为非对称 Cat-多函子，P 可分解为 U $\bigcirc$ $\int_{\mathcal{A}}\bigcirc$A。(10.2.4) P 保持由非对称 Cat-多函子参数化的代数结构。(10.2.6) P 将 Γ-Cat 中的幺半群映为小紧环范畴。(10.2.8) P 保持由伪对称 Cat-多函子参数化的代数结构。(10.3.9) 一般而言，$\mathrm{P}(-)^{\sigma}$ 和$(\mathrm{P}(-))^{\sigma}$ 在对象上不同。(10.3.11) 伪对称同构 P_{σ} 是恒等，当且仅当 σ 是恒等置换。(10.4.1) E_{∞}-代数是从 Barratt-Eccles 运算子 $\mathrm{E}\Sigma_{*}$出发的 Cat-多函子。(10.4.5) Cat-多范畴中的 E_{∞}-代数由一个对象、一个0元1-胞腔、一个二元 1-胞 μ以及一个二元 2-胞同构 $\mu \xrightarrow{\cong} \mu\mathrm{op}$ 唯一确定，并满足若干公理。(10.4.11) 每个 E_{∞}-代数都有一个底层幺半群。(10.4.12) Cat、PermCat 和 PermCatsg 中的 E_{∞}-代数分别是小置换范畴和小（紧）双置换范畴。(10.5.1) 伪对称 E_{∞}-代数是从 $\mathrm{E}\Sigma_{*}$出发的伪对称 Cat-多函子。(10.5.2) P 保持伪对称 E_{∞}-代数。(10.5.4) 伪对称 E_{∞}-代数由一个对象、对每个置换 σ一个 n元1-胞 μ_{σ}，以及对每一对置换 (σ, τ) 一个可逆 n 元 2-胞 $\mu_{\sigma}^{\tau} : \mu_{\sigma} \xrightarrow{\cong} \mu_{\tau}$ 和 $\mathrm{F}_{\sigma;\tau}$ ：$\mu_{\tau\sigma} \xrightarrow{\cong} \mu_{\tau}\cdot\sigma$ 构成，并满足若干公理。

符号列表

标准符号	描述
Ob(C), Ob C	范畴 C 中的对象
C(*X*,*Y*), C(*X*;*Y*)	态射集合 $X\ Y$ $\longrightarrow$
1_X	恒等态射
$g \circ f$, gf	态射复合
$\cong$, $\xrightarrow{\cong}$	一个同构
$F : \mathrm{C} \to$	一个函子
$\mathrm{Id_C}$, 1_C	恒等函子 终端范
1	畴
(Set, $\times, *$)	集合与函数范畴
θ_X	自然变换的一个分量 θ
1_F	恒等自然变换
$\phi\theta$	自然变换的垂直复合
$\theta' * \theta$	自然变换的水平复合
$(L, R, \phi), L \dashv R$	一个伴随
η, ε	伴随的单位与余单位
$\varnothing, \varnothing_\mathrm{C}$	一个始对象
$\coprod, \amalg$	一个余积
$\prod, \Pi$	一个积
Σ_n	作用于n 个字母的对称群

第 1 章	Page	描述
$\mathcal{U}$	4	一个格罗滕迪克宇宙
$\otimes$	4	幺半积 幺半单位
1	4	
α	4	结合律同构
λ, ρ	4	单位同构
(X, μ, η)	5	幺半群
ξ	6	对称约同构或编织
$\oplus, e$	7	置换范畴中的幺半积和幺半单位
$[-,-]$, 同态$(-,-)$	7	内 Hom
$\mathcal{D}$-C	7	图表范畴
(Cat, $\times$, **1**, $[,]$)	7	小范畴范畴
(F, F^2, F^0)	7	幺半函子
$\Rightarrow$	9	自然变换
m	9	V-范畴中的复合
i_X	9	V-范畴中的恒等态射
$\mathrm{C} \otimes \mathrm{D}$	11	V-范畴的张量积
ξ_{mid}	11	交换中间两个因子
B_0,B_1, B_2	11	2-范畴 B 中的对象、1-胞和 2-胞

$\alpha' \alpha$	12	2-胞的垂直复合
gf	12	1-胞的水平复合
$\beta * \alpha$	12	2-胞的水平复合
$\mathrm{B}(X, Y)$	12	一个同态范畴
Φ_X	14	修正的分量2-胞 Φ
$\Psi\Phi$	15	修正的垂直复合
$\Phi' * \Phi$	15	修正的水平复合
$(f, g, \eta, \varepsilon)$	15	2-范畴中的一个伴随
$X \otimes Y$	16	Day 卷积
$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}$	17	Hom 图表
J	17	单位图表
$X \otimes A$	18	张量结构的对象
X^A	19	余张量结构的对象
ev_e	19	在 e 处求值

第2章

Page	描述
$\mathsf{C}^{\oplus}$	24	对称双幺半范畴的加法结构
$\mathsf{C}^{\otimes}$	24	对称双幺半范畴的乘法结构
$\lambda^{\bullet}, \rho^{\bullet}$	24	乘法零元
δ^l, δ^r	25	分配态射
$\mathsf{C}^{\oplus}, (\mathsf{C}, \oplus, 0, \zeta^{\oplus})$	29	环范畴的加法结构
$\mathsf{C}^{\otimes}, (\mathsf{C}, \otimes, 1)$	29	环范畴的乘法结构
∂^l, ∂^r	29	环范畴中的分解态射
$\mathsf{C}^{\otimes}, (\mathsf{C}, \otimes, 1, \zeta^{\otimes})$	31	双置换范畴的乘法结构
$\mathrm{Fin}^{\mathrm{sk}}$	33	有限集与函数的双置换范畴 $\underline{n}$
$\overline{n}$	33	无基点有限集 $\{1, \ldots, n\}$，其中 $\overline{0} = \varnothing$
Σ	35	置换的双对称幺半范畴
$\mathcal{F}$	35	带基点有限集与带基点函数的双置换范畴 $\underline{\underline{n}}$
$\underline{n}$	36	带基点有限集 $\{0, \ldots, n\}$
$\mathcal{A}$	37	用于逆 K 理论的双置换范畴
$,\ \varnothing$	37	空序列
$\mathtt{m}$	37	$m_1 + \cdots + m_p$
$x_i \ {}_{i=1}^{p}$	38	$(x_1, \ldots, x_p)$
$\mathrm{Gr}_{\mathrm{el}}(X)$	40	初等图
$\mathrm{Eel}(X)$	41	初等边集合
$\mathrm{Efrel}(X)$	41	$\mathrm{E}_{\mathrm{el}}(X)$ 上的自由 $\{\oplus, \otimes\}$-代数
$\mathrm{Epr}(X)$	42	素边集合
$\mathrm{Gr}(X)$	42	X 的图
X^{st}	43	X 的严格 $\{\oplus, \otimes\}$-代数
supp	43	支撑

第 3 章

Page	描述
$\mathrm{Prof}(D)$	46	D-轮廓的类
$d = (d_1, \ldots, d_n)$	46	长度为 n 的 D-轮廓
$\oplus$	46	剖面的连接
$(d;\ d')$	46	$\mathrm{Prof}(D)$ 中的一个元素 $\times D$
$\mathrm{M}(x\,;x')$	46	n元运算对象
$\langle x \rangle \sigma$	46	由 σ 给出的右对称群作用
1_x	46	x色带色单位
γ	46	V-多范畴中的复合
$\sigma k^{\sigma(1)}, \ldots, k^{\sigma(n)}$	48	σ 诱导的块置换
$\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$	48	块和

M_n	48	n元 V-幺半群的运算对象
T	49	终端多范畴
端(x)	49	对象 x 的自同态 V-歌剧
End(C)	49	置换范畴的自同态多范畴
V-Multicat	52	小 V-多范畴的 2-范畴
V-Multicat^{ns}	52	小非对称 V-多范畴的 2-范畴
T	52	V 中的终对象
$\langle x\rangle \longrightarrow y$	53	一个n元 1-胞
$\Rightarrow$	53	一个n元 2-胞
$F\langle c\rangle$	53	$(Fc_1,\ldots,Fc_k)$
$\theta_{\langle c\rangle}$	53	$(\theta_{c_1},\ldots,\theta_{c_k})$
$1_{\theta_{\langle c\rangle}}$	54	$(1_{\theta_{c_1}},\ldots,1_{\theta_{c_k}})$
Cat-Multicat	55	小 Cat-多范畴的 2-范畴
Cat-Multicat^{ns}	55	Cat-Multicat 的非对称变体

第 4 章

Page	描述
68	一个伪对称 Cat-多函子
69	一个伪对称同构
69	块置换 $\sigma k^{\sigma(1)},\ldots,k^{\sigma(n)}$
70	块和 $\tau_1\times\cdots\times\tau_n$
70	p-分量 F_σ
71	右 σ作用
72	GF的伪对称同构
77	Cat-Multicat 的伪对称变体
78	Cat-Multicat 的松对称变体

第5章

Page	描述
91	D-置换范畴所对应的 D-指标范畴的 Cat-多范畴
94	$a_{\sigma^{-1}(j)}{}_{j=1}^{n}$
94	$\otimes_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)}$
97	一个加性对称幺半函子
97	一个加性对称幺半函子的单位对象
98	幺半约束的 (a,b)-分量 X^2
100	将和分配的 Laplaza 相干同构
100	除一个因子外，其余因子上的对角映射，随后接一个转置置换
104	加性对称幺半函子的 Cat-多范畴
103	D$^{\otimes}$-Cat$(X;\ Z)$ 的一个子范畴
104	$Z1$
110	遗忘 Cat-多函子 DCat D$^{\otimes}$-Cat $\longrightarrow$

第6章

Page	描述
114	x，其第i个条目替换为x_i'
114	$x\bigcirc_i x_i'$，其第 ℓ个条目替换为x_ℓ'
114	n 线性函子
114	j 阶线性约束 F
117	n 线性函子与自然变换构成的范畴
117	PermCat 的强变体(C ; D)
117	D
117	D
120	小型置换范畴的 Cat-多重范畴
120	PermCat 的强变体
120	函子的格罗滕迪克构造 X : D $\longrightarrow$ Cat

$(0, X^0 *)$ 121		$\int_{\mathcal{D}} X$的幺半单位
$\square$	121	$\int_{\mathcal{D}} X$的幺半积
$\beta^{\square}$	122	$\int_{\mathcal{D}} X$的编织
$\int_{\mathcal{D}} \phi$	124	加性自然变换的格罗滕迪克构造
$(\int_{\mathcal{D}} \phi)_i^2$	126	$\int_{\mathcal{D}} \phi$ 的第i个线性约束
$\int_{\mathcal{D}} \Phi$	130	加性修正的格罗滕迪克构造
$(\int_{\mathcal{D}})_\sigma$	137	$\int_{\mathcal{D}}$ 的一个伪对称同构
$(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi,}(\int_{\mathcal{D}})_{\sigma,\phi,\langle(a_j,x_l)}$ 138		$(\int_{\mathcal{D}})_\sigma$ 的分量
$\int_{\mathcal{D}}$	145	伪对称 Cat-多函子 $\mathcal{D}$Cat PermCat$_{sg}$ $\longrightarrow$

第 7 章

Page	描述
151	一个前提升，其对象为 y，态射为 f
151	前提升 $y; f$ 的提升
152	一个前提升
152	前提升 $g, h; f$ 的提升
153	P :E B 的对偶函子 $\longrightarrow$
156	一个余笛卡尔的n线性函子
161	PermCat$_{sg}$(C ; C_0) 的一个子范畴
163	D 上小置换余纤维化的 ns Cat-多重范畴
166	反向幺半群积
169	非对称 Cat-多函子PFib$^{\mathcal{D}}$ PermCat$_{sg}$ $\longrightarrow$
170	第一因子投影 $\int_{\mathcal{D}} X$ D $\longrightarrow$
171	$\int_{\mathcal{D}} X_j \ {}_{j=1}^{n}$
171	$U_{X_j} \ {}_{j=1}^{n}$
174	非对称 Cat-多函子DCat PFib$^{\mathcal{D}}$ $\longrightarrow$

第8章

Page	描述
179	原像子范畴
189	F 的第二个元素(a_j, x_j)
189	F 中的第二个元素$F(1_{a_j}, p_j)$

第9章

Page	描述
206	一个以 $\iota : \mathbf{1}$ 为基点的带基点范畴 C $\longrightarrow$ C
207	小带基点范畴与带基点函子的范畴
207	楔积单位 $\mathbf{1} \coprod \mathbf{1}$
207	楔和
207	楔积
207	范畴 C $\times$D 的泛箭头 $\longrightarrow$ 范畴 C $\wedge$D
207	带基点图表范畴
208	非零态射集合 m $_ \longrightarrow \underline{n}$ 属于$\mathcal{F}$
209	带基点图表范畴 [F, Cat]$_*$
209	唯一的带基点函数 0 $_ \longrightarrow \underline{n}$
209	具有同态对象的 Cat$_*$-范畴 $\widehat{\mathrm{F}}(\underline{m}; \underline{n})$
209	带基点范畴 $\bigvee_{\mathcal{F}^\flat(m;n)} E _ _$
210	带基点的 Day 卷积
210	幺半单位图表 $\widehat{\mathrm{F}}(\underline{1}; -)$
210	带基点的同态图表
210	带基点的 Day 卷积的编织
210	在 1 处的求值及其左伴随
211	带基点的映射对象
213	Γ-Cat 的多态射范畴
213	态射 1 $_ \longrightarrow \underline{n}$ 在 F 中，其中 $\nu_j(1) = j$

AX	218	函子 A ⟶ 与 Γ-范畴 X 相关联的 Cat
$(AX)(m)$	218	$\prod_{i=1}^{p} X\underline{m_i}$
ϕ_*	218	$(AX)(\phi)$
$\phi_{i,j}$	219	由 ϕ 诱导的带基点函数
$(AX, (AX)^2, (AX)^0)$	219	AX的严格幺元强对称幺半结构
AF	220	与F相关联的幺半自然变换
$(AF)_m$	220	$\prod_{i=1}^{p} F_{\underline{m_i}}$
A	222	函子 Γ-Cat ⟶ 底层范畴的 ACat
m^j	224	$\left\langle m^j_{i_j} \right\rangle_{i_j=1}^{r_j}$
$m^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_n}$	224	$\Pi_{j=1}^{n} m^{\ }_{i_j}$
$m^{1,\dots,n}$	224	$\otimes_{j=1}^{n} m^j$
$\langle m \rangle$	225	$m^{j\ }_{j=1}$
$(AF)\langle m \rangle$	225	m-AF的分量函子
$\mathsf{pr}_?$	225	坐标投影
x^j	226	$\left\langle x^j_{i_j} \right\rangle_{i_j=1}^{r_j}$
$A\theta$	227	与 θ 相关联的加性修正
$\langle A\theta \rangle \langle m \rangle$	227	m-$A\theta$ 的分量自然变换
A	231	Cat-多函子 Γ-Cat ⟶ $\mathcal{A}$Cat

第10章	Page	描述
$\mathcal{P}$	235	逆K理论函子 $\int_{\mathcal{A}} \bigcirc A$
$\mathcal{P}X$	236	Γ-范畴 X的逆K理论
$(, *)$	236	PX中的幺半单位
$\square$	236	PX中的幺半积
$\beta^{\square}$	237	PX中的编织
$\mathcal{P}F$	237	Γ-范畴态射F的逆K-理论
$\mathcal{P}$	239	伪对称 Cat-多函子性的逆K-理论
$\mathsf{As}^{\mathsf{ns}}$	240	非对称结合幺半群
As	240	结合算子
$\mathcal{P}\theta$	243	带基点修正 θ的逆K-理论
$E\Sigma_*$	246	Barratt-Eccles 运算子
$\widetilde{\sigma}$	247	由 σ 诱导的块置换
$(1, 2)$	247	Σ_2 中的非恒等置换
$(X, 1, \mu, \xi)$	248	Γ-Cat 中的一个 E_∞-代数
$(X, \{\mu_\sigma\}, \{\mu^\tau_\sigma\}, \{F_\sigma\})$	254	在 Γ-Cat 中的伪对称 E_∞-代数
$(\mathsf{C}, \{\mu_\sigma\}, \{\mu^\tau_\sigma\}, \{F_\sigma\})$	257	在 PermCat 中的伪对称 E_∞-代数

索引

0-线性函子，115 余笛卡尔，157 0-线性自然变换，117 1-范畴，5 底层，12 1-胞，11n元，53 1-线性函子，116 恒等，115 余笛卡尔，159 2×2 多线性函子约束，115 2×2 分解公理，31 2-范畴，11 伴随等价，16 伴随，15 等价，15 松弛对称 Cat-多函子的，78 伪对称 Cat-多函子的，77 小范畴的，12 小富化范畴的，12 小富化多范畴的，52 2-胞，11n元，53 记号，9 2-等价，16 刻画，65 2-函子，13 2-单子，153，263 2-自然同构，14 变换，14 零, 28, 40 加法编织, 29 加法结构环范畴, 29 对称双幺半范畴, 24 加法零元, 29 可加性公理 加性修改, 102 加性自然变换, 100 伴随2-等价, 16 伴随 Cat-多重等价, 55 伴随等价 2-范畴, 16 伴随伪对称 Cat-多重等价, 79 伴随 2-范畴, 15 代数 自由, 40 严格, 43 结合算子, 240 结合律 富化范畴, 10 富集多范畴, 47 多线性函子约束, 115 结合同构, 4 加性, 28 乘法, 28 宇宙公理, 4**B**Barratt-Eccles 运算子, 246 相干性, 247 基范畴 , 152 基点 , 206 双范畴相干定理, 263 粘贴定理, 263 奎伦定理 A, 263 怀特海德定理, 263 米田引理, 91, 263 双范畴, 263 多重的, 263 双幺半范畴 对称, 24 双置换范畴, 31

A

加法结合同构，28 编织，28 左 - 零，28 修正，102A，227 格罗滕迪克构造，130 自然变换，99A，225 格罗滕迪克构造，124 右 - 零，28 对称幺半函子，97

相干性, 44E_∞-代数, 248 有限集, 33 格罗滕迪克构造, 145, 174 逆K-理论, 37 乘法结构, 31 带基点有限集 , 35 小 , 31 对称群 , 35 紧 , 31 紧对称双幺半范畴, 32 块置换, 48 和, 48 块交换, 33 底部等变富集多范畴, 48 底部等变公理, 70 辫编织幺半范畴, 6 单位性质, 6 辫编织幺半函子, 8 编织, 6 加性, 28 Day 卷积, 17 乘法, 28, 31 带基点的 Day 卷积, 210 编织公理, 154 编织分解公理, 30

C

笛卡尔函子，155 图表的 Cat-多范畴，91，110 Γ-范畴的，213 置换范畴的，120 Cat-多重等价，55 刻画，64 全局的，265 格罗滕迪克构造，200 性质，55 Cat-多函子A，228Γ-范畴，231 伪对称，68，264 格罗滕迪克构造，145 Cat-多自然同构，54 变换，53 Cat-自然性条件，53 范畴 2-，11 基底，152 双置换的，31 编织幺半，6 闭，7 余纤维化，153 图表，7 富集，9 富集多重-，46Γ-，209 指标化，7 幺半，4 多态射，53 小范畴的，7 置换的，7 带基点的，206 环，29 对称双幺半，24 对称幺半，6 总，152 底层，221 选定的余笛卡尔提升，152 劈裂，152 闭范畴，7 劈裂余纤维化，152 路径的陪域，40 边的，40，41 余端，210 余纤维化范畴，153 带色单位，46 分量，10 复合 富化范畴，9 富化函子，10 富化多函子，50 多范畴，46 置换范畴，118 伪对称 Cat-多函子，71 串接，46 约束 幺半，8 单位，7 约束 2×2 多线性函子，115 约束结合律 多线性函子，115 约束相容条件，117 约束提升公理，156 约束对称性 多线性函子，115 约束单位性 多线性函子，114 余张量化，19，211 余单位 伴随，15

D

Day 卷积，16 Hom 图表，17 带基点的，210，211 对称闭幺半，18 单位图表，17δ- 素边，44 图表

同态，17 单位，17 图表范畴，7 富集、张量化和余张量化，19 推广，264 多范畴结构，91，110 非对称多函子，174 非对称幺半，105 带基点的，207 底层范畴，221 路径定义域，40 边的定义域，40，41

E
边，40 初等的，41 恒等，41 素的，42E_∞-代数，247 相干性，247 在 Cat 中，248 在 Γ-Cat 中，248 在 PermCat 中，248 在 PermCat^{sg} 中，248 伪对称，252 在 Γ-Cat 中，254 在 PermCat 中，257 逆K-理论的保持，252 底层幺半群，248 初等边，41 图，40 空轮廓，46 自同态多范畴，49 歌剧，49 富化函子，10 多函子，49 多自然变换，50 自然变换，10 歌剧，48 富化范畴，9 小，10 张量积，11 富集多范畴的底层——，49 富集多范畴，46 2-范畴，52 图表范畴，91 始对象，52 终对象，52 底富集范畴，49 富集歌剧，48 态射，50 等价2-范畴，15 等变性 富集多范畴，48 富化多函子，50 本质满，53 在 1 处的求值，210 左伴随，210 外部分解公理，30

F纤维子范畴，179 第一因子投影，170 前提升，151 前提升，152 形式逆，41 自由代数，40 函子 2-，13A，218 笛卡尔的，155 富集，10 逆K-理论，235 幺半，7 多重的，49 多线性，114 带基点的，207**G**Γ-范畴，209 典范基点，209 Cat-多范畴，213 Cat-多函子，231E_∞-代数，248 逆K-理论，236 幺半群，240 幺半单位图表，210，211 态射，209 带基点的 Day 卷积，210，211 带基点的同态图表，210 带基点的映射对象，211，212 对称闭幺半，211 张量化和余张量化，211 终对象，238 底层范畴，221 图，40 初等的，40 态射，42 扩张，42 集合的，42 格罗滕迪克构造，120 零元多态射函子，123 加性修改，130 加性自然变换，12 双置换范畴，145，174 逆变的，120 本质满射性，181 推广，264 态射单射性，187

态射满射性，199
多线性自然变换，131；多态射函子，132；非对称 Cat-多重等价，200；对象单射性，186；对象满射性，194；置换范畴，122；伪对称 Cat-多函子，145；伪对称同构，137；分裂余纤维化，179；强多线性函子，126；对称幺半函子，121；Grothendieck 纤维化定理，153；Grothendieck 宇宙，4

H
六边形公理；Barratt-Eccles 运算子，248；六边形图，6，7；同态范畴；2-范畴，12；Hom 图表，17；带基点的，210；同对象，9；水平复合；2-范畴，12；2-自然变换，14；富化多自然变换，51；修正，15；伪对称 Cat-多自然变换，74

I
恒等变换；富化函子，10；恒等，41；1-线性函子，115；富化多函子，50；指标范畴，7；初始富化多范畴，52；输入型，46；内部分解公理，30；内 Hom，7；逆 K 理论；双置换范畴，37；函子，235；Γ-范畴，236；多函子变体，265；保持非对称代数，240；保持伪对称 E_∞-代数，252；保持伪对称代数，240；伪对称 Cat-多函子，239；环范畴，240

L
Laplaza 相干同构，126、135、156
Laplaza 公理，25
Laplaza 相干定理，44 松弛对称 Cat-多函子，78 2-范畴，78 松对称性，78 左加性零元，28 左伴随，15 左分配态射 对称双幺半范畴，25 左分解态射 环范畴，29 左乘法单位元，28 左乘法零元 对称双幺半范畴，24 左规范化，9 左单位同构，4 左单位元 富集多范畴，48 路径长度，40 轮廓长度，46 提升，151 余笛卡尔，152 线性约束，114 局部小，12

M
带基点的映射对象，211，212 修正，14，93 加性，102 公理，15，93 幺半群，5E_∞-代数，248Γ-范畴，240 幺半 1-范畴，5 幺半范畴，4 结合同构，4 编织，6 左单位同构，4 中间单位公理，5 幺半积，4 幺半单位，4 五边形公理，5 右单位同构，4 严格，5 对称，6 单位性质，5 幺半约束，8，98 幺半函子，7 编织，8 严格，8 严格保单位的，8 强，8 对称，8 幺半自然变换，8 幺半积公理，154 幺半单位图表Γ-范畴，210，211

单态射，44 态射富集幺半群，50Γ-范畴，209 图，42 非零，208 零，208 多双范畴，263 多范畴，48 复合，46 自同态，49 富集，46 2-范畴，52 小，48 非对称，48 图表的，110 置换范畴的，120 单对象，48 伪变体，263 终对象，49 多重等价 Cat-，55 格罗滕迪克构造，200 伪对称 Cat-，79 多函子，70 富集，49 非对称，50，169 伪对称，68 多线性函子，114 格罗滕迪克构造，126 余笛卡尔，多线性自然变换，117 格罗滕迪克构造，131 同构，117 余笛卡尔，多态射，46 多态射范畴，53 置换范畴，117 强变体，117 置换余纤维化，161 多态射函子A，222 格罗滕迪克构造，132 多自然同构 Cat-，54 伪对称 Cat-，74 多自然变换，75 Cat-，53 富集，50 恒等，51 非对称，51，75 伪对称 Cat-，73 乘法，5 乘法结合同构，28 编织，28 左单位，28 右单位，28

单位，28，40 乘法编织，31 分解公理，31 乘法结构 双置换范畴，31 环范畴，29 对称双幺半范畴，24 乘法单位元，29 乘法零元公理，29 乘法性，152

N

n元 1-胞，53 2-胞，53 运算对象，46n线性函子，114n线性自然变换，117 同构，117 余笛卡尔，160 自然同构 2-，14 自然变换，92 2-，14 加性，99 富集，10 富集多重的，50 幺半，8 多线性，117 带基点的，207 垂直，160 自然性图表，92 非对称结合幺半群，240 Cat-多重等价，265 逆 K理论，239 Cat-多函子逆 K理论，239 多范畴，48 置换余纤维化，169 多函子，50，70，169 格罗滕迪克构造，174 多自然变换，51，75 非零态射，208

O对象富集范畴，9 富集多范畴，46 同态，9 上笛卡尔 0-线性函子，157 变换，161 上笛卡尔 1-线性函子，159 余笛卡尔提升，152 选定的，152 余笛卡尔态射，152 余笛卡儿多重线性函子，157

变换，160 上笛卡尔 n-线性函子，156 强，157 上笛卡尔 n-线性变换，160 歌剧 Barratt-Eccles，246 相干性，247 自同态，49 富集，48 态射，50 余纤维化，152 带劈裂的，152 置换的，154 小，153 劈裂的，152 输出，46

P
粘贴图 多范畴的，54 路径，40，44 值，43 五边形公理，5 置换转置，34 置换范畴，7 Cat-多范畴，120 复合，118E_∞-代数，248 自同态多范畴，49 格罗滕迪克构造，122 多态射范畴，117 强变体，117 对称群作用，118 底层范畴，222 置换余纤维化，154，264 推广，264 多态射范畴，161 非对称多范畴，169 非对称多函子，174 底层范畴，221 带基点范畴，206 Day 卷积，210，211 编织，210 图表范畴，207 有限集，36 函数，36 函子，207 Hom 图表，210 映射对象，211，212 自然变换，207 楔积，207 楔积单位，207 楔和，207 素边，42δ-，44 恒等，42

非恒等，42 积，28，29，40 楔积，207 楔和，207 乘积置换公理，69 轮廓，46 投影公理，156 投影函子，152 伪对称伴随 - Cat-多重等价，79 Cat-多重等价，79 刻画，84 性质，79 Cat-多函子，68，264 2-范畴，77 复合，71 格罗滕迪克构造，145 逆K理论，239 逆K理论的保持，240 Cat-多自然同构，74 变换，73E_∞-代数，252 在 Γ-Cat 中，254 在 PermCat 中，257 逆K理论的保持，252 恒等-Cat-多函子，70 伪对称同构，69 格罗滕迪克构造，137 伪对称性保持公理，74
R提升，152 正则，43，44 右作用，46 右加法零元，28 右伴随，15 右分配态射 对称双幺半范畴，25 右分解态射 环范畴，29 右乘法单位元，28 右乘法零元 对称双幺半范畴，24 右置换，46 右单位同构，4 右幺元 富集多范畴，47 环范畴，29 2×2 分解公理，31 加法结构，29 加法零元，29 双置换范畴，31 外部分解公理，30 内部分解公理，30 逆K理论，240 左分解态射，29 乘法结构，29

乘法单位元，29 乘法零元公理，29 积，29 右分解态射，29 小，31 和，29 对称分解公理，30 紧，31 单位分解公理，30 零分解公理，29

S
Segal K理论，234，266 小双置换范畴，31 富化范畴，10 富集多范畴，48 环范畴，31 对称双幺半范畴，28 楔积，207 对称幺半，208 楔积单位，207 分裂余纤维化，152 格罗滕迪克构造，179 稳定等价，266 严格代数，43 严格幺半范畴，5 严格幺半函子，8 严格对称性公理，154 严格保单位幺半函子，8 强幺半函子，8 强多线性函子，115 和，28，29，40 支撑，43 对称双幺半范畴，24 有限集，33 逆K理论，37 Laplaza 相干定理，44 带基点有限集，35 小，28 对称群，35 紧，28 对称群，33，46 作用，46 置换范畴，118 对称幺半 Day 卷积，18 楔积，208 对称幺半范畴，6 对称幺半函子，8 加性，97 格罗滕迪克构造，121 对称多线性函子约束，115 对称公理，7

T
张量积富化范畴，11 张量化，18，211 余-，19 终富化多范畴，52 多范畴，49 紧双置换范畴，31 紧对称双幺半范畴，32 环范畴，31 对称双幺半范畴，28 紧双置换范畴，32 顶等变富化多范畴，48 顶部等变公理，69 总体范畴，152 变换投影公理，160 传输态射，153 转置置换，34 三角恒等式，16

U
底层 1-范畴，12 底层范畴，221 图表范畴，221Γ-范畴，221 置换范畴，222 置换余纤维化，221 单位，5 伴随，15 楔积，207 单位约束，7，97 单位图表，17 单位分解公理，30 单位对象，97 单位置换公理，69 幺性，152 单位富化范畴，10 富集多范畴，47，48 多线性函子，114 单位公理加性修改，102 加性自然变换，99 多线性自然变换，117 宇宙，4

V值，44 路径，43 顶点，40 垂直复合 2-范畴，12 富化多自然变换，51 修正，15 伪对称 Cat-多自然变换，74 垂直自然变换，160

W

楔和，207

Z零编织公理，31 零分解公理，29 零态射，208