arXiv:2302.00730v1 [math.AP] 1 Feb 2023

小旋流下纳维-斯托克斯方程的全局正则轴对称解

BERNARD NOWAKOWSKI 和 WOJCIECH M. ZAJACZKOWSKI

摘要。本文研究有界圆柱中的纳维-斯托克斯方程轴对称解。假设边界上速度的法向分量以及速度和涡量的角向分量均为零。若初始旋流的范数足够小，则可证明轴对称弱解具有正则性。关键工具是针对某些加权索伯列夫空间中流函数的一个新估计。

1. 引言

本文研究有界圆柱域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中 Navier–Stokes 方程的轴对称解，其边界为 $S := \partial \Omega$。

为描述这个问题，我们通过以下关系将笛卡尔坐标 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 变换为柱坐标

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z.$$

该关系确定了正交归一基 $(\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z)$，其中

$$\bar{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \quad \bar{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \bar{e}_z = (0,0,1)$$

它们分别是沿径向、角向和 z 轴的单位向量。

利用这个正交归一基，我们可以将速度向量 v 分解如下

$$\mathbf{v} = v_r(r,z,t)\bar{e}_r + v_\varphi(r,z,t)\bar{e}_\varphi + v_z(r,z,t)\bar{e}_z$$

对于涡量向量 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$，我们有如下表达式

$$\boldsymbol{\omega} = -v_{\varphi,z}(r,z,t)\bar{e}_r + \omega_\varphi(r,z,t)\bar{e}_\varphi + \frac{1}{r}(rv_\varphi)_{,r}(r,z,t)\bar{e}_z.$$

这里 ω_φ 可以显式计算，即 $\omega_\varphi = v_{r,\ z} - v_{z,\ r}$。

设 $R, a > 0$。然后，我们定义

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon r < R,\ |z| < a\}$$

并且用 $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ 表示 Ω 的边界，其中

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon r = R,\ |z| < a\right\},$$
$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon r < R,\ z \in \{-a, a\}\right\}.$$

关键词和短语。 纳维-斯托克斯方程、轴对称解、小旋流、流函数的加权估计。

v2023-02-03

我们研究的方程组如下

$$
\begin{cases}
\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega^T = \Omega\times(0,T),\\
\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 & \text{in } \Omega^T,\\
\mathbf{v}\cdot\bar{n} = 0 & \text{on } S^T = S\times(0,T),\\
\omega_\varphi = 0 & \text{on } S^T,\\
v_\varphi = 0 & \text{on } S^T,\\
\mathbf{v}\Big|_{t=0} = \mathbf{v}_0 & \text{in } \Omega\times\{t=0\}
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

其中 $\bar{n}$ 是 S 向量的单位外法向量。

为陈述我们的主要结果，我们需要引入如下量

$$
u = rv_\varphi. \tag{1.2}
$$

它称为旋流，是下列问题的一个解

$$
\begin{cases}
u_{,t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u - \nu\Delta u + \dfrac{2\nu}{r}u_{,r} = rf_\varphi \equiv f_0 & \text{in } \Omega,\\
u = 0 & \text{on } S^T,\\
u\Big|_{t=0} = rv_\varphi(0) \equiv u(0) & \text{in } \Omega\times\{t=0\}.
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

我们必须强调，边界条件 **(1.1)**$_{3,4}$ 由 O.A. Ladyžhenskaya 提出，见 [1]。条件 **(1.1)**$_4$ 对于某些关于 ω_φ 的初边值问题的可解性是必要的（见 **(1.15)**$_2$）。

定理1（主要结果）。固定 $0 < r_0 < R$。令

$$
\begin{aligned}
D_1^2 &\equiv 3\,\|\mathbf{f}\|^2_{L_{1(0,t;L_2(\Omega))}(\Omega^t)} + 2\,\big\|\mathbf{v}(0)\big\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty,\\
D_2 &\equiv \|f_0\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))} + \big\|u(0)\big\|_{L_\infty(\Omega)} < \infty.
\end{aligned}
$$

下面引入

$$
\begin{aligned}
M(t) = c\Bigg(&\left\|\frac{f_\varphi}{r}\right\|^2_{L_2(0,t;L_{\frac{6}{5}}(\Omega))} + \big\|f_\varphi\big\|^4_{L_4(\Omega^t)} + \left\|\frac{\omega_\varphi(0)}{r}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\\
&+ \int_\Omega \frac{v_\varphi^4(0)}{r^2}\mathrm{d}x\Bigg) + c\frac{D_1^{10}D_2^8}{r_0^{16}} \equiv M'(t) + c\frac{D_1^{10}D_2^8}{r_0^{16}}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Let

$$
\begin{aligned}
\alpha(t,r_0) &= \|u\|^2_{L_\infty(\Omega^t_{r_0})}, \qquad \textit{where } \Omega_{r_0} = \{x\in\Omega\colon r\le r_0\},\\
M &= M(T),\\
M' &= M'(T).
\end{aligned}
$$

假设 $\gamma > 1$ 和 $\alpha(t,r_0)$ 足够小，使得

$$
\alpha(t,r_0) \le c(\gamma-1)M
$$

$$\cdot\left(\gamma M D_2^2+D_1^2(\gamma M)^2+(\gamma M)^2\exp\left(c(\gamma M)^2\right)\left(\left\|\frac{v_\varphi(0)}{r}\right\|^2_{L_3(\Omega)}+\left\|\frac{f_\varphi}{r}\right\|^2_{L_1(0,t;L_3(\Omega))}\right)\right)^{-1}$$
$$\equiv\Phi(M).$$

Then

$$\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|^2_{L_\infty(0,t;L_2(\Omega))}+\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|^2_{L_2(0,t;H^1(\Omega))}\le\gamma M. \tag{1.5}$$

现在考虑情形 $r_0=R$，因此 $\Omega_R=\Omega$。假设

$$\alpha(t,R)\le\|f_0\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))}+\|u(0)\|_{L_\infty(\Omega)}\equiv\Phi(M').$$

Then

$$\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|^2_{L_\infty(0,t;L_2(\Omega))}+\left\|\frac{\omega_\varphi}{r}\right\|^2_{L_2(0,t;H^1(\Omega))}\le\gamma M'. \tag{1.6}$$

人们可能会想知道 (1.5) 和 (1.6) 有何区别。仔细比较可知，只要在 $r=0$ 的邻域内，$\alpha(t,r_0)=\|u\|^2_{L_\infty(\Omega^t_{r_0})}$ 充分小，就可以得到 (1.5)。而在 (1.6) 中，我们不需要任何小量限制。这或许会让人以为，可以不受任何限制地取 $r_0=R$，并证明具有非零 $v_\varphi(0)$ 的弱轴对称解的正则性。毫不意外，这并不成立：若不先得到 (1.5)，就无法得到 (1.6)。稍后在证明中我们将看到，当 r 接近 0 时，以及当 $0<r_0<r$ 时（其中 r_0 固定），我们对某个积分采用了不同的处理方式。遗憾的是，如 (1.4) 所示，无法令 $r_0\to0^+$ 趋近。

我们要强调，定理1并不能直接推出弱解的正则性，但按照引理 2.9 中的推理，我们可以很快得出这一结论。我们采用的是众多 Serrin 型正则性判据之一，例如 [2, 定理 3.(ii)], 其中指出，若 $\omega_\varphi\in L_\infty(0,t;\,L_2(\Omega))$，则弱解 v 满足 (1.1) 的解具有正则性。不等式 (1.6) 恰好给出

$$\|\omega_\varphi\|_{L_\infty(0,t;L_2(\Omega))}\le cM',$$

这对于 $\mathbf{v}'=(v_r,v_z)$ 给出

$$\|\mathbf{v}'\|_{L_\infty(0,t;H^1(\Omega))}\le cM', \tag{1.7}$$

最终得到

$$\|v_r\|_{L_\infty(0,t;L_6(\Omega))}+\|v_z\|_{L_\infty(0,t;L_6(\Omega))}\le cM'. \tag{1.8}$$

根据 [3, 定理 1]，上述不等式也蕴含满足 (1.1) 的弱解 v 具有正则性。事实上，这里可以采用许多辅助结果。关于纳维-斯托克斯方程轴对称解的 Serrin 型正则性判据的简要综述，可参阅例如 [4], [5] 和 [6]中的引言。关于速度的角向分量或旋流的许多正则性判据，例如已在 [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]中建立。

一般而言，$\mathbb{R}^3$ 中的 Navier–Stokes 方程弱解的正则性问题历史悠久。1968 年，Ladyzhenskaya [1] 和 Ukhovskii 等人 [14] 独立证明，在轴对称解这一类解中，只要 $v_\varphi(0)=0$，任意弱解都是正则的。此后不久，Ladyzhenskaya

撰写了一本书（[15]），为深入研究弱解的正则性奠定了基础。

在描述定理1的证明步骤之前，我们先简要讨论近期的结果。在 [16] 研究了 $\Omega = \mathbb{R}^3$ 的情形。Lei等人证明，若 $\sup_{t\geq 0}\left|u(r,z,t)\right| \sim O\left(\ln^{-2} r\right)$（见推论 1.3），则 v 是方程 (1.1)^{1,2,6}的全局正则轴对称解。这是对 Wei 的结果（见 [17]）的改进；在 Wei 的结果中，需要 $O\left(\ln^{-\frac{3}{2}} r\right)$。这两个结果近期在[18], 得到了进一步改进，其中条件

$$\left|u(r,z,t)\right| \leq Ne^{-c|\ln r|^{\tau}}$$

意味着弱解具有正则性。这里 $0 < r \leq \frac{1}{4}$ 和 τ 是 (0, 1) 中的任意数，c, N 是一些常数。我们的结果在某种程度上具有可比性——(1.4) 表明 $\left|u(r,z,t)\right| \sim e^{-\frac{1}{r^{16}}}$。

我们必须强调，在论文 [8], [10], [13] 中，小量条件看起来非常复杂，不仅取决于旋流，还取决于例如涡量等量。在 [19] 中，为了证明弱轴对称解的正则性，我们假设 $v_r \in L_\infty(0,t;\, L_3(\Omega))$ 或 $\frac{v_r}{r} \in L_\infty(0,t;L_{\frac{3}{2}}(\Omega))$。这两种情况下都需要满足一些小量条件，但这些条件显式依赖于庞加莱不等式中的常数。

据我们所知，关于有界圆柱中纳维-斯托克斯方程弱轴对称解的正则性，相关结果并不多（例如参见 [20]）。我们的主要结果不仅是新的，还使用了针对流函数的非平凡加权估计。为了解释这一技巧，我们回到 (1.1)，并仿照 Ladyzhenskaya [1] 或 How等人（参见 [21]），将其改写为如下形式

$$\begin{cases} v_{\varphi,t} + \mathbf{v}\cdot\nabla v_\varphi - \nu\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)v_\varphi + \frac{1}{r}v_r v_\varphi = f_\varphi & \text{in } \Omega^T, \\ \omega_{\varphi,t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\omega_\varphi - \nu\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\omega_\varphi + \frac{1}{r}\left(v_\varphi^2\right)_{,z} + \frac{1}{r}v_r\omega_\varphi = F_\varphi & \text{in } \Omega^T, \\ -\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\psi = \omega_\varphi & \text{in } \Omega^T, \\ v_\varphi = \omega_\varphi = \psi = 0 & \text{on } S^T, \\ v_\varphi\Big|_{t=0} = v_\varphi(0) & \text{in } \Omega\times\{t=0\}, \\ \omega_\varphi\Big|_{t=0} = \omega_\varphi(0) & \text{in } \Omega\times\{t=0\}, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 $F_\varphi = \text{rot f}\cdot\bar{e}_\varphi$，且 ψ 为满足以下条件的流函数

$$v_r = -\psi_{,z}, \quad v_z = \frac{1}{r}(r\psi)_{,r}. \tag{1.10}$$

回顾一下，在式 (1.9) 中，以及本文中使用柱坐标时，我们有

$$\nabla = \bar{e}_r\partial_r + \bar{e}_z\partial_z \qquad \text{and} \qquad \Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2. \tag{1.11}$$

为了推导速度的能量型估计，我们更倾向于采用形式为 (1.1)[1,2] 的方程

$$
\begin{aligned}
&v_{r,t}+\mathbf{v}\cdot\nabla v_r-\nu\left(\Delta v_r-\frac{1}{r^2}v_r\right)-\frac{1}{r}v_\varphi^2+p_{,r}=f_r,\\
&v_{\varphi,t}+\mathbf{v}\cdot\nabla v_\varphi-\nu\left(\Delta v_\varphi-\frac{1}{r^2}v_\varphi\right)+\frac{1}{r}v_r v_\varphi=f_\varphi,\\
&v_{z,t}+\mathbf{v}\cdot\nabla v_z-\nu\Delta v_z+p_{,z}=f_z,\\
&(rv_r)_{,r}+(rv_z)_{,z}=0,
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

此外，我们有如下边界

$$
v_r\Big|_{S_1}=0,\quad v_z\Big|_{S_2}=0,\quad v_\varphi\Big|_{S}=0,\quad v_{r,z}-v_{z,r}\Big|_{S}=0,
\tag{1.13}
$$

和初始条件

$$
v_r\Big|_{t=0}=v_r(0),\qquad v_\varphi\Big|_{t=0}=v_\varphi(0),\qquad v_z\Big|_{t=0}=v_z(0)
$$

引入以下量也很方便

$$
u_1=\frac{v_\varphi}{r},\quad \omega_1=\frac{\omega_\varphi}{r},\quad \psi_1=\frac{\psi}{r},\quad f_1=\frac{f_\varphi}{r},\quad F_1=\frac{F_\varphi}{r}.
\tag{1.14}
$$

于是，系统 (1.9) 最终写为

$$
\begin{cases}
u_{1,t}+\mathbf{v}\cdot\nabla u_1-\nu\left(\Delta u_1+\dfrac{2}{r}u_{1,r}\right)=2u_1\psi_{1,z}+f_1 & \text{in } \Omega^T,\\
\omega_{1,t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\omega_1-\nu\left(\Delta\omega_1+\dfrac{2}{r}\omega_{1,r}\right)=2u_1u_{1,z}+F_1 & \text{on } \Omega^T,\\
-\Delta\psi_1-\dfrac{2}{r}\psi_{1,r}=\omega_1 & \text{in } \Omega^T,\\
u_1=\omega_1=\psi_1=0 & \text{on } S^T,\\
u_1\Big|_{t=0}=u_1(0) & \text{in } \Omega\times\{t=0\},\\
\omega_1\Big|_{t=0}=\omega_1(0) & \text{in } \Omega\times\{t=0\},
\end{cases}
\tag{1.15}
$$

系统 (1.15) 和 (1.9) 类似。我们的主要关注点将放在$\int_{\Omega_t}\frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t'$上。为处理这个积分，我们需要对 (1.15) 和 (1.9) 的解进行估计。这些估计将在第 2、3 和 4 节中给出。最后，我们将在第 5 节中将它们结合起来。除了各种能量估计外，我们还需要对 (1.14) 的解进行两个非平凡的加权索伯列夫空间估计[3] (见推论 2.10 和 2.11)。由于权的阶数，我们需要调整 ψ_1 在 $r=0$附近的奇异阶数。在引理 2.8 中我们将看到$\psi_1\sim O(1)$，因此 $\psi_1\notin H^3_0(\Omega)$ (见第 2 节)。因此，我们从 ψ_1 中减去所需的部分，使得这个差属于 $H^3_0(\Omega)$。这一思路受到 Kondratev 的工作的启发（见 [22]），并在一份单独的手稿中进行了讨论（见 [23]）。

2. 记号和辅助结果

首先，我们引入函数空间

定义 2.1。 设 Ω 是一个内部含有对称轴的柱状轴对称区域。我们使用以下记号表示勒贝格空间和索伯列夫空间:

$$\|u\|_{L_p(Q)} = |u|_{p,Q}\,, \quad \|u\|_{L_p(Q^t)} = |u|_{p,Q^t}\,,$$
$$\|u\|_{L_{p,q}(Q^t)} = \|u\|_{L_q(0,t;L_p(Q))} = |u|_{p,q,Q^t}\,,$$

其中 p、 $q \in [1,\infty]$、 Q 代替 Ω 或 S。

$$\|u\|_{H^s(Q)} = \|u\|_{s,Q}\,, \qquad \text{where } H^s(Q) = W_2^s(Q),$$
$$\|u\|_{W_p^s(Q)} = \|u\|_{s,p,Q}\,,$$
$$\|u\|_{L_q(0,t;W_p^k(Q))} = \|u\|_{k,p,q,Q^t}\,, \qquad \|u\|_{k,p,p,Q^t} = \|u\|_{k,p,Q^t}\,,$$

其中 s、 $k \in \mathbb{R}_+$。

最后，与 [23] 中的定义 2.1 类似，我们引入加权空间 $L_{p,\mu}(\Omega)$,$\mu \in \mathbb{R}$, $p \in [1,\infty]$, 其范数为

$$\|u\|_{L_{p,\mu}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p r^{p\mu}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$\|u\|_{H^k_\mu(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \left|\mathrm{D}^\alpha_{r,z}u(r,z)\right|^2 r^{2(\mu+|\alpha|-k)}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\mathrm{D}^\alpha_{r,z} = \partial_r^{\alpha_1}\partial_z^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$, $|\alpha| \le k$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0,1,2,\ldots\}$, $i = 1,2$,$k \in \mathbb{N}_0$ 和 $\mu \in \mathbb{R}$。实际上，我们只使用 $H_0^3(\Omega)$ 和 $H_0^2(\Omega)$，这些符号不应与具有零迹的索伯列夫空间混淆。

我们使用以下记号：r.h.s 表示右端，l.h.s. 表示左端。

用 c 表示通用常数。它们与时间无关，但可能依赖于 R。如果某个常数依赖于量 l，且需要追踪这种依赖关系，我们写作 $c(l)$。这意味着 $c(l) \sim c\cdot l$。类似地， $c\left(\frac{1}{l}\right) \sim \frac{c}{l}$。

引理 2.2（哈代不等式）。 设 $f \ge 0$、 $p \ge 1$ 和 $r \ne 0$。则

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y\right)^p x^{-r-1}\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \frac{p}{r}\left(\int_0^\infty |yf(y)|^p y^{-r-1}\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}.$$

引理 2.3。 设 $\mathbf{f} \in L_{2,\,1}(\Omega^t)$， $\mathbf{v}(0) \in L_2(\Omega)$。假设 $v_\varphi\big|_S = 0$、 $\bar{n}\cdot\mathbf{v}\big|_S = 0$, $\omega_\varphi\big|_S = 0$。则，方程 (1.1) 的解满足估计

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu\int_{\Omega^t}\left(|\nabla v_r|^2 + |\nabla v_\varphi|^2 + |\nabla v_z|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \nu\int_{\Omega^t}\left(\frac{v_r^2}{r^2} + \frac{v_\varphi^2}{r^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \le D_1^2 \tag{2.1}$$

证明。 将 $(1.12)_1$ 乘以 v_r，$(1.12)_2$ 乘以v_φ，$(1.12)_3$ 乘以 v_z，将所得结果相加，在 Ω 上积分并利用 (1.13)，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega\left(v_r^2+v_\varphi^2+v_z^2\right)\mathrm{d}x - \nu\int_{S_1} v_{z,r}v_z dS_1 - \nu\int_{S_2} v_{r,z}v_r dS_2 \tag{2.2}$$

$$+\nu\int_\Omega\left(|\nabla v_r|^2+|\nabla v_\varphi|^2+|\nabla v_z|^2\right)\mathrm{d}x+\nu\int_\Omega\left(\frac{v_r^2}{r^2}+\frac{v_\varphi^2}{r^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$+\int_\Omega\left(-\frac{1}{r}v_\varphi^2v_r+\frac{1}{r}v_rv_\varphi^2\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega\left(p_{,r}v_r+p_{,z}v_z\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega\left(f_rv_r+f_\varphi v_\varphi+f_zv_z\right)\mathrm{d}x.$$

根据 (1.13)，(2.2) 中的边界项为零。(2.2) 左端的最后一项根据 (1.13) 和连续性方程 (1.12)$_4$ 为零。

利用 $|\mathbf{v}|^2=v_r^2+v_\varphi^2+v_z^2$，将 (2.2) 改写为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2+\nu\int_\Omega\left(|\nabla v_r|^2+|\nabla v_\varphi|^2+|\nabla v_z|^2\right)\mathrm{d}x+\nu\int_\Omega\left(\frac{v_r^2}{r^2}+\frac{v_\varphi^2}{r^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega\left(f_rv_r+f_\varphi v_\varphi+f_zv_z\right)\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

对 (2.3) 右端应用霍尔德不等式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}\le\|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}, \tag{2.4}$$

其中我们利用了 $|\mathbf{f}|^2=f_r^2+f_\varphi^2+f_z^2$。

对 (2.4) 关于时间积分可得

$$\left\|\mathbf{v}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}\le\|\mathbf{f}\|_{L_{2,1}(\Omega^t)}+\left\|\mathbf{v}(0)\right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.5}$$

对 (2.3) 关于时间积分，并在 (2.3) 的右端应用霍尔德不等式，再利用 (2.5)，得到

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{v}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\nu\int_{\Omega^t}\left(|\nabla v_r|^2+|\nabla v_\varphi|^2+|\nabla v_z|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'+\nu\int_{\Omega^t}\left(\frac{v_r^2}{r^2}+\frac{v_z^2}{r^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'$$
$$\le\|\mathbf{f}\|_{L_{2,1}(\Omega^t)}\left(\|\mathbf{f}\|_{L_{2,1}(\Omega^t)}+\left\|\mathbf{v}(0)\right\|_{L_2(\Omega)}\right)+\frac{1}{2}\left\|\mathbf{v}(0)\right\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

上述不等式蕴含 (2.1)，并完成证明。 □

引理 2.4。 考虑问题 (1.3)。假设 $f_0\in L_{\infty,1}(\Omega^t)$， $u(0)\in L_\infty(\Omega)$。则

$$\left\|u(t)\right\|_{L_\infty(\Omega)}\le D_2 \tag{2.6}$$

证明。 将 (1.3)$_1$ 乘以 $u|u|^{s-2}$, $s>2$ 在 Ω 上积分，并分部积分，利用 $u\Big|_S=0$, 得到

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L_s(\Omega)}^s+\frac{4\nu(s-1)}{s^2}\left\|\nabla|u|^{s/2}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\frac{\nu}{s}\int_\Omega\left(|u|^s\right)_{,r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$
$$=\int_\Omega f_0u|u|^{s-2}\mathrm{d}x, \tag{2.7}$$

其中 (2.7) 的最后一项等于 $I\equiv\frac{\nu}{s}\int_{-a}^a|u|^s\Big|_{r=0}^{r=R}\mathrm{d}z$。由 [24] 可得 $u\Big|_{r=0}=0$。由于 $u\Big|_{r=R}=0$ 并利用边界条件 $v_\varphi\Big|_S=0$ 我们

得出 $I=0$。然后，由 (2.7) 可推出不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L_s(\Omega)} \le \|f_0\|_{L_s(\Omega)}. \tag{2.8}$$

对时间积分并令 $s\to\infty$，我们由 (2.8) 推导出 (2.6)。证明至此结束。□

引理 2.5。设估计式 (2.1) 和 (2.6) 成立。则

$$\left\|v_\varphi\right\|_{L_4(\Omega^t)} \le D_1^{1/2} D_2^{1/2}. \tag{2.9}$$

证明。我们有

$$\int_{\Omega^t} |v_\varphi|^4 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' = \int_{\Omega^t} r^2 v_\varphi^2 \frac{v_\varphi^2}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \le \left\|rv_\varphi\right\|^2_{L_\infty(\Omega^t)} \int_{\Omega^t} \frac{v_\varphi^2}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \le D_2^2 D_1^2.$$

这就推出了 (2.9)，并完成了证明。 □

引理 2.6。设 $\omega_1 \in L_2(\Omega)$。则满足 $(1.15)_3$ 的解

$$\|\psi_1\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_{-a}^{a} \psi_1^2(0)\,\mathrm{d}z \le c\,\|\omega_1\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{2.10}$$

其中 $\psi_1(0) = \psi_1|_{r=0}$。此外，如果 $\omega_1 \in L_{2,\,\mu}(\Omega)$，$\mu\in(0,\,1)$ 则

$$\|\psi_1\|^2_{L_{2,-\mu}(\Omega)} + \|\psi_1\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_{-a}^{a} \psi_1^2(0)\,\mathrm{d}z \le c\,\|\omega_1\|^2_{L_{2,\mu}(\Omega)}, \tag{2.11}$$

其中 $\psi_1(0) = \psi_1|_{r=0}$。

证明。将 $(1.15)_3$ 乘以 ψ_1，在 Ω 上积分，并利用边界条件 $(1.15)_4$。于是得到

$$\|\nabla\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} - \int_\Omega \partial_r \psi_1^2 \,\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_\Omega \omega_1\psi_1\,\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

对 (2.12) 右端应用霍尔德不等式，并利用庞加莱不等式和边界条件 $(1.3)_4$，可得 (2.10)。

利用加权空间，我们可以将 (2.12) 的右端估计为

$$\|\omega_1\|_{L_{2,\mu}(\Omega)} \|\psi_1\|_{L_{2,-\mu}(\Omega)}.$$

根据 Hardy 不等式（见引理 2.2）和 $\mu\in(0,1)$、$r\le R$，可得

$$\int_\Omega |\psi_1|^2 r^{-2\mu}\mathrm{d}x \le c\int_\Omega |\psi_{1,r}|^2 r^{2-2\mu}\mathrm{d}x \le cR^{2-2\mu}\int_\Omega |\nabla\psi_1|^2\,\mathrm{d}x.$$

由于 $\mu\in(0,1)$ 上的界 $\int_\Omega |\psi_1|^2 r^{-2\mu}\,\mathrm{d}x<\infty$ 并不能推出 $\psi_1\Big|_{r=0}=0$。因此 (2.11) 成立。证明至此结束。□

引理 2.7。假设 $u_1(0)\in L_\infty(\Omega)$，$f_1,\psi_{1,z}\in L_1(0,t;\,L_\infty(\Omega))$。那么，对于 (1.15) 的解，下面的不等式

$$\left\|u_1(t)\right\|_{L_\infty(\Omega)} \le \exp\left(\int_0^t \left\|\psi_{1,z}(t')\right\|_{L_\infty(\Omega)}\,\mathrm{d}t'\right) D_2. \tag{2.13}$$

成立。

证明。 将 $(1.15)_1$ 乘以 $u_1|u_1|^{s-2}$，并在 Ω 上积分。于是得到

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1\|_{L_s(\Omega)}^s+\frac{4\nu(s-1)}{s^2}\left\|\nabla u_1^{s/2}\right\|_{L_2(\Omega)}^2=\int_\Omega \psi_{1,z}u_1^s\mathrm{d}x+\int_\Omega f_1u_1^{s-1}\mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

对（2.14）右端应用霍尔德不等式并化简，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1\|_{L_s(\Omega)}\le\left\|\psi_{1,z}\right\|_{L_\infty(\Omega)}\|u_1\|_{L_s(\Omega)}+\|f_1\|_{L_s(\Omega)}. \tag{2.15}$$

对时间积分可得

$$\begin{aligned}&\left\|u_1(t)\right\|_{L_s(\Omega)}\\&\quad\le\exp\left(\int_0^t\left\|\psi_{1,z}(t')\right\|_{L_\infty(\Omega)}\mathrm{d}t'\right)\left(\|f_1\|_{L_1(0,t;L_s(\Omega))}+\left\|u_1(0)\right\|_{L_s(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{2.16}$$

令 $s\to\infty$，我们推导出（2.13）。证明完毕。 □

引理 2.8。 令 ψ_1 为下列方程的一个解

$$\begin{cases}-\Delta\psi_1-\dfrac{2}{r}\psi_{1,r}=\omega_1 & in\ \Omega,\\ \psi_1=0 & on\ S.\end{cases} \tag{2.17}$$

设 $\omega_1\in L_2$（Ω）。那么，方程 （2.17） 的任意解 ψ_1 均满足

$$\|\psi_1\|_{2,\Omega}\le c\,|\omega_1|_{2,\Omega}. \tag{2.18}$$

证明。 我们首先将 $(2.17)_1$ 改写为

$$-\psi_{1,rr}-\psi_{1,zz}-\frac{3}{r}\psi_{1,r}=\omega_1.$$

将此等式乘以 $\frac{1}{r}\psi_{1,\ r}$ 并在 Ω 上积分，得到

$$3\int_\Omega\left|\frac{1}{r}\psi_{1,r}\right|^2\mathrm{d}x=-\int_\Omega\psi_{1,rr}\frac{1}{r}\psi_{1,r}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\psi_{1,zz}\frac{1}{r}\psi_{1,r}\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\omega_1\frac{1}{r}\psi_{1,r}\,\mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

(2.19) 右端的第一项等于

$$-\int_\Omega\psi_{1,rr}\psi_{1,r}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\int_\Omega\partial_r\psi_{1,r}^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\int_{-a}^a\psi_{1,r}^2\Big|_{r=0}^{r=R}\mathrm{d}z\equiv I_1.$$

对 (2.19) 右端第二项中的 z 进行积分，得到

$$-\int_\Omega\left(\psi_{1,z}\psi_{1,r}\right)_{,z}\mathrm{d}r\mathrm{d}z+\int_\Omega\psi_{1,z}\psi_{1,rz}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

其中第一项为零，因为 $\psi_{1,\ r}|_{z\in\{-a,a\}}=0$ 而第二项等于

$$I_2\equiv\frac{1}{2}\int_{-a}^a\psi_{1,z}^2\Big|_{r=0}^{r=R}\mathrm{d}z.$$

利用边界条件 $(2.17)_2$，我们得到

$$I_2=-\frac{1}{2}\int_{-a}^a\psi_{1,z}^2\Big|_{r=0}\mathrm{d}z.$$

由 [25, 注释 4] 可知

$$\psi = a_1(r,z,t)\Big|_{r=0} r + a_3(r,z,t)\Big|_{r=0} r^3 + o(r^4),$$
$$\psi_1 = a_1(r,z,t)\Big|_{r=0} + a_3(r,z,t)\Big|_{r=0} r^2 + o(r^3),$$

thus

$$\psi_{1,r}\Big|_{r=0} = 0. \tag{2.20}$$

将 (2.20) 代入 I_1，得到

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \psi_{1,r}^2\Big|_{r=R}\,\mathrm{d}z.$$

对 (2.19) 右端的最后一项应用 Hölder 不等式和 Young 不等式，并将其与 I_1 和 I_2 结合，得到

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{r^2}\psi_{1,r}^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,r}^2\Big|_{r=R}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\psi_{1,z}^2\Big|_{r=0}\,\mathrm{d}z \le c\,|\omega_1|_{2,\Omega}^2\,. \tag{2.21}$$

由于左端最后两项为正，我们得出

$$\int_\Omega \frac{1}{r^2}\psi_{1,r}^2\,\mathrm{d}x \le c\,|\omega_1|_{2,\Omega}^2\,. \tag{2.22}$$

现在我们可以将 (2.17) 改写为

$$\begin{cases} -\Delta\psi_1 = \omega_1 + \dfrac{2}{r}\psi_{1,r} & \text{in } \Omega,\\ \psi_1 = 0 & \text{on } S \end{cases} \tag{2.23}$$

并将其视为泊松方程的狄利克雷问题。因此

$$\|\psi_1\|_{2,\Omega} \le c\,|\omega_1|_{2,\Omega}\,, \tag{2.24}$$

其中用到了 (2.22)。证明至此结束。 □

引理 2.9。 假设 $s\in(1,\infty)$。设 $f\in L_1(0,t;\,L_s(\Omega))$ 且 $u_1(0)\in L_s(\Omega)$。那么

$$|u_1|_{s,\Omega} \le \exp\left(cs\int_0^t \left|\omega_1(t')\right|_{2,\Omega}^2\,\mathrm{d}t'\right)\left(s\,\|f_1\|_{L_1(0,t;L_s(\Omega))} + \left\|u_1(0)\right\|_{L_s(\Omega)}\right).$$

证明。 在 (2.14) 中，我们进行分部积分，使用边界条件 $(1.3)_4$，并应用 Hölder 不等式和 Young 不等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_1|_{s,\Omega}^s + \frac{4(s-1)\nu}{s^2}\int_\Omega \left|\nabla|u_1|^{s/2}\right|^2\,\mathrm{d}x \\ \le \epsilon\left|\partial_z u_1^{s/2}\right|_{2,\Omega}^2 + \frac{c}{\varepsilon}\,|\psi_1|_{\infty,\Omega}^2\,|u_1|_{s,\Omega}^s + |f_1|_{s,\Omega}\,|u_1|_{s,\Omega}^{s-1}\,.\end{aligned} \tag{2.25}$$

当 ε 充分小时，我们得到

$$\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_1|_{s,\Omega}^s \le cs\,|\psi_1|_{\infty,\Omega}^2\,|u_1|_{s,\Omega}^s + |f_1|_{s,\Omega}\,|u_1|_{s,\Omega}^{s-1}\,. \tag{2.26}$$

因此，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_1|_{s,\Omega} \le cs\,|\psi_1|_{\infty,\Omega}^2\,|u_1|_{s,\Omega} + |f_1|_{s,\Omega}\,.$$

由于 $\epsilon = \frac{2}{(s-1)s^2}^{\nu}$，因此 $\frac{c}{\epsilon} = \frac{cs^2}{2}{}^{s-1}()^{\nu} \leq cs$。对时间积分可得

$$|u_1|_{s,\Omega} \leq \exp\left(cs\int_0^t \left|\psi_1(t')\right|_{\infty,\Omega}^2 \mathrm{d}t'\right)\left(\left|u_1(0)\right|_{s,\Omega} + |f_1|_{s,1,\Omega^t}\right). \tag{2.27}$$

利用引理 2.8

$$|\psi_1|_{\infty,\Omega} \leq c\,\|\psi_1\|_{2,\Omega} \leq c\,|\omega_1|_{2,\Omega}$$

我们得到

$$|u_1|_{s,\Omega} \leq \exp\left(cs\int_0^t \left|\omega_1(t')\right|_{2,\Omega}^2 \mathrm{d}t'\right)\left(\left|u_1(0)\right|_{s,\Omega} + |f_1|_{s,1,\Omega^t}\right). \tag{2.28}$$

证明完毕。 □

推论 2.10（定理 1.3，见 [23]）。设 ψ_1 是方程（1.15）$_{3,4}$的弱解。令 $\omega_1 \in L_2$（Ω）并引入

$$\chi(r,z) = \int_0^r \psi_{1,\tau}(1+K(\tau))\,\mathrm{d}\tau,$$

其中，K（τ）是任意具有紧支集的光滑函数，满足

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{K(r)}{r^2} = c_0 < \infty.$$

Then

$$\left\|\psi_1 - \psi_1(0) - \chi\right\|^2_{L_2(-a,a;H_0^2(0,R))} + \left\|\psi_{1,zr}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\psi_{1,zz}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq c\,\|\omega_1\|^2_{L_2(\Omega)},$$

推论 2.11（[23]中的定理 1.4）。设 ψ_1 是（1.3）$_{3,4}$ 的弱解。设$\omega_1 \in H^1$（Ω）。则

$$\int_{\mathbb{R}}\left\|\psi_1 - \psi_1(0) - \eta\right\|^2_{H_0^3(\mathbb{R}_+)}\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\left|\psi_{1,zzz}\right|^2 + \left|\psi_{1,zzr}\right|^2 + \left|\psi_{1,zz}\right|^2\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}z \leq c\,\|\omega_1\|^2_{H^1(\Omega)},$$

其中

$$\eta(r,z) = -\int_0^r (r-\tau)\left(\frac{3}{r}\psi_{1,\tau} + \psi_{1,zz} + \omega_1\right)(1+K(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

且 K 与推论 *2.10* 中相同。

3. Estimate for ω_1

引理 3.1。假设 $\omega_1(0) \in L_2$(Ω)，$u_1 \in L_4$(Ω^t)，$F \in L_{6/5,2}$(Ω^t)，$t \leq T$。则以下不等式成立

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \omega_1^2\,\mathrm{d}x + \frac{\nu}{2}\int_{\Omega^t}|\nabla\omega_1|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \nu\int_0^t\int_{-a}^a \omega_1^2\Big|_{r=0}\mathrm{d}z\mathrm{d}t' \leq \frac{1}{\nu}\int_{\Omega^t} u_1^4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + c\,|F_1|^2_{6/5,2,\Omega^t} + \int_\Omega \omega_1^2(0)\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

证明。将 (1.15)$_2$ 乘以 ω_1，在 Ω 上积分，并进行分部积分。接下来，对时间积分可得 (3.1)。证明至此结束。□

4. 速度的角向分量的估计

考虑问题 (1.9)

引理 4.1. 假设 $f_\varphi \in L_2(\Omega^t)$, $v_\varphi(0) \in L_{4,-1/2}(\Omega)$,

$$\left| \int_{\Omega^t} \frac{v_r}{r} \frac{v_\varphi^4}{r^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \right| < \infty. \tag{4.1}$$

那么，任何满足(1.9) 的解都满足

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x + \frac{3\nu}{4}\int_{\Omega^t}\left|\nabla\frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \frac{\nu}{2}\int_{\Omega^t}\left|\frac{v_\varphi}{r}\right|^4 \mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ \le \frac{3}{2}\int_{\Omega^t}\frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \frac{27}{4\nu^3}\int_{\Omega^t} f_\varphi^4 r^4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{v_\varphi^4(0)}{r^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.2}$$

证明。 将 (1.9)$_1$ 乘以 $\frac{v_\varphi^3}{r^2}$ （参见对称轴附近 v_φ 的展开式 (4.4)），并在 Ω 上积分。于是有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{4\,\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{v_\varphi^4}{r^2}\mathrm{d}x + \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla v_\varphi \frac{v_\varphi^3}{r^2}\mathrm{d}x - \nu\int_\Omega \Delta v_\varphi \frac{v_\varphi^3}{r^2}\mathrm{d}x + \nu\int_\Omega \frac{v_\varphi^4}{r^4}\mathrm{d}x \\ + \int_\Omega \frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\mathrm{d}x = \int_\Omega f_\varphi \frac{v_\varphi^3}{r^2}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.3) 中的第二项等于

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla v_\varphi^4 r^{-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\left(v_\varphi^4 r^{-2}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega v_r v_\varphi^4 r^{-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\mathrm{d}x,$$

其中我们用到了 $\mathbf{v}\cdot\bar{n}\Big|_S = 0$ and $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$。

对（4.3）左端第三项分部积分，得到

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla v_\varphi \nabla v_\varphi^3 r^{-2}\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla v_\varphi v_\varphi^3 \nabla r^{-2}\mathrm{d}x = 3\int_\Omega v_\varphi^2 |\nabla v_\varphi|^2 r^{-2}\mathrm{d}x - 2\int_\Omega v_{\varphi,r} v_\varphi^3 r^{-3}\mathrm{d}x \\ = \frac{3}{4}\int_\Omega |\nabla v_\varphi^2|^2 r^{-2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_r v_\varphi^4 r^{-2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \\ = \frac{3}{4}\int_\Omega \left|\frac{\nabla v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_r\left(v_\varphi^4 r^{-2}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z - \int_\Omega v_\varphi^4 r^{-3}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \equiv I. \end{aligned}$$

第一项 I 等于

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\int_\Omega \left|\nabla\frac{v_\varphi^2}{r} - v_\varphi^2\nabla\frac{1}{r}\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_\Omega \left|\nabla\frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int_\Omega \nabla\frac{v_\varphi^2}{r}\cdot v_\varphi^2\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}x \\ + \frac{3}{4}\int_\Omega \left|v_\varphi^2\nabla\frac{1}{r}\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_\Omega \left|\nabla\frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_\Omega \partial_r\frac{v_\varphi^2}{r}\frac{v_\varphi^2}{r^2}\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_\Omega \left|\frac{v_\varphi}{r}\right|^4 \mathrm{d}x \equiv J. \end{aligned}$$

J 中的中间项可以写成如下形式

$$\frac{3}{4}\int_\Omega \partial_r\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \frac{3}{4}\int_{-a}^{a}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\Big|_{r=0}^{r=R}\mathrm{d}z \equiv L.$$

由 [25, 注 4] 可知，v_φ 的行为类似于

$$v_\varphi = a_1(r,z,t)\Big|_{r=0} r + a_3(r,z,t)\Big|_{r=0} r^3 + o(r^4), \qquad r \approx 0, \tag{4.4}$$

对某些函数 a_1 和 a_3。由于 $v_\varphi\Big|_{r=R} = 0$，I 和 L 中的第二项消失。

将上述计算代入 (4.3)，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \frac{v_\varphi^4}{r^2}\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\nu\int_\Omega \left|\nabla\frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x + \frac{3}{4}\nu\int_\Omega \frac{v_\varphi^4}{r^4}\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int_\Omega \frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\mathrm{d}x \\ = \int_\Omega f_\varphi \frac{v_\varphi^3}{r^2}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.5}$$

对 (4.5) 右端应用 Hölder 不等式和 Young 不等式，并对所得结果关于时间积分，可得 (4.2)。证明至此完成。□

5. Global estimate

将 (3.1) 乘以 $\frac{\nu^2}{4}$，再与 (4.2) 相加，得到

$$\begin{aligned}&\frac{\nu^2}{8}\int_\Omega \omega_1^2(t)\,\mathrm{d}x + \frac{\nu^3}{8}\int_{\Omega^t} |\nabla\omega_1|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{v_\varphi^4(t)}{r^2}\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{3\nu}{4}\int_{\Omega^t}\left|\nabla\frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \frac{\nu}{4}\int_{\Omega^t}\left|\frac{v_\varphi}{r}\right|^4 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t' \le \frac{3}{2}\left|\int_{\Omega^t}\frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t'\right| \\ &\qquad + c\left(|F_1|^2_{6/5,2,\Omega^t} + \big|\omega_1(0)\big|^2_{2,\Omega} + \int_{\Omega^t} r^4 f_\varphi^4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \int_\Omega \frac{v_\varphi^4(0)}{r^2}\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{5.1}$$

因此，我们需要估计 (5.1) 右端的第一项。为考察该项，我们引入以下集合

$$\Omega_{r_0} = \{x\in\Omega\colon r\le r_0\}, \qquad \bar\Omega_{r_0} = \{x\in\Omega\colon r\ge r_0\}, \tag{5.2}$$

其中 $r_0 > 0$ 已给定。

我们将 (5.1) 右端的第一项写成如下形式

$$\int_{\Omega^t}\frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' = \int_{\Omega^t_{r_0}}\frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \int_{\bar\Omega^t_{r_0}}\frac{v_r}{r}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \equiv I + J. \tag{5.3}$$

引理 5.1. 在引理 *2.3* 和引理 *2.5* 的假设下，我们有

$$|J| \le \varepsilon_1\int_{\bar\Omega^t_{r_0}}\left|\partial_z\frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \epsilon_2\sup_t\big|\psi_{,xx}\big|^2_{2,\Omega} + c\left(\frac{1}{\epsilon_1},\frac{1}{\epsilon_2}\right)\frac{D_1^{10}D_2^8}{r_0^{16}}. \tag{5.4}$$

证明。由于 $\frac{v_r}{r} = -\psi_{1,\ z}$ 我们有

$$\begin{aligned}|J| &= \left|\int_{\bar\Omega^t_{r_0}}\psi_{1,z}\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t'\right| \\ &\le \varepsilon_1\int_{\bar\Omega^t_{r_0}}\left|\partial_z\frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t' + c\left(\frac{1}{\epsilon_1}\right)\int_{\bar\Omega^t_{r_0}}\psi_1^2\frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \equiv J_1.\end{aligned}$$

根据引理 2.5， J_1 中的第二项有如下界

$$\frac{1}{r_0^4}\int_{\bar{\Omega}^t_{r_0}} \psi^2 v_\varphi^4 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \le \frac{D_1^2 D_2^2}{r_0^4}\sup_{\bar{\Omega}^t_{r_0}}\psi^2 \le c\frac{D_1^2 D_2^2}{r_0^4}\sup_t \left|\psi_{,xx}\right|^{\frac{3}{2}}_{2,\Omega}|\psi|^{\frac{1}{2}}_{2,\Omega} \equiv J_2.$$

请注意，所有考察要么是先验的，要么是在正则局部解的情形下进行。随后，通过关于时间的延拓，可以得到正则全局解。由于 ψ 是该问题的解

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \dfrac{\psi}{r^2} = \omega & \text{in } \Omega^T, \\ \psi = 0 & \text{on } S^T, \end{cases}$$

我们有

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\psi^2}{r^2}\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \mathbf{v}'^2 \,\mathrm{d}x \le cD_1^2.$$

于是 J_2 有界，且

$$J_2 \le \varepsilon_2 \sup_t \left|\psi_{,xx}\right|^2_{2,\Omega} + c\left(\frac{1}{\epsilon_2}\right)\frac{D_1^8 D_2^8}{r_0^{16}}D_1^2.$$

利用对 J_1 和 J_2 的估计，我们推出 (5.4)。证明至此结束。 □

引理 5.2。 设引理 *2.3* 的假设成立。此外，假设$v_\varphi(0) \in L_4(\Omega)$， $u \in L_\infty(\Omega^t)$，$|u|_{\infty,\ \Omega^t} \le D_2$。则由(5.3) 得到的 I 满足

$$\begin{aligned}(5.5)\quad |I| \le \epsilon_3 \left|\partial_z \frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2_{2,\Omega^t_{r_0}} + c\left(\frac{1}{\epsilon_3}\right)|u|^2_{\infty,\Omega^t_{r_0}}\Big(D_2^2\,|\nabla\omega_1|^2_{2,\Omega^t} \\ + |\omega_1|^4_{2,\infty,\Omega^t} D_1^2 + \left(\left|u_1(0)\right|^2_{3,\Omega_{r_0}} + |f_1|^2_{3,1,\Omega^t}\right)|\omega_1|^2_{2,\Omega^t}\exp\left(c\,|\omega_1|^2_{2,\Omega^t}\right)\Big).\end{aligned}$$

证明。我们有

$$|I| \le \varepsilon_3 \int_{\Omega^t_{r_0}} \left|\partial_z \frac{v_\varphi^2}{r}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t' + c(1/\varepsilon_3)\int_{\Omega^t_{r_0}} \psi_1^2 \frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \equiv I_1 + I_2.$$

我们通过 I_2 进行估计

$$\begin{aligned} I_2 \le \int_{\Omega^t_{r_0}} |\psi_1 - \psi_1(0) - \eta|^2 \frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \int_{\Omega^t_{r_0}} |\eta|^2 \frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \int_{\Omega^t_{r_0}} |\psi_1(0)|^2 \frac{v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ \equiv I_2^1 + I_2^2 + I_2^3, \end{aligned}$$

其中 $\psi_1(0) = \psi_1\Big|_{r=0}$， 且 η 在推论 2.11 中定义。利用该推论，我们有

$$\begin{aligned} I_2^1 &= \int_{\Omega^t_{r_0}} \frac{|\psi_1 - \psi_1(0) - \eta|^2}{r^6}\frac{r^6 v_\varphi^4}{r^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ &\le c\sup_{\Omega^t_{r_0}}|u|^4 \int_{\Omega^t_{r_0}} \frac{|\psi_1 - \psi_1(0) - \eta|^2}{r^6}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \le c\sup_{\Omega^t_{r_0}}|u|^4\,|\nabla\omega_1|^2_{2,\Omega^t}. \end{aligned}$$

考虑 I_2^3,

$$
\begin{aligned}
I_2^3 &\le \sup_{\Omega_{r_0}} |\psi_1(0)|^2 \sup_{\Omega_{r_0}^t} |u| \int_{\Omega_{r_0}^t} \left| \frac{v_\varphi}{r} \right|^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\
&= \sup_{\Omega_{r_0}} |\psi_1(0)|^2 \sup_{\Omega_{r_0}^t} |u| \int_{\Omega_{r_0}^t} \frac{v_\varphi^2}{r^2} \left| \frac{v_\varphi}{r} \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\
&\le \sup_{\Omega_{r_0}^t} |\psi_1|^2 \sup_{\Omega_{r_0}^t} |u| \left| \frac{v_\varphi}{r} \right|_{4,\Omega_{r_0}^t}^2 \left| \frac{v_\varphi}{r} \right|_{2,\Omega_{r_0}^t} \\
&\le \varepsilon \left| \frac{v_\varphi}{r} \right|_{4,\Omega_{r_0}^t}^4 + c\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \sup_t |\omega_1|_{2,\Omega}^4 \sup_{\Omega_{r_0}^t} |u|^2 D_1^2,
\end{aligned}
$$

这里用到了引理 2.3 和 2.8。

考虑 I_2^2。为简化表述，我们将 η 简写为

$$
\eta = \int_0^r (r-\tau) f(\tau) d\tau,
$$

其中 f替代 $\left(\frac{3}{r}\psi_{1,r} + \psi_{1,zz} + \omega_1\right)\big(1 + K(r)\big)$。

Then

$$
\begin{aligned}
I_2^2 &= \int_{\Omega_{r_0}^t} \left| \int_0^r (r-\tau) f(\tau) d\tau \right|^2 \frac{v_\varphi^4}{r^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}t' = \int_{\Omega_{r_0}^t} \left| \frac{1}{r} \int_0^r (r-\tau) f(\tau) d\tau \right|^2 r^2 v_\varphi^2 \frac{v_\varphi^2}{r^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\
&\le \sup_{\Omega_{r_0}^t} |u|^2 \int_{\Omega_{r_0}^t} \left| \frac{1}{r} \int_0^t (r-\tau) f(\tau) d\tau \right|^2 \frac{v_\varphi^2}{r^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}t' \equiv L_1.
\end{aligned}
$$

在 L_1 中应用霍尔德不等式可得

$$
L_1 \le |u|_{\infty,\Omega_{r_0}^t}^2 \int_0^t \left(\int_{\Omega_{r_0}} \left| \frac{1}{r} \int_0^r (r-\tau) f(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right|^{2p} \mathrm{d}x \right)^{2/2p} \mathrm{d}t \sup_t |u_1|_{2p',\Omega_{r_0}^T}^2 \equiv L_2,
$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$。

对 L_2中的中间项应用 Hardy 不等式，得到

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\int_{\Omega_{r_0}} \left| \frac{1}{r} \int_0^r (r-\tau) f(\tau) d\tau \right|^{2p} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2p}} \mathrm{d}t' \\
&\le c \int_0^t \left(\int_{\Omega_{r_0}} \left| \int_0^r f(\tau) d\tau \right|^{2p} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2p}} \mathrm{d}t' \\
&\le c \int_0^t \left(\int_{\Omega_0} \left| \int_0^r (\psi_{1,\tau\tau} + \psi_{1,\tau\tau} K(\tau)) \, \mathrm{d}\tau \right|^{2p} \mathrm{d}x \right)^{\frac{2}{2p}} \mathrm{d}t' \equiv L_3,
\end{aligned}
$$

其中我们用到了

$$
f = -\psi_{1,rr} \left(1 + K(r)\right).
$$

为应用 Hardy 不等式，我们使用以下公式

$$
\int_0^r (r-\tau) f(\tau) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^r \int_0^\sigma f(\tau) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\sigma.
$$

接下来，我们使用以下 Hardy 不等式（例如参见 [26, 第 1 章第 2 节。16]）

$$\left(\int_0^{r_0}\left|\frac{1}{r}\int_0^r\int_0^\sigma f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma\right|^{2p} r\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2p}} \le c\left(\int_0^{r_0}\left|\int_0^r f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|^{2p} r\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2p}}$$

对 z 进行积分，我们得到 L_3 中的第一个不等式。继续，

$$L_3 \le c\int_0^t\left(\int_{\Omega_{r_0}}\left(|\psi_{1,r}|^{2p}+\left|\int_0^r \psi_{1,\tau\tau}K(\tau)d\tau\right|^{2p}\right)\mathrm{d}x\right)^{2/2p}\mathrm{d}t' \equiv L_4.$$

利用

$$\int_0^r \psi_{1,\tau\tau}K(\tau)d\tau = \psi_{1,r}K(r) - \int_0^r \psi_{1,\tau}K_{,\tau}d\tau$$

在 L_4 中蕴含

$$\begin{aligned} L_4 \le c\int_0^t \left\|\psi_{1,r}\right\|^2_{2p,\Omega_{r_0}}\,\mathrm{d}t' \\ +\int_0^t\left(\int_{\Omega_{r_0}}\left(|\psi_{1,r}K(r)|^{2p}+\left|\int_0^r \psi_{1,\tau}K_{,\tau}d\tau\right|^{2p}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ \le c\int_0^t \left\|\psi_{1,r}\right\|^2_{2p,\Omega_{r_0}}\,\mathrm{d}t' \equiv L_5, \end{aligned}$$

其中使用了 K 的性质。最后，对于 $p\le 3$ 和引理 2.8

$$L_5 \le c\,|\omega_1|^2_{2,\Omega^t_{r_0}}$$

综上

$$\begin{aligned} I_2^2 \le c\,|u|^2_{\infty,\Omega^t_{r_0}}\left(\left|u_1(0)\right|^2_{2p',\Omega_{r_0}}+|f_1|^2_{2p',1,\Omega^t_{r_0}}\right) \\ \cdot\exp\left(c\int_0^t\left|\omega_1(t')\right|^2_{2,\Omega_{r_0}}\mathrm{d}t'\right)|\omega_1|^2_{2,\Omega^t_{r_0}}, \end{aligned}$$

其中使用了 $p'\ge\frac{3}{2}$ 和引理 2.8。

利用 I_2^1、 I_2^2、 I_2^3的估计，我们得到

$$\begin{aligned} I_2 \le c\,|u|^2_{\infty,\Omega^t_{r_0}}\Bigg(|u|^2_{\infty,\Omega^t_{r_0}}|\nabla\omega_1|^2_{2,\Omega^t}+|\omega_1|^4_{2,\infty,\Omega^t}D_1^2 \\ +\left(\left|u_1(0)\right|^2_{3,\Omega_{r_0}}+|f_1|^2_{3,1,\Omega^t_{r_0}}\right)|\omega_1|^2_{2,\Omega^t}\exp\left(c\,|\omega_1|^2_{2,\Omega^t}\right)\Bigg). \end{aligned}$$

利用 I 界中的估计，我们得到（5.5）。证明至此完成。□

定理*1*的证明。将（5.3）以及估计（5.4）和（5.5）代入（5.1），并假设 ε_1 和 ε_3 足够小，我们得到不等式

$$|\omega_1|^2_{2,\infty,\Omega^t}+\|\omega_1\|^2_{L_2(0,t;H^1(\Omega)}\le c\,|u|^2_{\infty,\Omega^t_{r_0}}\Bigg(D_2^2\,|\nabla\omega_1|^2_{2,\Omega^t}+D_1^2\,|\omega_1|^4_{2,\infty,\Omega^t} \tag{5.6}$$

$$+\left(\left|u_1(0)\right|^2_{3,\Omega_{r_0}}+|f_1|^2_{3,1,\Omega^t_{r_0}}\right)|\omega_1|^2_{2,\Omega^t}\exp\left(c\,|\omega_1|^2_{2,\Omega^t}\right)\Bigg)+M(t),$$

其中， $M(t)$在（1.4）中引入。

Let

$$X(t)=|\omega_1|^2_{2,\infty,\Omega^t}+\|\omega_1\|^2_{L_2(0,t;H^1(\Omega))}. \tag{5.7}$$

根据这一记号，(5.6) 可写为

$$X(t)\le c\,|u|^2_{\infty,\Omega^t_{r_0}}\Bigg(D_2^2X+D_1^2X^2 \tag{5.8}$$

$$+\,X^2\exp\left(cX^2\right)\left(\left|u_1(0)\right|^2_{3,\Omega}+|f_1|^2_{3,1,\Omega^t_{r_0}}\right)\Bigg)+M(t)\equiv\epsilon F(X(t))+M(t).$$

考虑等式

$$X'(t)=\epsilon F\left(X'(t)\right)+M(t). \tag{5.9}$$

利用逐次逼近法，我们将证明存在一个解 $X'(t)$，并确定确保该解存在的 ϵ 的大小。

假设

$$X'_{n+1}(t)=\epsilon F\left(X_n(t)\right)+M(t). \tag{5.10}$$

令 $\gamma>1$。回顾一下， $M=M(T)$，并假设

$$\left|X'_n(t)\right|\le\gamma M. \tag{5.11}$$

于是，由（5.10）和（5.8）可得

$$\left|X'_{n+1}(t)\right|\le c\,|u|_{\infty,\Omega^t}\Bigg(D_2^2(\gamma M)+D_1^2(\gamma M)^2 \tag{5.12}$$

$$+(\gamma M)^2\exp\left(c(\gamma M)^2\right)\left(\left|u_1(0)\right|^2_{3,\Omega}+|f_1|^2_{3,1,\Omega^t_{r_0}}\right)\Bigg)+M.$$

假设

$$|u|_{\infty,\Omega^t)}\le c(\gamma-1)M$$

$$\cdot\left(\gamma MD_2^2+D_1^2(\gamma M)^2+(\gamma M)^2\exp\left(c(\gamma M)^2\right)\left(\left|u_1(0)\right|^2_{3,\Omega}+|f_1|^2_{3,1,\Omega^t_{r_0}}\right)\right)^{-1}.$$

Then

$$\left|X'_{n+1}(t)\right|\le\gamma M. \tag{5.13}$$

现在给定 $\omega_1(0)$。设 $\tilde\omega_1$ 是 $\omega_1(0)$ 的一个延拓，使得 $|\tilde\omega_1|^2_{2,\infty(\Omega^t)}+\|\tilde\omega_1\|^2_{1,2,\Omega^t}<\infty$ 和 $\tilde\omega_1\Big|_{t=0}=\omega_1(0)$。令

$$X'_0=|\tilde\omega_1|^2_{2,\infty(\Omega^t)}+\|\tilde\omega_1\|^2_{1,2,\Omega^t}<\gamma M \tag{5.14}$$

于是，由 (5.11)、(5.13) 和 (5.14) 可得

$$\left|X_n'\right| \leq \gamma M \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}_0.$$

接下来需要检验 X_n' 的收敛性。令

$$Y_n' = X_n' - X_{n-1}'.$$

那么，由（5.10）可得

$$\begin{aligned} Y_{n+1}' = c\,|u|_{\infty,\Omega^t} \Bigg(& D_2^2 Y_n' + D_1^2 \left(X_n'^2 - X_{n-1}'^2\right)^2 \\ & + \left(X_n'^2 \exp\left(cX_n'^2\right) - X_{n+1}'^2 \exp\left(cX_{n-1}'^2\right)\right) \left(\left|u_1(0)\right|_{3,\Omega}^2 + |f_1|_{3,1,\Omega_{r_0}^t}^2\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{5.15}$$

继续可得

$$\begin{aligned} \left|Y_{n+1}'\right| &\leq c\,|u|_{\infty,\Omega^t} \Bigg(D_2^2 \left|Y_n'\right| + D_1^2 \left|Y_n'\right| \left(\left|X_n'\right| + \left|X_{n-1}'\right|\right) + \Bigg(\left(X_n'^2 - X_{n-1}'^2\right) \exp\left(cX_n'^2\right) \\ &\quad + \left(X_n'^2 - X_{n-1}'^2\right) \exp\left(cX_{n-1}'^2\right) + X_{n-1}'^2 \left(\exp\left(cX_n'^2\right) - \exp\left(cX_{n-1}'^2\right)\right)\Bigg) \\ &\qquad \cdot \left(\left|u_1(0)\right|_{3,\Omega}^2 + |f_1|_{3,1,\Omega_{r_0}^t}^2\right)\Bigg) \\ &\leq c\,|u|_{\infty,\Omega^t} \Bigg(D_2^2 \left|Y_n'\right| + 2\gamma M D_1^2 \left|Y_n'\right| + \Bigg(\left|Y_n'\right| 2\gamma M \exp\left(c\,(\gamma M)^2\right) \\ &\quad + (\gamma M)^2 \exp\left(c\,(\gamma M)^2\right) \left|Y_n'\right| 2\gamma M \Bigg) \left(\left|u_1(0)\right|_{3,\Omega}^2 + |f_1|_{3,1,\Omega_{r_0}^t}^2\right)\Bigg) \\ &= c\,|u|_{\infty,\Omega^t} \Bigg(D_2^2 + D_1^2 2\gamma M + 2\gamma M \left(\exp\left(c\,(\gamma M)^2\right)\right) + 2(\gamma M)^3 \exp\left(c(\gamma M)^2\right)\Bigg) \\ &\qquad \cdot \left(\left|u_1(0)\right|_{3,\Omega}^2 + |f_1|_{3,1,\Omega_{r_0}^t}^2\right) \left|Y_n'\right| \end{aligned}$$

因此，当满足以下条件时，该序列收敛

$$\begin{aligned} |u|_{\infty,\Omega^t} \Bigg(& D_2^2 + D_1^2(2\gamma M) + \Big(2\gamma M \exp(c(\gamma M)^2) \\ & + 2(\gamma M)^3 \exp(c(\gamma M)^2)\Big) \left(\left|u_1(0)\right|_{3,\Omega}^2 + |f_1|_{3,1,\Omega_{r_0}^t}^2\right)\Bigg) < 1. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

如定理1之后所述，我们必须强调，(1.6)对于推导问题(1.1)的弱解的正则性至关重要。

参考文献

[1] O. A. Ladyženskaja，存在轴对称条件下纳维-斯托克斯方程三维柯西问题的唯一整体解，Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 7 (1968年) 155–177. [2] D. Chae, J. Lee，关于纳维-斯托克斯方程轴对称解的正则性，Math. Z. 239 (4) (2002年) 645–671. doi:10.1007/s002090100317. [3] J. Neustupa, M. Pokorný，轴对称纳维-斯托克斯方程适定弱解的内部正则性判据，J. Math. Fluid Mech. 2 (4) (2000年) 381–399. doi:10.1007/PL00000960.[4] A. Kubica, M. Pokorný, W. M. Zajączkowski，关于轴对称纳维-斯托克斯方程弱解正则性判据的评注，Math. Methods Appl. Sci. 35 (3) (2012年) 360–371. doi:10.1002/mma.1586. [5] H. Chen, D. Fang, T. Zhang，三维轴对称纳维-斯托克斯方程的正则性，Discrete Contin. Dyn. Syst. 37 (4) (2017年) 1923–1939. doi:10.3934/dcds.2017081. [6] J. Rencławowicz, W. M. Zajączkowski，关于轴对称纳维-斯托克斯方程的一些正则性判据，J. Math. Fluid Mech. 21 (4) (2019年) Paper No. 51, 14. doi:10.1007/s00021-019-0447-0.[7] H. Chen, D. Fang, T. Zhang，三维轴对称纳维-斯托克斯方程的正则性，Discrete Contin. Dyn. Syst. 37 (4) (2017年) 1923–1939. doi:10.3934/dcds.2017081. [8] Y. Liu，在临界空间中求解轴对称纳维-斯托克斯方程（I）：小旋流分量的情形，J. Differential Equations 314 (2022年) 287–315. doi:10.1016/j.jde.2022.01.011. [9] D. Wei，轴对称纳维-斯托克斯方程的正则性判据，J. Math. Anal. Appl. 435 (1) (2016年) 402–413. doi:10.1016/j.jmaa.2015.09.088. [10] Y. Liu, P. Zhang，小旋流分量下三维轴对称纳维-斯托克斯系统的整体适定性，Calc. Var. Partial Differential Equations 57 (1) (2018年) Paper No. 17, 31. doi:10.1007/s00526-017-1288-4.[11] O. Kreml, M. Pokorný，轴对称纳维-斯托克斯方程角速度分量的正则性判据

电子微分方程期刊 (2007) 第 08 期，10。
URLhttps://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2007/08/kreml.pdf [12] J. Neustupa、M. Pokorný，《全空间中具有非零角速度分量的 Navier–Stokes 流体轴对称流》，载于：偏微分方程与应用论文集（奥洛穆茨，1999），第 126 卷，2001 年，第 469–481 页。 [13] P. Zhang、T. Zhang，《三维 Navier–Stokes 系统的全局轴对称解》，国际数学研究通知 (3) (2014) 610–642。doi:10.1093/imrn/rns232。 [14] M. R. Ukhovskii、V. I. Iudovich，《充满整个空间的理想流体和黏性流体的轴对称流》，应用数学与力学杂志 32 (1968年) 52–61。doi:10.1016/0021-8928(68)90147-0。[15] O. A. Ladyzhenskaya，《黏性不可压流的数学理论》，数学及其应用，第 2 卷，Gordon and Breach Science Publishers，纽约-伦敦-巴黎，1969 年，第二版英文版，修订并扩充，Richard A. Silverman 和 John Chu 由俄文译出。[16] Z. Lei、Q. S. Zhang，《轴对称 Navier–Stokes 方程的临界性》，太平洋数学杂志 289 (1) (2017年) 169–187。doi:10.2140/pjm.2017.289.169。[17] D. Wei，《轴对称 Navier–Stokes 方程的正则性判据》，J. Math. Anal. Appl. 435 (1) (2016年) 402–413。 doi:10.1016/j.jmaa.2015.09.088。[18] H. Chen、T.-P. Tsai、T. Zhang，《三维 Navier–Stokes 方程轴对称解局部正则性的评注》，偏微分方程通讯 47 (8) (2022年) 1680–1699。 doi:10.1080/03605302.2022.2070854。[19] W. M. Zajączkowski，《轴对称 Navier–Stokes 方程解的正则性判据》，圣彼得堡 Steklov 数学研究所数学研讨会纪要 (POMI) 385 (Kraevye Zadachi Matematicheskoĭ Fiziki iSmezhnye Voprosy Teorii Funktsiĭ. 41) (2010) 54–68, 234。 doi:10.1007/s10958-011-0546-9。[20] W. M. Zajączkowski，《Navier–Stokes 方程大旋流全局轴对称解》，拓扑方法与非线性分析 29 (2) (2007) 295–331。 [21] T. Y. Hou、C. Li，《具有旋流的三维轴对称 Navier–Stokes 方程的动力稳定性》，纯粹与应用数学通讯 61 (5) (2008) 661–697。 doi:10.1002/cpa.20212。

[22] V. Kondrat'ev, 《具有锥点或角点区域中椭圆方程的边值问题》, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 16 (1967年) 209–292；英文译本见：Trans. Mosc. Math. Soc. 16, 227-313 (1967年)。 [23] B. Nowakowski、W. Zajączkowski, 《有界圆柱中轴对称 Navier–Stokes 方程解的流函数加权估计》, （已投稿）（2022年）。 doi:10.48550/ARXIV.2210.15729。[24] J.-G. Liu、W.-C. Wang, 《轴对称无散向量场的刻画与正则性及其在 Navier–Stokes 方程中的应用》, SIAM J. Math. Anal. 41 (5) (2009) 1825–1850。 doi:10.1137/080739744。[25] B. Nowakowski、W. M. Zajączkowski, 《无旋轴对称 Navier–Stokes 方程解的稳定性》, Math. Methods Appl. Sci.（已接受）（2022年）。 [26] O. V. Besov、V. P. Il'in、S. M. Nikol'skiĭ, 《函数的积分表示与嵌入定理》。第 I 卷，Scripta Series in Mathematics，V. H. Winston & Sons，华盛顿特区；Halsted Press [John Wiley & Sons], 纽约-多伦多，安大略省-伦敦，1978 年，译自俄文，Mitchell H. Taibleson 编。

军事技术大学，控制论学院，数学与密码学研究所，华沙，波兰电子邮箱：bernard.nowakowski@wat.edu.pl

军事技术大学，控制论学院，数学与密码学研究所，华沙，波兰

波兰科学院数学研究所，华沙，波兰电子邮箱：wz@impan.pl