arXiv:2302.00743v1 [math.LO] 1 Feb 2023

拓扑动力学中的康托尔导数逻辑

Yo`av Montacute

University of Cambridge
Cambridge
United Kingdom

摘要

基于康托尔导数算子的模态逻辑拓扑语义催生了导数逻辑，也称为 d-逻辑。与基于拓扑闭包算子的逻辑不同， d-逻辑此前尚未在动态拓扑系统（DTS）的框架下得到研究。动态拓扑系统是由一对 $\langle X, f\rangle$ 构成的系统，其中包含一个配备连续函数 $f\colon X \to X$ 的拓扑空间 X 。我们引入逻辑 wK4C、K4C 和 GLC，并证明它们都具有有限 Kripke 模型性质，且在这种动力学情形下，相对于 d语义而言是可靠且完备的。我们还证明了 f 为同胚时的一般性结果，由此得出相应系统 wK4H、K4H 和 GLH 的可靠性与完备性。GLC 尤为值得关注，它是基于散乱空间的所有 DTS 的 d-逻辑。我们利用 GLC 的完备性以及散乱空间的性质，展示了原始三模态语言中首个可靠且完备的动态拓扑逻辑。具体而言，我们证明，基于散乱空间类的 DTL 版本可在原始语言中有限公理化，且其自然公理化是可靠且完备的。

Keywords: 动态拓扑逻辑、拓扑语义、康托尔导数、动力系统。

1 引言

动态拓扑系统（DTS）是对可以无限迭代的过程进行描述的数学模型。形式上，它们被定义为二元组 $\langle \mathfrak{X}, f\rangle$ 由拓扑空间 $\mathfrak{X} = \langle X$ 和连续函数 f 组成： $X \to X$; 其直观含义是，空间中的点 $\mathfrak{x}$ 沿着自身的轨道“移动”， $x\ f(x)\ f^2(x)$.....这通常模拟了时间上的变化。动态拓扑逻辑（DTL）将模态逻辑及其拓扑语义与线性时序逻辑相结合（参见 Pnueli [18]），以便对动力系统进行推理。

由于定义相当宽泛，动力系统常用于包括计算机科学在内的众多理论与应用科学领域。这些应用催生了对拓扑动力学进行有效形式化推理的需求。在这方面，我们可以借鉴模态逻辑及其拓扑语义。对后者的研究

可追溯至 McKinsey 和 Tarski [16], ，他们证明模态逻辑 S4 对包括实数轴在内的一大类空间是完备的。Artemov、Davoren 和 Nerode [2] 仿照 LTL 引入“下一步”算子扩展了 S4，得到逻辑 S4C。他们证明，相对于所有 DTS 的类，该逻辑是可靠且完备的。Kremer 和 Mints [15], 在 S4C 中加入“始终”算子，并将这一新逻辑命名为动态拓扑逻辑（DTL）。后来，Konev 等人 [14] 证明 DTL 不可判定，而 Fern´andez-Duque [9] 则证明它在所有 DTS 的类上不可有限公理化。

上述关于动态拓扑逻辑的研究将模态算子 $\Diamond$ 解释为闭包算子。然而，McKinsey 和 Tarski 早已考虑过基于康托尔导数 [16]的语义。集合 A的康托尔导数通常记作 $d(A)$，是满足以下条件的点集：点x 使得 x 属于 $A \setminus \{x\}$的闭包。这种解释通常称为d语义，由此产生的逻辑称为 d逻辑。Esakia 首次对这些逻辑进行了详细研究，并证明 d逻辑 wK4 相对于所有 [7]自身稠密的拓扑空间类是可靠且完备的。众所周知，基于康托尔导数的语义比基于拓扑闭包的语义具有更强的表达能力。例如，考虑空间 $\mathfrak{X}$ 是自身稠密这一性质，即 $\mathfrak{X}$ 没有孤立点。自身稠密这一性质无法用闭包算子来表达，但可以在拓扑 d语义中通过公式$\Diamond\top$表达。

基于康托尔导数的逻辑似乎是推理动力系统的自然选择。然而，在这些系统的情境下，此类逻辑尚无已确立的完备性结果。我们的目标是证明：在若干重要类别的 DTS 上，带有康托尔导数算子和“下一步”算子的逻辑具有有限 Kripke 模型性质、完备性和可判定性。具体而言，这些类别包括基于任意空间、 T_D 空间（满足 4 公理 $\Box p \to \Box\Box p$的空间）以及散布空间的 DTS。散布空间是指每个非空子空间都含有一个孤立点的拓扑空间。考虑散布空间，是为了通过将研究范围限制在所有 DTS 的一个适当子类中，规避动态拓扑逻辑无法有限公理化的问题。在动力系统和拓扑模态逻辑的研究中，人们常常采用无孤立点空间。考虑到欧几里得空间是无孤立点的，在对物理空间建模时，这种选择是合理的。然而，研究所有空间上的动态拓扑逻辑时出现的一些技术问题，在将注意范围限制于散布空间后便不复存在；与无孤立点空间相反，散布空间含有许多孤立点。此外，我们还考虑 f 为同胚的 DTS，也就是说， f^{-1} 也是连续函数。这样的 DTS 称为可逆 DTS。

我们所考虑的基本动态 d逻辑是 wK4C，它由 wK4 和针对连续函数 f 的时态公理组成。此外，我们还研究 wK4C 的两种扩展：K4C 和 GLC。正如我们将看到的，K4C 是基于 T_D 空间的所有 DTS 的 d逻辑，而 GLC 是基于

散布空间的所有 DTS 的 [3]逻辑。近年来，散布空间在计算逻辑领域受到广泛关注，因为它们可用于对形式理论中的可证明性建模 [1], ，进而应用于刻画这些理论的可证明全定义可计算函数 [4]。散布空间上的模态逻辑具有可定义不动点 [19], ，这使其与拓扑 μ演算 [3]相关。后者与我们尤为相关，因为在这种情形下，拓扑不动点（包括 DTL* 的纠缠算子）所带来的表达能力并不存在。由于散布空间的逻辑是 G¨odel-L¨ob 模态逻辑 GL，我们将散布空间上的动态拓扑逻辑称为动态 G ¨odel-L ¨ob 逻辑（DGL）。

我们的目标是证明 DGL 的标准有限公理化是可靠且完备的，从而得到首个完备的三模态动态拓扑逻辑，也是首个将康托尔导数与 LTL 的无穷时态算子“从此以后”相结合的此类逻辑。我们所说的“标准公理”，是指将众所周知的 GL 公理化与用于时态算子的 LTL 公理，以及 ($p \wedge \bullet\Box p$) $\rightarrow \Box\bullet p$ – 相结合；后者是 Artemov 等人提出的连续性公理的一种变体，经过调整以适用于康托尔导数。完备性证明采用了模态逻辑中的多种高级技巧，其中包括以 Gabelaia 等人的研究思路应用克鲁斯卡尔定理[13]。

本文概述了 Yo`av Montacute 的硕士论文 [17]的研究成果，以及由此取得的后续成果 [10,12]。

2 带有康托尔导数的动态拓扑逻辑

给定一个非空命题变量集 PV，语言 $\mathcal{L}^{\bullet}_{\Box}$ 按如下方式递归定义：

$$\varphi ::= p \mid \varphi \wedge \varphi \mid \neg\varphi \mid \Box\varphi \mid \bullet\varphi \mid \blacksquare\varphi,$$

其中 $p \in$PV。它由布尔联结词 $\wedge$ 和 $\neg$、时态模态“下一步”和“始终” $\blacksquare$ 及其对偶“最终” $\blacklozenge := \neg\blacksquare\neg$，以及表示余导数的空间模态 $\Box$ 及其对偶康托尔导数$\Diamond := \neg\Box\neg$组成。我们按通常方式定义其他联结词（例如 $\vee$、 $\rightarrow$）。

定义 2.1 动态拓扑模型是一个元组 $\mathfrak{M} = \langle X, \tau, f, \nu\rangle$，其中 $\langle X, \tau, f\rangle$ 是一个 DTS，且 ν: PV $\rightarrow \wp(X)$ 是一个赋值函数。给定 $\varphi \in \mathcal{L}^{\bullet\blacksquare}_{\Box}$，我们按如下方式定义公式 φ 的真值集 $[\![\varphi]\!] \subseteq X$：

- $[\![p]\!] = \nu(p)$;
- $[\![\neg\varphi]\!] = X \setminus [\![\varphi]\!]$;
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$;
- $[\![\Box\varphi]\!] = d([\![\neg\varphi]\!])^{\complement}$;
- $[\![\bullet\varphi]\!] = f^{-1}([\![\varphi]\!])$;
- $[\![\blacksquare\varphi]\!] = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}([\![\varphi]\!])$.

下面列出本文将讨论的公理模式和推理规则：

$\mathrm{Taut} := \text{All propositional tautologies}$
$\mathrm{K} := \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
$\mathrm{T} := \Box\varphi \to \varphi$
$\mathrm{w4} := \varphi \wedge \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
$\mathrm{L} := \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$
$4 := \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
$\mathrm{Next}_\neg := \neg\bullet\varphi \leftrightarrow \bullet\neg\varphi$
$\mathrm{Next}_\wedge := \bullet(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \bullet\varphi \wedge \bullet\psi$
$\mathrm{C} := \bullet\varphi \wedge \bullet\Box\varphi \to \Box\bullet\varphi$
$\mathrm{H} := \Box\bullet\varphi \leftrightarrow \bullet\Box\varphi$
$\mathrm{MP} := \dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$
$\mathrm{Nec}_\Box := \dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$
$\mathrm{Nec}_\bullet := \dfrac{\varphi}{\bullet\varphi}$
$\mathrm{K}_\blacksquare := \blacksquare(\varphi \to \psi) \to (\blacksquare\varphi \to \blacksquare\psi)$
$\mathrm{Fix}_\blacksquare := \blacksquare\varphi \to (\varphi \wedge \bullet\blacksquare\varphi)$
$\mathrm{Ind}_\blacksquare := \blacksquare(\varphi \to \bullet\varphi) \to (\varphi \to \blacksquare\varphi)$

我们定义 wK4 := K+w4、K4 := K+4、S4 := K4+T 和 GL := K4+L。这些都是关于 $\mathcal{L}_\Box$ 的知名逻辑，用于刻画不同类别的拓扑空间。此外，对于关于 $\mathcal{L}_\Box$ 的逻辑 Λ，ΛF 是由 $\Lambda\mathrm{F} := \Lambda + \mathrm{Next}_\neg + \mathrm{Next}_\wedge + \mathrm{Nec}_\bullet$ 定义的、关于 $\mathcal{L}_\Box^\bullet$ 的逻辑。这只是将线性时序逻辑中的公理添加到 Λ 中；当借助函数进行解释时，这些公理成立。我们定义 $\Lambda\mathrm{C} := \Lambda\mathrm{F} + \mathrm{C}$ 和 $\Lambda\mathrm{H} := \Lambda\mathrm{F} + \mathrm{H}$；正如我们将看到的，它们分别对应于具有连续函数或同胚的拓扑空间。最后，令 $\mathrm{DGL} := \mathrm{GLC} + \mathrm{K}_\blacksquare + \mathrm{Fix}_\blacksquare + \mathrm{Ind}_\blacksquare$。

逻辑 K4 包含公理 $\Box p \to \Box\Box p$，而该公理在所有拓扑空间构成的类上并非有效。满足此公理的空间类记作 T_D，定义为每个单点集都是某个开集与某个闭集的交集的空间类。此外，Esakia 证明了这是传递 Kripke 框架 [8] 的 d 逻辑。

许多熟悉的拓扑空间，包括欧几里得空间，都满足T_D 性质，因此 K4 在拓扑模态逻辑研究中占据核心地位。还有一类不那么常见、但对我们尤其重要的空间，即散乱空间。

定义 2.2 若拓扑空间 $\langle X, \tau\rangle$ 对每个 $S \subseteq X$,$S \subseteq d(S)$ 都有 $S = \varnothing$.，则称其为散乱空间。

这等价于散乱空间更常见的定义：若拓扑空间的每个非空子集都含有一个孤立点，则称其为散乱空间。散乱空间与逆良基关系密切相关。

引理 2.3 若 $\langle W, \sqsubset\rangle$ 是一个反自反 Kripke 框架，则 $\langle W, \tau_\sqsubset\rangle$ 是散布的，当且仅当 $\sqsubset$ 是逆良基的。

定理 2.4（Simmons [**20**] 和 Esakia [**6**]）GL 是所有散布拓扑空间的 d-逻辑，也是所有逆良基 Kripke 框架的 d-逻辑，以及所有有限传递反自反 Kripke 框架的 d-逻辑。

除了拓扑解释之外，GL 逻辑尤其引人关注，因为它也是 Peano 算术的可证明性逻辑，正如 Solovay 所证明的那样 [21]（另见 [5]）。与此同时，带有 C 和 H 公理的逻辑对应于若干类 DTS。

定理 2.5（[17,10]）

(i) wK4C 对以下类别是可靠且完备的：(a) 有限动态 wK4 框架；(b) 相对于 d-语义的有限 DTS 类。(ii) K4C 对以下类别是可靠且完备的：(a) 有限动态 K4 框架；(b) 基于 T_D 空间的 DTS 类，相对于 d-语义。(iii) GLC 对以下类别是可靠且完备的：(a) 有限动态 GL 框架；(b) 基于散乱空间的有限 DTS 类，相对于d-语义。

此外，将逻辑替换为 wK4H、K4H 和 GLH，并将 Kripke 框架和拓扑空间替换为相应的可逆形式后，同样的结果也类似地成立。

Kremer 和 Mints [15] 建议加入 Pnueli 的线性时序逻辑（LTL） [18], 中的“从此以后”算子 ■，从而得到三模态系统 DTL。他们为 DTL 提出了公理化，但 Fern´andez-Duque 证明其并不完备；事实上，DTL 无法有限公理化 [9]。Fern´andez-Duque 还表明，扩展加入纠缠闭包 [11]后，DTL 可以自然公理化。

定义 2.6 设 $\langle X,\tau\rangle$ 是一个拓扑空间，并设 $\mathcal{S}\subseteq\wp(X)$。给定$A\subseteq X$，若对于所有 $S\in\mathcal{S}$，$\mathcal{S}$ 在 A 中都是纠缠的，当且仅当 $A\subseteq d(A\cap S)$，则称 $\mathcal{S}$ 在 A 中是纠缠的。我们将 $\mathcal{S}$ 的纠缠导数定义为

$$\mathcal{S}^*:=\bigcup\{A\subseteq X:\mathcal{S}\text{ is tangled in }A\}.$$

Fern´andez-Duque 的公理化基于包含纠缠算子 $\Subset$的扩展语言。

定义 2.7 对于每个模型 $\mathfrak{M}$, $\|\Subset\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\|=\{\|\varphi_1\|,\dots,\|\varphi_n\|\}^*$.

与需要纠缠算子的 DTL 完备公理化不同，在 DGL 的情形下，我们可以避免使用它，而仅使用原有的空间算子。这是基于以下结果：

定理 2.8 设 $\mathfrak{X}=\langle X,\tau\rangle$ 是一个散乱空间，且 $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ 是一组公式。那么

$$\Subset\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\equiv\bot.$$

结合这一结果与 GLC 的有限模型性质，我们可以采用 Kremer 和 Mints 公理系统的一个改编版本 [15] ，为 DGL 提供有限公理化。

定理 2.9 ([12]) 公式 $\varphi\in\mathcal{L}_{\Box}^{\bullet\blacksquare}$ 在基于散乱空间的 DTS 类上有效，当且仅当它可在 DGL 中推导。

参考文献

[1] Abashidze, M., *Ordinal completeness of the Gödel-Löb modal system*,《内涵逻辑与理论的逻辑结构》(1985)，第 49–73 页，俄文。[2] Artemov, S., J. Davoren and A. Nerode, *Modal logics and topological semantics for hybrid systems* 97 05 1997 ，技术报告 MSI - ( )。[3] Baltag, A., N. Bezhanishvili and D. Fern´andez-Duque, *The topological mu-calculus: completeness and decidability* *36th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS 2021 Rome Italy June 29 - July 2 2021* 2021 1 13 ，载于：，，，，，( )，第 – 页。[4] Beklemishev, L. D., *Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I*,《纯粹与应用逻辑年刊》128 (2004)，第 103–123 页。[5] Boolos, G., *The logic of provability*,《美国数学月刊》91 (1984)，第 470–480 页。URL https://doi.org/10.1080/00029890.1984.11971467 [6] Esakia, L., , *Diagonal constructions* *Löb's formula and Cantor's scattered spaces*,《逻辑与语义研究》132 (1981)，第 128–143 页。[7] Esakia, L., *Weak transitivity–restitution*, 载于：Nauka，编者， *Study in Logic*，2001 年，第 244–254 页，俄文。[8] Esakia, L., *Intuitionistic logic and modality via topology*,《纯粹与应用逻辑年刊》127 (2004)，第 155–170 页。[9] Fern´andez-Duque, D., *Non-finite axiomatizability of dynamic topological logic*,《ACM计算逻辑汇刊》15 (2014)，第 4:1–4:18 页。[10] Fern´andez-Duque, D. and Y. Montacute, *Dynamic Cantor Derivative Logic*, 载于：F. Manea and A. Simpson，编者，*30th EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2022)* **216** 2022 ，《莱布尼茨国际信息学会议录》(LIPIcs) ( )，第 19:1–19:17 页。URL https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2022/15739 [11] Fernandez-Duque, D., *A sound and complete axiomatization for dynamic topological logic* **77** 2012 947 969 ，《符号逻辑杂志》( )，第 – 页。[12] Fern´andez-Duque, D. and Y. Montacute, ( )。URL https://arxiv.org/abs/2204.08374 [13] *Untangled: A complete dynamic topological logic* 2022

Gabelaia, D., A. Kurucz, F. Wolter and M. Zakharyaschev, *Non-primitive recursive decidability of products of modal logics with expanding domains*,《纯粹与应用逻辑年刊》142 (2006)，第 245–268 页。[14] Konev, B., R. Kontchakov, F. Wolter and M. Zakharyaschev, *Dynamic topological logics over spaces with continuous functions* ，载于：G. Governatori, I. Hodkinson and Y. Venema，编者， *Advances in Modal Logic* (2006)，第 299–318 页。[15] Kremer, P. and G. Mints, *Dynamic topological logic*,《纯粹与应用逻辑年刊》131 (2005)，第 133–158 页。[16] McKinsey, J. and A. Tarski, *The algebra of topology*,《数学年刊》2 (1944)，第 141–191 页。[17] Montacute, Y., "拓扑动力学中的混沌与康托尔导数逻辑"，硕士论文。[18] Pnueli, A., *The temporal logic of programs* *Proceedings 18th IEEE Symposium on the Foundations of CS* 1977 46 57 ，载于：，，第 – 页。[19] Sambin, G. and S. Valentini, *The modal logic of provability. the sequential approach*,《哲学逻辑杂志》11 (1982)，第 311–342 页。[20] Simmons, H., *Topological aspects of suitable theories*,《爱丁堡数学学会会刊》19 (1975)，第 383–391 页。[21] Solovay, R. M., *Provability interpretations of modal logic*,《以色列数学杂志》25 (1976)，第 287–304 页。